Conservatoire National des Arts et Métiers

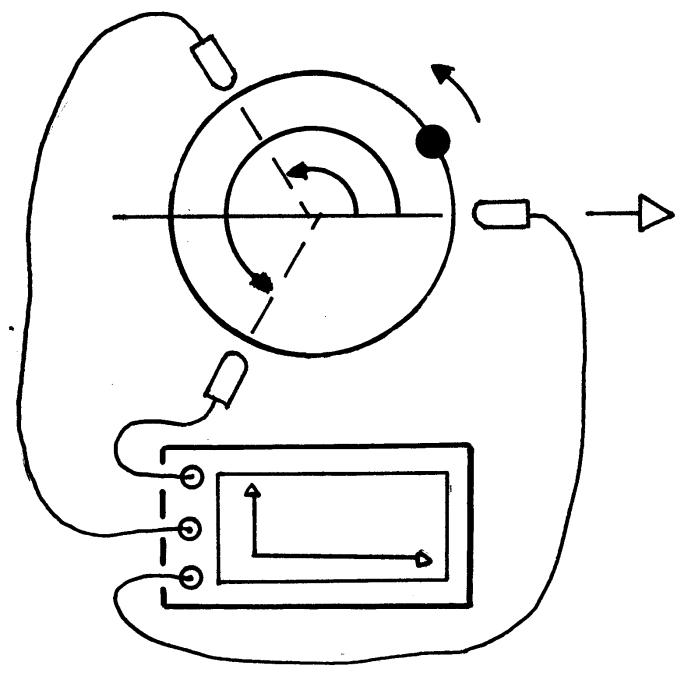
Service de Physique dans ses rapports avec l'industrie

PHR 101

"Principes et outils pour l'analyse et la mesure"

Chapitre 1

de l'angle à la rotation



J.J. Bonnet

Version du 20/09/06

1. De l’angle à la rotation

1.1. La notion d'angle dans le plan

Soit un cercle de rayon R (figure 1)

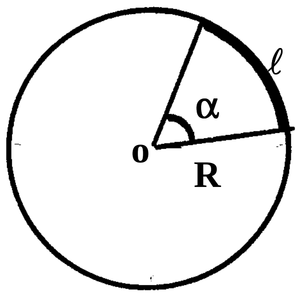


Figure 1
Un angle en radian c’est le rapport ℓ sur R

Soit α l'angle interceptant l'arc de longueur ℓ, par définition, l'angle

α est défini par $\alpha = \dfrac{\ell}{R}$ (1)

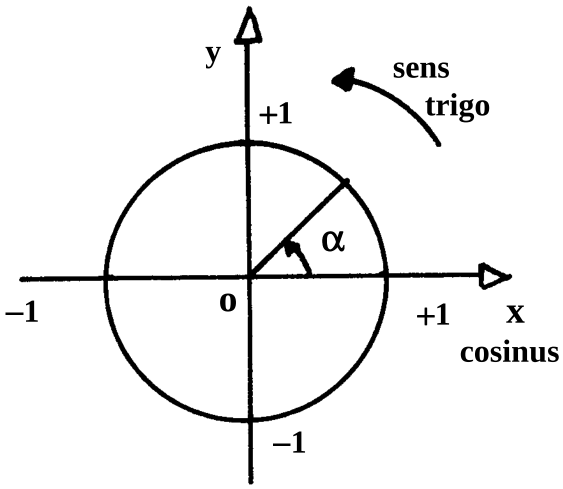
ℓ et R étant des longueurs, l'angle α n'a pas de dimension mais son unité est le radian qui est l'unité naturelle d'angle (le degré et le grade ont été introduites pour la commodité dans certains métiers... On rappelle par exemple que l'angle au centre sous lequel on voit toute la circonférence correspond à 360 degrés d'angles

Pour se convaincre que le radian est bien l'unité naturelle d'angle, il suffit de prendre toute la longueur ℓ_T de toute la circonférence du cercle et dans ce cas :

$$\alpha = 2\Pi(\text{radian}) = \frac{\ell_T}{R} \quad \Rightarrow \quad \ell_T = 2\Pi R \qquad (2)$$

1.2. Fonctions trigonométriques

– le cercle trigonométrique



Rayon = 1
ox = axe cosinus
oy = axe sinus

Les angles sont comptés positivement dans les sens trigonométrique, sens inverse des aiguilles d'une montre

Figure 2
Ce "cercle trigonométrique" est un cercle de rayon unité que l’on parcourt dans le sens trigonométrique indiqué par la flèche. L’axe ox est l’axe des cosinus et l’axe oy celui des sinus

– le cosinus

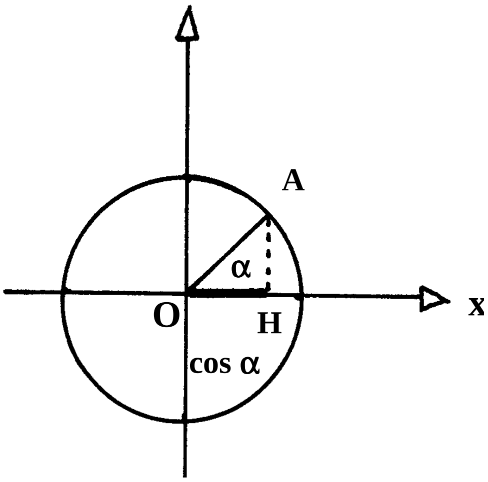


Figure 3
Dans le cercle trigonométrique la projection de oA sur l'axe ox représente le cosinus de l'angle

dans le triangle OAH

$$\cos\alpha = \frac{OH}{OA} = \frac{OH}{1} \qquad (3)$$

car

R = OA = 1

– le sinus :

dans le triangle OAH

$$\sin\alpha = \frac{AH}{OA} = \frac{AH}{1} \qquad (4)$$

– la tangente :

dans le triangle OAH

$$tg\ \alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (5)$$

1.3. Le mobile en rotation, vitesse angulaire, période, fréquence

La figure 4 ci-dessous représente un mobile (atome, molécule, rotor d'un alternateur, etc...) ponctuel en **mouvement circulaire uniforme** sur une trajectoire de centre O et de rayon R = OM

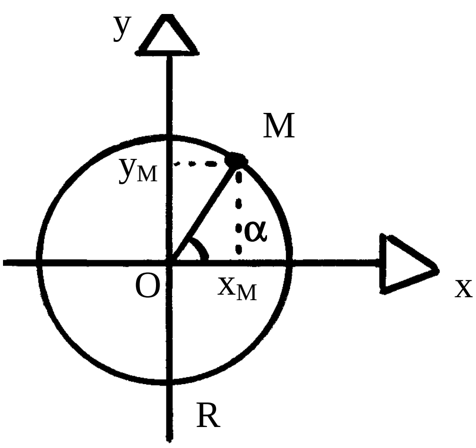


Figure 4
Le point M désigne la position d'un mobile sur une trajectoire circulaire de rayon R = OM

On désigne par M la position du mobile a un instant t et par $\vec{v}$ sa vitesse.

On appelle N le nombre de tours effectué par le mobile par seconde.

A partir de maintenant, nous vous proposons de répondre à des questions. Cette méthode a pour but de favoriser votre réflexion et si vous avez des difficultés, vous trouverez les réponses au paragraphe 1.4.

1.3.1. quelle est la relation entre N, $\|\vec{v}\|$ et R ?

1.3.2. si le mobile était un électron dans un atome par exemple, quelle serait l'intensité i du courant correspondant au mouvement de cet électron ? On désigne par e la valeur absolue de la charge de l'électron (ce courant est très important dans le phénomène de résonance paramagnétique électronique E.P.R. par exemple)

Calculer la valeur numérique de l'intensité i de ce courant en prenant les valeurs typiques que nous fournit le modèle atomique de Bohr qui décrit le mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène :

$R \simeq 0{,}5 \, . \, 10^{-10}$ m

$V \simeq 2{,}2 \; 10^{6}$ m s^{-1}

$| \;\; | \simeq 1{,}6 \; 10^{-19}$ C

Cette intensité de courant vous parait-elle négligeable ? (n'oubliez pas que vous êtes à l'échelle de l'atome !)

Figure 5
Un électron en mouvement circulaire uniforme, correspond à une "spire de courant" d'intensité i qui, par convention est dans le sens opposé au mouvement de l'électron

1.3.3. A l'instant t = O le mobile se trouve au point M_o sur l'axe OX (voir figure 6). A un instant t quelconque, il se trouve en M correspondant à l'angle α interceptant l'arc de cercle de longueur ℓ .

On désigne par $\omega \quad \frac{\alpha}{\quad}$ (en radian s^{-1}) la vitesse angulaire du mobile, quelle est la relation entre ω et le module $\|\vec{v}\|$ (en $m.s^{-1}$) de la vitesse ?

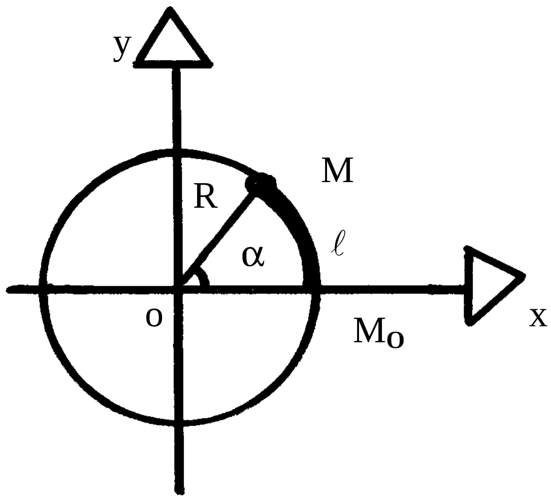


Figure 6
Pour un mobile ponctuel en rotation on peut définir la vitesse "linéaire" v et la vitesse angulaire ω

1.3.4. Comment varie la projection algébrique OH de M sur OX en fonction de l'angle α et en fonction du temps ? Représenter graphiquement l'allure de l'évolution de OH en fonction du temps dans le cas du mobile tournant dans le sens de la flèche indiquée sur la figure 7..

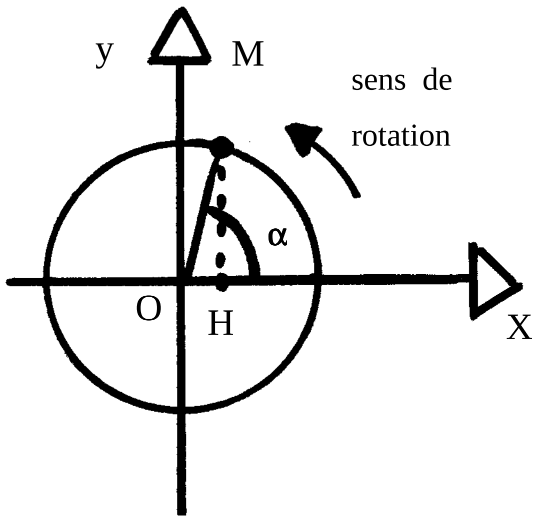


Figure 7
Pendant la rotation du mobile M sur le cercle,
sa projection H sur l'axe OH décrit un mouvement rectiligne.

1.3.5. Comment est placé le vecteur vitesse $\vec{v}$ du mobile par rapport à sa trajectoire circulaire ? Quelle est l'expression de l'accélération du mobile M en rotation uniforme en fonction de sa vitesse et du rayon de la trajectoire ? Même question dans le cas où le mobile ne serait plus en rotation uniforme mais aurait un mouvement quelconque sur la trajectoire circulaire de rayon R

1.3.6. On place trois détecteurs D_1, D_2, D_3 de passage du mobile aux positions angulaires suivantes (voir figure 8)

D_1 : $\alpha_1 = 0$ rd

D_2 : $\alpha_2 = \frac{2\Pi}{3}$ rd

D3 : $\alpha_3 = \frac{4\Pi}{3}$ rd

Le détecteur de passage fournit une très courte impulsion électrique quand le mobile passe à proximité. Quel sera le décalage dans le temps des trois signaux fournis par les détecteurs ?

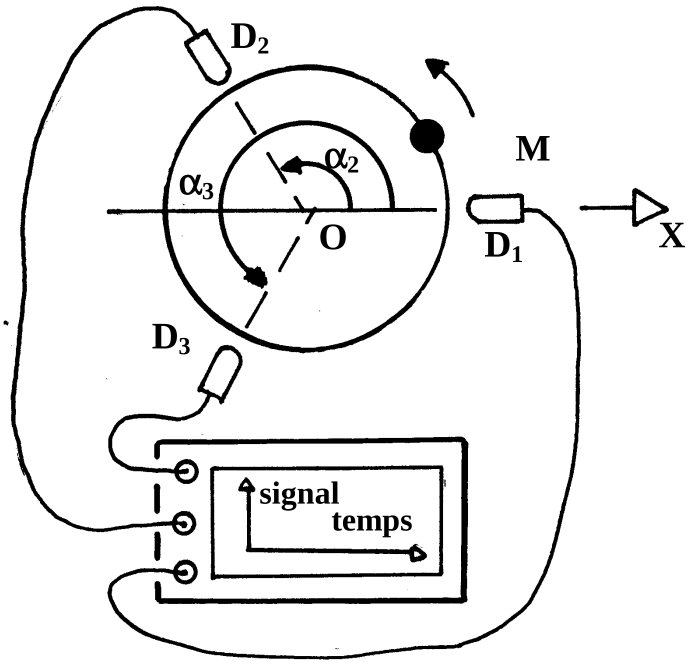


Figure 8
Mesure du temps de passage d'un mobile en rotation. D1, D2 et D3 sont des capteurs de position placés à $\frac{2\Pi}{3}$ rd *les uns des autres*

Application numérique :

Si t_1 = Os calculer t_2 et t_3 dans le cas où N = 50 tours par seconde

1.3.7. On appelle période T du mouvement circulaire uniforme le temps au bout duquel le mobile a fait un tour. Quelle est la période du mouvement dans le cas où le mobile fait N = 50 tours par seconde ?

1.3.8. A quelle fréquence f correspond ce mouvement circulaire de 50 tours par seconde ? Quelle est l'unité de fréquence ? A quoi vous fait penser la valeur de cette fréquence ?

1.3.9. Exemple de la production de l'énergie électrique dans une machine tournante : l'alternateur.
L'essentiel de la production d'énergie électrique sur la planète est effectuée par transformation d'énergie mécanique en énergie électrique grâce au phénomène d'induction (Loi de Lenz).
On peut résumer le fonctionnement d'un alternateur à partir de la figure 9 ci-dessous.

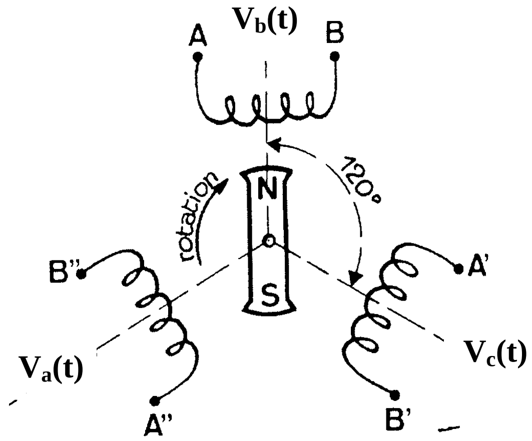


Figure 9
Schéma simplifié d'un alternateur triphasé. Un aimant tourne devant trois bobinages aux bornes desquels apparaissent trois tensions alternatives

Un aimant en rotation devant des bobines conductrices placées comme l'indique la figure 9 produit un système triphasé de tension aux bornes des trois bobinages. L'évolution de ces tensions en fonction du temps est illustrée sur la figure 10 ci-dessous.

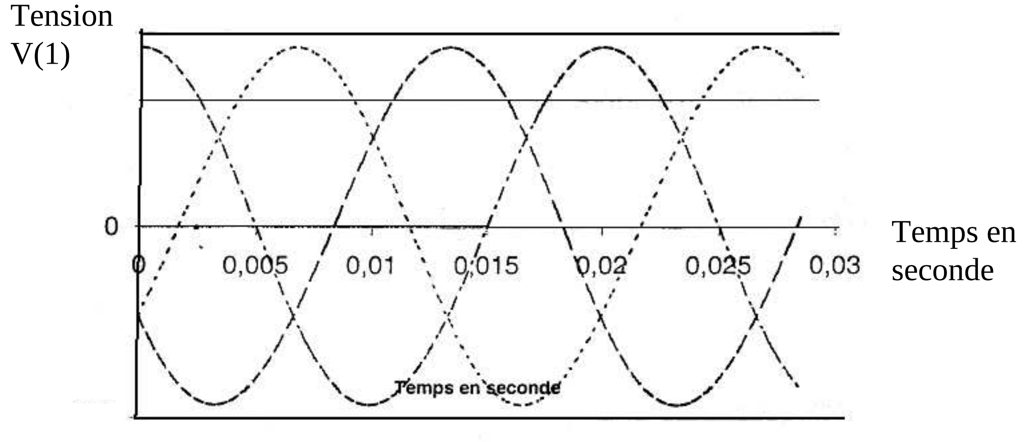


Figure 10
Variation en fonction du temps des trois tensions $V_a(t)$ $V_b(t)$ et $V_c(t)$ en modèle "triphasé"

Leurs valeurs respectives étant :

$$
\begin{aligned}
V_a(t) &= V\sqrt{2}\,\cos(\omega t) \\
V_b(t) &= V\sqrt{2}\,\cos(\omega t - 2\frac{\Pi}{3}) \\
V_c(t) &= V\sqrt{2}\,\cos(\omega t + 2\frac{\Pi}{3})
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

La vitesse angulaire ω en radian par seconde de l'alternateur est liée au nombre de tours par seconde N, à la période T et à la fréquence f (50 Hz) par les relations

$$\omega = 2\Pi N = \frac{2\Pi}{T} = 2\Pi f \qquad (7)$$

1.3.10. Application à l'étude d'un système en rotation par stroboscopie

La stroboscopie est une méthode de mesure de la fréquence de rotation ou d'oscillation d'un système. La lampe stroboscopique fournit des éclairs lumineux très courts qui se succèdent à la fréquence f.

On éclaire avec cette lampe un système en rotation à la fréquence f '.

Si f ' = pf avec p en entier, le système tournant ou oscillant apparaît immobile.

Si f ' est voisin de pf le système apparaît en mouvement ralenti.