

Conservatoire National des Arts et Métiers
Service de Physique dans ses rapports avec l'industrie

PHR 101

"Principes et outils pour l'analyse et la mesure"

Chapitre 7

La transformée de Fourier



Joseph Fourier 1768 - 1830

J.J. Bonnet-C.Zerrouki

Version du 20/11/06

7. La transformation de Fourier

7.1. Signification physique de la transformation de Fourier

Pour un signal de mesure quelconque, on s'intéresse souvent à son évolution en fonction du temps comme l'indique la figure n°66.

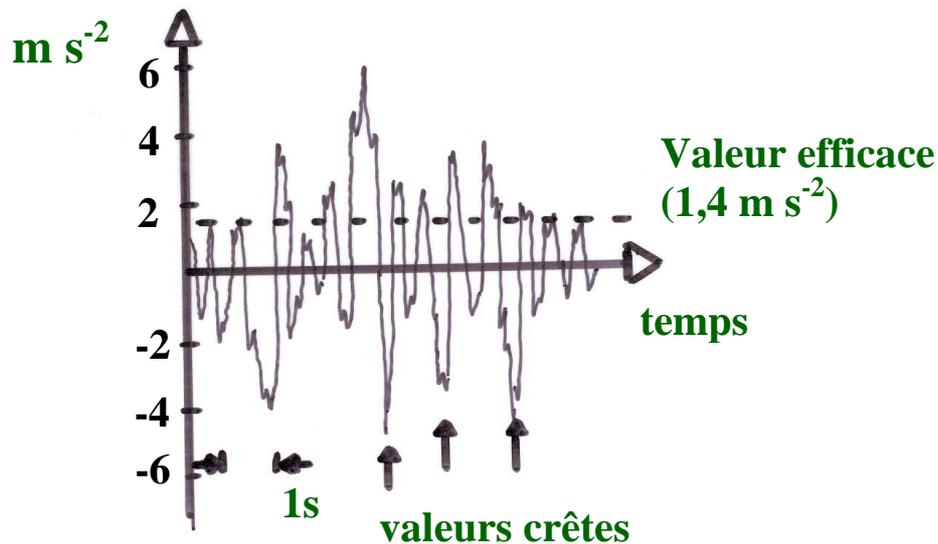


Figure 66 : Evolution en fonction du temps du signal issu d'un accéléromètre

Cette représentation temporelle donne de trop nombreuses informations de forme inintelligible.

La conversion du signal dans le domaine des fréquences peut rendre l'interprétation des informations qu'il contient beaucoup plus aisée.

A cela, il faut ajouter que de nombreux phénomènes se situent "naturellement" dans le domaine des fréquences et non pas dans le domaine du temps. Pour interpréter un signal auditif, le cerveau effectue une analyse dans le domaine des fréquences. Autre exemple, la détection d'un défaut de roulement peut être réalisée par une analyse de son spectre de fréquences. Dernier exemple, l'étude des résonances d'une structure mécanique passe par une analyse en fréquences.

Ces deux représentations (temps et fréquence) sont reliées entre elles **par les transformations de Fourier**, outils d'une importance capitale dans les techniques d'analyse du signal et dans l'explication de nombreux phénomènes physiques chimiques et biologiques.

Considérons un signal électrique $y(t)$ par exemple (tension, intensité du courant, etc...) dépendant du **temps**, faire l'**analyse de Fourier** dans le domaine des **fréquences** consiste à effectuer sur ce

signal $y(t)$ une opération mathématique du "genre" (on utilise la notation complexe de la transformée de Fourier)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \quad (192)$$

avec

$y(t)$ signal déterministe ou aléatoire temporel

ω pulsation en $\text{rd} \cdot \text{s}^{-1}$ liée à la fréquence ν ($\omega = 2 \Pi \nu$)

On obtiendra, après intégration une fonction $Y(\omega)$ qui ne dépendra plus du temps mais uniquement de la pulsation ω . **$Y(\omega)$ est la transformée de Fourier de $y(t)$.** Indépendamment de la forme mathématique particulière de la relation,

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \quad (193)$$

il est fondamental de bien comprendre que $Y(\omega)$ et $y(t)$ représentent la même grandeur physique, mais dans une représentation différente;

Si l'on considère $y(t)$ le point représentatif de l'amplitude de ce signal se déplace dans **l'espace amplitude-temps.**

Si l'on considère $Y(\omega)$, le point représentatif se déplace dans **l'espace amplitude-pulsation (fréquence).**

Lorsqu'on cherche la valeur $Y(\omega)$ pour une valeur de ω_i , cela signifie que l'on cherche dans toute l'histoire (et tout le futur) de $y(t)$ ce qui correspond à la fréquence ω_i . Ceci correspond à un **filtrage infiniment sélectif.**

Un tel filtrage n'est pas réalisable physiquement.

On ne peut donc pas connaître $Y(\omega)$ avec une localisation parfaite sur l'axe des fréquences.

De même, si l'on veut retrouver $y(t)$ à partir de $Y(\omega)$, il faut connaître le spectre pour toutes les fréquences jusqu'à l'infini et la formule montre que c'est la même opération de filtrage infiniment sélectif qui intervient, les variables temps et fréquence étant permutées.

Cela signifie que pour connaître parfaitement la valeur $y(t)$ à un instant t , il faut disposer d'une bande passante infinie.

Tout ceci n'est qu'une autre forme de la **relation d'incertitude** qui exprime **l'impossibilité pour l'observateur humain à appréhender la réalité sans la déformer ou la rendre en quelque sorte "floue".**

7.2. Décomposition d'un signal en séries de Fourier (cas d'un signal périodique)

Dans le rappel qui suit nous abandonnons volontairement la variable temps t au profit d'une variable à connotation plus mathématique. De même, la période s'appelle P et ne concerne plus uniquement une période temporelle que nous avons souvent appelée T . En effet, nous verrons que la transformée de Fourier concerne aussi bien des "situations temporelles" que des "situations spatiales" où l'on définira alors une "période spatiale" qui dans le cas d'une onde peut correspondre à sa longueur d'onde que nous avons appelé λ^*

Tout signal (ou fonction) périodique $f(x)$, de la variable x de période P peut être représenté(e) par une infinité de fonctions sinusoïdales de périodes $P, P/2, P/3$, etc.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{P}\right) \quad (194)$$

avec n nombre entier positif ou négatif.

Où les coefficients a_n et b_n se déterminent à partir des relations suivantes :

$$a_n = \frac{2}{P} \int_p f(x) \cos(2\pi n x / P) dx \quad (195)$$

et

$$b_n = \frac{2}{P} \int_p f(x) \sin(2\pi n x / P) dx \quad (196)$$

Exemples

1 cas d'une fonction créneaux $g(x)$ (figure 67) de période P :

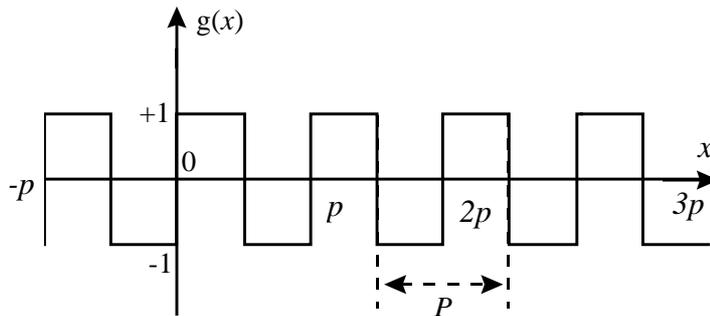


Figure 67 : Exemple de fonction périodique.

La fonction $g(x)$ étant périodique, elle peut se décomposer en séries de Fourier :

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{P}\right) \quad (197)$$

* on se souviendra avec profit que l'expression de l'élongation $u(x,y)$ de la corde en vibration harmonique du chapitre 5 pouvait se mettre sous la forme $u(x,t) = A \cos\left(\frac{2\Pi t}{T} - 2\Pi \frac{x}{\lambda}\right)$

Les coefficients a_n et b_n sont déterminés en utilisant les relations (195) et (196) avec, par exemple, comme intervalle d'intégration $[-P/2 ; +P/2]$.

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{+P/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{p}\right) dx = 0 \quad (198)$$

$$b_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{+P/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{p}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (199)$$

$$b_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{+P/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{p}\right) dx = \frac{4}{n\pi} \quad \text{si } n \text{ est impair} \quad (200)$$

La fonction $g(x)$ peut donc être représentée par la série suivante :

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi x}{P}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3\frac{2\pi x}{P}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(5\frac{2\pi x}{P}\right) + \dots \right] \quad (201)$$

On peut d'ailleurs voir sur la figure n°68 la contribution des trois premiers termes à une première représentation grossière de $g(x)$.

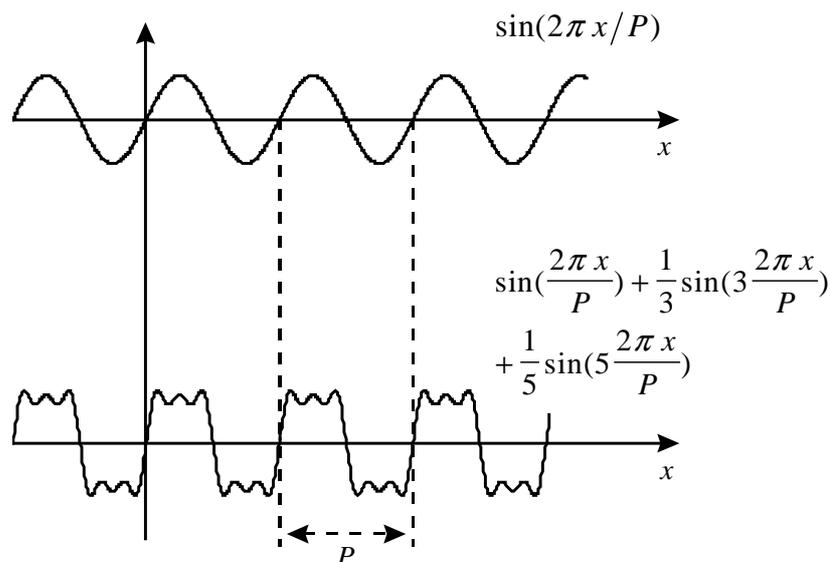


Figure 68 : Contribution de trois sinusoïdes à la représentation de la fonction créneau.

Sur les figures 69 et 70, on remarque que la représentation des fonctions "créneau" et "triangle" devient de plus en plus précise en fonction du nombre croissant de sinusoïdes utilisées.

Rappelons que la décomposition en **séries de Fourier** appliquée jusqu'ici à des fonctions périodiques, peut être généralisée à des **fonctions non périodiques** dont la représentation est faite non plus par des séries mais par une **intégrale de Fourier**.

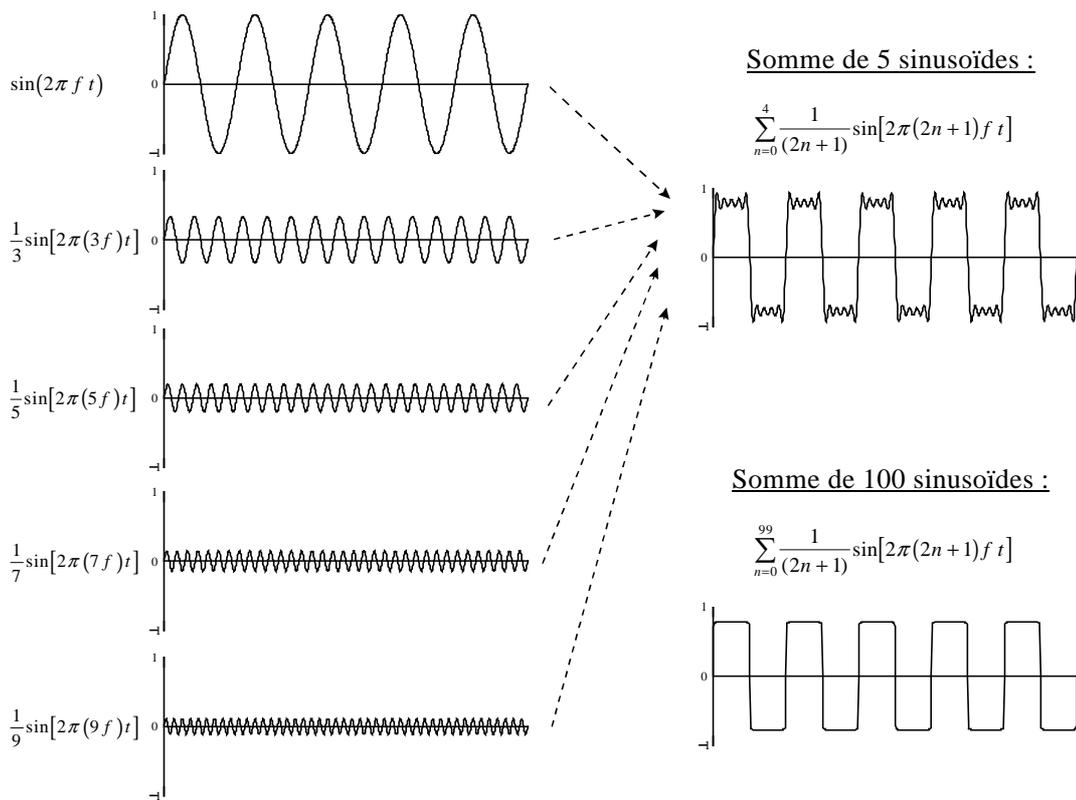


Figure 69 : Représentation de la fonction créneau par un ensemble de sinusoïdes.

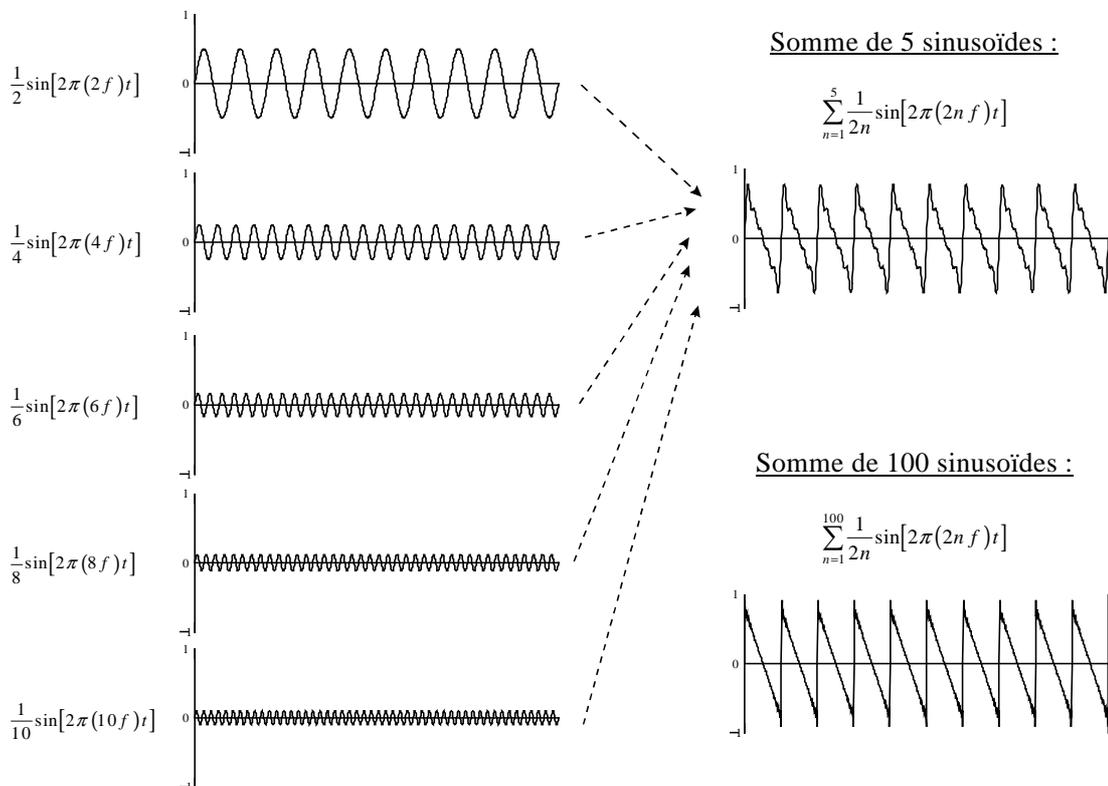


Figure 70 : Représentation de la fonction triangle par un ensemble de sinusoïdes.

Remarque :

La série de Fourier (relation 194) peut être exprimée sous forme complexe :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n x}{p}} \quad (202)$$

Où les coefficients c_n se déterminent à partir de la relation suivante :

$$c_n = \frac{1}{P} \int_p f(x) e^{-j \frac{2\pi n x}{p}} dx \quad (203)$$

7.3. Analyse fréquentielle ou spectrale

L'analyse fréquentielle ou spectrale (appelée également **analyse de Fourier**) d'un signal, consiste à en extraire les différentes fréquences et amplitudes caractéristiques des sinusoïdes qui le constituent.

Considérons l'exemple d'un signal simple f variant de façon sinusoïdale en fonction du temps :

$$f(t) = A \cos(2\pi F_1 t + \varphi) \quad (204)$$

A = amplitude, c'est la plus grande valeur prise par $f(t)$ au cours du temps ;

F_1 = fréquence de $f(t)$ exprimée en hertz (ou s^{-1}), c'est le nombre de fois par seconde que la fonction $f(t)$ se reproduit identique à elle-même ;

φ = phase à l'origine.

Une représentation usuelle de cette fonction consiste à tracer son évolution dans l'espace des temps (en fonction du temps) :

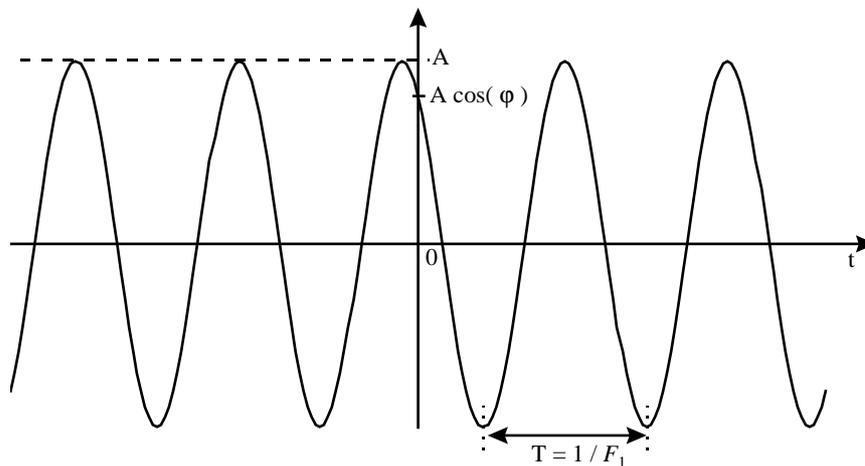


Figure 71 : exemple de signal périodique de période T (et de fréquence $F_1 = 1/T$)

Si on considère un autre signal sinusoïdal, celui-ci peut se différencier de f par son **amplitude**, par sa **fréquence** et/ou par sa **phase**. Ces trois paramètres suffisent donc pour caractériser entièrement une sinusoïde.

De là, une autre représentation de f peut être envisagée : une représentation fréquentielle ou spectrale (dans l'espace des fréquences) où l'amplitude et la phase sont représentées séparément (figure 72).

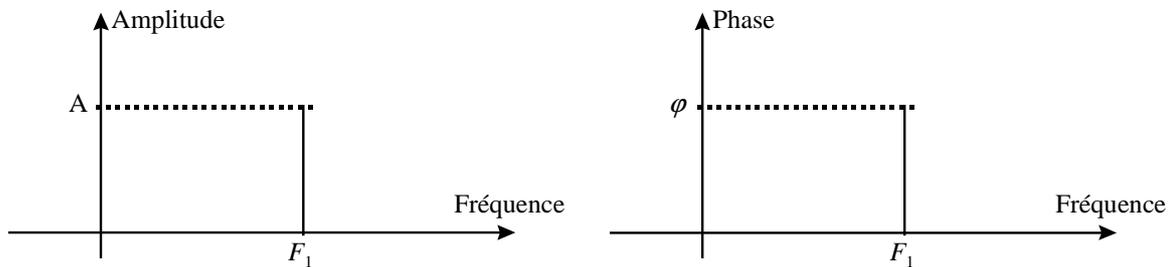


Figure 72 : Représentation spectrale du signal f

En utilisant la formule d'Euler : $\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$ (205)

la fonction $f(t)$ s'écrit :

$$f(t) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j2\pi F_1 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi F_1 t}$$
 (206)

Cette façon d'écrire f sous la forme de deux signaux complexes conjugués fait apparaître la notion de **fréquences négatives** car mathématiquement, l'étude des fréquences contenues dans un signal (analyse ou transformation de Fourier) s'effectue sur un intervalle de fréquences s'étalant de $-\infty$ à $+\infty$. Ce qu'on peut d'ailleurs voir à travers la relation (194)

En tenant compte de cette remarque, la représentation spectrale de f de la figure 72 devient :

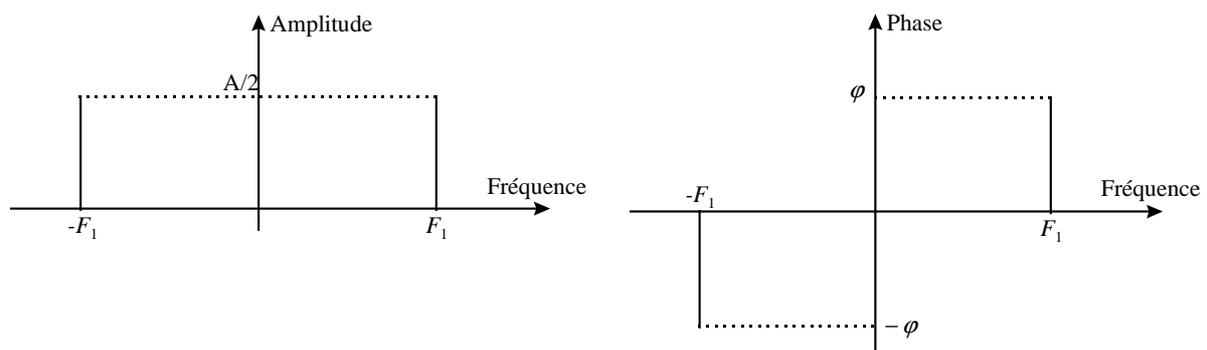


Figure 73 : Représentation spectrale de f avec la notion de fréquence négative

Dans ce qui suit **on omettra la phase** pour ne considérer que le spectre d'**amplitude**.

Maintenant que nous avons vu comment passer d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle dans le cas d'une sinusoïde, nous allons appliquer la même procédure à une fonction $h(t)$ qui est la somme de trois sinusoïdes :

$$h(t) = 2 \cos(2\pi 5t) + 4 \cos(2\pi 15t) + 5 \cos(2\pi 25t)$$
 (207)

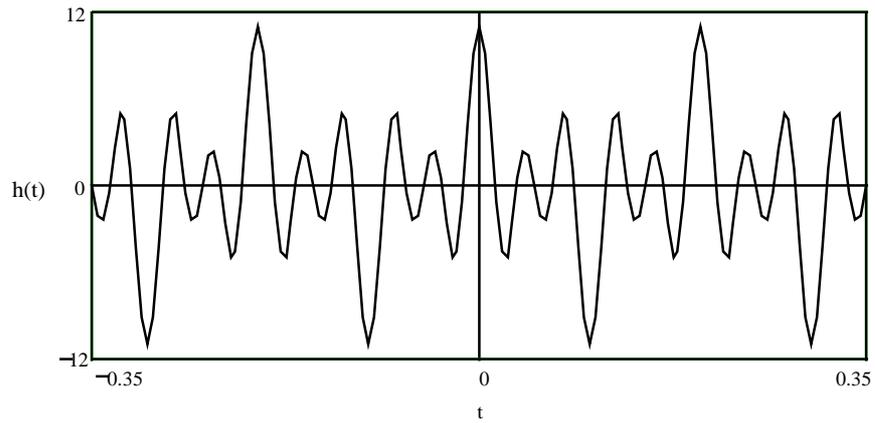


Figure 74 : Représentation temporelle de $h(t)$

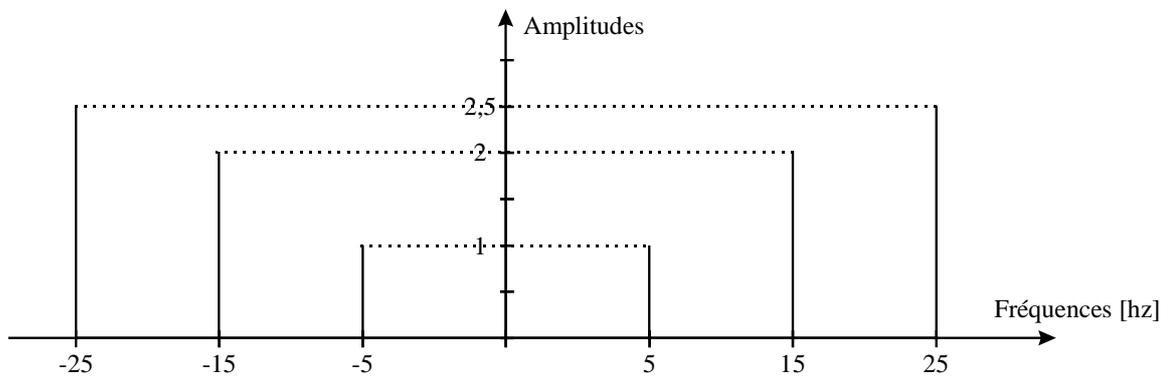


Figure 75 : Représentation spectrale (ou spectre d'amplitude) de $h(t)$

Si on compare les deux représentations de $h(t)$, soient les figures 74 et 75, on remarque qu'il est plus aisé d'extraire des informations à partir de la deuxième représentation ; ce qui illustre bien l'intérêt de l'analyse de Fourier et l'avantage dans certains cas de représenter un signal dans l'espace des fréquences.

7.4. Transformée de Fourier (cas d'une fonction non périodique)

Dans le cas où le signal (la fonction) $f(t)$ n'est pas périodique, il n'est pas décomposable en séries de Fourier. En revanche, il est possible de le transformer en une fonction $F(v)$ dépendant de la fréquence via la relation suivante

$$F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j2\pi xv} dx \quad (208)$$

La fonction F est appelée transformée de Fourier de la fonction f .

L'opération inverse (transformer F en f) est possible :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(v) e^{j2\pi xv} dv \quad (209)$$

La fonction f est appelée transformée de Fourier inverse de la fonction F .

Remarque :

L'intérêt d'avoir exprimé la série de Fourier sous forme complexe est de pouvoir faire une analogie avec la transformée de Fourier pour des fonctions périodiques ou non comme le résume le tableau suivant :

Si $f(x)$ est périodique	Si $f(x)$ est non périodique
$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi nx}{p}}$	$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(v) e^{j2\pi xv} dv$
$c_n = \frac{1}{p} \int_p f(x) e^{-j\frac{2\pi nx}{p}} dx$	$F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j2\pi xv} dx$

(210)

Dans le cadre de cette formation nous ne donnerons pas les propriétés mathématiques (linéarité, parité, etc...) de la transformation de Fourier. Dans ce qui suit, nous allons illustrer la transformation de Fourier à partir de deux expériences d'optique : la diffraction de la lumière par une fente étroite et le cas d'une onde limitée dans le temps à l'intérieur d'un créneau.

7.5. Diffraction de la lumière monochromatique par une fente étroite

Le phénomène de diffraction se produit à chaque fois qu'une fente étroite est éclairée par un faisceau parallèle monochromatique. L'intensité observée sur un écran à grande distance de cette fente consiste en une tache centrale relativement intense (ordre de diffraction $n^{\circ}0$) avec de part et d'autre des raies de moins en moins intenses (ordres supérieures). La figure n°76 représente le montage expérimental et l'allure de l'intensité du rayonnement observée sur un écran après diffraction.

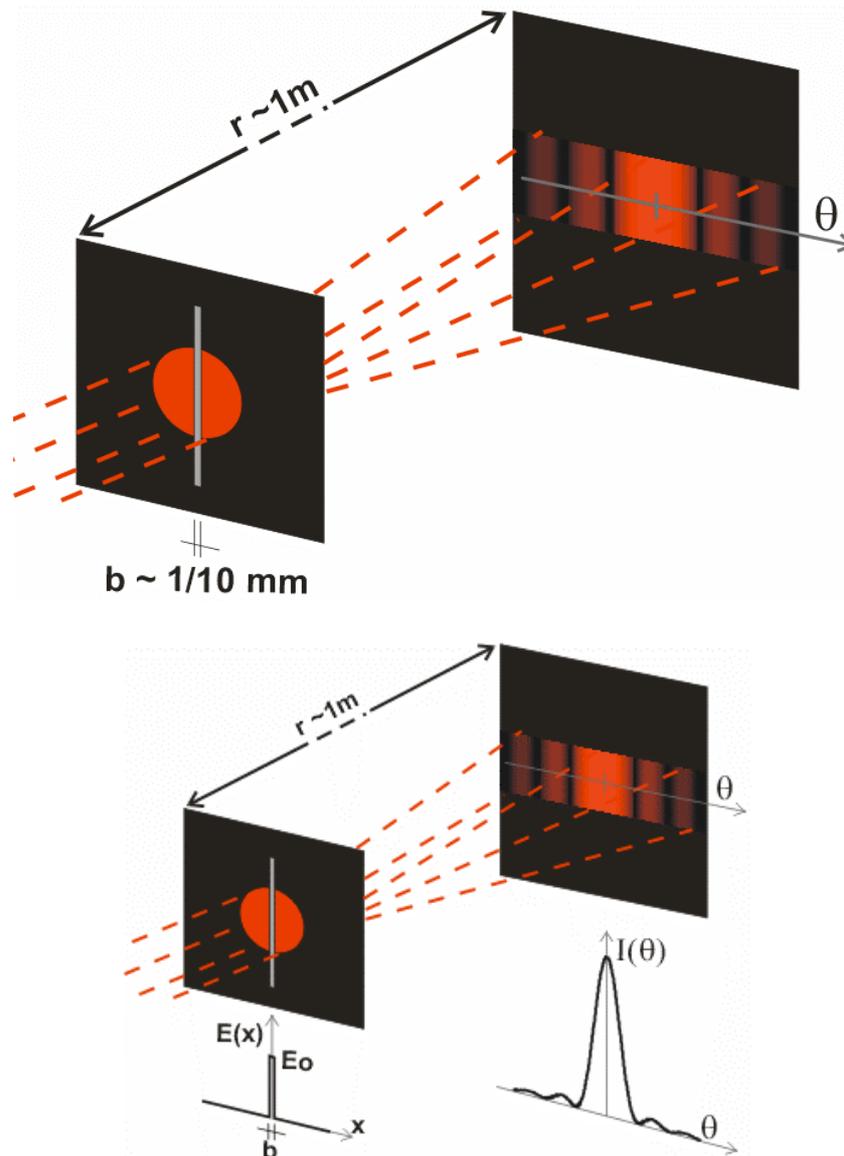


Figure 76 : schéma du montage concernant la diffraction de la lumière monochromatique par une fente étroite et allure de la figure de diffraction obtenue sur un écran.

L'interprétation du résultat de cette expérience de diffraction se fait à partir de la transformation de Fourier du champ électrique $\|\vec{E}(x)\| = E(x)$ au niveau de l'ouverture.

Si on considère uniquement l'amplitude maximale E_0 de ce champ, le fait de faire passer la lumière par la fente de largeur b (figure 76) revient à "contraindre" le champ électrique $E(x)$ à avoir comme variation :

$$E(x) = \begin{cases} E_0 & \text{si } -\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (211)$$

sous sa forme générale, la transformée de Fourier de $E(x)$ telle que nous venons de l'étudier est

$$F(u) = \text{TF}(E(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x) e^{-j2\Pi u x} dx \quad (212)$$

La grandeur u sera évidemment ici l'inverse de la longueur d'onde λ de la lumière

Si on revient au cas particulier de ce champ électrique égal à E_0 au niveau de la fente et nul ailleurs, cette expression générale devient :

$$F(u) = \text{TF}(E(x)) = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} E_0 e^{-j2\Pi u x} dx \quad (213)$$

L'intégration donne :

$$F(u) = -\frac{E_0}{j 2\Pi u} e^{-j2\Pi u x} \Bigg|_{x = -\frac{b}{2}}^{x = +\frac{b}{2}} \quad (214)$$

d'où

$$F(u) = -\frac{E_0}{j 2\Pi u} \left[e^{-j2\Pi u \frac{b}{2}} - e^{+j2\Pi u \frac{b}{2}} \right] \quad (215)$$

ou encore en simplifiant et en mettant en facteur

$$F(u) = \frac{E_0}{\Pi u} \left[\frac{e^{-j \Pi u b} - e^{+j \Pi u b}}{2j} \right] \quad (216)$$

Cette dernière expression doit être transformée en utilisant la formule d'Euler que nous avons déjà vu plusieurs fois :

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad (217)$$

avec ici

$$\varphi = \Pi u b$$

si maintenant on fait

$$e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi - [\cos(-\varphi) + j \sin(-\varphi)] \quad (218)$$

comme $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$
 et $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$

on aboutit à

$$e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = \cancel{\cos \varphi} + j \sin \varphi - \cancel{\cos \varphi} + j \sin \varphi \quad (219)$$

et finalement

$$\sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} \quad (220)$$

En appliquant cette relation mathématique à la transformée de Fourier $F(u)$ du champ électrique telle qu'elle apparaît dans (216) on obtient ($\varphi = \Pi u b$) :

$$F(u) = \frac{E_0}{\Pi u} \sin(\Pi u b) \quad (221)$$

que l'on peut encore écrire

$$F(u) = E_0 b \frac{\sin(\Pi u b)}{\Pi u b} \quad (222)$$

Il faut tout d'abord remarquer que la transformée de Fourier du champ électrique de la lumière monochromatique qui passe à travers une fente donne une fonction réelle, bien que nous ayons travaillé en représentation complexe.

D'autre part, on voit apparaître la fonction "sinus cardinal" $\frac{\sin \Pi u b}{\Pi u b}$ dans laquelle apparaît $u = \frac{1}{\lambda}$

et b la longueur de la fente.

En fait, il est très intéressant, dans le domaine de l'optique, de faire apparaître le module du

vecteur d'onde $\|\vec{k}\| = \frac{2\Pi}{\lambda}$ de la lumière et la transformée de Fourier (222) devient ($u = \frac{k}{2\Pi}$)

$$F(u) = F\left(\frac{k}{2\Pi}\right) = E_0 b \left[\frac{\sin\left(\frac{1}{2} k b\right)}{\frac{1}{2} k b} \right] \quad (223)$$

la figure n°77 représente l'allure de la variation de cette transformée de Fourier de l'amplitude (considérée comme constante ...) du champ électrique de la lumière après passage à travers de la fente : c'est l'allure typique d'une fonction "sinus cardinal".

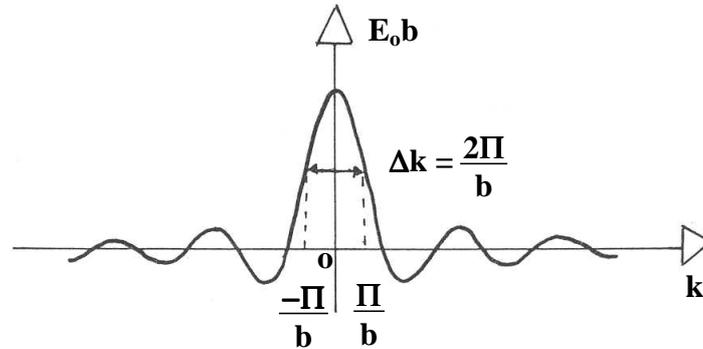


Figure 77 : allure de la variation en sinus cardinal de la lumière monochromatique diffractée par une fente de largeur b .

Cette fonction amplitude a un maximum $E_0 b$ car la valeur du terme entre crochets dans (223) tend vers 1 lorsque k tend vers 0. D'autre part, on montre que la largeur à mi-hauteur de la partie la plus intense de cette amplitude est très peu différente de $\frac{2\pi}{b}$.

De plus, comme le numérateur du terme entre crochets n'est jamais supérieur à 1, la valeur $F\left(\frac{k}{2\pi}\right)$ décroît de manière oscillante lorsque k augmente en valeur absolue. On montre que l'intervalle de valeur de k pour lequel $F\left(\frac{k}{2\pi}\right)$ est supérieur à la moitié du maximum central correspond à l'approximation

$$b \Delta k \sim 2\pi \quad (224)$$

En optique on montre que l'intensité de la lumière est proportionnelle au carré du champ électrique.

7.6. Onde limitée dans le temps à l'intérieur d'un créneau

Nous continuons par un autre exemple simple, dans lequel nous considérons uniquement **la fonction temporelle de l'onde**, et nous négligeons complètement sa fonction spatiale : c'est-à-dire que nous nous plaçons en un point fixe et que nous nous contentons d'observer l'onde électromagnétique en ce seul point.

Nous considérons le cas où l'amplitude du champ électrique dépend du temps suivant une fonction créneau :

$$\begin{cases} E_o(t) = Cte = a & \text{pour } -\tau < t < +\tau \\ E_o(t) = 0 & \text{pour } t < -\tau \text{ et pour } t > +\tau \end{cases} \quad (\text{Figure 78(a)}) \quad (225)$$

Ce type d'onde est fréquemment utilisé dans les expériences de physique, par exemple dans les expériences de mesure de la vitesse de la lumière où l'on interrompt le faisceau lumineux avec une roue dentée en rotation rapide.

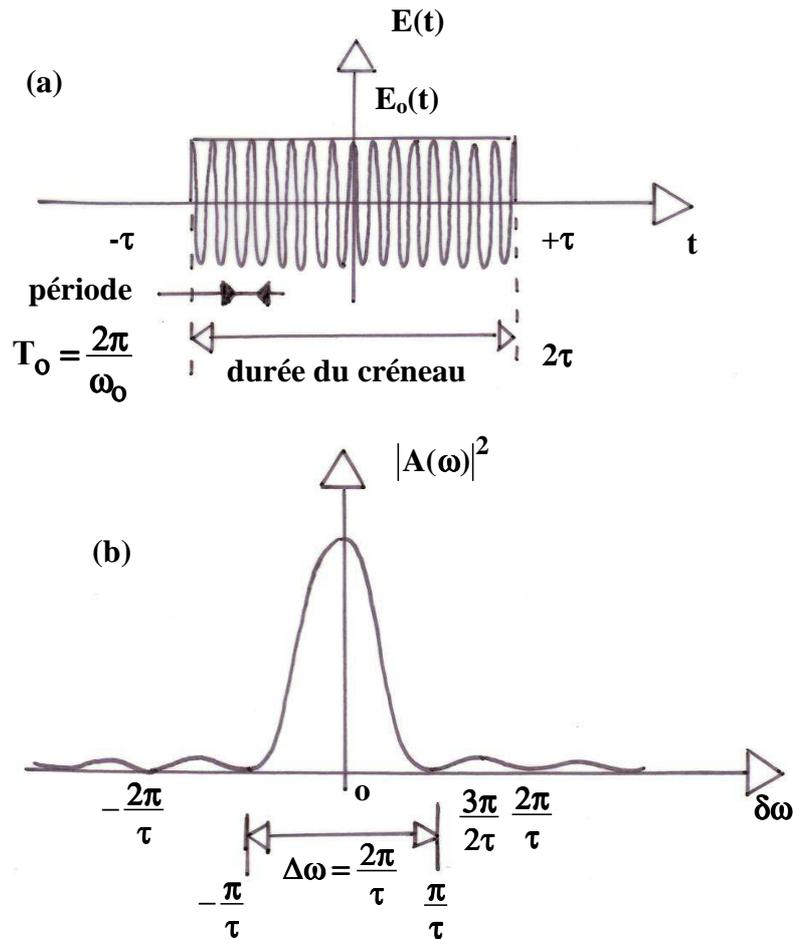


Figure 78 : (a) allure de la variation temporelle du champ électrique "en créneau" de l'onde.
(b) décomposition spectrale de "l'onde en créneau" (carré du module de sa transformée de Fourier).

Le champ électrique de l'onde $\varepsilon(t) = E_o(t) \cdot e^{j\omega_o t}$ n'est pas une véritable fonction harmonique puisque son amplitude dépend du temps. Les solutions générales de ces problèmes de propagation ont été calculées, en effet, en faisant l'hypothèse de fonctions harmoniques, dont l'amplitude est constante, parce qu'elles seules conduisent à des solutions simples facilement calculables. Nous la résoudrons en utilisant la **transformation de Fourier**, qui permet d'exprimer une fonction

quelconque comme une somme de fonctions harmoniques de pulsation ω différentes. Il s'agit en fait d'une somme continue c'est-à-dire d'une intégrale :

$$\mathcal{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) d\omega e^{j\omega t} \quad (226)$$

L'amplitude différentielle complexe $A(\omega)$ se calculant par la formule :

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\omega) d\omega e^{j\omega t} \quad (227)$$

Nous effectuons le calcul de l'amplitude $A(\omega)$ dans notre cas particulier :

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_o(t) e^{j(\omega_o - \omega)t} dt = \frac{a}{2\pi} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{j(\omega_o - \omega)t} dt = \frac{a}{2\pi} \frac{e^{j(\omega_o - \omega)\tau} - e^{-j(\omega_o - \omega)\tau}}{j(\omega_o - \omega)} \quad (228)$$

Ou encore:

$$A(\omega) = \frac{a}{\pi} \frac{\sin(\omega_o - \omega)\tau}{\omega_o - \omega} \quad (229)$$

(Comme dans le cas de la diffraction de la lumière par une fente $A(\omega)$ se trouve donc être une fonction réelle.)

A chaque composante, de pulsation ω , correspond une puissance transportée si l'on parle en langage classique, ou une probabilité de présence du photon, si l'on parle en langage quantique, qui sont proportionnelles au carré de l'amplitude $A(\omega)$:

$$P_\omega \approx |A(\omega)|^2 = \frac{a^2}{\pi^2} \frac{\sin^2(\omega - \omega_o)\tau}{(\omega - \omega_o)^2} = \frac{a^2}{\pi^2} \frac{\sin^2 \delta\omega\tau}{\delta\omega^2} \quad (230)$$

en introduisant l'écart de pulsation $\delta\omega = \omega - \omega_o$.

Remarque. La relation de proportionnalité obtenue pour la puissance peut être transformée en égalité à condition de normaliser la formule ci-dessus. La puissance différentielle P_ω est définie en sorte que la puissance totale soit donnée par :

$$P_{\text{totale}} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_\omega d\omega \quad (231)$$

On en déduit la puissance différentielle :

$$P_\omega = P_{\text{totale}} \frac{1}{\pi\tau} \frac{\sin^2(\omega - \omega_o)\tau}{(\omega - \omega_o)^2} \quad (232)$$

La figure 78b représente la variation de $|A(\omega)|^2$ en fonction de $\delta\omega$; la valeur $|A|^2$ s'annule pour $\delta\omega = k(\pi/t)$ (k entier), sauf pour $\delta\omega = 0$ où elle passe au contraire par un maximum (on utilise le fait que $(\sin x)/x \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$). Les autres maxima de $|A|^2$ sont bien inférieurs à ce maximum central : le premier maximum secondaire pour $\delta\omega \approx \frac{3\pi}{2\tau}$ est déjà inférieur à 1/20 de ce maximum central ; et les autres vont en décroissant comme $1/\delta\omega^2$. Nous avons effectué ainsi la décomposition spectrale du train d'onde en créneau : il est équivalent à la somme de nombreuses fonctions harmoniques dont les pulsations ω sont strictement réparties sur toute l'échelle des fréquences, mais dont un grand nombre n'ont qu'une intensité négligeable. Nous pouvons en pratique représenter correctement l'onde en créneau sans tenir compte de celles qui sont d'intensité très faible, c'est-à-dire en nous limitant aux pulsations comprises dans un intervalle de largeur $\Delta\omega \approx 2\pi/\tau$. La pulsation ω de cette onde en créneau est donc déterminée en fait avec une incertitude de l'ordre de grandeur $\delta\omega$, on a donc la relation :

$$\Delta\omega \cdot \tau \approx 2\pi \quad (233)$$

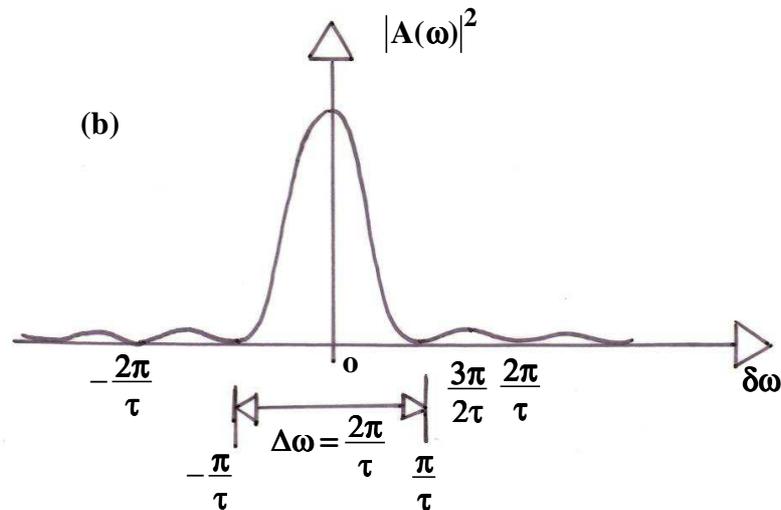


Figure 78 (b): décomposition spectrale de "l'onde en créneau" (carré du module de sa transformée de Fourier).