Conservatoire National des Arts et Métiers

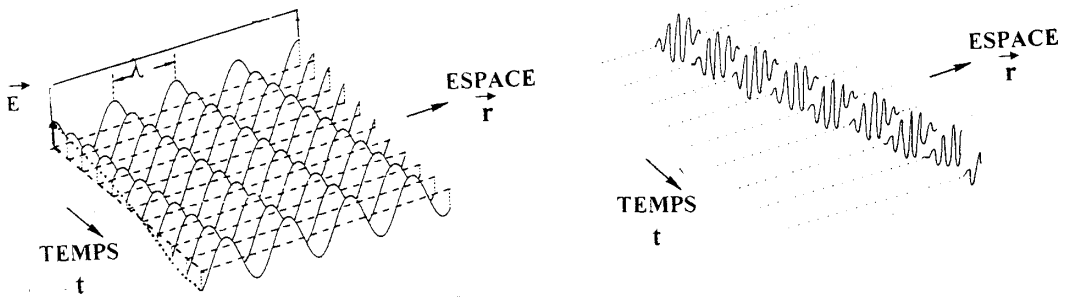
Service de Physique dans ses rapports avec l'industrie

PHR 101

"Principes et outils pour l'analyse et la mesure"

Chapitre 5

Les phénomènes de propagation et les équations aux dérivées partielles



J.J. Bonnet

Version du 30/10/06

5. Les phénomènes de propagation et les équations aux dérivées partielles

5.1. rappel sur la propagation d'une onde progressive transversale

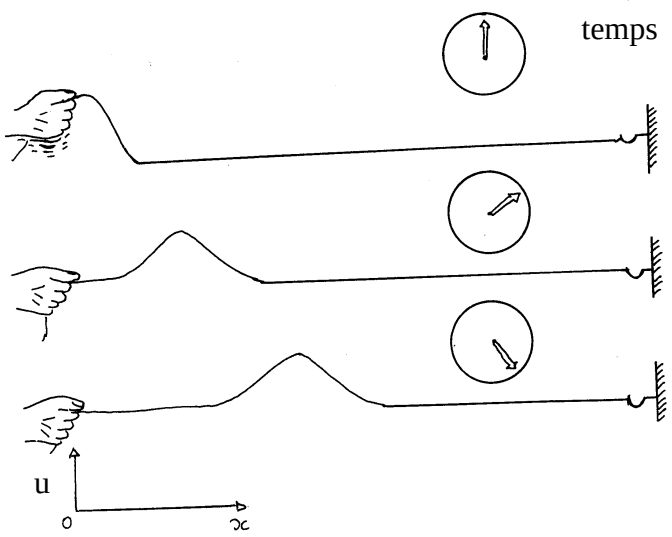


Figure 46 : Exemple d'onde progressive transversale : l'onde mécanique se propageant sur une corde tendue. La déformation u est perpendiculaire à la vitesse.

On peut produire, en secouant l'extrémité libre d'une corde tendue, une déformation u qui se propage dans la corde à une vitesse déterminée. On obtient ainsi une "**onde progressive**". La corde constitue ici le milieu dans lequel l'onde se propage.

A mesure que l'onde se propage, les segments de corde où se trouve l'onde se déplacent dans une direction perpendiculaire au mouvement de l'onde d'où le nom d'"**onde progressive**. **transversale**".

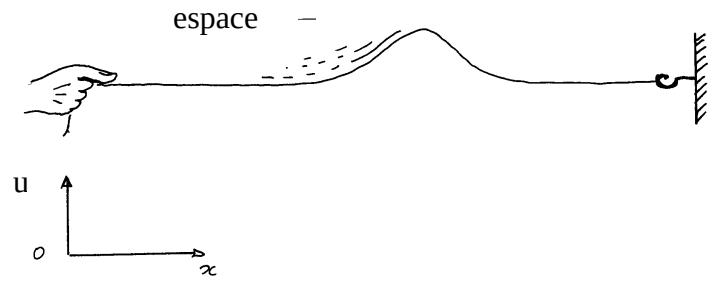


Figure 47: L'élongation "transverse" de la corde sera représentée par une fonction de "l'espace" x et du temps t : u(x,t)

L'élongation "transverse" de la corde sera représentée par une fonction de "l'espace" x et du temps t : u(x,t). D'un point de vue mathématique on dit que u est une fonction des deux variables x et t.

En physique, on montre que l'élongation u(x,t) est solution de **l'équation "des cordes vibrantes"**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (136)$$

avec :

v : vitesse de propagation suivant $\overrightarrow{ox}$ de l'ébranlement que l'on a donné à la corde.
On montre que la vitesse d'une onde transversale qui se propage dans une corde ou un fil tendu est égale à

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{\text{tension de la corde}}{\text{masse par unité de longueur}}} \qquad (137)$$

Dans le cas d'une onde à "trois dimensions" (déplacement suivant $\overrightarrow{ox}$, $\overrightarrow{oy}$ et $\overrightarrow{oz}$) l'équation de propagation devient :

$$\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (138)$$

avec

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (139)$$

Δ désigne l'opérateur "laplacien" et u est ici une fonction de x, y, z et du temps t.
On distingue en général deux types d'ondes : **les ondes transversales** et les ondes **longitudinales**. Dans une **onde transversale** les mouvements des particules qui constituent la matière sont perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde ; dans le cas d'une onde **longitudinale** ou onde de compression, les vibrations sont parallèles au sens de la propagation d'onde. C'est dans ce dernier cas que nous allons nous placer pour examiner plus en détail comment l'onde se déplace dans la matière.

5.2. L'exemple de la propagation d'une onde dans la matière

Nous allons caractériser l'état du milieu solide par le déplacement de chaque élément de volume, comme s'il s'agissait d'un milieu continu. Nous considérons que les **vibrations** sont **longitudinales** : les déplacements ont lieu parallèlement à la direction de propagation.

Nous prenons pour axe des x la direction de propagation. (figure 48). Dans un premier temps x est la seule variable.

Soient deux sections A et A' distantes de dx d'un matériau solide sans contrainte.

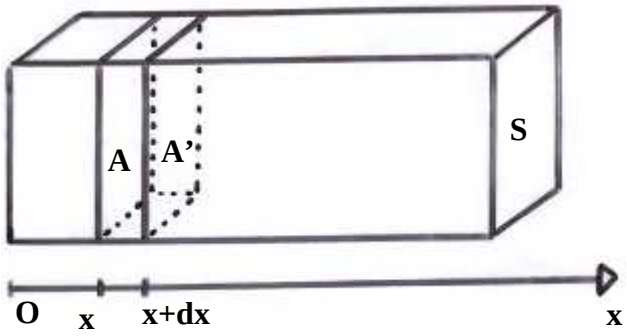


Figure 48 : dans une barre constituée d'un matériau homogène on considère une "tranche" d'épaisseur dx et limitée par deux sections A et A' de surface S.

Comme l'indique la figure 49, si on applique la force $\vec{F}$ perpendiculairement à l'extrémité de surface, il y a déformation du matériau et la section A s'est déplacé en A' de telle sorte que la distance AA' est :

$$X' - X = dX \qquad (140)$$

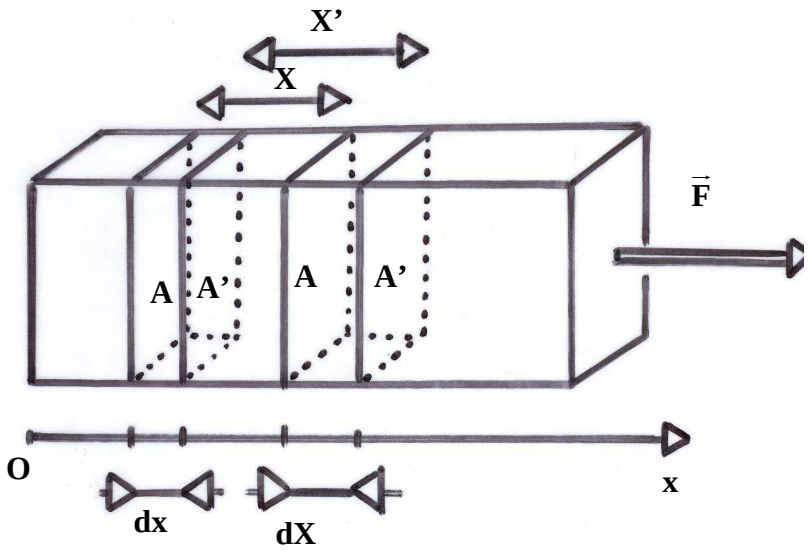


Figure 49 : Une force $\vec{F}$ est appliquée perpendiculairement à la surface S ce qui crée une contrainte F/S et une déformation dX/dx.

On définit la déformation par unité de longueur

$$\varepsilon = \frac{dX}{dx} \tag{141}$$

et la contrainte appliquée (en Newton m^{-2})

$$\sigma = \frac{F}{S} \tag{142}$$

La déformation ε et la contrainte σ sont liées par une grandeur mécanique caractéristique du matériau : le **module d'Young Y** défini par :

$$Y = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{dX}{dx}} \tag{143}$$

on peut écrire la relation (143) sous la forme

$$Y\, dX = \frac{F}{S}\, dx \tag{144}$$

ce qui donne après intégration (on choisit la constante d'intégration égale à O)

$$X = \frac{F}{SY}\, x \tag{145}$$

On voit que plus le **module d'Young** est important c'est-à-dire plus le matériau sera "dur" et plus le déplacement X de A sera faible sous l'influence de la contrainte F/S.

Considérons maintenant la tranche d'épaisseur dx du matériau de masse volumique ρ. Cette tranche infiniment "fine" a pour masse :

$$dm = \rho\, dV = \rho\, S\, dx \tag{146}$$

A partir de maintenant on suppose que **la force et le déplacement X dépendent de la distance x et du temps t**.

Si on désigne par $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$ l'accélération de cette tranche lors de l'application de la force dF, le principe fondamental de la dynamique (seconde loi de Newton) donne :

$$dF = dm\, \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \tag{147}$$

or cette force infinitésimale est liée à l'épaisseur dx par la relation :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\, dx \tag{148}$$

d'où finalement la relation qui décrit la "dynamique" de cette tranche quand on applique une force dF

$$\frac{\partial F}{\partial x}\, dx = (\rho S\, dx)\, \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \qquad (149)$$

ou encore :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho S\, \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \qquad (150)$$

dans la relation (143) on doit tenir compte que la distance x n'est plus la seule variable mais qu'il y a également le temps t, donc la dérivée de X par rapport à x devient une dérivée partielle, ce qui donne :

$$F = SY\, \frac{\partial X}{\partial x} \qquad (151)$$

d'où en dérivant partiellement de nouveau par rapport à x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = SY\, \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \qquad (152)$$

finalement, en tenant compte de (150) et (152) et en simplifiant par S, on aboutit à :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho}\, \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \qquad (153)$$

C'est une équation de propagation qui indique que la vitesse de propagation de la déformation X dans le barreau est :

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad (154)$$

module d'Young du matériau

masse volumique du matériau

Nous justifions bien dans le cas particulier de la propagation d'une onde dans un matériau que **l'équation des "cordes vibrantes"** que nous avons introduite dans le paragraphe 5.1. décrit bien le phénomène.

5.3. Les ondes sinusoïdales

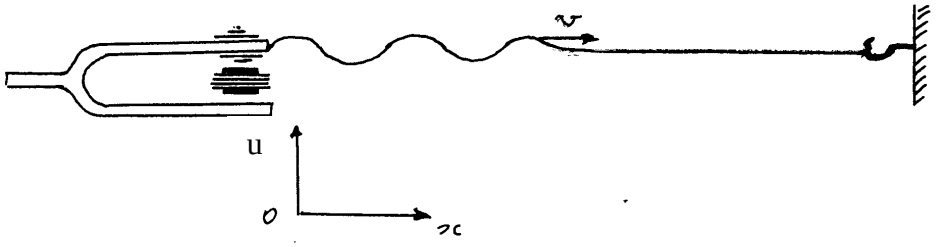


Figure 50 : Onde sinusoïdale produite
par la vibration d'un diapason excité par un électro-aimant

Ce type d'onde a un grand intérêt car :

–beaucoup de phénomènes physiques simples engendrent des **ondes sinusoïdales**

–on montre que toute onde périodique peut être représentée comme la **superposition d'ondes sinusoïdales**.

Dans le domaine de la **mécanique**, il existe un grand nombre **d'ondes élastiques sinusoïdales** de différents types (figure 51).

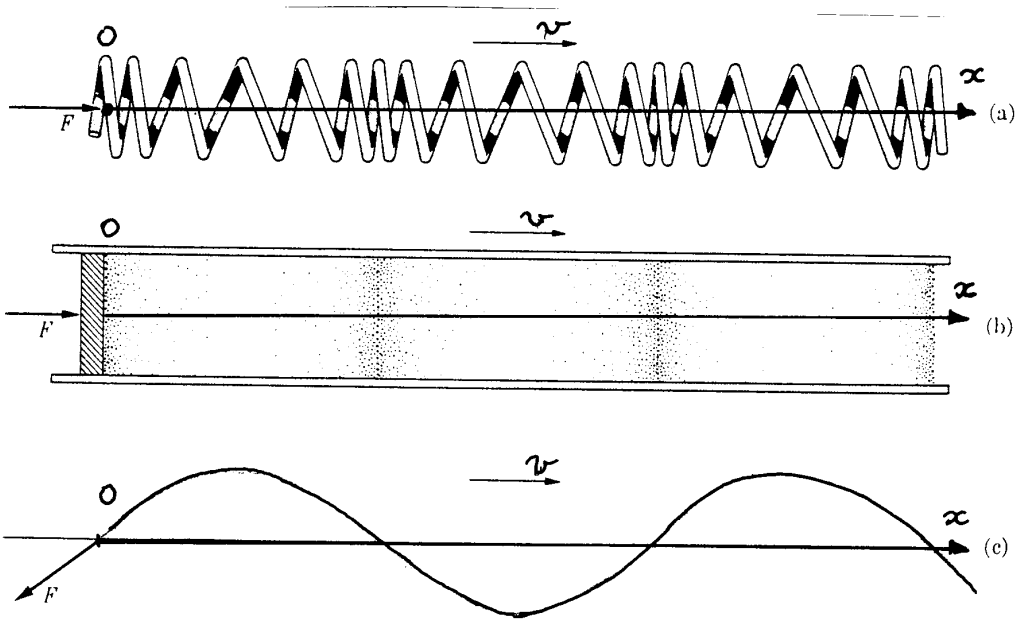


Figure 51 : Ondes élastiques

(a) Onde mécanique sinusoïdale et longitudinale se propageant le long d'un ressort tendu
(b) Onde acoustique sinusoïdale et longitudinale se propageant dans une colonne de gaz contenu dans un tube.
(c) corde vibrante : onde mécanique sinusoïdale et transversale

L'**élongation transversale** de la corde vibrante dans le cas d'une **onde sinusoïdale** est

$$u(x,t) = A \cos [K (x - v\, t)] \qquad (155)$$

Dans cette expression, outre la **distance** x, le **temps** t et la **vitesse** de propagation v suivant $\overrightarrow{ox}$ de l'onde sinusoïdale on voit apparaître le module du **vecteur d'onde** $\vec{K}$:

$$\left\|\vec{K}\right\| = K = \frac{2\Pi}{\lambda} \qquad (156)$$

On vérifie que l'**élongation** u de la corde est bien solution de **l'équation "des cordes vibrantes"** à une dimension :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = o \qquad (157)$$

Dans l'expression de l'élongation

$$u = A \cos [K (x - vt)] \qquad (158)$$

A est l'**amplitude** de l'onde sinusoïdale et le terme K (x – vt) désigne sa phase.

Comme la **pulsation angulaire** de l'onde ω (en radian s^{-1}) est liée à la **vitesse** v et au module du **vecteur d'onde** K par la relation :

$$v = \frac{\omega}{K} \qquad (159)$$

on utilise souvent une autre expression de l'élongation :

$$u = A \cos (Kx - \omega t) \qquad (160)$$

Remarques : cette dernière expression correspond à une onde sinusoïdale se propageant de gauche à droite. Pour une onde se propageant de droite à gauche on a :

$$u = A \cos (Kx + \omega t) \qquad (161)$$

Manipuler une fonction trigonomètrique comme le cosinus est assez "pénible", il est beaucoup plus astucieux d'utiliser les nombres complexes*

$$u = A \cos (Kx - \omega t) \rightarrow \tilde{u} = A \exp j(Kx - \omega t) \qquad (162)$$

forme réelle forme complexe

Les paramètres caractéristiques d'une onde sont :

– la période temporelle T en seconde

– la période spaciale λ ou longueur d'onde

– sa vitesse de phase v ($m\ s^{-1}$)

– son vecteur d'onde K (m^{-1})

---

* on rappelle que $\exp j\, \varphi = \cos \varphi + j \sin \varphi$ (formule d'Euler)

– sa pulsation angulaire ω (rad.s^{-1})

Ces différentes grandeurs sont liées par les relations :

$$T = \frac{2\Pi}{\omega} \qquad \lambda = \frac{2\Pi}{K} \qquad vT = \lambda \tag{163}$$

La fréquence ν (ou f) de l'onde (en s^{-1} ou Hertz) est égale à l'inverse de la période.

5.4. La représentation complexe des grandeurs sinusoïdales

L'expression de l'élongation

$$u(x,t) = A \cos (Kx - \omega t)$$

sous cette forme présente quelques inconvénients quand il s'agit d'additionner ou de soustraire les amplitudes de plusieurs ondes sinusoïdales. De même il ne sera pas très facile de dériver ou d'intégrer l'amplitude de l'onde par rapport à une de ses variables, c'est pourquoi, il est très intéressant de "représenter" l'onde dans le plan complexe en utilisant la relation d'Euler :

$$e^{j(Kx-\omega t)} = \cos(Kx - \omega t) + j\sin(Kx - \omega t) = e^{jKx} \cdot e^{-j\omega t} \tag{164}$$

avec

$j \cdot j = -1$

étant entendu que l'onde "physique" correspondra à la partie réelle de ce nombre complexe. L'intérêt de cette représentation, qui semble étrange au premier abord, réside dans le fait que si l'on additionne ou si l'on soustrait des nombres complexes, la partie réelle de la somme est la somme des parties réelles, et si l'on dérive (ou si l'on intègre) des nombres complexes, la partie réelle de la dérivée (ou de l'intégrale) est la dérivée (ou l'intégrale) de la partie réelle.

A la fin du calcul, et pas avant, on prendra la partie réelle de la fonction et l'on obtiendra la solution cherchée.

Le plus souvent, il est d'ailleurs inutile de faire ce calcul auxiliaire, car, comme nous le constaterons, c'est surtout l'amplitude qui joue un rôle. Donc, si on désigne par :

$$\mu_c(x,t) = A\, e^{jKx}\, e^{-j\omega t} \tag{165}$$

l'expression de l'élongation de l'onde sinusoïdale sous forme complexe, le carré de l'amplitude de cette élongation sera donné par :

$$A^2 = \mu_c\, \mu^*_c \tag{166}$$

en appelant μ_c la forme complexe "conjuguée" de l'élongation obtenue en changeant j en -j

5.5. L'onde électromagnétique classique

Si on se place dans un référentiel cartésien, l'onde électromagnétique est constituée d'un **champ électrique** $\vec{E}$, d'un champ **d'induction magnétique** $\vec{B}$ et d'un **vecteur d'onde** $\vec{K}$ tels que $\vec{B}$, $\vec{K}$ et $\vec{E}$ pris dans cet ordre forment un **trièdre direct** : il s'agit d'une **onde transversale**.

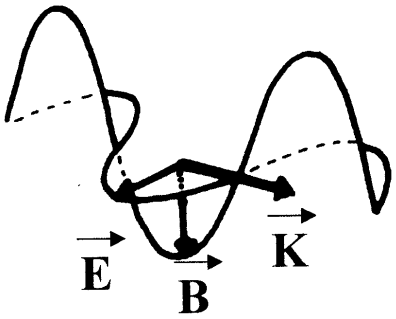


Figure 52

l'onde électromagnétique est une vibration transversale car $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$ *sont orthogonaux à la direction de propagation* $\vec{K}$.

$\vec{E}$ en Volt m^{-1}

$\vec{B}$ en Tesla

$$\left\|\vec{K}\right\| = \frac{2\Pi}{\lambda} = \frac{2\Pi}{cT} \text{ en } m^{-1}$$

λ : longueur d'onde en mètre

c : vitesse de la lumière dans le vide

T : période

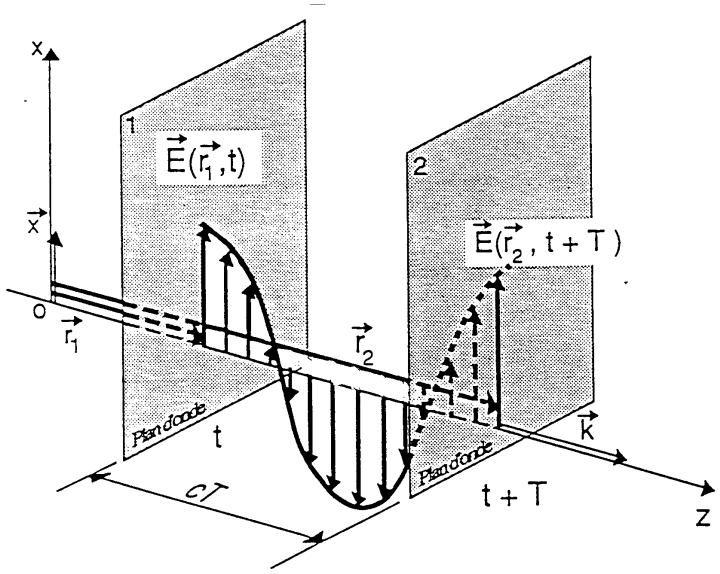


Figure 53

Le dessin représente une onde plane dont le champ électrique $\vec{E}$ *(r,t) est "polarisé" rectilignement suivant la direction* $\overrightarrow{ox}$. *Le plan contenant* $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$ *est appelé plan d'onde*

$\vec{E}$ (r,t) et $\vec{B}$ (r,t) dépendent de l'espace et du temps et obéissent à la relation

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \qquad (167)$$

Y représentent les composantes de $\vec{B}$ ou $\vec{E}$

v est la norme de la vitesse de l'onde (v = c dans le vide)

Cette équation de propagation peut s'écrire sous une forme plus "compacte" grâce à l'opérateur Laplacien noté Δ

$$\Delta Y = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \qquad (168)$$

$\downarrow$

opérateur Laplacien

Si l'onde est plane on a :

$$Y(\vec{r},\vec{t}) = A\cos(\vec{K}.\vec{r} \pm \omega t) \qquad (169)$$

en notation complexe

$$Y(\vec{r},\vec{t}) = A \exp j(\vec{K}.\vec{r} \pm \omega t) \qquad (170)$$

$\uparrow$

amplitude de l'onde

avec

$$\omega = 2\ \Pi\ \nu \qquad (171)$$

$\downarrow$ $\downarrow$

pulsation fréquence

(rd s^{-1}) (Hz)

Remarque : l'**intensité** d'une onde est proportionnelle au **carré de l'amplitude**.

Dans le cas d'une onde plane se propageant suivant $\overrightarrow{oz}$ (figure 54) dans le vide, l'équation de propagation correspondant au champ électrique $\vec{E}$ est :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_o\ \varepsilon_o\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad (172)$$

ε_o et μ_o étant respectivement la permittivité et la perméabilité du vide qui sont liée à la vitesse de propagation c de l'onde dans le vide par la relation :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o\ \varepsilon_o}} \qquad (173)$$

avec

$c = 3.10^8 \text{ m s}^{-1}$

$\varepsilon_o = \dfrac{1}{36\Pi 10^9}$ S.I

$\mu_o = 4\,\Pi\,10^{-7}$ S.I

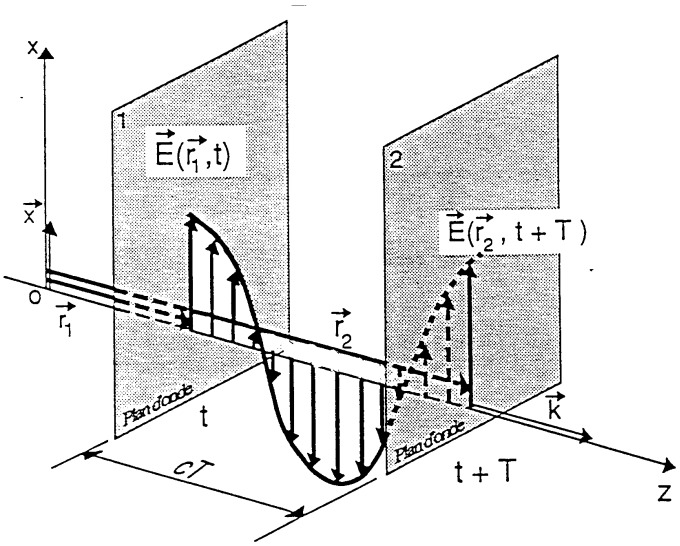


Figure 54 : onde plane polarisée rectilignement suivant $\overrightarrow{ox}$

L'équation de propagation précédente admet comme solution

$$E_x = E_m \cos \omega\left(\frac{z}{c} - t\right) \qquad (174)$$