

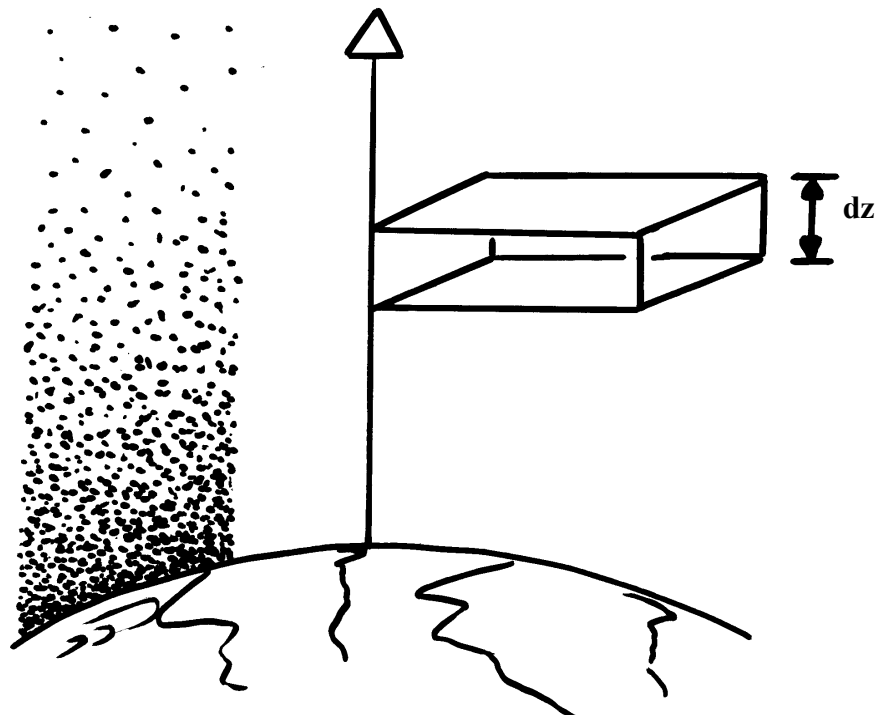
PHR 101

"Principes et outils pour l'analyse et la mesure"

Chapitre 2

Utilisation du logarithme et de l'exponentielle

Equation différentielle du premier ordre

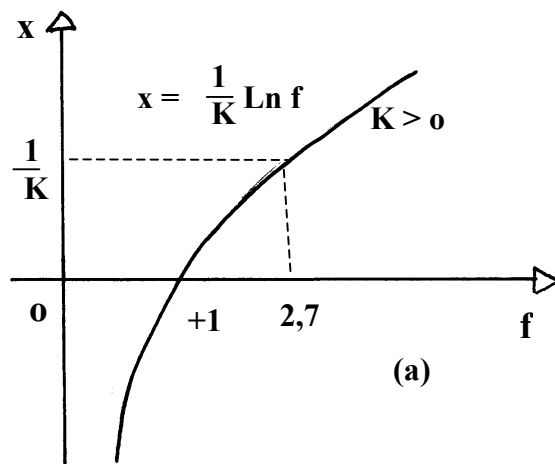


2. De l'utilité des fonctions logarithme et exponentielle –

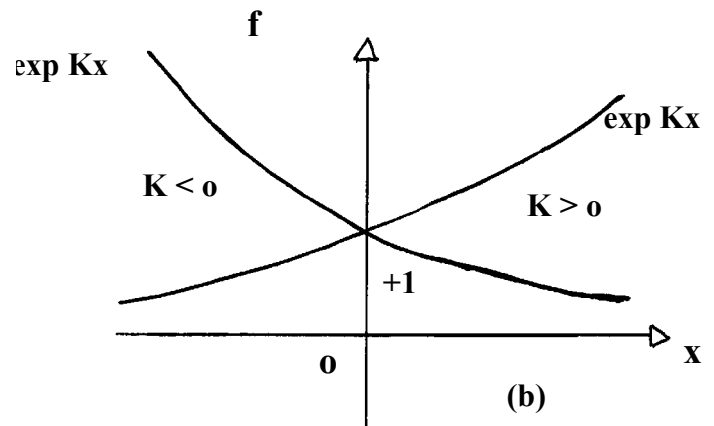
L'équation différentielle du premier ordre à coefficient constant

2.1. Rappel : l'allure de la fonction logarithme népérien ou logarithme à base $e = 2,718 \dots$ (notée Ln) et sa fonction inverse l'exponentiel (notée exp)

Les figures 14(a) et (b) ci-dessous indiquent l'allure de deux des fonction les plus importantes dans la description des phénomènes naturels.



(a)



(b)

Figure 14 (a) allure de $\text{Ln} f = Kx$

Figure 14 (b) allure de la fonction $f = \text{exp } Kx$

les fonctions logarithmes népérien et exponentielles sont des fonctions inverses

On montre d'autre part que le logarithme à base dix est défini par :

$$\log_{10} f = Kx \quad \Longleftrightarrow \quad f = 10^{Kx} \quad (23)$$

Il est important de rappeler :

$$\log_{10} (2f) = \log_{10} 2 + \log_{10} f \cong \log_{10} f + 0,3 \quad (24)$$

2.2. Quand la variation d'une grandeur est proportionnelle à la grandeur elle-même. Aspect mathématique.

L'étude qui suit concerne une situation fréquente et importante en sciences humaines, en physique, en chimie, en biologique, etc... elle sera suivie d'exemples illustratifs.

Il est en effet fréquent que la variation d'une grandeur qui évolue dans le temps soit proportionnelle à la valeur de cette grandeur à un instant donnée et à la variation de temps pendant laquelle on l'observe.

Avant d'étudier des exemples, essayons de formaliser mathématiquement cette situation.

On appelle $y(x)$ la grandeur qui dépend de la variable x .

On désigne par Δy la variation de cette grandeur qui correspond à une évolution Δx de sa variable. L'hypothèse de proportionnalité entre Δy d'une part et $y(x)$ et Δx d'autre part se traduit par la relation :

$$\Delta y = C \cdot y \cdot \Delta t \quad (25)$$

C étant une constante de proportionnalité, liée au phénomène étudié et qui, pourra être positive ou négative suivant qu'il s'agit d'un phénomène croissant dans le temps (évolution de la population du globe, par exemple) ou décroissant (désintégration radioactive, par exemple).

Le but maintenant est de trouver la fonction $y(t)$ qui est solution de la relation (25). Pour cela examinons plus précisément la relation entre Δy variation de la fonction et Δx variation correspondante de sa variable.

L'évolution Δy peut s'écrire plus précisément sous la forme :

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \quad (26)$$

de même pour Δx on peut écrire :

$$\Delta x = x + \Delta x - x \quad (27)$$

Finalement, la relation (25) devient en tenant compte de (26) et (27)

$$y(x + \Delta x) - y(x) = C \cdot y(x) \cdot [x + \Delta x - x] \quad (28)$$

ce que l'on peut encore écrire sous la forme d'un rapport de deux accroissements :

$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{x + \Delta x - x} = C \cdot y(x) \quad (29)$$

si on utilise maintenant la notion de limite d'une variable « tendant » vers zéro sans jamais atteindre ce nombre ... on a :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \right] = C \cdot y(x) \quad (30)$$

On voit apparaître dans le membre de gauche de l'égalité la formule mathématique dite des « accroissements finis » qui n'est autre que la **définition de la dérivée** de la fonction $y(x)$ par rapport à sa variable x et après passage à la limite on obtient l'**équation différentielle du premier ordre** à coefficient constant suivante :

$$\frac{dy}{dx} = C \cdot y \quad (31)$$

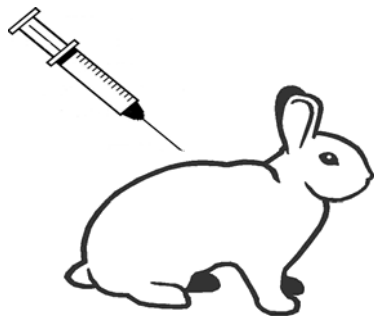
Vous devez apprendre à reconnaître cette relation du premier coup d'oeil car son importance en science et technique est considérable. Vous devez immédiatement penser que la solution mathématique d'une telle relation est :

$$y = A \exp (Cx) \quad (32)$$

A est une constante qui dépend des conditions aux limites ($x = 0$ par exemple).

Après avoir vérifié que la relation (32) est bien solution de (31) nous conseillons fortement d'étudier la justification du passage de (31) à (32) telle qu'elle apparaît dans l'annexe 1.

2.3. Premier exemple emprunté à la biologie : L'élimination d'un médicament.



On injecte à un lapin, par voie intramusculaire, une certaine substance qui n'est pas présente ordinairement dans l'organisme. Cette substance passe du muscle dans le sang, elle est ensuite éliminée au niveau des reins. On se propose d'étudier l'évolution de la quantité de substance en fonction du temps.

On note Q_0 la quantité de substance injectée à l'instant $t = 0$ et $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t .

On désigne par $\Delta Q(t)$ la diminution de la quantité de substance pendant un laps de temps Δt après l'injection. On montre que cette diminution est proportionnelle à $Q(t)$ et à la quantité de substance présente à l'instant t ce qui se traduit par la relation :

$$\Delta Q(t) = K Q(t) \Delta t \quad (33)$$

la constante de proportionnalité K est ici négative car il s'agit d'une diminution de quantité de substance avec le temps, on écrira donc :

$$\Delta Q(t) = - |K| Q(t) \Delta t \quad (34)$$

en passant au cas limite où $\Delta t \rightarrow 0$ on aura l'équation différentielle

$$d Q(t) = - |K| Q(t) dt \quad (35)$$

que l'on peut écrire

$$\frac{d Q(t)}{dt} = - |K| Q(t) \quad (36)$$

et qui, admet comme solution

$$Q(t) = Q_0 \exp (-|K|t) \quad (37)$$

On peut écrire ceci sous la forme

$$Q(t) = Q_0 \exp \left(- \frac{t}{\tau} \right) \quad (38)$$

On fait apparaître le temps τ au bout duquel la quantité de substance injectée aura diminuée de $Q_0/e = Q_0/2,718$.

En conclusion, l'élimination d'un médicament se fait suivant une loi exponentiellement décroissante en fonction du temps.

2.4. Deuxième exemple de variation exponentielle d'un phénomène en fonction de l'espace : l'absorption de la lumière par un matériau homogène. (Loi de Beer et Lambert).

On considère un faisceau lumineux monochromatique parfaitement collimaté et d'intensité I_0 arrivant perpendiculairement sur la surface d'un matériau homogène d'épaisseur ℓ .

On désigne par $I(x)$ l'intensité du faisceau à la cote x à l'intérieur du matériau (figure 15).

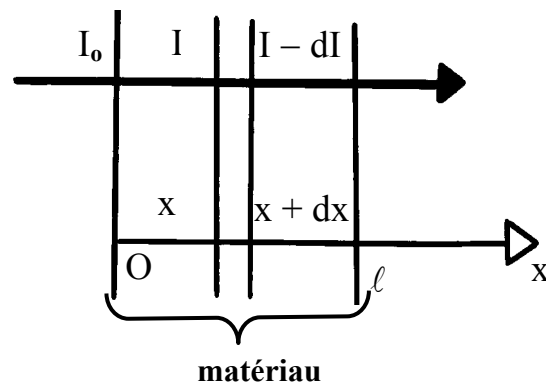


Figure 15
Variation de l'intensité du rayonnement
lors de la traversée du matériau

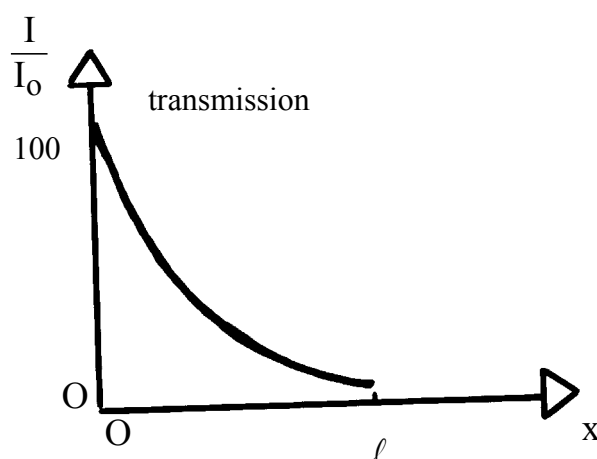


Figure 16
Variation de l'intensité relative (I/I_0 en pour cent) d'un
rayonnement en fonction de l'épaisseur x de
matériau traversé

Au XVIIIe siècle, Lambert a montré que :

$$\frac{d I(x)}{dx} = - |K| I(x) \quad (39)$$

avec K coefficient d'absorption en m^{-1}

L'intégration de cette relation donne :

$$[\text{Ln } I(x)]_{I_0}^{I(x)} = - |K| [x]_0^\ell \quad (40)$$

$$\text{Ln } \frac{I(x)}{I_0} = - [K] \ell \quad (41)$$

$$I = I_0 \exp (-|K| \ell) \quad (42)$$

Beer en 1850 a généralisé cette relation au cas d'une solution faiblement concentrée d'un composé dissous dans un milieu transparent.

2.5. Troisième exemple (proposé sous forme d'exercice)

Décharge d'un condensateur dans une résistance.

La figure 16 ci-dessous représente un condensateur de capacité C qui est d'abord chargé sous une différence de potentiel E quand l'interrupteur est en position 1.

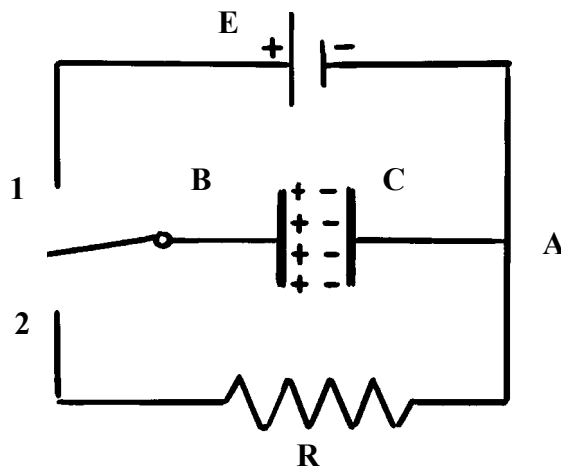


Figure 16

*Circuit permettant de charger le condensateur C (interrupteur en 1)
puis de le décharger dans la résistance R (interrupteur en 2)*

On désignera par Q_0 la charge initiale de ce condensateur. A l'instant $t = 0$ s on fait passer l'interrupteur à la position 2 et le condensateur voit sa charge $q(t)$ évoluer en fonction du temps car un courant d'intensité $i(t)$ circule à travers la résistance R.

1°) Quelle est la relation entre $q(t)$, C et la valeur instantanée $V_A - V_B$ de la tension aux bornes de la capacité.

2°) Indiquer le sens du courant $i(t)$ et la relation entre $V_A - V_B$ aux bornes de la résistance R et $i(t)$?

3°) Quelle est la relation entre $i(t)$ et $q(t)$?

4°) A partir des relations trouvées précédemment, montrer que l'évolution de la charge $q(t)$ du condensateur est donnée par la résolution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficient constant que l'on résoudra.

Solution :

1°) Aux bornes du condensateur on a :

$$-q(t) = C (V_A - V_B) \quad (43)$$

le signe moins indique que la tension $V_A - V_B$ est négative (voir figure 16)

2°) Quand l'interrupteur est en position 2, le courant $i(t)$ issu du condensateur et qui circule dans la résistance va de l'armature chargée positivement du condensateur vers celle chargée négativement (sens inverse du mouvement des électrons) et la loi d'Ohm permet d'écrire :

$$V_A - V_B = - R i(t) \quad (44)$$

Le signe moins indiquant de nouveau que cette tension est négative.

3°) par définition, l'intensité $i(t)$ est liée à la charge par

$$i(t) = - \frac{d q(t)}{dt} \quad (45)$$

le signe moins indique que la charge décroît en fonction du temps.

4°) Finalement, on a :

$$-q(t) = C [- R i(t)] = + C R \frac{dq}{dt} \quad (46)$$

d'où l'équation différentielle du premier ordre à coefficient constant

$$\frac{dq}{q} = \left(- \frac{1}{RC} \right) dt \quad (47)$$

d'où la solution

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (48)$$

où RC est la constante de temps du circuit RC c'est-à-dire le temps au bout duquel la charge du condensateur a diminuée de $e = 2,718$.

2.6. quatrième exemple (sous forme d'exercice) : évolution de l'atmosphère terrestre avec l'altitude

On considère que l'atmosphère terrestre est isotherme et que les molécules obéissent au modèle des gaz parfaits. On suppose en fait que les molécules sont toutes identiques ce qui revient à remplacer les molécules réelles par un seul type de particules, fictif, de masse convenable m . On désigne par $n(z)$ le nombre de particules par unité de volume à l'altitude z (n_0 est le nombre de particules par mètre cube au niveau du sol). On désignera par $p(z)$ la pression à l'altitude z .

On considère un volume d'épaisseur dz limité par deux surfaces $S = 1 \text{ m}^2$ l'une à l'altitude z l'autre à l'altitude $z + dz$ (figure 19)..

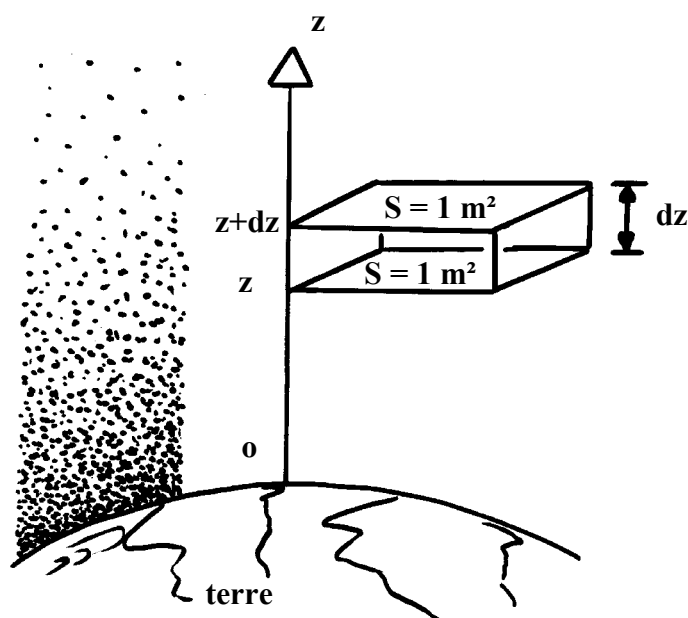


Figure 19

*Les altitudes z sont repérées par rapport à l'axe verticale oz .
On considère deux surfaces $S = 1 \text{ m}^2$ placés à l'altitude z et $z + dz$*

1°) Ecrire que la différence de pression entre l'altitude z et l'altitude $z + dz$ est due au poids des particules contenues dans ce volume infiniment petit. On désigne par g l'accélération de la pesanteur à l'altitude z .

2°) On désigne par T la température absolue des particules à l'altitude z et V_M leur volume molaire. Ecrire la relation des gaz parfaits pour une mole de ces particules à l'altitude z . On désignera par R la constante des gaz parfaits.

3°) On désigne par N le nombre d'Avogadro. Quelle est la relation entre le volume molaire $V_M(z)$ des particules et leur nombre $n(z)$ par unité de volume ?

4°) A partir des résultats précédemment trouver la relation entre la variation relative de densité particulaire $\frac{dn}{n}$ et la variation d'altitude dz pour une température T donnée. On

désignera $K = \frac{R}{N}$ (constante de Boltzmann).

Intégrer cette relation pour trouvez la répartition de particules de Boltzmann dans ce cas particulier. Tracer l'allure de la variation de $n(z)$ dans le cas de deux températures avec $T_2 > T_1$.

Solution :

1°) La variation de pression qui diminue avec l'altitude sera donnée par :

$$p(z) - p(z + dz) = - mg n(z) dz$$

ou encore

$$\frac{dp}{dz} = - mg n(z) \quad (46)$$

2°) La relation des gaz parfaits pour une mole de particule à l'altitude z est

$$p(z) V_M = R T \quad (47)$$

3°) Le volume molaire $V_M(z)$ en m^3 correspond au volume occupé par N particules (nombre d'Avogadro $N \approx 6,6 \cdot 10^{23}$) donc le volume occupé par une particule sera $V_M(z)/N$ et le nombre de particules par unité de volume $n(z)$ sera

$$n(z) = \frac{N}{V_M(z)} \quad (48)$$

4°) La relation des gaz parfaits et le résultat du 3°) permet d'éliminer le volume molaire $V_M(z)$ et on obtient une relation entre $p(z)$ et $n(z)$

$$\frac{p(z)}{n(z)} = \frac{R}{N} T = K T \quad (49)$$

en différentiant cette relation (la température T étant une constante), on obtient

$$dp(z) = K T d n(z) \quad (50)$$

d'où en utilisant le résultat du 1°) on obtient l'équation différentielle reliant la densité de particules n et l'altitude z .

$$\frac{dn(z)}{n(z)} = - \frac{m g}{K T} dz \quad (51)$$

et en intégrant

$$n(z) = n_0 \exp \left(- \frac{m g z}{K T} \right) \quad (52)$$

c'est la répartition de Boltzmann, l'allure de l'évolution de $n(z)$ avec l'altitude est représentée sur la figure 20 pour deux températures T_1 et T_2 avec $T_2 > T_1$.

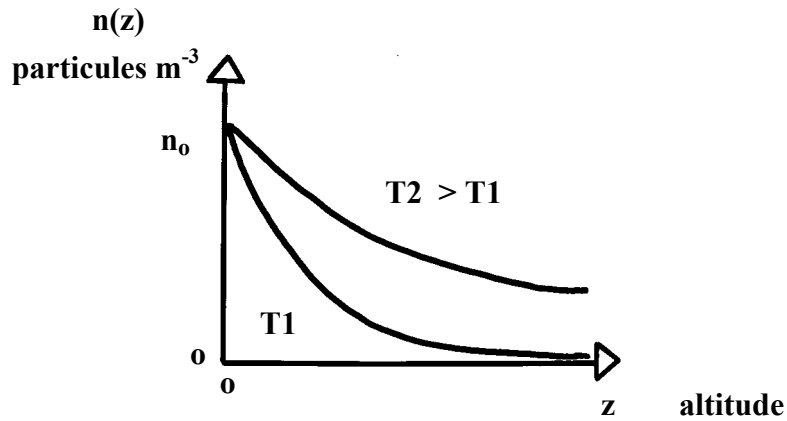


Figure 20
Evolution du nombre de particules par unité de volume
dans l'atmosphère terrestre en fonction de l'altitude

Il est important que remarquer que mgz représente l'énergie potentielle de gravitation $W(z)$ d'une particule et que l'on peut avoir l'évolution de la densité de ces particules $n(z)$ en fonction de cette énergie potentielle de gravitation $W(z)$.

ANNEXE 1

Comment trouve-t-on la solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = C y \quad (53)$$

On écrit cette relation sous la forme

$$\frac{dy}{y} = C dx \quad (54)$$

On intègre les deux membres de cette égalité

$$\int \frac{dy}{y} = \int C dx \quad (55)$$

Ce qui donne

$$\ln y = Cx + \text{constante} \quad (56)$$

Or c'est la fonction $y(x)$ qui nous intéresse et non pas $\ln y$ d'où en se rappelant que la fonction inverse du logarithme népérien est la fonction exponentielle, on a finalement

$$y = \exp(Cx + \text{constante}) \quad (57)$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme

$$y = [\exp(\text{constante})] [\exp Cx] \quad (58)$$

$$y = A \exp Cx$$