ADVANCES IN MATHEMATICS **17**, 14–24 (1975)

Espaces de Baire et Espaces de Probabilité de Structures Relationnelles

PIERRE BEAUCHEMIN* ET GONZALO E. REYES*

Université de Provence, France
Département de Mathématiques, Université de Montréal, Montréal, Québec, Canada

L'ensemble $P(\mathbb{N}^n)$ des relations n-aires sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels est, comme produit dénombrable d'espaces discrets finis, un espace topologique compact et, comme produit dénombrable d'espaces de probabilité finis, un espace de probabilité. De même pour l'espace $E = \prod_{i\in I} P(\mathbb{N}^{\rho(i)})$, où $\rho: I \to \mathbb{N}$ est une fonction de domaine au plus dénombrable. Chaque permutation de $\mathbb{N}$ induit une permutation de $\mathbb{N}^n$, puis une permutation de $P(\mathbb{N}^n)$ et de E. Si I est fini, on montre l'existence dans E d'une partie invariante (par rapport à ces permutations) minimale qui est de mesure 1 et dont le complément est maigre. Sans restriction sur I, on montre que tout borélien invariant de E est soit maigre, soit de complément maigre et de plus soit de mesure 0, soit de mesure 1. On en déduit qu'il existe dans le langage $L_{\omega_1\omega}$ des théories complètes et consistantes mais qui n'admettent pas de modèle. On conclut avec une application des résultats précédents à la théorie axiomatique des ensembles.

1. TOPOLOGIE ET MESURE

Soit I un ensemble au plus dénombrable, $\rho: I \to \mathbb{N}$ une fonction et $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels. Si on considère $2 = \{0, 1\}$ comme un espace topologique discret (et compact), l'ensemble $P(\mathbb{N}^n)$ des relations n-aires sur $\mathbb{N}$, devient, via la topologie produit, un espace topologique compact. Il en est de même pour $E(\rho) = \prod_{i\in I} P(\mathbb{N}^{\rho(i)})$, muni lui aussi de la topologie produit. Une base d'ensembles ouverts et fermés pour cet espace est constituée par les parties de la forme $\prod_{i\in I} U_i$, où U_i est un ouvert de $P(\mathbb{N}^{\rho(i)})$ défini au moyen d'un couple de relations $\rho(i)$-aires finies (W_i^+, W_i^-) ainsi:

$$U_i = [W_i^+, W_i^-] = \{R \in P(\mathbb{N}^{\rho(i)}) \colon W_i^+ \subseteq R \text{ et } W_i^- \cap R = \phi\},$$

* Cette recherche a été subventionnée en partie par le Conseil National de Recherches du Canada et par le Conseil des Arts du Canada.

ces relations étant vides pour tous, sauf un nombre fini d'éléments de I. Nous appellerons *intervalles de Baire* de $E(\rho)$ les ensembles de la base ainsi décrite.

On définit la *trace* d'un intervalle de Baire $\prod_{i\in I} U_i$ comme l'ensemble des entiers appartenant au moins à un $\rho(i)$-triplet de $W_i^+ \cup W_i^-$. La *trace d'une réunion finie* d'intervalles de Baire sera simplement la réunion des traces. On notera que cet ensemble est toujours fini. Deux réunions de tel type seront *indépendantes* si leurs traces sont disjointes.

On remarquera les formules évidentes:

$$[W^+, W^-] \cap [V^+, V^-] = [W^+ \cup V^+, W^- \cup V^-],$$

$$C[W^+, W^-] = \bigcup_{a\in W^-} [\{a\}, \phi] \cup \bigcup_{b\in W^+} [\phi, \{b\}].$$

Rappellons que dans un espace topologique, une partie est *rare* si l'intérieur de sa fermeture est vide, *maigre* si elle est une réunion dénombrable de parties rares et *comaigre* si son complément est maigre. On dit qu'un espace topologique est un *espace de Baire* si l'intérieur de toute partie maigre est vide. Dans un tel espace, une partie comaigre est dense (et donc non-vide). Tout espace compact est un espace de Baire. En particulier $E(\rho)$ en est un.

Nous définirons une mesure sur $E(\rho)$. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. En posant $\mu\{1\} = \alpha$ et $\mu\{0\} = 1 - \alpha$, on obtient une mesure de probabilité sur $2 = \{0, 1\}$, à partir de laquelle on peut construire la mesure de probabilité produit μ sur $E(\rho)$. On notera que μ est la seule mesure telle que

$$\mu \prod_{i\in I} U_i = \prod_{i\in I} \mu_i(U_i) \qquad \text{où},$$

$$\mu_i(U_i) = 1, \qquad \text{si} \quad U_i = P(\mathbb{N}^{\rho(i)}), \qquad \text{et}$$

$$\mu_i[W_i^+, W_i^-] = \alpha^{|W_i^+|}(1 - \alpha)^{|W_i^-|}, \qquad \text{autrement}.$$

(On note $|X|$ la cardinalité de l'ensemble X.)

Puisque toute mesure peut s'étendre canoniquement à une mesure complète, nous supposerons que μ est complète. On trouvera dans [3] les détails de toutes ces constructions. On remarquera seulement que pour tout ensemble mesurable M et pour tout $\epsilon > 0$ il existe une réunion finie M_0 d'intervalles de Baire et deux ensembles mesurables E_1, E_2 tels que $M = (M_0 \cup E_1) \sim E_2$ et μE_1, $\mu E_2 < \epsilon$ (condition de Lebesgue).

LEMME. *Si O_1, O_2 sont deux réunions finies d'intervalles de Baire indépendantes, alors $\mu(O_1 \cap O_2) = \mu O_1 \cdot \mu O_2$.*

Preuve. On procède par induction, en employant les formules pour l'intersection et le complément d'intervalles de Baire, en plus du fait (facile à montrer au moyen de la décomposition $A = (A \cap B) \cup (A \sim B)$) que $\mu(O_1 \cup O_2) = \mu O_1 + \mu O_2 - \mu(O_1 \cap O_2)$ où O_1, O_2 sont deux réunions finies d'intervalles de Baire.

2. INVARIANCE

Chaque permutation $\pi \in \mathbb{N}!$ induit canoniquement une permutation d'une puissance finie $\mathbb{N}^n$ de $\mathbb{N}$, puis une permutation de $P(\mathbb{N}^n)$ et de $E(\rho)$. En effet, $\pi R = \{(\pi a_1, ..., \pi a_n): (a_1, ..., a_n) \in R\}$, pour tout $R \in P(\mathbb{N}^n)$ et $\pi\langle R_i\rangle_{i\in I} = \langle \pi R_i\rangle_{i\in I}$, si $\langle R_i\rangle_{i\in I} \in E(\rho)$. Cette dernière permutation induite est un auto-homéomorphisme de l'espace $E(\rho)$, qui préserve la mesure μ.

Si $A \subset E(\rho)$, on définit la *fermeture invariante* de A comme $\bigcup_{\pi\in\mathbb{N}!} \{\pi\langle R_i\rangle_{i\in I}: \langle R_i\rangle_{i\in I} \in A\}$. Si A se réduit à un singleton $\{\langle R_i\rangle_{i\in I}\}$, la fermeture invariante de A s'appelle *l'orbite* de $\langle R_i\rangle_{i\in I}$. Une partie de $E(\rho)$ est *invariante* si elle coincide avec sa fermeture invariante; d'une façon équivalente, si elle contient l'orbite de $\langle R_i\rangle_{i\in I}$, chaque fois qu'elle contient $\langle R_i\rangle_{i\in I}$. On remarquera que les orbites sont des parties invariantes minimales.

LEMME. *La fermeture invariante d'un intervalle de Baire non-vide est dense de mesure* 1.

Preuve. Soit $\prod_{i\in I} U_i$ un intervalle de Baire non-vide et $\langle R_i\rangle_{i\in I} \in \prod_{i\in I} U_i$. Si $\prod_{i\in I} V_i$ est un autre intervalle non-vide, il faut montrer que $\prod_{i\in I} V_i \cap$ fermeture invariante de $\prod_{i\in I} U_i \neq \phi$. Soient U, V les traces de $\prod_{i\in I} U_i$ et $\prod_{i\in I} V_i$, respectivement, et $\pi \in \mathbb{N}!$ telle que $\pi(U) \subset \mathbb{N} \sim (U \cup V)$. Si $\langle S_i\rangle_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$, alors $\langle S_i \cap V^{\rho(i)} \cup \pi(R_i \cap U^{\rho(i)})\rangle_{i\in I}$ appartient à $\prod_{i\in I} V_i \cap$ fermeture invariante de $\prod_{i\in I} U_i$.

Pour la mesure, on suppose $E(\rho) = P(\mathbb{N}^r)$ pour plus de clarté. Soit $[W^+, W^-]$ l'intervalle de Baire en question. Construisons une suite d'intervalles $\{[W_n^+, W_n^-]\}_{n\in\mathbb{N}}$ indépendants deux à deux tels que $W_n^+ \cap W_n^- = \phi$, $|W_n^+| = |W^+|$, $|W_n^-| = |W^-|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors l'ensemble

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [W_n^+, W_n^-] = \bigcup_{m=1}^{\infty} [W_n^+, W_n^-] \cap \bigcap_{m=1}^{n-1} C[W_m^+, W_m^-]$$

a une mesure égale à $x + x(1 - x) + x(1 - x)^2 + \cdots = 1$ où $x = \mu[W^+, W^-]$. Mais cet ensemble est évidemment contenu dans la fermeture invariante de $[W^+, W^-]$.

COROLLAIRE. *Tout ensemble invariant ayant la propriété de Baire (i.e., dont la différence symétrique avec un ouvert est maigre) est soit maigre, soit comaigre. En particulier ceci est vrai pour les boréliens invariants.*

Preuve. En effect pour tout ensemble invariant ayant la propriété de Baire, il existe un unique ouvert régulier dont la différence symétrique avec l'ensemble est maigre, car $E(\rho)$ est un espace de Baire (voir [8]). En plus, cet ouvert régulier est évidemment invariant (car les permutations induisent des auto-homéomorphismes préservant les parties maigres) et donc vide ou égal à $E(\rho)$ d'après le lemme.

Le résultat correspondant pour la mesure est vrai.

LEMME. *Soit K un ensemble mesurable invariant. Alors $\mu(K \cap L) = \mu(K) \cdot \mu(L)$, pour tout ensemble mesurable L.*

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Alors (condition de Lebesgue) il existe deux réunions finies d'intervalles de Baire K_0, L_0 et des ensembles E_1, E_2, F_1, F_2 de mesure plus petite que ϵ tels que

$$K = (K_0 \cup E_1) \cap CE_2, \qquad L = (L_0 \cup F_1) \cap CF_2.$$

Soit $\pi \in \mathbb{N}!$ telle que $\pi(\mathrm{Trace}(K_0)) \cap \mathrm{Trace}(L_0) = \phi$. On considère $K_0' = \pi(K_0)$, $E_1' = \pi(E_1)$, $E_2' = \pi(E_2)$ et on remarque que K_0' et L_0 sont indépendants. On a les inégalités successives:

$$\begin{aligned}
&\mu(K \cap L) - \mu(K) \cdot \mu(L) \\
&\quad \leqslant \mu((K_0' \cup E_1') \cap (L_0 \cup F_1)) - (\epsilon - \mu(K_0'))(\epsilon - \mu(L_0)) \\
&\quad \leqslant [\mu(K_0' \cap L_0) - \mu(K_0') \cdot \mu(L_0)] + 3\epsilon - \epsilon^2 + \epsilon(\mu K_0' + \mu L_0) \\
&\quad \leqslant 5\epsilon - \epsilon^2.
\end{aligned}$$

Comme ϵ est arbitraire, $\mu(K \cap L) \leqslant \mu(K) \cdot \mu(L)$. L'inégalité de sens contraire est semblable.

COROLLAIRE. *Tout ensemble mesurable invariant a mesure soit* 0, *soit* 1. *En particulier ceci est vrai pour les boréliens invariants.*

Preuve. On pose $L = K$ dans le lemme précédent: $\mu(K) = \mu(K \cap K) = [\mu(K)]^2$, i.e., $\mu(K)$ est 0 ou 1.

3. Structures Homogènes, Universelles

On considère des structures au plus dénombrables de type $\rho: I \to \mathbb{N}$ où I est au plus dénombrable.

Une structure infinie $\mathfrak{A}$ est *universelle* si et seulement si toute structure finie peut se plonger dans $\mathfrak{A}$. Une structure infinie $\mathfrak{A}$ est *homogène* si et seulement si tout plongement dans $\mathfrak{A}$ d'une structure finie $\mathfrak{B}$ peut s'étendre à un plongement dans $\mathfrak{A}$ de toute surstructure finie de $\mathfrak{B}$ qui se plonge déjà dans $\mathfrak{A}$. On dit qu'une structure est *saturée* si elle est en même temps homogène et universelle.

Un simple argument de Cantor ("back and forth") nous donne:

Proposition. *Une structure infinie $\mathfrak{A}$ est homogène si et seulement si tout isomorphisme entre sous structures finies de $\mathfrak{A}$ peut se prolonger à un automorphisme de $\mathfrak{A}$.*

Proposition. *Deux structures infinies saturées sont isomorphes.*

On dira qu'un point $\langle R_i \rangle_{i \in I}$ de $E(\rho)$ est *universel* (respectivement *homogène, saturé*) si la structure $\langle \mathbb{N}, R_i \rangle_{i \in I}$ est universelle (respectivement homogène, saturée).

Théorème. *Let points homogènes de $E(\rho)$ constituent une partie dense.*

Preuve. En effet, si $\prod_{i \in I} U_i$ est un intervalle de Baire non-vide de trace A_0 et $\langle R_i \rangle_{i \in I}$ est un de ses points, on prolonge $\mathfrak{A}_0 = \langle \mathbb{N}, R_i \rangle_{i \in I} \upharpoonright A_0$ à une structure d'univers $\mathbb{N}$, suivant un argument bien connu (voir e.g. [6]).

On remarquera que si dom ρ est fini, une base pour la topologie de $E(\rho)$ est constituée par les intervalles de Baire de la forme $Q(\mathfrak{A}) = \{\langle R_i \rangle_{i \in I} \mid \mathfrak{A} \subset \langle \mathbb{N}, R_i \rangle_{i \in I}\}$ où $\mathfrak{A}$ est une structure finie de type ρ. En effet, si $\langle R_i \rangle_{i \in I}$ appartient à un intervalle de Baire $\prod_{i \in I} U_i$ de trace A, alors

$$\langle R_i \rangle_{i \in I} \in Q(\mathfrak{A}) \subset \prod_{i \in I} U_i, \qquad \text{où} \qquad \mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, R_i \rangle_{i \in I} \upharpoonright A.$$

Cette remarque nous permet de reformuler les définitions du début de ce numéro en terme d'intervalles de Baire (de cette forme):

Lemme. *Supposons que $I =$ dom ρ est fini. Alors*

(i) *$\langle R_i \rangle_{i \in I}$ est universel si et seulement si $\langle R_i \rangle_{i \in I}$ appartient à la fermeture invariante de tout intervalle de Baire non-vide.*

(ii) *$\langle R_i \rangle_{i \in I}$ est homogène si et seulement si $\langle R_i \rangle_{i \in I}$ appartient à*

$$\bigcup_{\pi \in P} \{\pi \langle S_i \rangle_{i \in I} \colon \langle S_i \rangle_{i \in I} \in Q_2\}, \qquad \textit{où}$$

$P = \{\pi \in N! : \pi$ laisse chaque élément de la trace de Q_1 invariant$\}$, pour tout couple d'intervalles (Q_1, Q_2) telles que $Q_2 \subset Q_1$, chaque fois que $\langle R_i \rangle_{i \in I}$ appartient à Q_1 ainsi qu'à la fermeture invariante de Q_2.

THÉORÈME. *Supposons que $I = \operatorname{dom} \rho$ soit fini. Alors l'orbite d'un point saturé de $E(\rho)$ est comaigre de mesure* 1.

Preuve. L'intersection des fermetures invariantes des intervalles non-vides de Baire, ceux-ci étant en nombre dénombrable, est comaigre de mesure 1, par le premier lemme de la Section 2. D'autre part, l'ensemble des points homogènes est dense et G_δ (d'après (ii) du lemme précédent), donc comaigre puisque $E(\rho)$ est un espace de Baire. Il suffit de démontrer que sa mesure est 1.

Pour plus de clarté, on étudiera le cas $E(\rho) = P(N^r)$ où $r \in N$, seulement. On a $Q_2 = [W^+, W^-]$, $Q_1 = [V, V^-]$ et $V^+ \subseteq W^+ \subset N^r$, $V^- \subseteq W^- \subset N^r$. Soit $A = \operatorname{Trace}(Q_2) \sim \operatorname{Trace}(Q_1) \neq \phi$ et soit $(\pi_n)_{n \in N}$ une suite de permutations de N laissant chaque élément de la trace de Q_1 fixe et telle que $\pi_n A \cap \pi_m A = \phi$, si $n \neq m$. En définissant $Q_2{}^n = \{R \in N^r \colon W^+ \subseteq \pi_n R$ et $W^- \cap \pi_n R = \phi\}$ on voit que ces ensembles sont deux à deux indépendants. On en conclut que

$$\mu\left(\bigcup_{n \in N} Q_2{}^n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in N} \left(Q_2{}^n \sim \bigcup_{m \in I} Q_2{}^m\right)\right)$$
$$= x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \cdots = 1,$$
$$\text{où} \qquad x = \mu(Q_2{}^n) = \alpha^{|W^+|}(1-\alpha)^{|W^-|}.$$

D'autre part, l'ensemble $\bigcup_{\pi \in P} \{\pi S \colon S \in Q_2\}$, où $P = \{\pi \in N! : \pi$ laisse chaque élément de la trace de Q_1 fixe$\}$, contient $\bigcup_{n \in N} Q_2{}^n$ et sa mesure est bien égale à 1.

COROLLAIRE. *Supposons que $I = \operatorname{dom} \rho$ soit fini. Alors toute partie invariante est soit maigre de mesure* 0, *soit comaigre de mesure* 1.[1]

[1] On peut même démontrer que toute partie faiblement invariante de $E(\rho)$ (i.e., laissée invariante par toute permutation qui laisse fixe un sous-ensemble donné fini de $\mathbb{N}$) est comaigre si elle a la mesure 1.

Le fait que "presque" toutes les relations (au sens topologique) sont isomorphes est un cas particulier de [9].

Ces résultats ne sont plus valides, si $I = \operatorname{dom} \rho$ est infini.

En effet, on a le résultat suivant dont (iii) nous a été communiqué par J. Mycielski.

THÉORÈME. *Soit* $I = \operatorname{dom} \rho$ *infini.*

(i) *Dans* $E(\rho)$ *il n'y a pas de point universel.*

(ii) *Toutes les orbites dans* $E(\rho)$ *sont maigres de mesure* 0.

(iii) *Dans* $E(\rho)$ *il y a un ensemble invariant qui n'est pas mesurable et qui ne possède pas la propriété de Baire.*

(i) Est évident, car il y a un nombre non-dénombrable de types d'isomorphismes de relations finitaires qui ne peuvent tous se plonger dans une structure dénombrable.

(ii) Suit du

LEMME. *Soit* $\mathfrak{A}$ *une structure finie (non-vide) de type* ρ. *Alors l'ensemble des* $\langle R_i \rangle_{i\in I}$ *tel que* $\mathfrak{A}$ *se plonge dans* $\langle \mathbb{N}, R_i \rangle_{i\in I}$ *est maigre de mesure* 0.

Preuve. Il suffit de montrer ceci pour $\mathfrak{A} = \langle \{0\}, S_i \rangle_{i\in I}$. Alors l'ensemble en question est la réunion (dénombrable) de tous les ensembles de la forme $\prod_{i\in I} [W_i^+, W_i^-]$ où $| W_i^+ | = | S_i |$, $| W_i^- | = |\{0\}^{\rho(i)} \sim S_i|$ et $W_i^+ \cap W_i^- = \phi$, pour tout $i \in I$. Mais chaque $\prod_{i\in I} [W_i^+, W_i^-]$ de cette réunion est fermé, rare, de mesure 0, d'où le résultat.

(iii) Supposons que toute partie invariante soit maigre ou comaigre. Alors on a une σ-mesure non-triviale $\{0, 1\}$ sur les parties de l'ensemble des orbites. Comme ce dernier a la cardinalité du continu c, on en déduit que c est mesurable, ce qui est absurde (voir [2]). Il existe donc un ensemble invariant B qui ne possède pas la propriété de Baire. Un argument analogue nous montre qu'il existe un ensemble invariant M qui n'est pas mesurable. Si ni B ni M ne répondent à (iii), alors la différence symétrique $B \triangle M$ est un ensemble invariant non-mesurable et qui ne possède pas la propriété de Baire.

Il faut remarquer que l'axiome de choix a été employé pour montrer que la cardinalité de l'ensemble des orbites est c.

Supposons maintenant que $I = \operatorname{dom} \rho$ est infini et $\rho(i) = n$, pour tout $i \in I$.

THÉORÈME. *Dans $E(\rho)$ il y a un borélien invariant maigre et de mesure* 1.

Preuve. L'homéomorphisme canonique h_n: $2^{\mathbb{N}^{n+1}} \leftrightarrows (2^{\mathbb{N}^n})^{\mathbb{N}}$ préserve la mesure et établit une bijection entre les intervalles de Baire des espaces en question.

Soit $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{N}^n$. On définit

$$K(b) = \left\{ f \in 2^{\mathbb{N}^{n+1}} : \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \frac{f(b_1, ..., b_n, i)}{m+1} = \alpha \right\}.$$

Si C_{pq} est l'ensemble des $f \in 2^{\mathbb{N}^{n+1}}$ telles que

$$\left| \alpha - \sum_{i=0}^{m} \frac{f(b_1, ..., b_n, i)}{m+1} \right| < \frac{1}{p} \text{ dès que } m \geqslant q,$$

alors $K(b) = \bigcap_p \bigcup_q C_{pq}$, ce qui montre que $K(b)$ est un borélien car C_{pq} est fermé. Si p_0 est un entier tel que $1/p_0 < \alpha$, alors C_{p_0q} est un fermé rare pout tout q et ceci implique que $K(b) \subset \bigcup_q C_{p_0q}$ est bien maigre. D'autre part, en définissant X_i: $2^{\mathbb{N}^{n+1}} \to 2$ par $X_i(f) = f(b_1, ..., b_n, i)$, pour tout $i \in I$, on voit que $\langle X_i \rangle_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes dans leur ensemble, de même moyenne α et de même distribution. Un théorème de Kolmogorov (voir [1]) nous assure que $K(b)$ a mesure 1. On en déduit que $K = \bigcap_{b\in\mathbb{N}^n} K(b)$ est un borélien maigre de mesure 1. Son image par l'homéomorphisme canonique h_n est un borélien invariant maigre de mesure 1.

Cet exemple a été suggéré en partie par J. Mycielski.

4. Langages et Théories Infinitaires

On définit L, un langage infinitaire ($L_{\omega_1\omega}$) de type ρ avec égalité, de la façon suivante: les symboles primitifs sont les symboles logiques $\neg$, $\vee$, $\exists$, $=$, les parenthèses (,), les variables x_1, x_2,... et les symboles non-logiques de relations $\rho(i)$-aires R_i, pour chaque $i \in I$.

Les *formules atomiques* sont des suites de la forme $R_i t_1 \cdots t_{\rho(i)}$ et $t_1 = t_2$, où chaque t est une variable. Les formules sont définies à partir des formules atomiques au moyen des clauses suivantes de fermeture: si φ est une formule, alors $\neg\, \varphi$ en est une; si Γ est un ensemble au plus dénombrable de formules, alors $\vee\, \Gamma$ est une formule; si φ est une formule et t est une variable, alors $\exists t \varphi$ est une formule. Un *énoncé* est une formule sans variable libre. Les notions d'interprétation et de vérité s'étendent sans peine à ce contexte. En particulier $\bigvee \Gamma$ s'interprète comme la disjonction (dénombrable) des formules de Γ. (Voir [4]).

Pour chaque énoncé $\sigma \in L$, soit $\mathrm{Mod}(\sigma) = \{\langle R_i \rangle_{i \in I}$: σ est vrai dans $\langle \mathbb{N}, R_i \rangle_{i \in I}\}$. De telles parties de $E(\rho)$ seront appelées *ensembles définissables*. Il est évident que tout ensemble définissable est un borélien invariant. On définit la théorie T (respectivement M) comme l'ensemble des énoncés σ tels que $\mathrm{Mod}(\sigma)$ est une partie comaigre (respectivement de mesure 1). Par les théorèmes précédents, T et M sont complètes. En plus, toute partie dénombrable de l'une d'elles possède évidemment un modèle et ceci entraine qu'elles sont consistantes, toute preuve dans le calcul des prédicats $L_{\omega_1 \omega}$ n'utilisant qu'un ensemble dénombrable d'énoncés (voir [4]).

THÉORÈME. *Les théories T et M sont consistantes, complètes mais ne possèdent pas de modèles.*

Supposons que T ait un modèle $\mathfrak{A} = \langle A, R_i \rangle_{i \in I}$ et soit $a \in A$. Alors l'énoncé $\exists x_1 \triangle (\mathfrak{A} \restriction \{a\})(x_1/a)$, appartient à T où $\triangle (\mathfrak{A} \restriction \{a\})(x_1/a)$ est la formule obtenue en substituant la variable x, dans le diagramme $\triangle (\mathfrak{A} \restriction \{a\})$ de la structure $\mathfrak{A} \restriction \{a\} = \langle \{a\}, R_i \cap \{a\}^{\rho(i)} \rangle_{i \in I}$. D'autre part, $\mathrm{Mod}(\exists x_1 \triangle (\mathfrak{A} \restriction \{a\})(x_1/a))$ est maigre, étant l'ensemble de tous les $\langle R_i \rangle_{i \in I}$ tels que $\mathfrak{A} \restriction \{a\}$ se plonge dans $\langle \mathbb{N}, R_i \rangle_{i \in I}$, ce qui entraine une contradiction.

Le même argument montre que M n'a pas de modèle.

Il faut remarquer que ces deux théories sont différentes si $I = \mathrm{dom}\, \rho$ est infini et $\rho(i) = n$, pour tout $i \in I$. En effet, on a déjà montré dans ce cas l'existence d'un borélien invariant maigre de mesure 1. Le résultat suit alors du fait que tout borélien invariant dans $E(\rho)$ est un ensemble définissable, comme le théorème d'interpolation de Lopez–Escobar pour $L_{\omega_1 \omega}$ montre (voir [5]).

Un exemple de théorie complète, consistante et sans modèle dans un langage $L_{\omega_1 \omega}$ a été donné par Ryll–Nardzewski (voir [10]). Les auteurs ignorent cet exemple, encore inédit.

Soit $L_0 \subset L$ le langage finitaire de type ρ avec égalité. Si $I = \mathrm{dom}\, \rho$ est fini, la théorie finitaire $T_0 = T \cap L_0 = M \cap L_0$ est χ_0-catégorique, complète et décidable (elle est même complète dans le langage L). Si $I = \mathrm{dom}\, \rho$ est infini, la théorie T_0 est complète mais non χ_0-catégorique. Aux types d'isomorphismes des modèles dénombrables de T_0 correspondent les orbites du sous-espace $\mathrm{Mod}\, T_0$ de $E(\rho)$. Ce sous-espace étant comaigre, il est la réunion d'un ensemble non dénombrable d'orbites, c.a.d., T_0 possède un nombre non-dénombrable de types d'isomorphismes de modèles dénombrables.

Le deuxième auteur a employé le théorème de cette section pour donner un exemple d'un topos de Grothendieck booléen, ayant exactement deux ouverts (c.a.d., deux sous-objets de l'objet terminal), mais ne possédant aucun point.

5. Une Application à la Théorie Axiomatique des Ensembles

Soit ZF la théorie axiomatique de Zermelo–Fraenkel sans l'axiome du choix; DC le principe des choix dépendants, i.e., si X est un ensemble non-vide et R une relation binaire sur X telle que $(\forall x \in X)(\exists y \in X)\, xRy$, alors il existe une fonction $h\colon \mathbb{N} \to X$ qui satisfait la condition $h(n)\, Rh(n+1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On dénote par LM la proposition "tout ensemble de réels est mesurable au sens de Lebesgue" et par M la proposition "il existe un ensemble X et une mesure σ-additive, non-triviale, à deux valeurs, définie sur tous les sous-ensembles de X".

Théorème [7]. $ZF + DC \vdash LM \to M$.

Preuve. Il est bien connu (voir e.g. [3]) que la mesure de Lebesgue sur l'intervalle [0, 1] peut s'obtenir à partir de la mesure produit sur $2^{\mathbb{N}}$ induite par $\mu\{0\} = \frac{1}{2} = \mu\{1\}$, et vice-versa.

(On remarquera que ces constructions de mesure ainsi que leurs propriétés emploient DC). En identifiant $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ avec $2^{\mathbb{N}}$, tous sous-ensemble de $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ est mesurable, pourvu que tout ensemble de réels soit mesurable au sens de Lebesgue. En particulier tout sous-ensemble invariant a donc une mesure produit 0 ou 1, selon le théorème de la page 18. L'espace des orbites $\mathcal{O}$ est l'ensemble cherché, avec la mesure σ-additive induite par la mesure produit d'une facon évidente.

On remarquera les propriétés suivantes de $\mathcal{O}$:

(1) $\mathcal{O}$ est un quotient de $2^{\mathbb{N}}$.

(2) $2^{\mathbb{N}}$ se plonge dans $\mathcal{O}$.

(3) $\mathcal{O}$ ne peut se plonger dans $2^{\mathbb{N}}$ (autrement, le théorème de Cantor–Bernstein montrerait que $2^{\mathbb{N}}$ est mesurable, ce qui est absurde [2]).

(4) $\mathcal{O}$ ne peut être totalement ordonné (voir [7]).

References

1. M. Fisz, "Probability Theory and Mathematical Statistics," John Wiley and Sons, New York, 1963.
2. L. Gillman and M. Jerison, "Rings of Continuous Functions," Van Nostrand, New York, 1960.
3. P. R. Halmos, "Measure Theory," Van Nostrand, New York, 1950.
4. H. J. Keisler, "Model Theory for Infinitary Logic," North Holland, Amsterdam, 1971.
5. E. G. K. Lopez-Escobar, An interpolation theorem for denumerably long formulas, *Fund. Math.* **57**, 253–272.
6. M. Morley and R. L. Vaught, Homogeneous universal models, *Math. Scand.* **11** (1962), 37–57.
7. J. Mycielski, On the axiom of determinateness, *Fund. Math.* **53**, 205–224.
8. J. C. Oxtoby, "Measure and Category," Springer-Verlag, New York, 1971.
9. G. E. Reyes, Typical and generic relations in a Baire space for models, Thèse de doctorat, Berkeley, 1967.
10. D. Scott, Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers, *in* "The Theory of Models," North Holland, Amsterdam, 1963.