

## Chapitre 4

### PLASTICITÉ, RÉSISTANCE AU CISAILLEMENT, STABILITÉ DES PENTES

#### 4.1 - RAPPELS DE MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

##### 4.1.1 - Etat de contraintes

La contrainte en un point  $M$  situé à l'intérieur d'un milieu continu se définit par rapport à une facette passant par ce point. La contrainte  $\vec{f}$  sur une facette donnée se décompose en :

$$\vec{f} \begin{cases} \sigma & \text{contrainte normale} \\ \tau & \text{contrainte tangentielle} \end{cases}$$

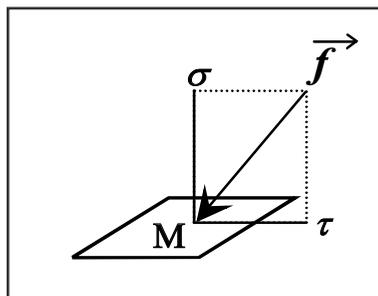


Figure 15 - Contraintes relatives à une facette

L'état de contraintes au point  $M$  est défini par un tenseur appelé tenseur des contraintes. Il existe en tout point trois plans privilégiés pour lesquels la contrainte est uniquement normale ( $\tau = 0$ ). Ils sont appelés plans principaux et sont orthogonaux ; les contraintes normales correspondantes sont les contraintes principales notées :  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Mais dans ce qui suit, nous allons nous limiter aux problèmes courants auxquels l'ingénieur essaie de se ramener et pour lesquels  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont égaux (problèmes axisymétriques) ou pour lesquels  $\sigma_2 = 0$  (problèmes à deux dimensions).

#### 4.1.2 - Diagramme de Mohr

Pour étudier l'état de contraintes en un point on utilise généralement une représentation graphique du vecteur  $\vec{f}$ , dans un système d'axes  $(\sigma, \tau)$ . Les points représentant les contraintes principales ( $\tau = 0$ ) sont donc sur l'axe  $O\sigma$ . On démontre que lorsque le plan de la facette tourne autour d'une direction principale, l'extrémité du vecteur contrainte décrit dans le plan  $(\sigma, \tau)$  un cercle, appelé cercle de Mohr (figure 16).

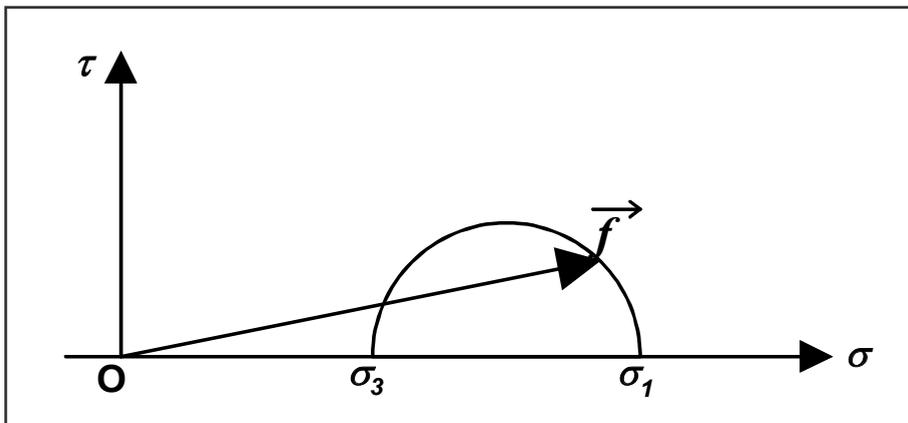


Figure 16 - cercle de Mohr

On démontre aussi que lorsque la facette tourne d'un angle  $\alpha$ , l'extrémité du vecteur contrainte tourne d'un angle  $2\alpha$  sur le cercle de Mohr.

Remarque : dans le cas particulier d'un liquide,  $\tau$  est toujours nul et  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (pression hydrostatique). Dans ce cas la représentation de Mohr est évidemment sans intérêt.

#### 4.1.3 - Relations contraintes déformations

Le tenseur des déformations et le tenseur des contraintes sont liés par des relations traduisant le comportement rhéologique du matériau. Le modèle rhéologique le plus simple est celui de l'élasticité linéaire isotrope. Si  $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}$  désigne le tenseur des déformations et  $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  le tenseur des contraintes, l'élasticité linéaire isotrope s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ \sigma_y & 1 & -\nu \\ \sigma_x & -\nu & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$

où  $E$  est le module d'élasticité (ou module d'Young) et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

Dans un essai de compression simple suivant l'axe  $zz'$ , on aboutit aux relations simples suivantes :

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z, \text{ et } \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_z$$

Ce modèle élastique linéaire isotrope peut être considéré comme une assez bonne approximation du comportement des sols dans le domaine des faibles contraintes, et en compression uniquement. Lorsqu'on sort de ce domaine, le sol subit des déformations irréversibles et entre dans le domaine de la plasticité. Dans le plan  $(\sigma, \tau)$  la limite du domaine élastique peut être représentée par une courbe appelée « courbe intrinsèque ». C'est l'enveloppe des cercles de Mohr correspondant à la rupture (figure 17).

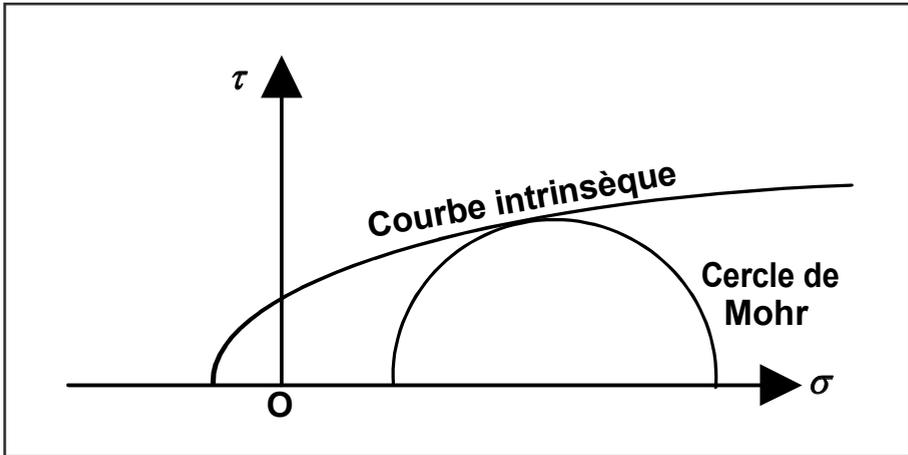


Figure 17 - limite des domaines d'élasticité et de plasticité (matériau quelconque)

## 4.2 - MODÈLES SIMPLIFIÉS DE COMPORTEMENT DES SOLS

### 4.2.1 - Notion de contrainte effective

L'approximation de Terzaghi consiste à considérer que le sol est composé de deux milieux couplés, l'ossature granulaire et l'eau interstitielle. Dans un sol saturé, les contraintes totales notées  $\sigma$  se répartissent entre le squelette solide (contraintes effectives notées  $\sigma'$ ) et l'eau (pression interstitielle isotrope notée  $u$ ). D'où la relation très importante de Terzaghi :

$$\sigma = \sigma' + u \text{ et } \tau = \tau'.$$

Dans un sol non saturé, la phase liquide n'est plus continue. Donc, si l'on néglige les contraintes de capillarité,  $u$  est partout nul ( $\sigma = \sigma', \tau = \tau'$ ).

### 4.2.2 - Sols pulvérulents (sables et graviers)

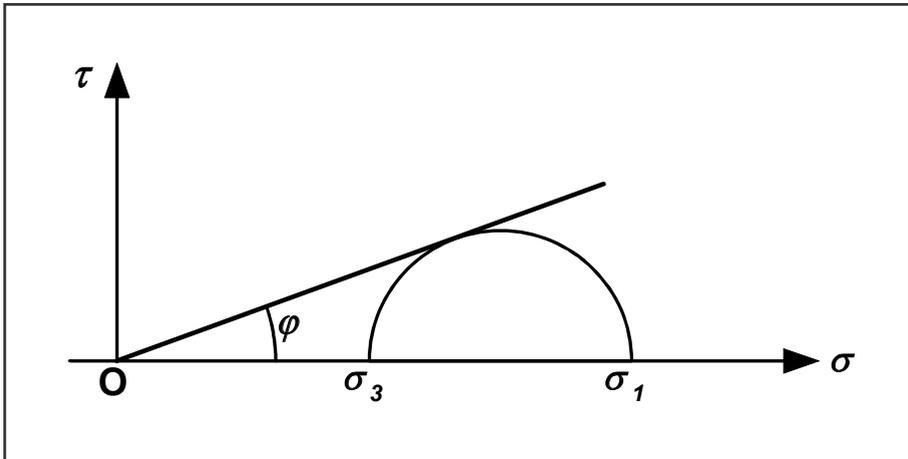
Ces sols étant perméables, il est habituellement considéré qu'il ne s'y développe pas de pression interstitielle. Il est constaté par l'expérience que la courbe intrinsèque dans le plan de Mohr peut être correctement assimilée à une droite passant par l'origine. L'angle  $\varphi$  qu'elle forme

avec l'axe des  $\sigma$  est baptisé angle de frottement interne du sol <sup>1</sup>(cf. figure 18). Il y a début de glissement, et le domaine de la plasticité est atteint lorsque :  $\tau = \sigma \cdot \tan \varphi$ .

$\tau$  = contrainte tangentielle

$\sigma$  = contrainte normale

$\varphi$  = angle de frottement interne.



**Figure 18 - droite de Coulomb pour un sol pulvérulent**

Pour un sable donné, il a été constaté expérimentalement que  $\tan \varphi = K/e$ , où le coefficient  $K \approx 0,45$  à  $0,55$  dépend de la forme des grains et de leur répartition granulométrique.

Pour déterminer l'angle  $\varphi$ , on peut utiliser en laboratoire l'essai de cisaillement, ou essai à la boîte de Casagrande. Il consiste à appliquer une contrainte normale à un échantillon de sol maintenu en conditions drainées, puis à le soumettre à un cisaillement horizontal jusqu'à la rupture (figure 19). La courbe intrinsèque s'obtient directement en reportant les couples  $(\sigma, \tau)$  où  $\sigma$  est la contrainte normale appliquée pendant une rupture et  $\tau$  la contrainte de cisaillement mesurée pour la rupture. Cet essai s'interprète en considérant que la courbe intrinsèque

<sup>1</sup> Il est frappant de savoir que l'on ne sait pas calculer cet angle de frottement interne en fonction de l'angle de frottement grain sur grain et de la forme des grains.

est une droite (droite de Coulomb), l'angle qu'elle fait avec l'axe des  $\sigma$  étant l'angle de frottement interne.

Cet essai simple est de moins en moins utilisé pour les sols fins, car peu précis, au bénéfice de l'essai triaxial abordé au § 4.2.3.

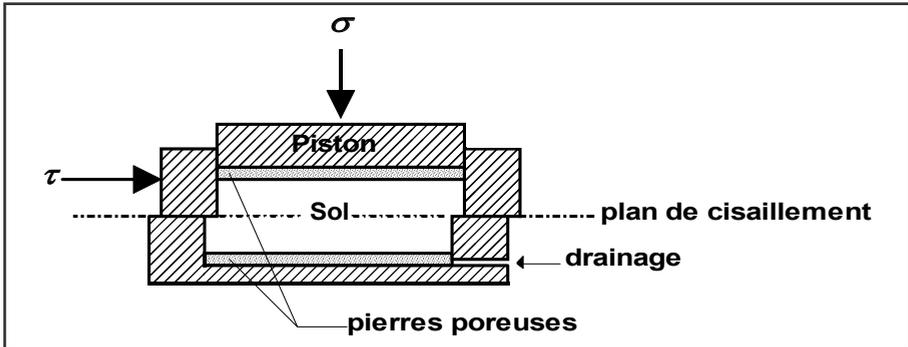


Figure 19 - schéma de la boîte de cisaillement

Au cours d'un chargement, pour un sable dense, il y a dilatance. Un sable lâche, au contraire, se contracte lors du cisaillement. La densité critique est la densité initiale telle que la déformation volumique de l'échantillon  $\Delta V/V$  reste nulle pendant tout le cisaillement (cf. figure 20).

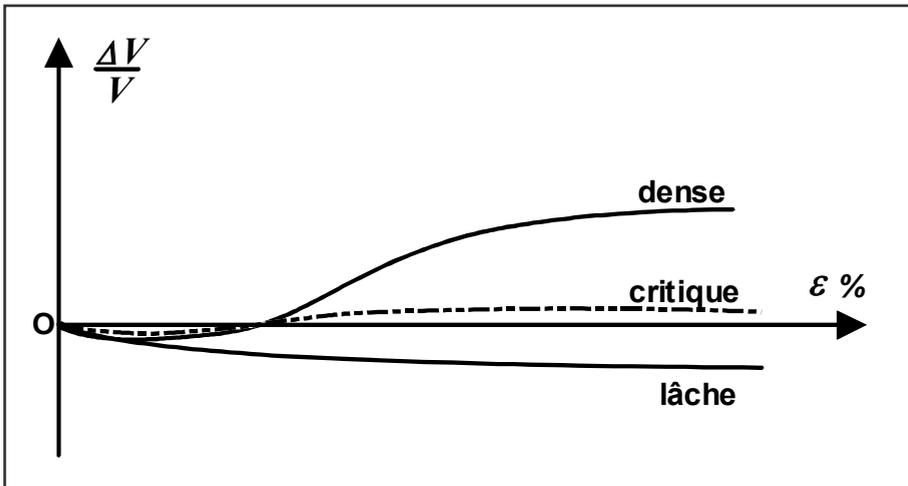


Figure 20 - changement de volume d'un sable pendant un cisaillement ( $\epsilon$  = déformation longitudinale)

### 4.2.3 - Sols fins

Un sol fin normalement consolidé<sup>2</sup> se trouve généralement dans un état de densité inférieure à la densité critique. D'où une tendance pendant le cisaillement à la diminution de volume, ce qui entraîne l'augmentation des pressions interstitielles.

Pour déterminer les paramètres de la courbe intrinsèque d'un sol fin, l'essai de laboratoire le plus courant est l'essai triaxial. Un échantillon cylindrique de sol est placé dans une cellule contenant de l'eau, dont une membrane étanche le sépare. Par l'intermédiaire de l'eau, une contrainte radiale uniforme et constante  $\sigma_2 = \sigma_3$  est appliquée. Un piston applique une contrainte axiale  $\sigma_1$  croissante (figure 21). Une rupture permet de tracer un cercle de Mohr, généralement celui pour lequel l'extrémité de diamètre  $\sigma_1$  correspond au pic de contrainte. C'est la contrainte principale majeure,  $\sigma_3$  étant la contrainte principale mineure.

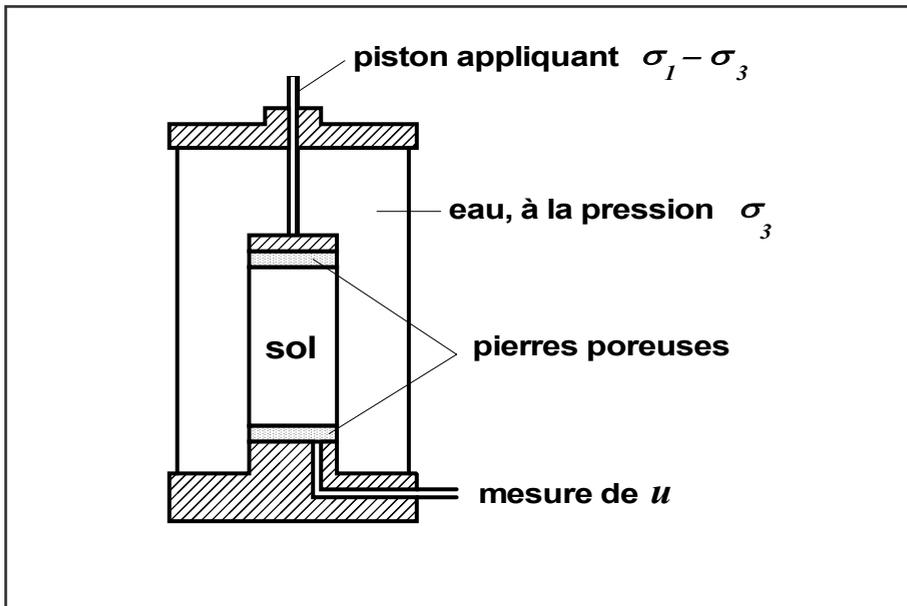


Figure 21 - schéma de l'appareil triaxial

<sup>2</sup> Dont la définition précise sera donnée au § 5.3.4.

Trois ruptures sont en général réalisées, sous différentes valeurs de  $\sigma_3$ , avec trois échantillons réputés identiques. Elles permettent de tracer la droite tangente aux trois cercles de Mohr. Son ordonnée à l'origine ( $c$ ) est par définition la cohésion du sol. L'angle  $\varphi$  formé avec l'axe des contraintes normales est l'angle de frottement interne du sol. Les sols pulvérulents (cf. § 4.2.2) sont donc dépourvus de cohésion. Dans le plan de Mohr, la courbe intrinsèque (cf. § 4.1.3) est donc une droite, appelée droite de Coulomb. Coulomb avait le premier considéré que les contributions des deux phénomènes mécaniques, la cohésion et le frottement interne pouvaient s'ajouter indépendamment l'une de l'autre.

Trois types d'essais triaxiaux sont couramment pratiqués.

☞ Dans l'essai consolidé, drainé (CD), les pressions interstitielles se dissipent au fur et à mesure (essai lent qui correspond au comportement à *long terme* du sol). Donc à tout instant  $u = 0$ .

Cet essai s'interprète classiquement en considérant le critère de Coulomb : la courbe intrinsèque est une droite d'équation  $\tau = c' + \sigma' \tan \varphi'$  où  $\varphi'$ , angle de frottement effectif, et  $c'$ , cohésion drainée, sont les caractéristiques intergranulaires du sol. (Voir figure 22 ci-après, essai CD).

☞ Dans l'essai consolidé, non drainé avec mesure de  $u$  (CU), l'échantillon est tout d'abord consolidé sous une contrainte isotrope jusqu'à dissipation des pressions interstitielles ; puis le drainage est fermé et la contrainte verticale est augmentée jusqu'à la rupture tout en mesurant les variations de la pression interstitielle. Cet essai, plus rapide que l'essai consolidé drainé, permet malgré tout d'accéder aux caractéristiques intergranulaires du sol  $c'$  et  $\varphi'$ , à condition de l'interpréter en contraintes effectives (voir figure 22, essai CU).

☞ Dans l'essai non consolidé non drainé (UU), les pressions interstitielles ne se dissipent pas. Cet essai rapide correspond au comportement à court terme.

Pendant l'essai, le volume est constant. Cet essai est interprété en contraintes totales et permet d'estimer  $c_u$ , cohésion non drainée. L'angle de frottement interne  $\varphi_u$  est généralement supposé nul (voir figure 22, essai CU).

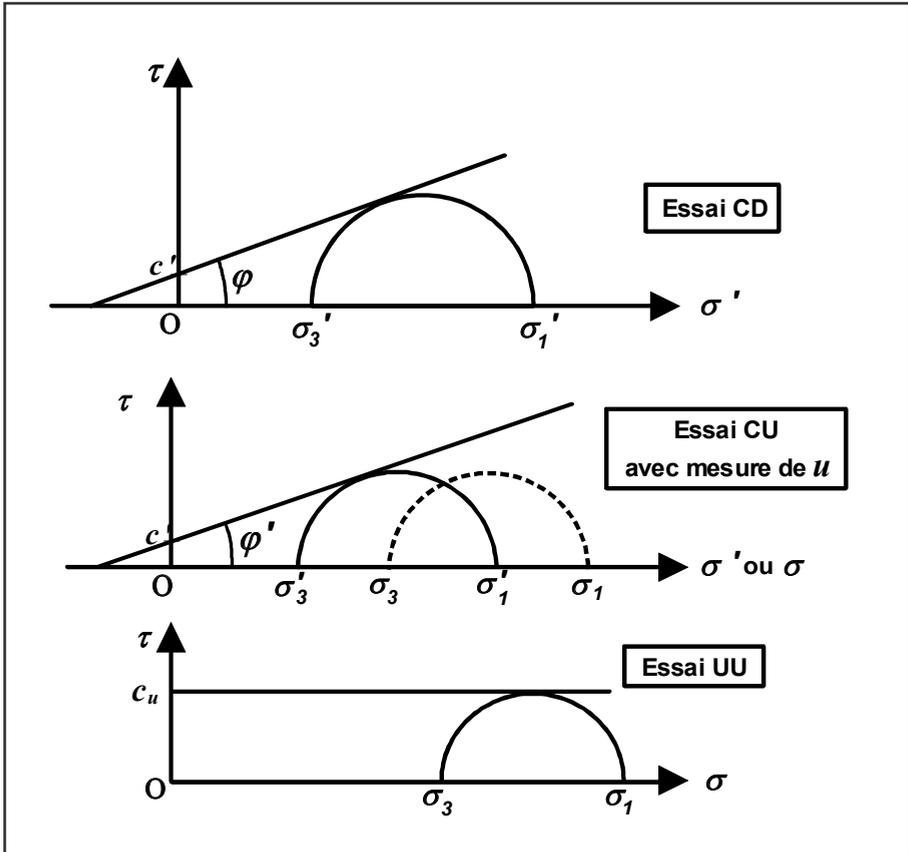


Figure22 - interprétation des différents types d'essais triaxiaux

L'essai triaxial est le plus classique, mais il existe d'autres essais :

- compression isotrope (triaxial pour lequel  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  pendant l'essai) ;
- compression à déformation latérale nulle ou essai œdométrique (traité chapitre 5) :  $\varepsilon_3 = 0$  ;
- cisaillement direct (déjà abordé en 4.2.2.) ;

- compression simple ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ). Ce dernier essai est facile à interpréter en contraintes totales. En effet, le cercle de Mohr passe par l'origine et a pour diamètre  $\sigma_1$ , d'où :  $c_u = \sigma_1 / 2$

### 4.3 - STABILITÉ DES PENTES

L'étude de stabilité d'un talus est généralement menée en considérant une section plane et en se donnant une surface de rupture circulaire (cf. figure 23). Cette dernière hypothèse correspond d'ailleurs bien à ce que l'on observe en réalité. Le terrain entre la surface et le cercle est découpé en tranches verticales minces pour lesquelles on calcule les forces en présence en se plaçant à l'instant de la rupture (poids de la tranche, frottement contre le massif de sol qui reste en place...). Par définition, le coefficient  $F$  de sécurité au glissement est le rapport entre le moment cumulé des forces résistantes et celui des forces motrices. Le cercle qui conduit au coefficient minimal est le cercle critique. Il conduit au coefficient de sécurité du talus.

Pour un remblai à construire, le calcul doit être mené d'une part à court terme (caractéristiques  $c_u$  et  $\varphi_u$  obtenues à partir de l'essai triaxial UU interprété en contraintes totales) et d'autre part à long terme (caractéristiques  $c'$  et  $\varphi'$  obtenues à partir de l'essai CD ou de l'essai CU interprété en contraintes effectives). Le bon choix des paramètres géotechniques de calcul est fondamental. Avec l'approche de FELLENIUS qui suppose en particulier que les actions entre tranches se compensent, le coefficient de sécurité au glissement à long terme vaut :

$$F = \frac{\sum_i [c' l_i + (W_i \cos \alpha_i - u_i l_i) \tan \varphi']}{\sum_i W_i \sin \alpha_i}$$

$W_i$  désigne le poids humide ou saturé de la tranche verticale  $i$ ,  $l_i$  désigne la longueur du contact de cette tranche avec la surface de rupture considérée et  $u_i$  désigne la pression interstitielle qui règne dans la zone (notations en figure 23).

Le lecteur trouvera des recommandations utiles dans le manuel du Comité Français des Grands Barrages cité en bibliographie (page 96).

A court terme, l'hypothèse d'un matériau non saturé est en général valide, tout au moins pour des remblais de hauteur modérée construits avec des matériaux à teneur en eau inférieure à celle de l'optimum Proctor.

A long terme pour un barrage en terre, la zone saturée et la zone non saturée doivent être distinguées. Le calcul consiste à considérer dans la zone saturée les sous-pressions définies par un réseau de lignes de courant et d'équipotentiels (cf. § 3.2 page 35) en se plaçant dans le cas le plus défavorable pour la vie du barrage. Pour le talus amont, c'est toujours celui de la vidange rapide où l'eau dans la retenue s'abaisse beaucoup plus vite que l'eau infiltrée dans le remblai. Le même principe vaut pour l'étude de stabilité des parois d'un canal en terre.

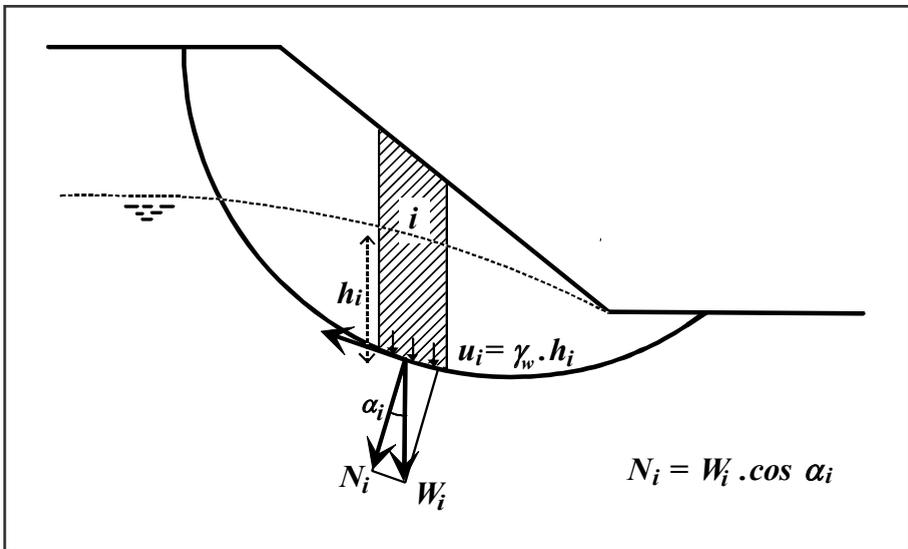


Figure 23 - Principe d'un calcul de stabilité au glissement