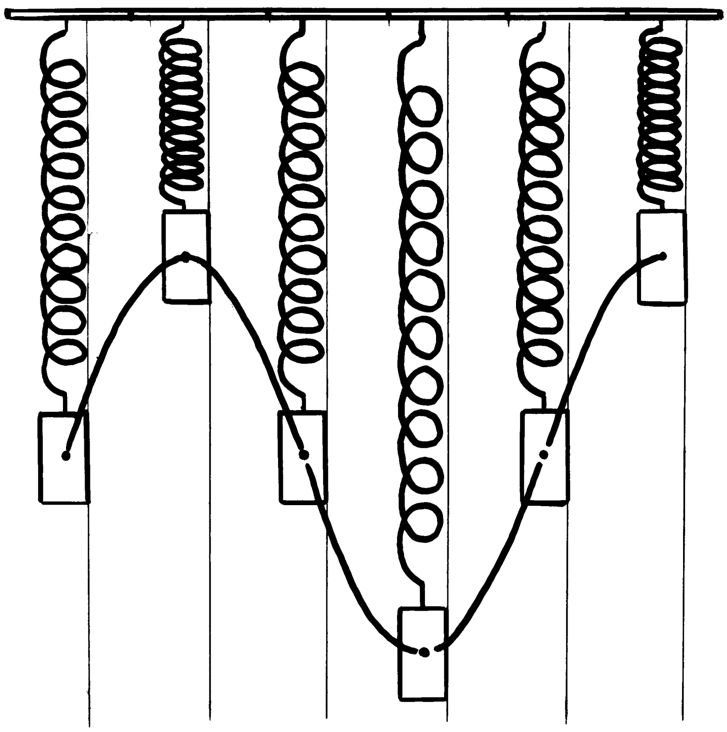
Conservatoire National des Arts et Métiers
Service de Physique dans ses rapports avec l'industrie

PHR 101

"Principes et outils pour l'analyse et la mesure"

Chapitre 3

Du Vecteur à l'oscillateur



J.J. Bonnet

Version du 5/10/06

3. Du vecteur à l'oscillateur

3.1. Rappel : Le vecteur

Le **vecteur** (figure 21) est un ensemble de deux points A et B de l'espace tel que l'un correspond à l'origine et l'autre à l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (les mathématiciens disent qu'il s'agit d'un "bi-point orienté")

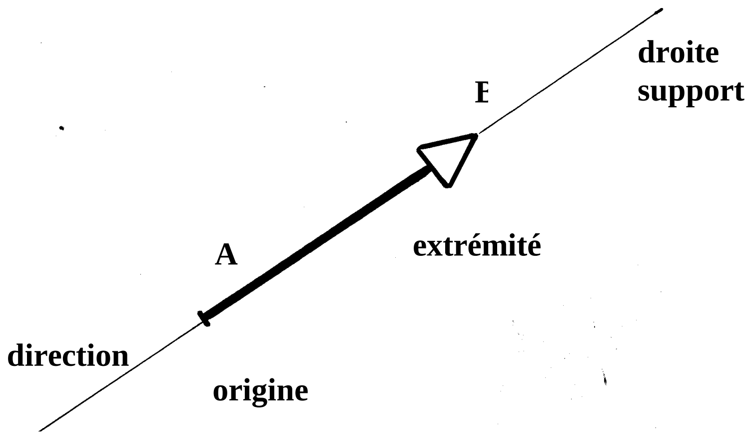


Figure 21
La notion de vecteur appartient au "monde mathématique" de la géométrie.
Un vecteur a une origine, une extrémité et un module

Le **vecteur** est défini quand on connaît

- sa **direction** : c'est la droite qui le porte
- son **sens** : quel est le point d'origine et quelle est l'extrémité (désignée par une flèche)
- son **module** (sa longueur)

Pour travailler sur les vecteurs, il faut les projeter sur les trois axes d'un **référentiel** qui sera cartésien, cylindrique ou sphérique suivant la symétrie du problème à étudier.

3.2. Rappel : Le produit scalaire de deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ quelconque de l'espace (figure 22)

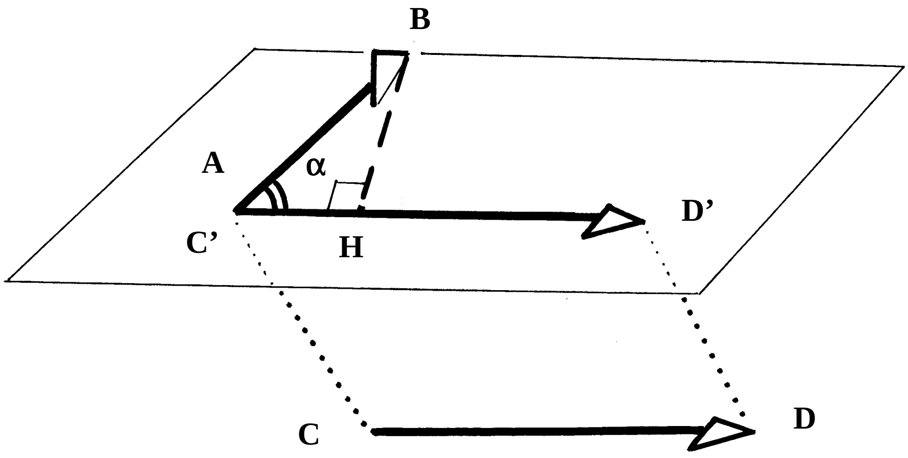


Figure 22

A partir de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ *dans l'espace, on fait coïncider l'origine des deux vecteurs en prenant, par exemple, le vecteur* $\overrightarrow{C'D'}$ *"équipollent " à* $\overrightarrow{CD}$ *c'est-à-dire qui aura même direction, même sens et même module que* $\overrightarrow{CD}$ *mais dont l'origine coïncidera avec le point A. Ensuite, on travaille uniquement dans le plan défini par les deux vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'}$

Aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ le **produit scalaire** $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD}$ fait correspondre un scalaire (c'est-à-dire un nombre réel) W tel que

$$W = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} \qquad (59)$$

avec

$$W = \|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{CD}\| \cos \alpha \qquad (60)$$

α est l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ (figure22)

En fait, en général, les deux vecteurs n'ont pas même origine. On fait coïncider l'origine des deux vecteurs en utilisant la notion mathématique de "vecteur équipollent" c'est-à-dire que à partir de l'origine d'un des deux vecteurs intervenant dans le produit scalaire, on trace le vecteur ayant même direction, sens et module que l'autre vecteur et à partir de là, on travaille dans le plan défini par les deux vecteurs ayant même origine. Sur la figure 22, on travaille donc dans le plan défini par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'}$. Dans ce plan on désigne par α l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'}$, on appelle H la projection du point B (extrémité de $\overrightarrow{AB}$) sur $\overrightarrow{C'D'}$**.**

Il est donc plus judicieux d'écrire :

$$W = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{C'D'}\right\| \cos\alpha \qquad (61)$$

Cette dernière relation revient à dire que le **produit scalaire** est égal au produit de la **norme d'un des vecteurs** $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ par exemple, par la **projection algébrique C'H** de l'autre sur $\overrightarrow{C'D'}$ (équipollent à $\overrightarrow{CD}$, figure 22) ce que l'on peut écrire

$$W = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \bullet C'H \qquad (62)$$

On examinera avec profit les cas particuliers où les deux **vecteurs sont orthogonaux** ou **colinéaires.**

La notion de **produit scalaire** de deux vecteurs est fondamentale pour comprendre :

- le **travail d'une force** au cours d'un déplacement
- l'**énergie potentielle** électrique, de gravitation ou d'un ressort

3.3. Rappel : Produit vectoriel de deux vecteurs

Aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ quelconque dans l'espace on va "bâtir" une relation mathématique qui va faire correspondre un troisième vecteur. Avec le produit vectoriel, on reste donc dans le "monde" de la géométrie. On va voir également que le produit vectoriel est, par définition, à "**trois dimensions"**.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ayant la même origine.

On définit le vecteur $\overrightarrow{AF}$ produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ et on note

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \qquad (63)$$

tel que

$\overrightarrow{AF}$ est **orthogonal au plan défini par les deux vecteurs 3 et $\overrightarrow{AD}$**

Le sens de $\overrightarrow{AF}$ est tels que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF}$ pris dans cet ordre forment un trièdre direct. On peut utiliser la règle des trois doigts de la main droite (figure 23)

$\overrightarrow{AB}$ suivant le pouce

$\overrightarrow{AD}$ suivant l'index

$\overrightarrow{AF}$ suivant le majeur

Il existe d'autre règles pratiques (bonhomme d'Ampère, tire bouchon, vis, etc.)

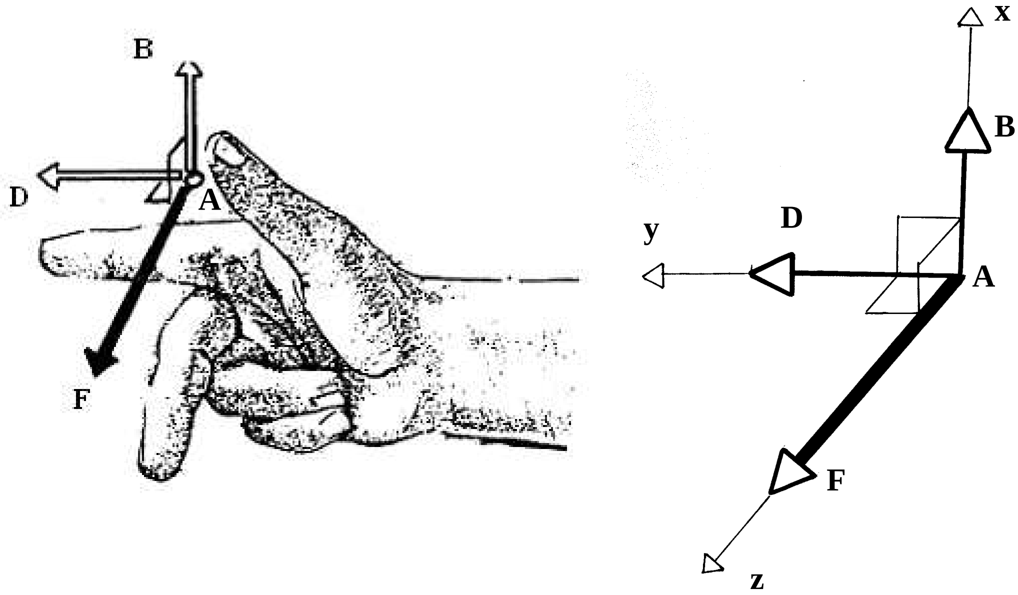


Figure 23

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF}$ *forment un trièdre direct.*
Pour les placer on peut utiliser la règle de la main droite c'est-à-dire que le pouce est placé suivant $\overrightarrow{AB}$, *l'index suivant* $\overrightarrow{AD}$ et *le majeur indique le vecteur* $\overrightarrow{AF}$ *qui est le résultat du produit vectoriel* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$

La notion de **produit vectoriel** de deux vecteurs est fondamental pour comprendre :

- les systèmes en **rotation** où le produit vectoriel apparaît dans la définition des moments de force par rapport à un point, vitesse angulaire de rotation, moment cinétique, théorème du moment cinétique, etc...
- l'expression du **champ d'induction magnétique** créé par des courants (loi de Biot et Savart) et les forces magnétiques qui s'exercent sur des charges en mouvement ou des courants placés dans un champ d'induction magnétique (force de Laplace).

3.4. Rappel de Mécanique. Lois générales

La mécanique est la science de l'équilibre (statique) et du mouvement (dynamique). Elle étudie les forces motrices, les lois de l'équilibre et du mouvement, ainsi que la théorie de l'action des machines ; historiquement, la mécanique est une science intimement liée aux activités pratiques manuelles de l'homme : la construction et l'emploi de mécanismes ou d'appareils techniques de diverses sortes permettent une exploitation plus complète des forces naturelles et des forces humaines.
Cinématique, statique, dynamique, font partie de la mécanique. La statique est un cas particulier de la dynamique.

3.4.1. Force

La notion de force nous est suggérée par nos interactions, nos contacts, avec notre environnement.

Nous savons, plus ou moins confusément, distinguer entre deux types de forces déjà considérées et unifiées par Newton :

- **actions de contact** exercées par un ensemble matériel solide (déformable ou rigide) ou fluide (liquide ou gaz) sur un autre ensemble matériel qui est en contact avec lui ;

- **actions à distance**, magnétiques par exemple (attraction d'une barre de fer par un aimant) gravitationnelles (action attractive de la Terre sur la Lune) etc…

Du point de vue physique, il n'existe aucune différence essentielle entre ces deux types de force.

Chaque **force** F a une certaine **intensité** (ou module), mais aussi une **direction** et un **sens** qui lui sont propres. Elle a donc un caractère vectoriel, comme la vitesse ou l'accélération. Quand une particule est soumise à deux forces simultanées $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, ces deux forces peuvent être remplacées par une force unique, la résultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

3.4.2. Les lois de Newton

Nous voulons maintenant savoir comment sont étroitement liées les deux notions de **force** et de **mouvement**.

Cette connaissance s'appuie tout particulièrement sur les travaux et le raisonnement logique de Galilée (1564-1642) et de Newton (1642-1727).

Axiomes ou Lois du mouvement – la mécanique classique repose sur un système de **trois lois fondamentales** formulées par I. Newton sur la base des connaissances expérimentales de son époque :

- Loi d'Inertie
- Loi du Mouvement
- Loi d'égalité action-réaction

Nous nous limiterons, pour l'essentiel, à l'énoncé des lois de Newton dans le cas d'une particule de masse m, mais il peut être étendu aux solides, liquides, etc…

3.4.3. Loi d'Inertie

Jusqu'au XVIème siècle, on considérait que si aucune force ne s'exerçait sur un objet mobile, cet objet ralentissait, puis s'arrêtait. Galilée affirma le premier que cette conception était erronée. Il est exact qu'un palet glissant sur une patinoire ralentit et finit par s'arrêter ; mais il est faux qu'aucune force n'agisse sur le palet. La surface de la glace exerce sur le palet une force de frottement qui le freine et l'oblige à s'arrêter.

La "première Loi de Newton", découverte par Galilée, dit que si un corps mobile n'est soumis à aucune force il continue éternellement à se déplacer dans la même direction et à la même vitesse. **C'est la Loi d'inertie**.

$\vec{F}$ (Résultante générale) = $\vec{o}$ entraîne $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{o}$ ou : $\vec{p} = \vec{p}_o$

C'est la relation de conservation de la quantité de mouvement.

Pour une particule de masse constante :

$\vec{p} = m\vec{v} = \vec{p}_o = m\vec{v}_o$ signifie $\vec{v} = \vec{v}_o$: l'accélération $\vec{a}$ est dont nulle et le mouvement est rectiligne uniforme.

Le cas du repos (statique) se présente simplement comme un cas particulier : mouvement à vitesse nulle.

3.4.4. Loi du mouvement. Quantité de Mouvement

Nous définissons la "quantité de mouvement" d'une particule de masse m et de vitesse $\vec{v}$ par le vecteur :

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{64}$$

La **quantité de mouvement**, comme la **vitesse** sont **toujours tangentes** à la trajectoire.

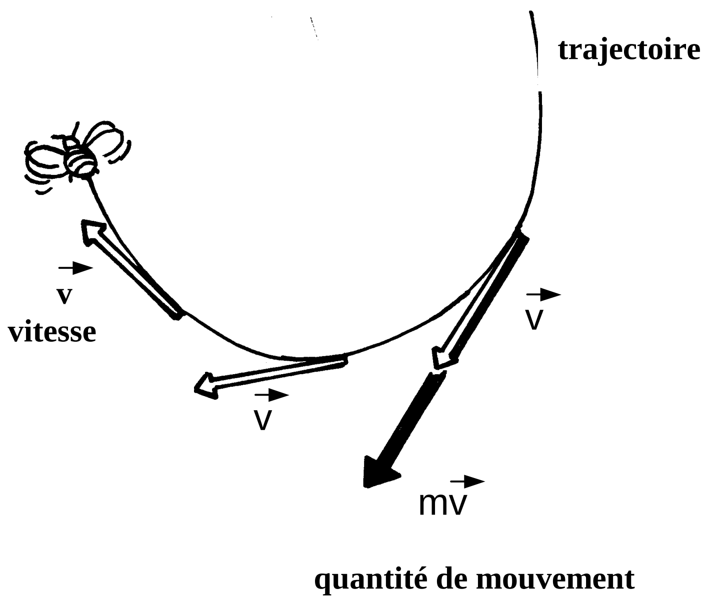


Figure 24
Le vecteur vitesse $\vec{v}$ du mobile comme le vecteur quantité de mouvement $m\vec{v}$ sont toujours tangents à la trajectoire du mobile

La seconde Loi de Newton appelée aussi **principe fondamental de la dynamique** peut s'énoncer comme suit :

La résultante $\vec{F}$ des forces appliquées à un mobile est égale à la dérivée par rapport au temps t de sa quantité de mouvement $\vec{p}$.

Ainsi la somme $\vec{F}$ des forces appliquées à votre voiture sera égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement $\frac{d\vec{p}}{dt}$

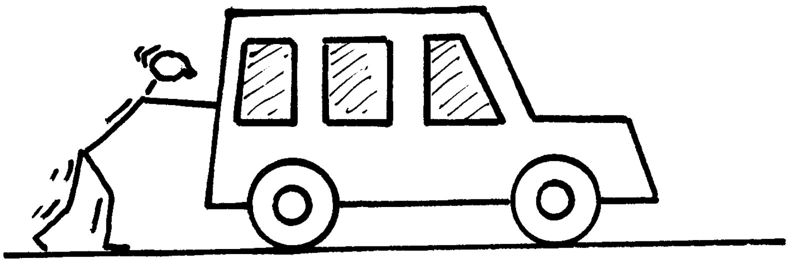


Figure 25
Si vous poussez votre voiture, la force appliquée à votre voiture est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement de votre voiture

On peut écrire cette loi sous la forme

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (65)$$

Si on suppose que **la masse m** de votre voiture est **constante**, la définition de la quantité de mouvement (**produit de la masse m par la vitesse $\vec{v}$ de la voiture**) et le fait que la masse ne varie pas en fonction du temps permet d'écrire :

$$\vec{F} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (66)$$

or $\frac{d\vec{v}}{dt}$ est **l'accélération** $\vec{a}$ de votre voiture d'où, dans le cas d'un véhicule de masse constante, la somme des forces appliquées est égale au produit de la masse m par l'accélération $\vec{a}$

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \qquad (67)$$

Comment utiliser cette loi dans la pratique ?

– première étape : faire le **bilan** des **forces appliquées** sur le mobile

– écrire la Loi de Newton sous forme vectorielle
  somme des forces appliquées = $\frac{d\vec{p}}{dt}$

– si la masse m du mobile est constante, on a
  somme des forces appliquées = $m\,\frac{d\vec{p}}{dt}$

– comme $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ avec 0 point fixe de référence et M position du mobile, cette relation vectorielle permet donc théoriquement de trouver la position du mobile en fonction du temps.

– la dernière étape consiste à choisir un référentiel (cartésien, sphérique ou cylindrique) bien adapté à la symétrie de votre mobile et à projeter l'égalité vectorielle.

Ainsi, on passe d'**une égalité vectorielle à trois égalités scalaires** dans le cas général. Si le **mouvement est plan on en aura deux et s'il est rectiligne une seule** … c'est d'ailleurs dans ce cas particulier que nous allons nous placer en étudiant une masse mise en oscillation par un ressort.

3.4.5. La loi d'égalité

Action et réaction

"Tout corps qui exerce une force sur un autre corps est soumis de la part de ce dernier à une force égale et de sens opposé.

$$\vec{F}_{A\ sur\ B} = -\vec{F}_{B\ sur\ A} \quad ; \quad \text{Notation : } \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Exemple : Propulsion des avions à réaction et des fusées. Le moteur d'un avion à réaction ou d'une fusée produit des gaz de combustion et les refoule vers l'extérieur. La réaction des gaz produit une force en sens inverse qui fait avancer l'avion ou la fusée.

Unité de force

1 force de 1 Newton (1 N) agissant sur l'unité de masse, 1 kg, lui communique une accélération de 1 $m.s^{-2}$.

$$1 \text{ newton} = 1 \text{ kilogramme} \cdot 1 \text{ mètre} . s^{-2}$$

Les lois de la mécanique permettent de déterminer les trajectoires, à partir de la connaissance des forces appliquées à la particule (et des conditions initiales).

Avant d'examiner les conséquences de la seconde Loi de Newton sur l'étude des **oscillateurs** très importants dans le domaine de l'analyse et de la mesure, le lecteur trouvera dans l'annexe 2 à la fin de ce chapitre un rappel de la "première loi de Newton" aussi appelée loi de l'inertie. La loi de conservation de la quantité de mouvement ainsi que le principe d'action-réaction sont évoqués. Cette annexe 2 contient également des exemples de forces très importantes : la **force de gravitation** et la **force de Coulomb**.

3.5. Un cas particulier fondamental : l'oscillateur mécanique libre non amorti

Les oscillations libres non amorties ont lieu quand le système susceptible d'osciller a été mis en mouvement puis ne subit aucune force d'excitation externe et n'a pas de frottement. Dans ce qui suit, nous allons considérer le cas particulier extrêmement simple du **"pendule élastique"** constitué d'un **ressort à boudin** de masse négligeable, fixé en un point fixe à une de ses extrémités. Une **masse ponctuelle m**, pouvant se déplacer horizontalement, **sans frottement** est fixée à l'autre extrémité (figure 26).

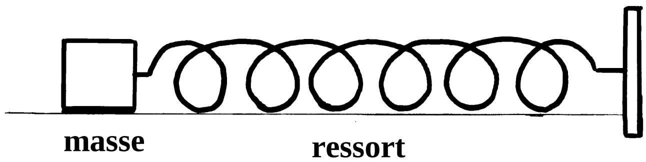


Figure 26
Au repos un ressort est attaché à un point fixe et une masse m est placée à son autre extrémité. Cette masse peut glisser horizontalement sans frottement.

3.5.1. Mouvement de la masse liée au ressort

On comprime le ressort (figure 27). La diminution de la longueur du ressort correspond à une variation de son élongation par rapport à sa longueur au repos. A l'instant t = 0 s on libère le ressort, la masse m à cet instant n'ayant pas de vitesse initiale.

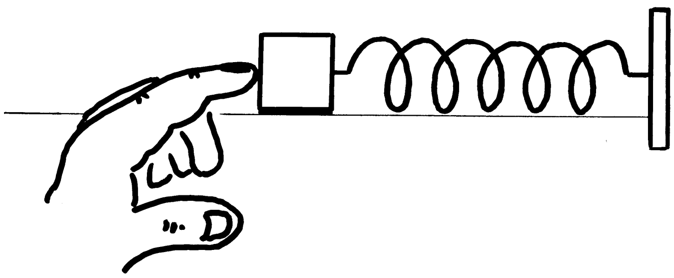


Figure 27
Le ressort est comprimé grâce à une force extérieure exercée sur la masse.
Le point d'attache du ressort est fixe.

La figure 28 résume l'évolution de la position de la masse sur le plan horizontal et le mouvement du ressort entre le moment où il a été "laché" et l'instant où il revient pour la première fois à sa position de départ. On a choisi de "photographier" le mouvement de l'ensemble masse-ressort à 5 instants :

- au départ (t = O)
- lorsque la masse passe à la position O qu'elle avait au repos (t = T/4)
- la masse est la plus éloignée du point d'attache du ressort (t = T/2)

- la masse repasse au point O (t = 3T/4)
- la masse est revenue à sa position de départ (t = T).

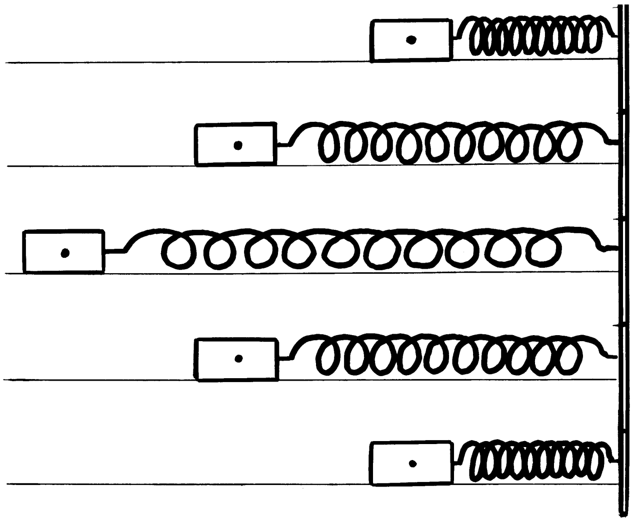


Figure 28
Mouvement de l'ensemble masse-ressort entre l'instant de départ (t = O) et l'instant où la masse revient à sa position de départ. Le laps de temps T correspond à la période du mouvement oscillatoire de la masse à l'extrémité du ressort.

Pour étudier le mouvement de la masse accrochée au ressort, nous allons appliquer le **principe fondamental** de **la dynamique** tel que nous l'avons étudié au paragraphe 3.4.4. et en remarquant qu'ici la masse est constante au cours du temps, d'où : la somme des forces appliquées à la masse est égale au produit de cette masse par son accélération.

Première étape : bilan des forces appliquées à la masse :

poids + force du ressort = masse . accélération

La figure 29 représente les forces s'appliquant sur la masse lors du mouvement. Initialement, le ressort est comprimé, quand on abandonne le mobile à lui-même, la **force de rappel** lui communique une accélération. Il dépasse la position de repos et le ressort subit un allongement et la masse va subir une force et donc une accélération de sens contraire et ainsi de suite ...

La **force de rappel** est directement proportionnelle à l'élongation $\vec{x}$ (comptée à partir de O figure 29) et opposée à $\vec{x}$ d'où son expression :

$$\text{force du ressort} = \text{force de rappel} = \vec{F}_r = -\,K\,\vec{x} \qquad (68)$$

Cette dernière relation typique d'une **force élastique** est aussi appelée **loi de Hooke**. La constante K est la raideur du ressort en Newton (mètre)$^{-1}$.

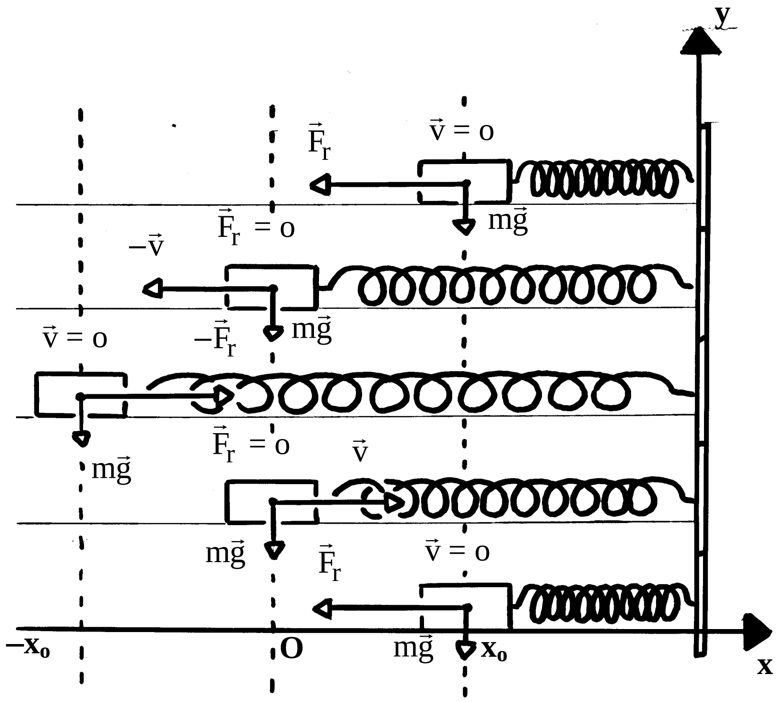


Figure 29
Evolution de la force de rappel $\vec{F}_r$ du ressort et de la vitesse $\vec{v}$
de la masse au cours de son mouvement oscillatoire.

Outre la **force de rappel**, dans le bilan des forces qui s'appliquent sur la masse, il ne faut pas oublier le poids P.

$$\vec{P} = m\,\vec{g} \tag{69}$$

Il faut également tenir compte de la réaction $\vec{R}$ du support telle que :

$$\vec{R} = -\,\vec{P} \tag{70}$$

Finalement, le principe fondamental de la dynamique appliquée à cette masse est résumé dans l'égalité vectorielle :

$$\vec{R} + m\,\vec{g} - K\,\vec{x} = m\,\vec{a} \tag{71}$$

Comme $\vec{R} = -\,m\,\vec{g}$ on a finalement

$$-\,K\,\vec{x} = m\,\vec{a}$$

Une remarque fondamentale consiste a noter que le mouvement est rectiligne suivant l'axe $\overrightarrow{ox}$ (figure 29) en projection sur cet axe l'égalité vectorielle (70) devient l'équalité scalaire :

$$-\,K\,x = m\,a_x = m\,\frac{dv}{dt} = m\,\frac{d^2x}{dt^2} \tag{72}$$

Ainsi l'application du principe fondamental de la dynamique nous conduit à résoudre **l'équation différentielle du second ordre** à coefficient constant de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}\,x = O \qquad (73)$$

La résolution de cette relation va nous permettre de connaître comment varie la position x de la masse m au cours du temps t.

C'est l'équation caractéristique de tout **oscillateur harmonique** que vous devez savoir reconnaître du premier coup d'oeil.

sa solution est de la forme

$$x(t) = A\cos(\omega_o t + \varphi) \qquad (74)$$

avec

$$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad (75)$$

pulsation propre du système masse-ressort en rd . s^{-1}

La fréquence f (en Hz) et la période T (en s) de cet oscillateur harmonique étant respectivement

$$f_o = \frac{1}{2\Pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \text{et} \qquad T_o = 2\Pi\sqrt{\frac{m}{K}} \qquad (76)$$

A est l'amplitude du mouvement et φ la phase. On détermine ces deux grandeurs à partir des conditions initiales

à $t = o$ $x = x_o$ et $v = o$

ce qui donne

$$x\ (t = o) = A\cos\varphi = x_o \qquad (77)$$

$$\frac{dx}{dt}(t = o) = -A\,\omega_o \sin\varphi = o \qquad (78)$$

d'où

$$A = x_o \quad \text{et} \quad \varphi = 0$$

Finalement la relation donnant l'évolution de la position de la masse en fonction du temps est

$$x(t) = x_o \cos\omega_o t \qquad (79)$$

Il est intéressant de tracer également l'évolution de la vitesse v(t) et de l'accélération a(t) de la masse en fonction du temps

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\,x_o\,\omega_o \sin\omega_o t \qquad (80)$$

ce que l'on peut écrire en utilisant les propriétés des fonctions trigonomètriques

$$v(t) = x_o\,\omega_o \cos(\omega_o t + \frac{\Pi}{2}) \qquad (81)$$

la vitesse de la masse est donc "déphasée" de $\frac{\Pi}{2}$ par rapport à l'élongation de la masse au même instant et sa valeur maximale et égale à $x_o \omega_o$.

Pour l'accélération, on a :

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\, x_o\, \omega_o^2 \cos \omega_o\, t \qquad (82)$$

ce que l'on peut écrire en utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques.

$$a(t) = x_o\, \omega_o^2 \cos (\omega_o\, t + \Pi) \qquad (83)$$

La figure 30 résume l'évolution de la position x, de la vitesse v et de l'accélération a de la masse en fonction du temps.

On remarque que les caractéristiques m et K de l'oscillateur ne fournissent que la pulsation propre ω_o (et donc la période T_o). Pour connaître x_o et φ il faut préciser les conditions de lancement.

On remarque aussi que la période T_o est indépendante de l'amplitude x_o du mouvement (à condition d'éviter que lors de la phase de compression du ressort les spires n'entrent en contact entre elles).

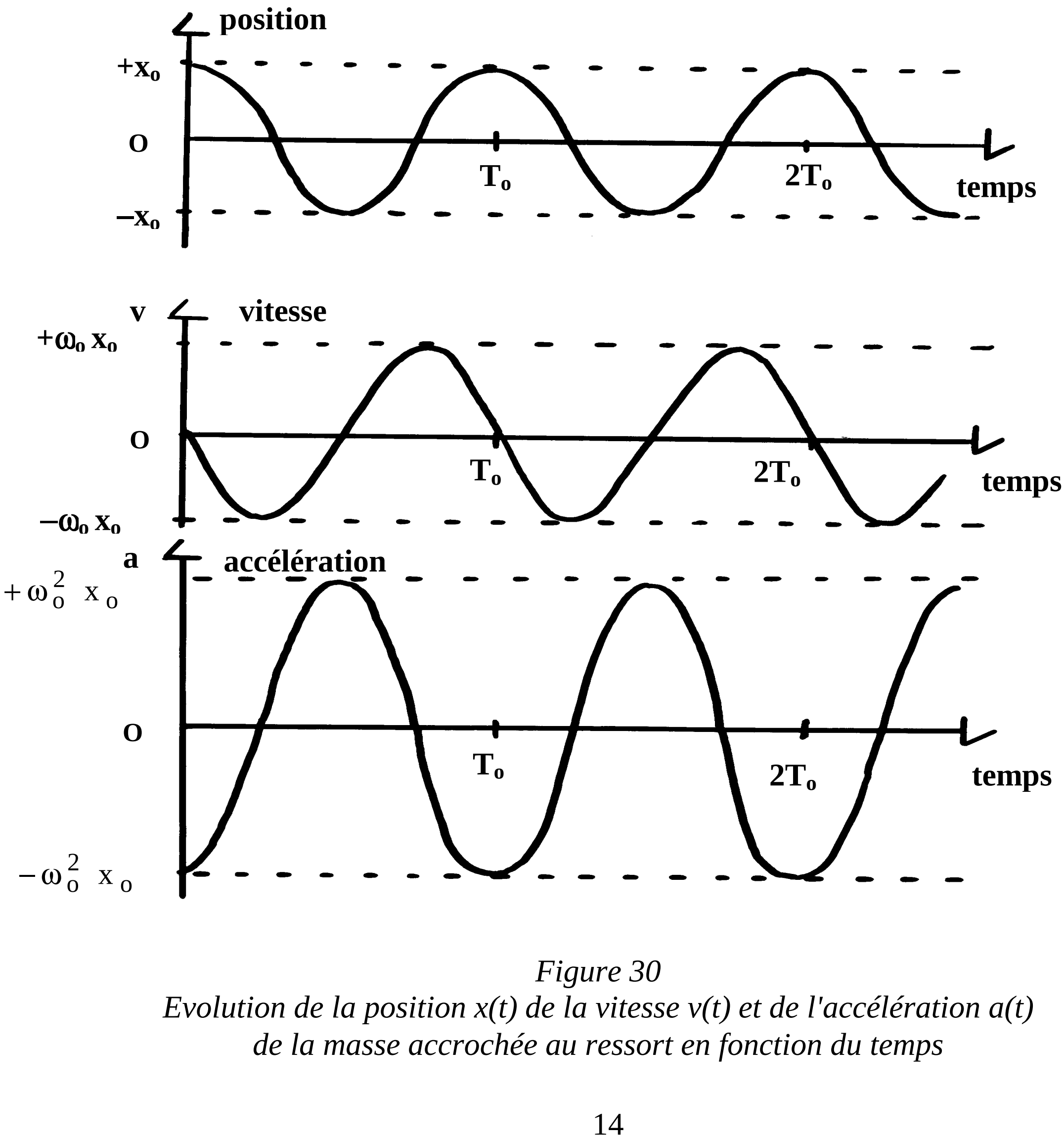


Figure 30
Evolution de la position x(t) de la vitesse v(t) et de l'accélération a(t)
de la masse accrochée au ressort en fonction du temps

D'un point de vue expérimental il est plus facile de faire fonctionner cet oscillateur harmonique à ressort verticalement comme l'indique la figure 31. Il faut alors tenir compte de la pesanteur qui, à l'équilibre, communique un allongement initial au ressort. La mise en équation est la même que celle du ressort horizontal à condition de choisir pour origine le point d'équilibre atteint sous l'effet de la force de pesanteur.

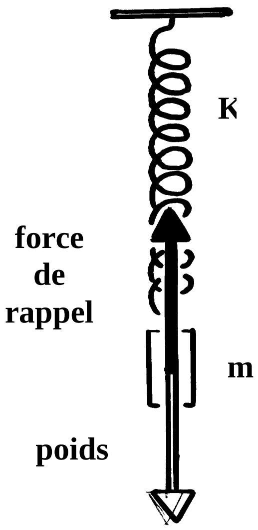


Figure 31
L'oscillateur harmonique constitué d'une masse suspendue à un ressort peut aussi fonctionner verticalement. A l'équilibre le poids est égal à la force de rappel du ressort.

3.6.7. Le levier vibrant

Différents dispositifs de mesure et d'analyse comme les détecteurs infra-rouge ou les microscopes à force atomique utilisent des petits leviers (figure 32) qui, à partir de leur vibration, permettent de mesurer la masse, la quantité de chaleur ou la force entre les molécules.

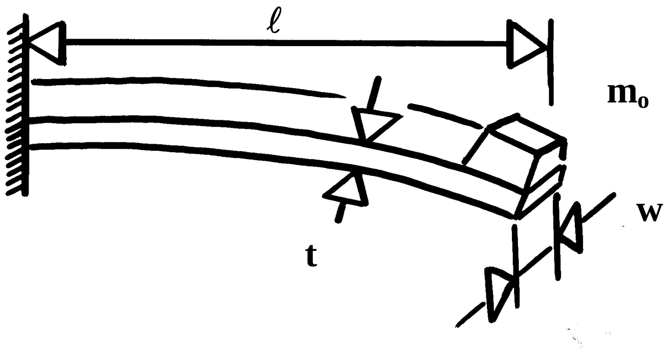


Figure 32
La flexion de l'extrémité d'un levier dont l'autre extrémité est fixé permet de mesurer des forces, des masses, des quantités de chaleur, etc...

La formalisation mathématique du levier vibrant revient à celle du ressort. Quand on place une masse m_o sur le levier (et à condition que m_o soit supérieure à la masse du levier) l'ensemble m_o plus levier a une fréquence propre de vibration f_o telle que

$$f_o = \frac{1}{2\Pi} \sqrt{\frac{K}{m_o}} \qquad (84)$$

On voit apparaître le facteur K qui est "la raideur" du levier et on montre [1] que

$$K = \frac{Y\,w\,t^3}{4\,\ell^3} \qquad (85)$$

avec

Y : module d'Young du matériau constituant le levier ($N.m^{-2}$)

w, ℓ et t respectivement largeur, longueur et épaisseur du levier (voir figure 32)

L'utilisation à l'échelle micrométrique des poutres vibrantes entre dans le cadre du développement des "MEMS" (Micro Electrical and Mechanical Systems).

Parmi les autres oscillateurs mécaniques on peut citer le pendule pesant, le pendule de torsion et le pendule liquide. Dans le domaine de l'électricité nous allons maintenant étudier rapidement un exemple important d'oscillateur non amorti le circuit self-capacité.

3.6.8. Le circuit électrique oscillant parallèle

La figure 33 représente un circuit constitué d'un générateur continu de force électromotrice E (en volts) d'un condensateur de capacité C (en Farad) et d'une bobine de self L (en Henry).

L'interrupteur en position 1 permet de charger la capacité C, à l'instant t = o on bascule l'interrupteur de la position 1 à la position 2.

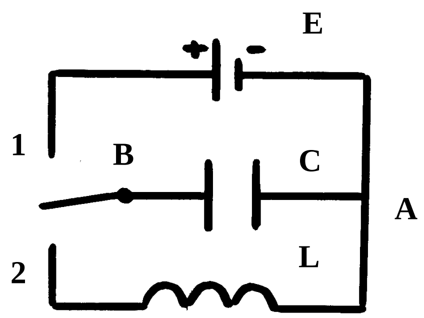


Figure 33
Circuit oscillant parallèle constitué d'une inductance L et d'une capacité C.
La tension E sert à l'excitation de l'oscillateur électrique

La charge du condensateur peut être considérée comme la quantité variable. Sa variation en fonction du temps produit un courant électrique qui induit un champ magnétique dans la self L. L'énergie est alternativement emmagasinée dans le condensateur (analogue à un ressort) et dans l'inductance (analogue à la masse inertie).

L'égalité des différences de potentiel $V_B - V_A$ aux bornes du condensateur et de l'inductance donne :

$$V_B - V_A = \frac{q}{C} \qquad (86)$$

$$V_B - V_A = -L\,\frac{d\,i}{dt} = -L\,\frac{d^2q}{dt^2} \qquad (87)$$

---

[1] D. SARID, Scanning Force Microscopy (Oxford University Press, New York, Revised Edition, 1994)

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = o \qquad (88)$$

On retrouve une équation différentielle du second ordre à coefficient constant qui mathématiquement a la même allure que la relation (73) mais concerne cette fois l'évolution de la charge q en fonction du temps. Si on désigne

$$q_o = C\,E \qquad (89)$$

la charge du condensateur à l'instant t = o où l'on fait passer l'interrupteur de la position 1 à la position 2, la solution de l'équation différentielle (88) est :

$$q = q_o \cos \omega_o t \qquad (90)$$

avec

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (91)$$

et la fréquence caractéristique de l'oscillateur est

$$f_o = \frac{1}{2\Pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (92)$$

et sa période

$$T_o = 2\Pi\sqrt{LC} \qquad (93)$$

L'intensité instantanée du courant qui parcourt le circuit est :

$$i = \frac{dq}{dt} = -q_o\ \omega_o\ \sin \omega_o t = q_o\ \omega_o\ \cos(\omega_o t + \frac{\Pi}{2}) \qquad (94)$$

L'intensité du courant est en "avance de phase de "$\frac{\Pi}{2}$ radians" par rapport à la charge

Le circuit oscillant est un élément de base en électronique. Associé à une antenne, il est notamment utilisé pour la production de rayonnement électromagnétique (figure 34)

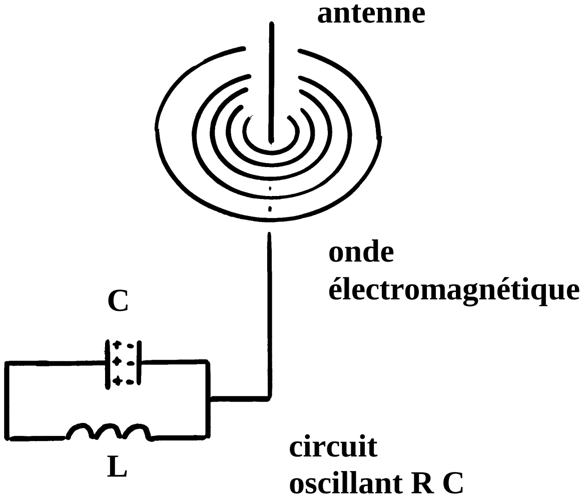


Figure 34
Un circuit oscillant résistance inductance est à la base des émissions radio-électriques par une antenne.

CONCLUSION

Ce chapitre nous a montré l'importance des grandeurs vectorielles notamment dans le domaine de la mécanique du point.

Grâce à cette approche, nous avons pu étudier l'oscillateur mécanique libre non amorti qui est une des formes les plus simples d'oscillateur et qui va nous permettre de comprendre l'oscillateur avec amortissement puis l'oscillateur avec amorti excité, tel qu'il apparaît en mécanique, électricité, optique, structure de la matière, etc...

ANNEXE 2

Exemples d'expressions "analytiques" de forces

Force gravitationnelle (ou newtonienne). Masses ponctuelles M et m

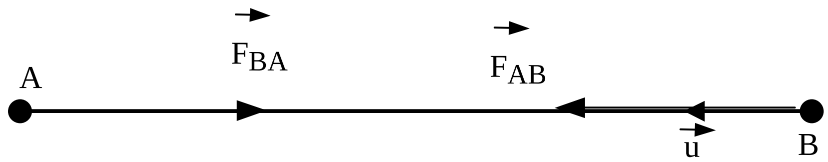


Figure 35
deux masses M et m placées respectivement en A et B subissent chacune une force d'attraction mutuelle gravitationnelle

$$\vec{F}_G = \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} = k_G \frac{M\,m}{r^2}\,\vec{u} \qquad r = \|\overline{AB}\| \qquad |\vec{u}| = 1$$

En module : $F_G = k_G \dfrac{M\,m}{r^2}$

Dans le système international d'unités

M et m s'expriment en kilogrammes
r en mètres
F_G en newtons
$k_G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ S.I.

Poids d'un corps

L'intensité de la force verticale attractive exercée par la Terre (de masse M) sur un corps de masse m situé à la distance R du centre de notre planète est le "Poids" de ce corps.

Soit : $F_G = p = m \cdot \dfrac{k_G . M}{R^2} = mg$

$G = k_G \cdot \dfrac{M}{r^2}$ est "l'accélération locale" de la pesanteur.

En un lieu où $g = 9{,}81$ m.s^{-2}, une masse de 1 kg est soumise à une force attractive P = 9,81 Newton (Poids). A la surface de la Lune, l'accélérateur de la pesanteur est :

$$g_L = k_G \cdot \frac{M_L}{R_L^2} = 1{,}62 \text{ m.s}^{-2}$$

Force électrique (coulombienne). Charges électriques ponctuelles Q et q placées dans le vide.

Force attractive si $Q \cdot q < 0$

Force répulsive si $Q \cdot q > 0$

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} = \vec{F}_E = K_E \cdot \frac{Qq}{r^2} \cdot \vec{u}$$

En module : $F_E = k_E \cdot \frac{Qq}{r^2}$

Dans le système international d'unités Q et q s'expriment en Coulomb, r = BA en mètres, F_E en Newton.

$$k_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 9.10^9 \text{ S.I.}$$

ε_o est la constante diélectrique du vide.