CHAPITRE II

Oscillations libres amorties : Systèmes à un degré de liberté

Introduction : Le pendule élastique comme le pendule pesant, se comporte comme un oscillateur harmonique à la condition de négliger tout frottement. Il oscille alors théoriquement sans jamais s'arrêter. En réalité, la masse se déplace dans un fluide (en général l'air) où il existe toujours des forces de frottement de type visqueux. L'oscillateur est alors amorti et fini par s'arrêter.

II.1 Oscillations libres amorties

La présence de frottements implique une dissipation d'énergie sous forme de chaleur ; on observe alors

- soit des oscillations dont l'amplitude diminue au cours du temps,
- soit un retour à l'équilibre sans oscillation.

On parle alors d'***amortissement.*** L'expression de la force de frottement visqueux est la suivante :

$$F_q = -\alpha\dot{q}$$

Tel que :

α : est le coefficient de frottement visqueux. α : $[N.s/m]$.
q : la cordonnée généralisée du système ;
$\dot{q}$: La vitesse généralisée du système.

Le signe moins (-) vient du fait que cette force s'oppose au mouvement en agissant dans la direction et le sens contraire à la vitesse.
Dans un mouvement unidimensionnel x la force s'écrit sous la forme :

$$\vec{f} = -\alpha\,\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{u}$$

II.2 Equation de Lagrange dans un système amorti

En tenant compte de la force de type frottement fluide (coefficient de frottement visqueux α), l'équation de Lagrange dans ce cas devient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_q$$

Sous l'action des forces de frottements, le système dissipe (perde) de l'énergie mécanique sous forme de chaleur, il ya donc une relation entre la force F_q et la fonction de dissipation D d'un côté et la fonction de dissipation et le coefficient de frottement visqueux α :

$$\left[F_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \qquad et\ D = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2\right]$$

L'équation de Lagrange dans le cas d'un système amorti devient : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$

<u>II.2.1 Equation différentielle</u> : Système masse-ressort-amortisseur

Reprenons le cas du pendule élastique (vertical par exemple). L'étude de l'oscillateur amorti se fait de la même façon que précédemment mais en ajoutant la force de frottement visqueux.

A une dimension, l'équation de Lagrange s'écrit : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$

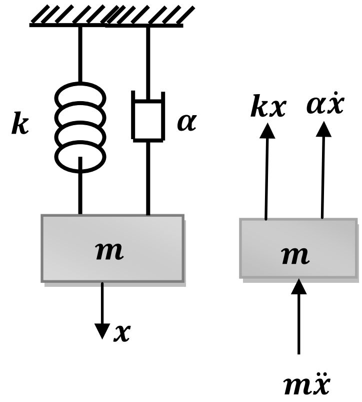
<u>L'énergie cinétique du système</u> : c'est l'énergie cinétique de la masse m : $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

<u>L'énergie potentielle du système</u> : c'est l'énergie emmagasinée dans le ressort $U=\frac{1}{2}kx^2$

La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$

La fonction de Lagrange : $L = T - U \Longrightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x} \end{cases}$$



En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura :

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} \Longrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

- ✓ C'est l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un système libre amorti.
- ✓ Par rapport aux oscillations libres non amorties, on reconnaît un nouveau terme ($\frac{\alpha}{m}\dot{x}$) provenant de la dissipation d'énergie.
- ✓ La forme générale : $\ddot{q} + \frac{\alpha}{m}\dot{q} + \frac{k}{m}q = 0$
- ✓ Souvent l'équation différentielle est écrite sous une forme dite réduite : $\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega^2{}_0 q = 0$

Tels que : $\begin{cases} \delta = \frac{\alpha}{2m}[1/S]: \textit{Facteur d'amortissement.} \\ \xi = \frac{\delta}{\omega_0} \text{ (Sans unité) : } \textit{Rapport d'amortissement.} \end{cases}$

À une dimension la forme réduite s'écrit : $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2{}_0 x = 0$

II.2.2 La solution de l'équation différentielle : Système masse-ressort-amortisseur

L'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2{}_0 x = 0$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre.

La fonction $x(t) = De^{rt}$ est une solution particulière de cette équation différentielle à condition que r soit une des deux racines r_1 et r_2 de l'équation du second degré, appelée équation caractéristique.

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$$

La solution générale de l'équation prend la forme : $x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$

Tel que: $\begin{cases} r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2} \\ r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2} \end{cases}$; On voit bien que la solution dépend des valeurs de δ et w_0.

1^er cas : $\delta < \omega_0$ ($0 < \xi < 1$) : ***système sous- amorti*** ou ***faiblement amorti***

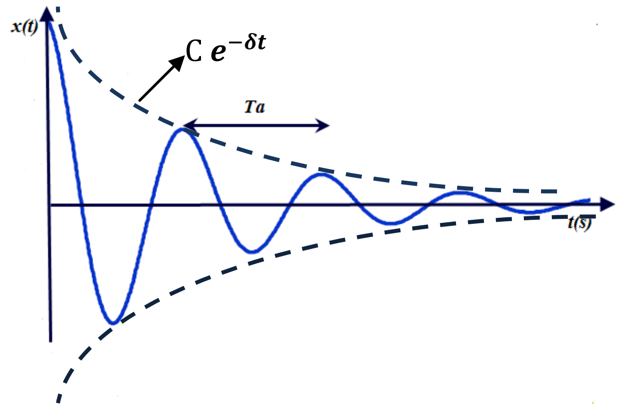
$$\Longrightarrow \delta^2 - \omega_0{}^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -\delta + \sqrt{j^2(\omega_0{}^2 - \delta^2)} = -\delta + j\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} = -\delta + j\omega_a \\ r_2 = -\delta - \sqrt{j^2(\omega_0{}^2 - \delta^2)} = -\delta - j\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} = -\delta - j\omega_a \end{cases}$$

$\omega_a = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} = w_0\sqrt{1 - \xi^2}$: **C'est la Pulsation des oscillations amorties**

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0{}^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Donc : $T_a = \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}}$; T_a: **pseudo-période**



La solution : $x(t) = C\, e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$

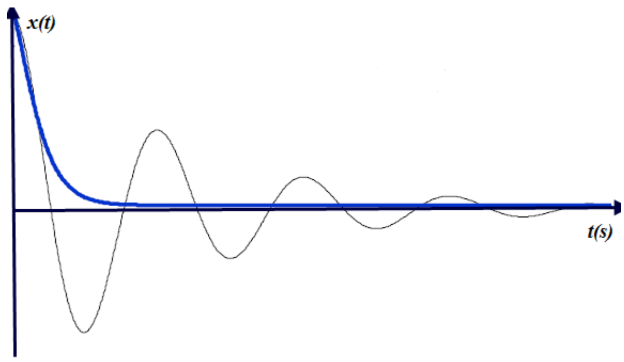
Remarques :

- $x(t)$ représente un mouvement vibratoire.
- L'amplitude $C\, e^{-\delta t}$ est décroissante : $x(t)$ tend vers **0** quand **t** augmente.
- l'élongation **$x(t)$** va osciller en restant comprise entre $-C\, e^{-\delta t}$ et $C\, e^{-\delta t}$.Ces deux exponentielles représentent l'enveloppe du mouvement de l'oscillateur c'est-à-dire les positions extrémales prises par *x* lorsque le temps s'écoule.

2 éme cas : $\delta = \omega_0$ ($\xi = 1$) : **Amortissement critique :** $r_1 = r_2 = -\delta$

La solution : $x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\delta t}$

Si $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow \alpha = \alpha_c = 2\sqrt{km}$: Valeur critique du coefficient de frottement.



Remarques :

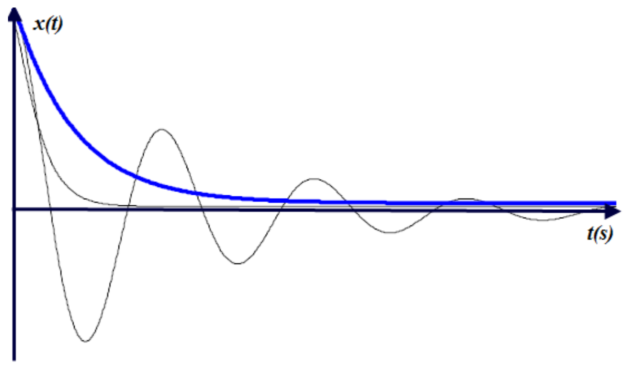
- $x(t)$ n'est pas oscillatoire car il ne contient pas un terme sinusoidal.
- $x(t)$ tend vers **0** sans oscillation quand le temps augmente.
- Le système revient à sa position d'équilibre le plus rapidement possible.

3 éme cas : $\delta > \omega_0$ ($\xi > 1$) : système ***sur- amorti*** ou ***fortement amorti***

$$\Longrightarrow \begin{cases} r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^{\,2}} \\ r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^{\,2}} \end{cases}$$

La solution :

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(C_1\, e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^{2}}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^{2}}\,t}\right)$$



Remarques :

- $x(t)$ tend vers **0** sans oscillation quand le temps augmente.
- $x(t)$ est un mouvement non sinusoïdal

II.3 L'oscillateur harmonique électrique

Nous allons voir maintenant qu'il existe un autre type d'oscillateur harmonique amorti dans un autre domaine de la physique : l'électricité.

Soit un circuit électrique, constitué des 3 éléments de base misent en série :

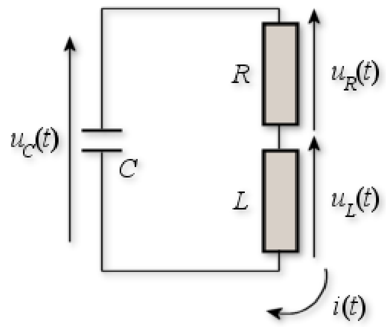
- un résistor de résistance R ;
- un condensateur de capacité C ;
- et une bobine d'inductance L.

Selon la loi de de Kirchoff :

$$u_R + u_C + u_L = 0 \Longrightarrow Ri(t) + \frac{1}{c}\, q + L\, \frac{di}{dt} = 0$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}\, q + L\, \frac{dq^2}{dt^2} = 0 \Longrightarrow R\dot{q} + \frac{1}{c}\, q + L\, \ddot{q} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{Lc}\, q = 0 \Longrightarrow \ddot{q} + 2\delta\, \dot{q} + \omega^2{}_0 q = 0$$



avec $\begin{cases} \delta = \frac{R}{2L} \\ {\omega_0}^2 = \frac{1}{Lc} \end{cases}$ Donc : $\boldsymbol{\ddot{q} + 2\delta\, \dot{q} + \omega_0 q = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \delta = \frac{R}{2L} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{Lc}} \end{cases}}$

Remarque :

- Pour un amortissement critique $\boldsymbol{\delta = \omega_0 \Longrightarrow \frac{R}{2L} = \sqrt{\frac{1}{Lc}}}$ Donc : $\boldsymbol{R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{c}}}$

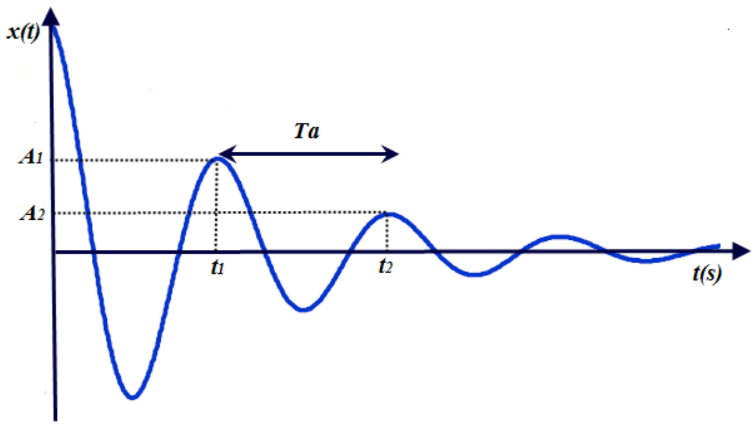
II.4 Décrément logarithmique

Définition : C'est le logarithme du rapport de 2 amplitudes successives des oscillations amorties.

$$D = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_2)} \quad ; \quad t_2 = t_1 + T_a$$

Où $x(t_1)$ et $x(t_1 + T_a)$ représentent les amplitudes des oscillations aux instants t_1 et $(t_1 + T_a)$: généralement ces deux instants sont choisis comme correspondant à deux extrema successifs de même signe. Cette quantité mesure la décroissance des amplitudes pendant une période.

$$D = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_1 + T_a)}$$



Pour un système amorti :

$$x(t) = C\, e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$$

$$\Longrightarrow D = \ln\frac{C\, e^{-\delta t_1} \sin(\omega_a t_1 + \varphi)}{C\, e^{-\delta(t_1 + T_a)} \sin(\omega_a (t_1 + T_a) + \varphi)}$$

$$D = \ln\left(e^{\delta T_a}\right) = \delta T_a$$

$\delta T_a = \delta \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}} = \xi\omega_0 \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}} = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$; donc :

$$\boldsymbol{D = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \delta T_a = 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Remarques :

- Pour plusieurs périodes : $T = nT_a$; $t_2 = t_1 + nT_a$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{D = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_1 + nT_a)} = n\delta T_a = 2\pi\frac{n\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- La pseudo-période et le décrément logarithmique n'ont de sens que si le régime est pseudopériodique.

II.5 Facteur de qualité (Facteur de surtension)

Pour décrire l'amortissement d'un système oscillant mécanique ou électrique on emploie le **facteur de qualité *Q*** définit par l'expression suivante :

$$\boldsymbol{Q = 2\pi \frac{E_{max}}{|\Delta E|}}$$

- E_{max} : est l'énergie maximale stockée dans le système.
- $|\Delta E|$: est l'énergie perdue par cycle.
- la notion de 'qualité' pour caractériser l'oscillateur, comme la grandeur qui traduit l'aptitude du système considéré à garder son énergie tout en oscillant. La qualité est d'autant meilleure que le rapport $\frac{E_{max}}{|\Delta E|}$ est grand.

II.5.1 Calcule du facteur de qualité : système masse-ressort-amortisseur (m, k, α)

Prenons l'exemple d'un système masse-ressort-amortisseur (m, k, α) faiblement amorti dont la solution de l'équation différentielle est sous la forme :

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi),\ x_0 = C\, e^{-\delta t} \text{ et } \omega_a = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} \approx \omega_0$$

On a d'une part : $E_{max} = \frac{1}{2} m\omega^2{}_0 {x_0}^2$ (Cf.chapitre I).

D'autre part: $\Delta E = \int_t^{t+t_a} F(t)dx$

Tel que : $F(t)$: est la force de frottement visqueux : $F(t) = -\alpha\, \dot{x}(t)$

$$\Rightarrow \Delta E = \int_t^{t+T_a} -\alpha\, \dot{x}(t)dx = \int_t^{t+T_a} -\alpha\, \dot{x}(t)[\dot{x}dt] = -\alpha \int_t^{t+T_a} \dot{x}^2 dt$$

On a : $x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{x}(t) = x_0\, \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\Rightarrow \Delta E = -\alpha x^2{}_0 {\omega_0}^2 \int_t^{t+T_a} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\ dt$$

$$\int_t^{t+T_a} cos^2(\omega_0 t + \varphi)dt = \int_t^{t+T_a} \frac{1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)}{2} dt \Rightarrow \Delta E = -\frac{1}{2}\alpha T_a\, {\omega_0}^2 x_0^2$$

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a};\ \omega_a \approx \omega_0 \rightarrow \Delta E = -\alpha\pi\omega_0 x_0^2$$

- On retrouve bien une variation négative de l'énergie c'est-à-dire une perte d'énergie au cours du temps.
- L'énergie perdue se transforme en énergie thermique ou elle se disperse en se diffusant dans le milieu avoisinant.

En remplaçant dans l'expression de Q, on trouve :

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} m\omega^2{}_0 {x_0}^2}{\pi\alpha x_0^2 \omega_0} = \frac{m\omega_0}{\alpha} \Rightarrow \boldsymbol{Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{2\xi}}$$

II.5.2 Calcul du facteur de qualité : système électrique (RLC)

Dans un système mécanique $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{k})$: $E_{max} = \frac{1}{2} m\omega^2{}_0 {x_0}^2$ (cf. Chapitre I)

Dans un système électrique ***(RLC)***: $\boldsymbol{E_{max} = \frac{1}{2} L\omega^2{}_0 q_0^2}$

Dans un système mécanique $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\alpha})$: $\Delta E = -\pi\alpha x_0^2 \omega_0 \Rightarrow$ Dans un système électrique ***(RLC)***:

$$\Delta E = -\pi R q_0^2 \omega_0$$

Donc :

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L\omega^2{}_0 q_0^2}{\pi R q_0^2 \omega_0} = \frac{L\omega_0}{R}, \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Longrightarrow Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\xi}$$

Remarque :

- Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système oscillant est grande. Or Q est d'autant plus grand pour un ω_0 donné, que l'amortissement est faible. Un système très amorti a un Q faible.

Points clefs

Oscillations libres amorties

- L'équation de Lagrange pour un mouvement unidimensionnel x :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \; ; \; D = \frac{1}{2}\alpha \dot{x}^2$$

- L'équation du mouvement : $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega^2{}_0 x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \delta = \frac{\alpha}{2m} \\ \xi = \frac{\delta}{w_0} \end{cases}$

- $x(t) = Ae^{rt}$ est une solution particulière tel que : $\begin{cases} r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - w_0{}^2} \\ r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - w_0{}^2} \end{cases}$

Amortissement faible : $\delta < \omega_0$ $(0 < \xi < 1)$ $\Rightarrow \delta^2 - \omega_0{}^2 < 0$

- **La solution :** $x(t) = C\, e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$

avec $\begin{cases} \omega_a = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} : \textit{Pulsation des oscillations amorties}. \\ T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} : \textit{pseudo} - \textit{période}. \end{cases}$

Amortissement critique: $\delta = \omega_0$ $(\xi = 1)$

- **La solution :** $x(t) = (C_1 + C_2)\, e^{-\delta t}$ $avec$ $\alpha = \alpha_c = 2\sqrt{km}$

Amortissement fort : $\delta > \omega_0$ $(\xi > 1)$

- **La solution :** $x(t) = e^{-\delta t}(D_1\, e^{\sqrt{\delta^2 - w_0{}^2}\, t} + D_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2}\, t})$

- **Le Décrément logarithmique** : $D = \delta T_a$

- **Facteur de qualité** : $Q = 2\,\pi . \frac{l'\text{énergie stockée}}{l'\text{énergie perdue par cycle}} = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{2\xi}$