Conservatoire National des Arts et Métiers

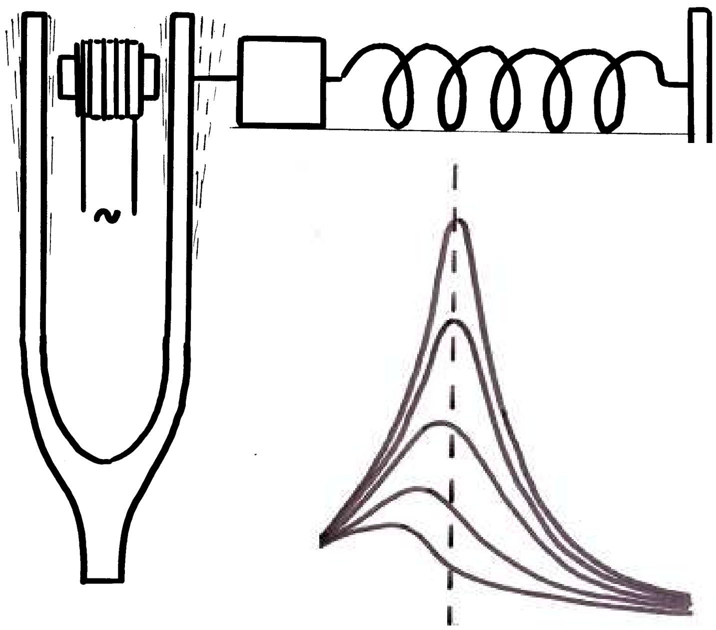
Service de Physique dans ses rapports avec l'industrie

PHR 101

"Principes et outils pour l'analyse et la mesure"

Complément au Chapitre 4

Oscillations forcées et résonance



J.J. Bonnet

Version du 10/11/06

Absorption d'énergie par un oscillateur harmonique

Une oscillation d'amplitude constante ne peut-être maintenue qu'au prix d'une dépense permanente d'énergie fournie par l'excitateur extérieur. On se propose donc de calculer la puissance P moyenne absorbée par un oscillateur harmonique excité par une force extérieure sinusoïdale. L'énergie absorbée pendant une période est :

$$W = \int_o^T F \frac{dx}{dt} dt$$

Comme la multiplication des deux fonctions F(t) et x(t) n'est pas opération linéaire, il importe de revenir aux parties réelles de F et x qui seules correspondent aux grandeurs physiques. On prend donc :

$$F = F_o \sin \omega t$$

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = + A\, \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

ainsi on a :

$$F \frac{dx}{dt} = \omega\, A\, F_o\, (\sin \omega t) \left[\cos(\omega t + \varphi)\right]$$

Afin de pouvoir intégrer cette relation par rapport au temps, il faut la transformer en utilisant le formulaire de trigonométrie.(cette transformation mathématique ne présente pas un "grand" intérêt dans notre cas où nous nous préoccupons plus du résultat et des conséquences pratiques que du détail du calcul mathématique).

Tout calcul fait, on trouve que l'énergie W fournie par l'excitateur extérieur pendant une période T est :

$$W = -\frac{T}{2}\, \omega\, F_o\, A \sin \varphi$$

Ainsi la puissance moyenne absorbée est :

$$P = \frac{W}{T} = -\frac{1}{2}\, \omega\, A\, F_o \sin \varphi$$

A partir de l'expression (117) du cours chapitre 4 :

$$e^{-j\varphi} = \cos(-\varphi) + j \sin(-\varphi) = \omega_o^2 - \omega^2 + j\, \frac{a\, \omega}{m}$$

on peut montrer que

$$\sin\varphi = -\frac{\dfrac{a\omega}{m}}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\dfrac{a\omega}{m})^2\right]^{1/2}}$$

on a également vu dans le cours (relation (111) chapitre 4) que l'amplitude A avait pour expression :

$$A = \frac{F_o}{m}\ \frac{1}{\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\dfrac{a\omega}{m})^2\right]^{1/2}}$$

En reportant les valeurs de sin φ et de A dans l'expression de la puissance P moyenne absorbée :

$$P = \frac{1}{2}\ \frac{F_o{}^2}{m}\ \frac{\dfrac{a\omega^2}{m}}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\dfrac{a\omega}{m})^2}$$

On voit apparaître le terme $\dfrac{m}{a}$ qui est un temps τ correspondant à la "durée de vie" de l'oscillateur. Plus le coefficient d'amortissement est petit et plus la "durée de vie" de l'oscillateur sera grande.

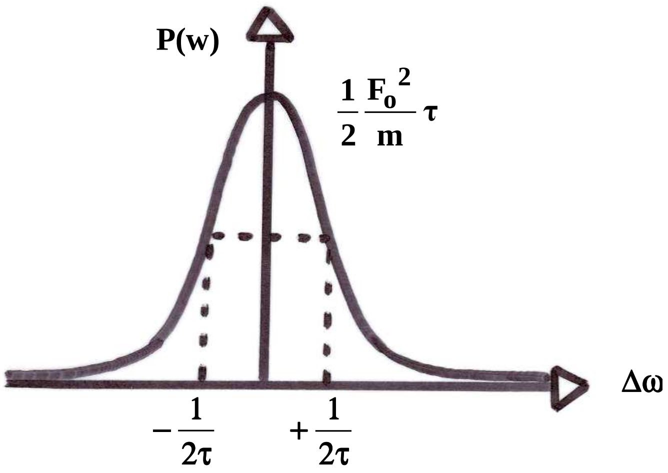
$$\tau = \frac{m}{a}$$

Ce qui permet d'écrire la puissance moyenne P absorbée par l'oscillateur sous la forme :

$$P = \frac{1}{2}\ \frac{F_o{}^2}{m}\ \frac{\dfrac{\omega^2}{\tau}}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\dfrac{\omega}{\tau})^2}$$

La figure ci-après représente cette variation de puissance P absorbée par l'oscillateur en fonction de l'écart $\Delta\omega$ entre la fréquence excitatrice ω et la fréquence de résonance ω_o.

$$\omega = \omega_o + \Delta\omega$$



On remarque sur la figure que la "largeur à mi-hauteur" de la courbe de puissance absorbée est égale à $\frac{1}{\tau}$, ceci signifie que, lorsque la résonance est très aigüe, ou, ce qui revient au même, la durée de vie τ d'une vibration de l'oscillateur libre est très longue par rapport à la période, au second ordre près on a :

$$P \simeq \frac{1}{2}\frac{F_o^{\,2}}{m}\;\frac{\frac{1}{\tau}}{4\,(\Delta\,\omega)^2 + (\frac{1}{\tau})^2}$$

Cette fonction peut représenter par exemple le profil d'une raie spectrale de la lumière émise par une collection d'atomes immobiles.

ω_o est la fréquence correspondant au saut de l'atome d'un état quantique à un autre état quantique. La constante de temps τ de cet "oscillateur harmonique" est la durée de vie de l'atome dans l'état excité. La largeur à mi-hauteur l/τ est la "largeur naturelle" de la raie, d'autant plus étroite que la durée de vie τ est longue.