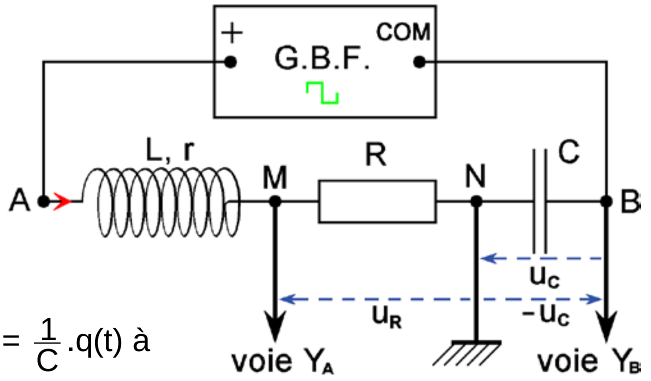
Electricité n° 3 : OSCILLATIONS LIBRES D'UN CIRCUIT RLC

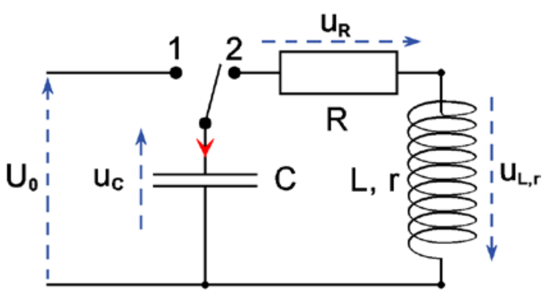
I) Régime libre du circuit RLC série :

1) Expérience :

On constitue un circuit RLC en associant en série :
- un résistor de résistance R,
- un condensateur de capacité C,
- une bobine d'inductance L et de résistance r.



On s'intéresse à l'évolution de la charge q(t) du condensateur au cours du temps.
On peut faire une étude à l'oscilloscope, dans ce cas, on utilise un G.B.F. qui génère une tension en créneaux.
L'évolution de q(t) est donnée par celle de $u_C(t) = \frac{1}{C}.q(t)$ à une constante multiplicative 1/C près.
On suit également l'évolution de i(t) qui est identique à celle de $u_R(t) = R.i(t)$, à une constante multiplicative R près : on branche la masse de l'oscilloscope en N, le générateur étant à "masse flottante". Il faut inverser le signal de la voie Y_B.
Il est possible de faire une étude de la "décharge" oscillante du condensateur à l'aide d'un ordinateur, en utilisant un générateur de tension continue E.

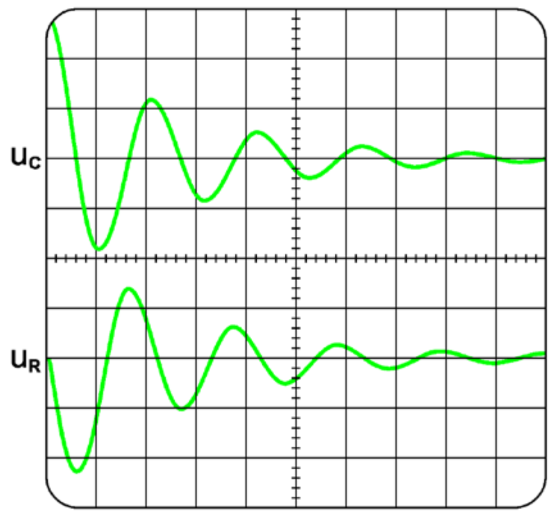


2) Oscillations libres du circuit RLC série :

On dit qu'un circuit RLC série est en régime libre lorsqu'il ne subit aucun apport d'énergie après l'instant initial.
Sur l'écran de l'oscilloscope, on observe des oscillations amorties de $u_C(t)$ qui représentent la "charge" oscillante, puis la "décharge" oscillante du condensateur.
Pour une inductance L, et une capacité C fixées, on observe trois régimes différents de l'évolution de $u_C(t)$ suivant la valeur de la résistance $R_{tot} = R + r$.

a) Régime pseudo-périodique :

Pour de faibles valeurs de R_{tot}, la tension $u_C(t)$ présente des oscillations amorties, c'est le régime pseudo-périodique. $u_C(t)$ passe périodiquement par des valeurs nulles.
La durée entre deux passages successifs par une valeur nulle, avec une pente de même signe est la pseudo-période T des oscillations amorties.
L'amplitude des oscillations de $u_C(t)$ et de $u_R(t)$ décroît au cours du temps.
On remarque que $u_C(t)$ est en retard de T/4 par rapport à $u_R(t)$: quand $u_R(t)$ est maximum, $u_C(t)$ s'annule en croissant. Quand $u_R(t)$ s'annule en décroissant $u_C(t)$ est maximum.

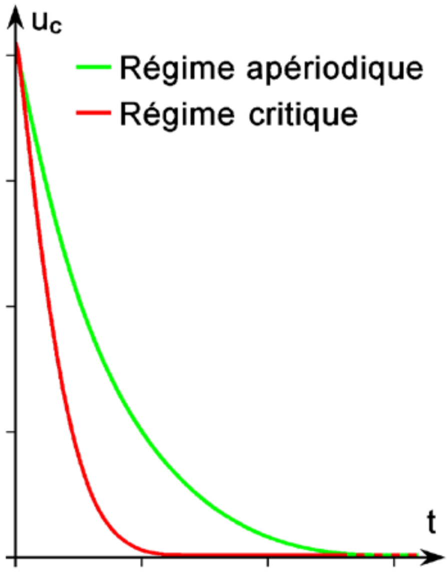


b) Régime apériodique :

Pour d'importantes valeurs de R_{tot}, la tension $u_C(t)$ s'amortit très vite, c'est le régime apériodique.
On observe la décharge sans que $u_C(t)$ oscille.

c) Régime apériodique critique :

Pour une valeur particulière de la résistance $R_{tot} = 2.\sqrt{\frac{L}{C}}$, le régime est qualifié de régime apériodique critique.
Lors de ce régime $u_C(t)$ tend plus rapidement vers une valeur nulle.
Le régime apériodique critique est difficile à déterminer expérimentalement.



3) Equation différentielle :

On ne considère que la décharge oscillante pour laquelle, à partir de t = 0, $u_{AB}(t) = 0$:

$$u_{AB}(t) = u_{L,r}(t) + u_R(t) + u_C(t) = 0$$

Avec, en convention des récepteurs : $u_R(t) = R.i(t)$; $u_{L,r}(t) = r.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt}(t)$; $q(t) = C.u_C(t)$.

D'autre part $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C.\frac{du_C(t)}{dt}$ et $\frac{di(t)}{dt} = \frac{d^2q(t)}{dt^2} = C.\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}$

D'où $$L.C.\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + (R + r).C.\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$$

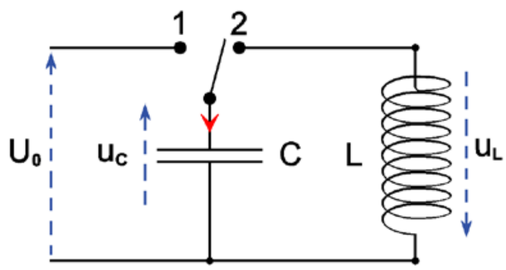
Qu'on écrit : $$\boxed{\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{R+r}{L}.\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{L.C}.u_C(t) = 0}$$

$\frac{R+r}{L}.\frac{du_C(t)}{dt}$ est le terme d'amortissement qui détermine, pour L et C fixés, le type de régime (pseudo-périodique, apériodique, critique). L'étude générale est hors programme.
Nous allons étudier le cas limite où on peut négliger les résistances $R_{tot} = R + r \approx 0$.

II) Décharge oscillante non amortie du circuit LC :

1) Mise en équation :

On considère un circuit dans lequel on néglige toutes les résistances. Il est constitué d'un condensateur de capacité C et d'une bobine idéale d'inductance L.
Le condensateur est initialement chargé sous une tension U_0 et acquiert une charge $Q_0 = C.U_0$ et stocke une énergie $W = \frac{1}{2}.C.U_0^2$.



A l'instant de date t = 0, on bascule l'interrupteur en position 2 : le circuit évolue alors en régime libre. On a : $u_L(t) + u_C(t) = 0$

Avec $u_C(t) = \frac{1}{C}.q(t)$ et $u_L(t) = L.\frac{di(t)}{dt}(t)$; $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C.\frac{du_C(t)}{dt}$ et $\frac{di(t)}{dt} = \frac{d^2q(t)}{dt^2} = C.\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}$

D'où $L.C.\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + u_C(t) = 0$. On obtient l'équation différentielle homogène du second ordre :

$$\boxed{\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{L.C}.u_C(t) = 0}$$

2) Solution de l'équation différentielle :

a) Oscillateur harmonique :

On a $\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} = -\frac{1}{L.C}.u_C(t)$, on cherche comme solution de cette équation différentielle, une fonction $u_C(t)$ égale à sa dérivée seconde au facteur – 1/L.C près.
La fonction cosinus présente cette propriété.
On cherche une solution de la forme : $u_C(t) = A.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$

T_0 est la période propre (en s) des oscillations non amorties de la tension $u_C(t)$.
T_0 n'est pas une inconnue c'est une constante que l'on va déterminer par identification.
A et φ sont des constantes d'intégration inconnues, il nous faut des informations supplémentaires pour les déterminer.
A (en V) est l'amplitude des oscillations propres de $u_C(t)$.
$(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$ est la phase des oscillations, ϕ est la phase à l'origine des dates (pour t = 0).
$u_C(t)$ oscille de façon sinusoïdale, on dit que le circuit constitue un oscillateur harmonique.

- Identification de T_0 : si $u_C(t) = A.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$, alors $\frac{du_C(t)}{dt} = -A.\frac{2.\pi}{T_0}.\sin(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$ et

$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} = -A.(\frac{2.\pi}{T_0})^2.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$ la substitution dans l'équation différentielle s'écrit :

$A.(\frac{2.\pi}{T_0})^2.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi) - A.\frac{1}{L.C}.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi) = 0$ qui doit être vrai pour tout t !

Soit $[A.(\frac{2.\pi}{T_0})^2 - A.\frac{1}{L.C}].\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi) = 0$ qui doit être vrai pour tout t.

On a donc $A.(\frac{2.\pi}{T_0})^2 = A.\frac{1}{L.C}$ $\boxed{T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}}$

A et φ restent indéterminés.

- Analyse dimensionnelle de la période propre :

L'inductance est donnée par $u_L = L.\frac{di}{dt}$, $L = \frac{u_L}{di/dt}$ est homogène à $\frac{[\text{Tension}]\times[\text{Temps}]}{[\text{Intensité}]}$,

or $i = \frac{dq}{dt}$ est homogène à $\frac{[\text{Charge}]}{[\text{Temps}]}$, donc L est homogène à $\frac{[\text{Tension}]\times[\text{Temps}]^2}{[\text{Charge}]}$

La capacité $C = \frac{q}{u_C}$ est homogène à $\frac{[\text{Charge}]}{[\text{Tension}]}$

Le produit L.C est homogène à $\frac{[\text{Tension}]\times[\text{Temps}]^2}{[\text{Charge}]} \times \frac{[\text{Charge}]}{[\text{Tension}]} = [\text{Temps}]^2$

$T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}$ est donc homogène à un [Temps].

b) Conditions initiales :

Pour déterminer A et φ il faut obtenir d'autres informations : les conditions initiales.
Il nous faut deux conditions pour déterminer deux inconnues.
On étudie la "décharge" oscillante du condensateur, donc à l'instant de date t = 0 :
- le condensateur est chargé : $q(0) = Q_0 = C.U_0$
- l'intensité du courant est encore nulle : $i(0) = 0$

Or, à chaque instant : $u_C(t) = \frac{1}{C}.q(t)$ et $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}.\frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{C}.i(t)$

Donc, à t = 0 : $u_C(0) = \frac{1}{C}.q(0) = U_0$ et $(\frac{du_C(t)}{dt})_{t=0} = \frac{1}{C}.(\frac{dq(t)}{dt})_{t=0} = \frac{1}{C}.i(0) = 0$

Soit $u_C(0) = A.\cos(\varphi) = U_0$ et $\frac{du_C(t)}{dt})_{t=0} = -A.\frac{2.\pi}{T_0}.\sin(\varphi) = 0$

D'où $\sin(\varphi) = 0$ et $\varphi = 0$

Et $\cos(\varphi) = 1$ donc $A = U_0$

La solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales définies plus haut est :

$$\boxed{u_C(t) = U_0.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t) \text{ avec } T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}}$$

c) Notion d'avance et de retard :

$$u_R(t) = R.i(t) = R.C.\frac{du_C(t)}{dt} = -R.C.U_0.\frac{2.\pi}{T_0}.\sin(\frac{2.\pi}{T_0}.t) = -U_1.\sin(\frac{2.\pi}{T_0}.t) = U_1.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \frac{\pi}{2})$$

On a donc : $u_C(t) = U_0.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t)$ et $u_R(t) = U_1.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \frac{\pi}{2})$

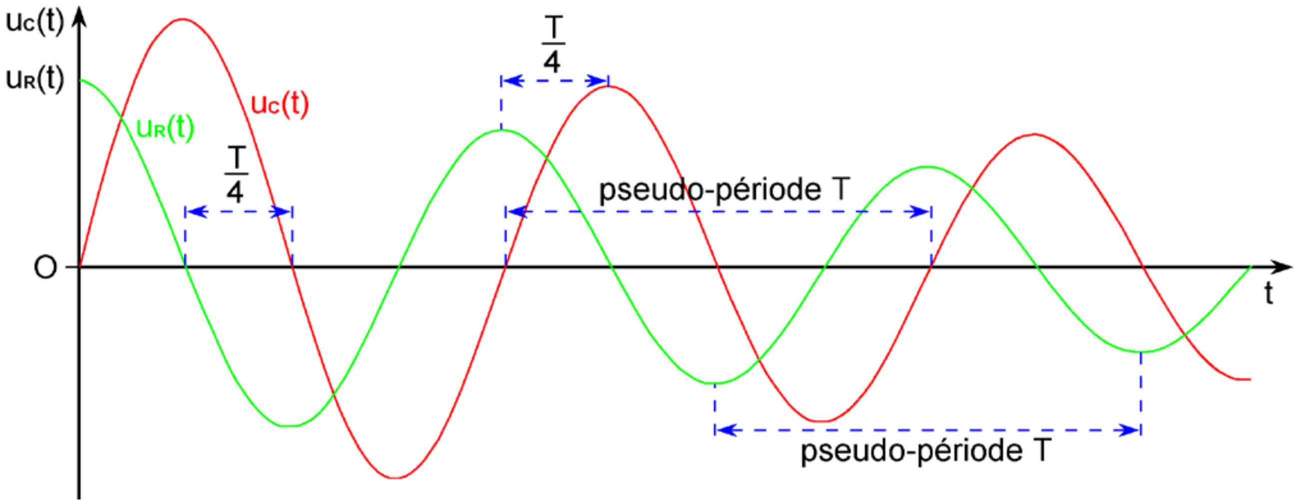
On dit que $u_R(t)$ est en avance phase de $\pi/2$ sur $u_C(t)$ ou que $u_R(t)$ est en quadrature avance sur $u_C(t)$. On peut dire que $u_R(t)$ est en avance d'un quart de période sur $u_C(t)$.

3) Période et pseudo-période :

La résolution analytique des équations différentielles et l'expérience montre que la pseudo-période T est toujours plus grande que la période propre T_0.

Néanmoins, lorsque l'amortissement est assez faible, on a pratiquement $T \approx T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}$

Sur un oscilloscope, on peut observer simultanément les deux courbes $u_C(t)$ et $u_R(t)$ amorties et vérifier leur décalage dans le temps :



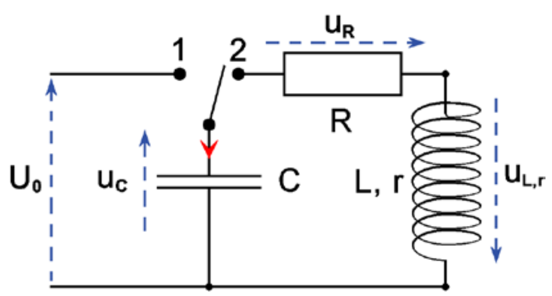
Sur l'axe du temps, $u_R(t)$ qui est en quadrature avance, s'annule ou atteint sa valeur maximale un quart de période (T/4) avant $u_C(t)$.

Lors de l'étude des oscillations forcées, nous verrons une autre technique pour mettre en évidence les notions de quadrature avance ou retard …

III) Etude énergétique :

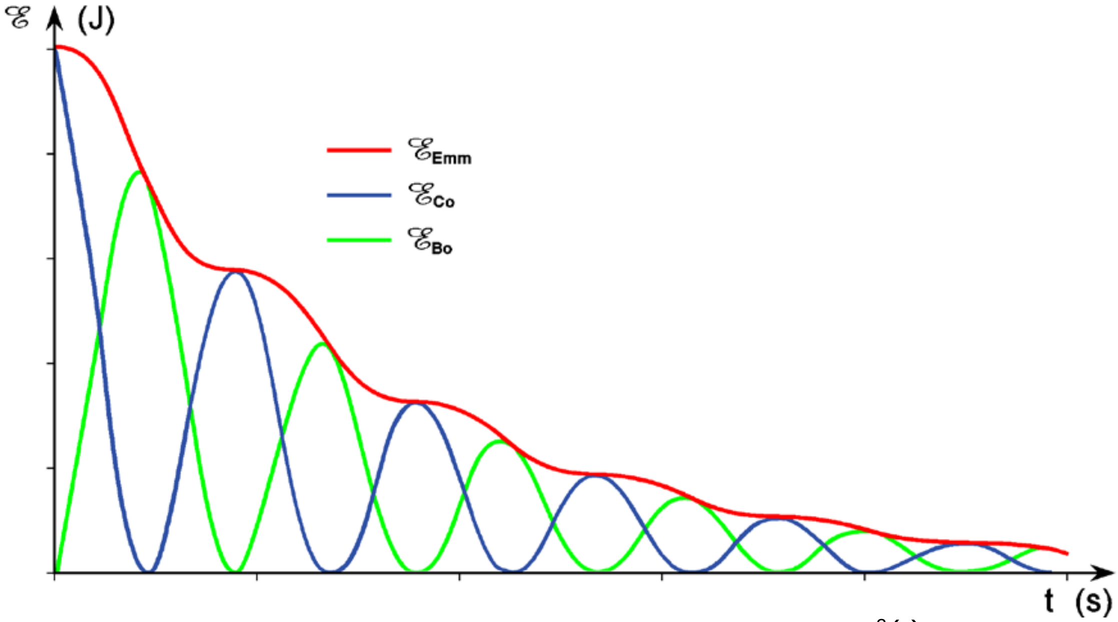
1) Montage :

On s'intéresse à un circuit R, L, C dans lequel on peut faire une étude expérimentale à l'ordinateur. L'ordinateur enregistre par points l'évolution au cours du temps de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.



2) Résultats :

A partir de $u_C(t) = (1/C).q(t)$ l'ordinateur peut calculer : $q(t) = C.u_{AB}(t)$ et $i(t) = dq(t)/dt$
Puis les différentes formes d'énergies :



Energie emmagasinée par le condensateur : $\mathscr{E}_{Co} = \frac{1}{2}.C.[u_C(t)]^2 = \frac{1}{2}.\frac{q^2(t)}{C}$

Energie emmagasinée par la bobine : $\mathscr{E}_{Bo} = \frac{1}{2}.L.[i(t)]^2$

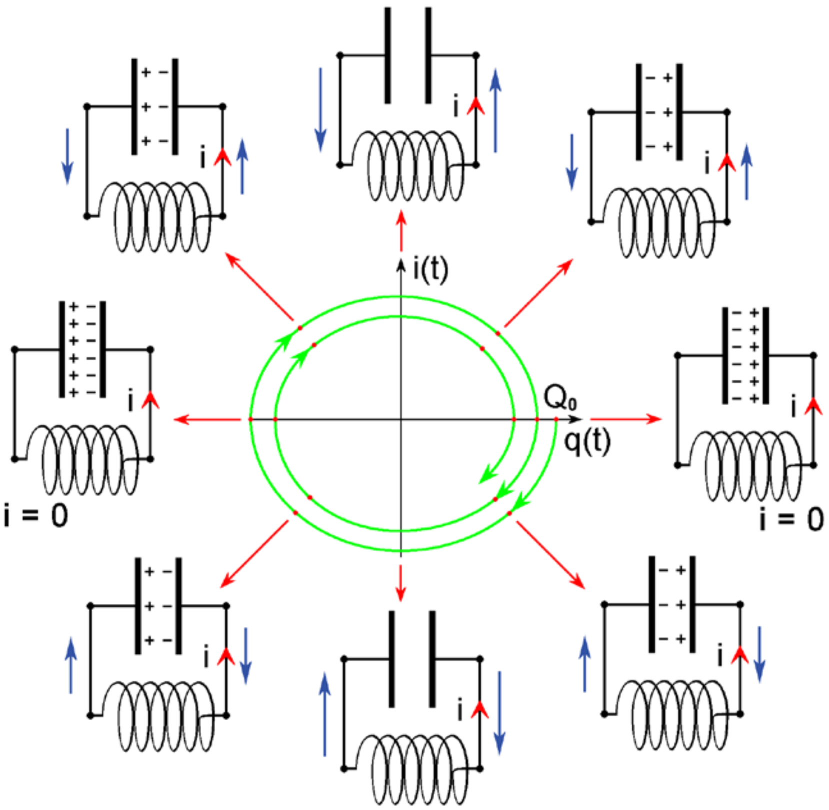
Energie emmagasinée totale $\mathscr{E}_{Emm} = \mathscr{E}_{Co} + \mathscr{E}_{Bo}$.

Les courbes obtenues montrent que : L'énergie non dissipée par effet Joule subit des conversions successives d'une forme à une autre.

3) Interprétation qualitative des oscillations :

En partant d'un condensateur chargé de charge $q = Q_0$ on analyse l'évolution au cours du temps des états du système.

On peut construire cette évolution dans l'espace des phases du système défini par le plan q(t), i(t) :



D'une façon générale, l'étude de l'évolution d'un système dans l'espace de la phase se révèle très efficace en Physique moderne.

IV) Analogie électro-mécanique :

1) Tableau comparatif :

Equation différentielle de l'oscillateur harmonique :

frottements négligeables		résistance négligeable
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}.x(t) = 0$	$\longrightarrow$	$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{L.C}.q(t) = 0$
Grandeurs caractéristiques :		
élongation x(t)	$\longrightarrow$	charge électrique q(t)
vitesse $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$\longrightarrow$	intensité $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$
masse m	$\longrightarrow$	inductance L
raideur k	$\longrightarrow$	inverse de la capacité 1/C
Période propre :		
$T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}$	$\longrightarrow$	$T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}$
Energies :		
potentielle : $E_{Pé} = \frac{1}{2}.k.[x(t)]^2$	$\longrightarrow$	électrostatique : $E_{él} = \frac{1}{2}.\frac{[q(t)]^2}{C}$
cinétique : $E_C = \frac{1}{2}.m.[v(t)]^2$	$\longrightarrow$	magnétique : $E_{magn} = \frac{1}{2}.L.[i(t)]^2$

2) Autres points de comparaison :

- Pour "lancer" l'oscillateur mécanique il faut qu'un opérateur extérieur étire le ressort puis, lâche la masse sans vitesse initiale :

  C'est l'opérateur qui fournit l'énergie initialement emmagasinée dans l'oscillateur.
- Pour "lancer" l'oscillateur électrique il faut qu'un générateur extérieur charge le condensateur, l'interrupteur étant ouvert, puis qu'on débranche le générateur et qu'on ferme l'interrupteur :

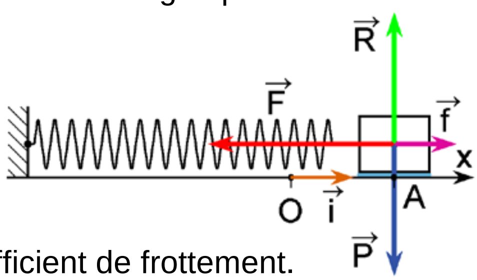
  C'est le générateur qui fournit l'énergie initialement emmagasinée dans l'oscillateur.

3) Etude de l'oscillateur amorti :

a) Oscillateur mécanique amorti :

Nous avons toujours idéalisé l'oscillateur mécanique, aussi bien lors de l'étude mécaniste, où nous avons négligé les frottements, que lors de l'étude énergétique où nous avons supposé l'énergie mécanique comme constante.

On considère l'oscillateur élastique horizontal, soumis à des frottements fluides.



Bilan des forces : le mobile est soumis à :

- son poids $\vec{P}$ et la réaction normale du support $\vec{R}$,
- la force de rappel $\vec{F}$ du ressort,
- à la force de frottement fluide $\vec{f} = -h.\vec{v}$, h est le coefficient de frottement.

On applique le théorème du centre d'inertie : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} = m.\vec{a}$

En projection sur l'axe Ox, on a : $F_x + f_x = m.a_x$, or $F_x = -k.x$ et $f_x = -h.v_x$

D'où $\quad -k.x(t) - h.v_x(t) = m.\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ et $m.\frac{d^2x(t)}{dt^2} + h.\frac{dx(t)}{dt} + k.x(t) = 0$

Soit l'équation différentielle $\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{h}{m}.\frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m}.x(t) = 0}$

b) Oscillateur électrique avec résistance :

Nous avons établi l'équation différentielle dans le cas général d'un circuit RLC :

Soit $$\boxed{\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{R+r}{L}.\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{L.C}.u_C(t) = 0}$$

c) Conclusion :

On peut donc étendre l'analogie :

Equation différentielle de l'oscillateur amorti (non harmonique) :

frottements fluides		résistance R_T
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{h}{m}.\frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m}.x(t) = 0$	$\longrightarrow$	$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{R_T}{L}.\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{L.C}.u_C(t) = 0$

Grandeur caractéristique :

coefficient de frottement fluide h	$\longrightarrow$	résistance totale R_T

- Pour l'oscillateur mécanique, les frottements de la masse lors de son mouvement sont la cause de la non-conservation de l'énergie du système.
- Pour l'oscillateur électrique, c'est la présence de résistances dans le circuit qui sont la cause de la non-conservation de l'énergie du système.

V) Entretien des oscillations :

1) Amplificateur opérationnel, résistance négative :

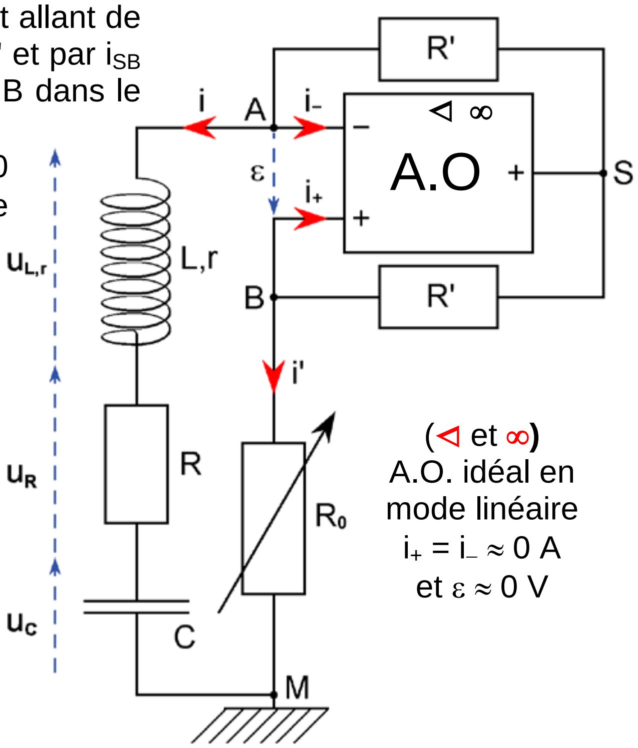
Un amplificateur opérationnel (A.O.) est un petit circuit intégré qui comporte 6 broches de connexion. Seules 3 de ces broches serons utilisées dans les calculs suivants.

On considère un amplificateur opérationnel comme idéal et utilisé en mode linéaire :

$$i_+ = i_- \approx 0 \text{ A} \quad \text{et} \quad \varepsilon \approx 0 \text{ V}$$

On oriente géométriquement (flèches) les différentes branches du circuit : les tentions u et les intensités i instantanées sont algébrisées en fonction de ces orientations.

Désignons par i_{AS} l'intensité algébrique du courant allant de A vers S dans le premier résistor de résistance R' et par i_{SB} l'intensité algébrique du courant allant de S vers B dans le deuxième résistor de résistance R'.



(◁ et ∞)
A.O. idéal en mode linéaire
$i_+ = i_- \approx 0$ A
et $\varepsilon \approx 0$ V

Au nœud A on peut écrire : $i + i_{AS} + i_- = 0$, or $i_- \approx 0$ d'où $i_{AS} = -i$; de même au nœud B, on peut écrire : $i_{SB} = i_+ + i'$, mais $i_+ \approx 0$ donc $i_{SB} = i'$

Dans la branche A, M du dipôle contenant l'A.O.

$u_{AM} = u_{AS} + u_{SB} + u_{BM} = R'.i_{AS} + R'.i_{SB} = R_0.i'$

soit $u_{AM} = -R'.i + R'.i' + R_0.i'$ [1]

D'autre part que $u_{AM} = u_{AB} + u_{BM} = -\varepsilon + R_0.i'$,

mais $\varepsilon \approx 0$, d'où : $u_{AM} = R_0.i'$ [2]

En égalant [1] et [2] on obtient :

$$R_0.i' = -R'.i + R'.i' + R_0.i'$$

d'où $-R'.i + R'.i' = 0$ et $i = i'$

D'après [2] : $u_{AM} = R_0.i' = R_0.i$ [3].

On peut interpréter cette relation en disant que, si entre A et M il y avait un résistor de résistance K, étant donné le choix algébrique de l'orientation, on écrirait pour ce résistor :

$$u_{AM} = -K.i = R_0.i$$

Le montage électronique est donc équivalent à un résistor de résistance $K = -R_0$

On dit que le circuit électronique ainsi constitué joue le rôle d'une résistance négative.

Ce circuit permet de compenser les pertes d'énergie dissipées par effet Joule dans les résistances. L'énergie que fournit l'amplificateur opérationnel au reste du circuit lui est communiquée par le générateur de tension continue qui alimente l'A.O. pour son fonctionnement.

2) Circuit oscillant :

Aux bornes du circuit RLC :

$u_{AM} = u_{L,r}(t) + u_R(t) + u_C(t) = L.\dfrac{d^2q}{dt^2} + (R + r).\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}.q$ avec $q(t) = C.u_C(t)$, on a

$u_{AM} = L.C.\dfrac{d^2u_C(t)}{dt^2} + (R + r).C.\dfrac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$ en posant $R = r = R_T$ et en égalant avec [3] :

$$L.C.\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + R_T.C.\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = R_0.i(t) = R_0.C.\frac{du_C(t)}{dt}$$

soit
$$\boxed{\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{R_T - R_0}{L}.\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{L.C}.u_C(t) = 0}$$

On voit que si $R_0 = R$ le deuxième terme de l'équation précédente disparaît.

L'équation devient alors : $\dfrac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \dfrac{1}{L.C}.u_C(t) = 0$

C'est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique dont la solution est de la forme

$$u_C(t) = A.\cos\left(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \phi\right) \text{ avec } T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}$$

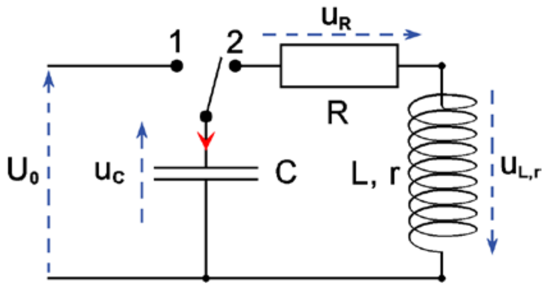
En fait l'expérience montre qu'il y a apparition spontanée des oscillations lorsque $R_0 > R$.

Ce montage, muni d'un A.O., constitue un générateur d'oscillations électriques dont la période T ne dépend que des valeurs données à l'inductance L de la bobine et à la capacité C du condensateur.

A RETENIR

I) Régime libre du circuit RLC série :

1) Expérience :



On constitue un circuit RLC en associant en série :
- un résistor de résistance R,
- un condensateur de capacité C,
- une bobine d'inductance L et de résistance r.

On s'intéresse à l'évolution de la charge q(t) du condensateur au cours du temps.

L'évolution de q(t) est donnée par celle de $u_C(t) = \frac{1}{C}.q(t)$ à une constante multiplicative près.

2) Oscillations libres du circuit RLC série :

On dit qu'un circuit RLC série est en régime libre lorsqu'il ne subit aucun apport d'énergie après l'instant initial.

a) Régime pseudo-périodique :

Pour de faibles valeurs de R_{tot}, la tension $u_C(t)$ présente des oscillations amorties, c'est le régime pseudo-périodique. $u_C(t)$ passe périodiquement par des valeurs nulles.
La durée entre deux passages successifs par une valeur nulle, avec une pente de même signe est la pseudo-période T des oscillations amorties.
L'amplitude des oscillations de $u_C(t)$ et de $u_R(t)$ décroît au cours du temps.
On remarque que $u_C(t)$ est en retard de T/4 par rapport à $u_R(t)$: quand $u_R(t)$ est maximum, $u_C(t)$ s'annule en croissant. Quand $u_R(t)$ s'annule en décroissant $u_C(t)$ est maximum.

b) Régime apériodique :

Pour d'importantes valeurs de R_{tot}, la tension $u_C(t)$ s'amortit très vite, c'est le régime apériodique.

c) Régime apériodique critique :

Pour $R_{tot} = 2.\sqrt{\frac{L}{C}}$, le régime est qualifié de régime apériodique critique.

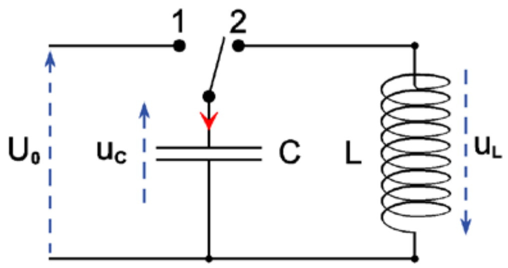
Lors de ce régime $u_C(t)$ tend plus rapidement vers une valeur nulle.

3) Equation différentielle :

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{R+r}{L}.\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{L.C}.u_C(t) = 0$$

II) Décharge oscillante non amortie du circuit LC :

1) Mise en équation :



On considère un circuit dans lequel on néglige toutes les résistances. $R + r \approx 0$. Le condensateur est initialement chargé sous une tension U_0 et une charge $Q_0 = C.U_0$.

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{L.C}.u_C(t) = 0$$

2) Solution de l'équation différentielle :

a) Oscillateur harmonique :

On cherche une solution de la forme : $u_C(t) = A.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$

T_0 est la période propre (en s) des oscillations non amorties de la tension $u_C(t)$.

A (en V) est l'amplitude des oscillations propres de $u_C(t)$.

$(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$ est la phase des oscillations, φ est la phase à l'origine des dates (pour t = 0).

$u_C(t)$ oscille de façon sinusoïdale, on dit que le circuit constitue un oscillateur harmonique.

On a $\boxed{T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}}$

A et ϕ restent indéterminés.

$T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}$ est donc homogène à un [Temps].

b) Conditions initiales :

Pour déterminer A et φ il faut obtenir d'autres informations : les conditions initiales.
Il nous faut deux conditions pour déterminer deux inconnues.
On étudie la "décharge" oscillante du condensateur, donc à l'instant de date t = 0 :
- le condensateur est chargé : $q(0) = Q_0 = C.U_0$
- l'intensité du courant est encore nulle : $i(0) = 0$

La solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales définies plus haut est :

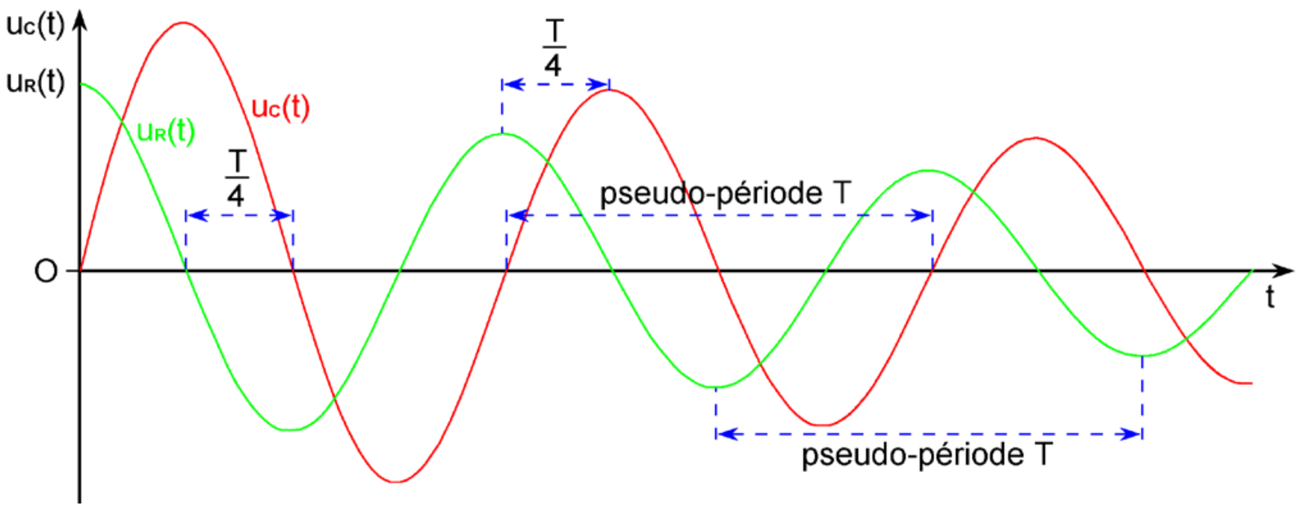
$$\boxed{u_C(t) = U_0.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t) \quad \text{avec} \quad T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}}$$

c) Notion d'avance et de retard :

On dit que $u_R(t)$ est en avance phase de $\pi/2$ sur $u_C(t)$ ou que $u_R(t)$ est en quadrature avance sur $u_C(t)$. On peut dire que $u_R(t)$ est en avance d'un quart de période sur $u_C(t)$.

3) Période et pseudo-période :

Néanmoins, lorsque l'amortissement est assez faible, on a pratiquement $T \approx T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}$
Sur un oscilloscope, on peut observer simultanément les deux courbes $u_C(t)$ et $u_R(t)$ amorties et vérifier leur décalage dans le temps :



 Christian BOUVIER

III) Etude énergétique :

Energie emmagasinée par le condensateur : $\mathscr{E}_{Co} = \frac{1}{2}.C.[u_C(t)]^2 = \frac{1}{2}.\frac{q^2(t)}{C}$

Energie emmagasinée par la bobine : $\mathscr{E}_{Bo} = \frac{1}{2}.L.[i(t)]^2$

Energie emmagasinée totale $\mathscr{E}_{Emm} = \mathscr{E}_{Co} + \mathscr{E}_{Bo}$.

IV) Analogie électro-mécanique :

Tableau comparatif :

Equation différentielle de l'oscillateur harmonique :

frottements négligeables		résistance négligeable
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}.x(t) = 0$	$\longrightarrow$	$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{L.C}.q(t) = 0$

Grandeurs caractéristiques :

élongation x(t)	$\longrightarrow$	charge électrique q(t)
vitesse $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$\longrightarrow$	intensité $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$
masse m	$\longrightarrow$	inductance L
raideur k	$\longrightarrow$	inverse de la capacité 1/C

Période propre :

$T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}$	$\longrightarrow$	$T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}$

Energies :

potentielle : $E_{Pé} = \frac{1}{2}.k.[x(t)]^2$	$\longrightarrow$	électrostatique : $E_{él} = \frac{1}{2}.\frac{[q(t)]^2}{C}$
cinétique : $E_C = \frac{1}{2}.m.[v(t)]^2$	$\longrightarrow$	magnétique : $E_{magn} = \frac{1}{2}.L.[i(t)]^2$

Equation différentielle de l'oscillateur amorti (non harmonique) :

frottements fluides		résistance R_T
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{h}{m}.\frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m}.x(t) = 0$	$\longrightarrow$	$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{R_T}{L}.\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{L.C}.u_C(t) = 0$

Grandeur caractéristique :

coefficient de frottement fluide h	$\longrightarrow$	résistance totale R_T

- Pour l'oscillateur mécanique, les frottements de la masse lors de son mouvement sont la cause de la non-conservation de l'énergie du système.
- Pour l'oscillateur électrique, c'est la présence de résistances dans le circuit qui sont la cause de la non-conservation de l'énergie du système.

V) Entretien des oscillations :

1) Amplificateur opérationnel, résistance négative :

Le montage électronique est équivalent à un résistor de résistance $K = -R_0$
On dit que le circuit électronique ainsi constitué joue le rôle d'une résistance négative.

2) Circuit oscillant :

En fait l'expérience montre qu'il y a apparition spontanée des oscillations lorsque $R_0 > R$.

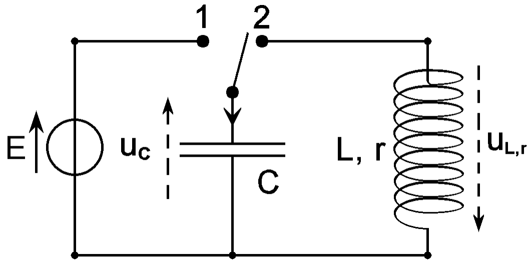
Ce montage, muni d'un A.O., constitue un générateur d'oscillations électriques dont la période T ne dépend que des valeurs données à l'inductance L de la bobine et à la capacité C du condensateur.

Oscillations libres d'un circuit RLC

POUR S'ENTRAÎNER

I) Energie emmagasinée dans un condensateur.

On considère le circuit suivant :
E = 10 V, L = 100 mH
Pour charger le condensateur on bascule l'interrupteur en position 1.



a) A un instant t = 0 pris comme origine des dates, on bascule l'interrupteur en position 2.
On étudie les oscillations libres qui prennent naissance dans le circuit.
Pourquoi parle-t-on d'oscillations libres à partir de cet instant ?

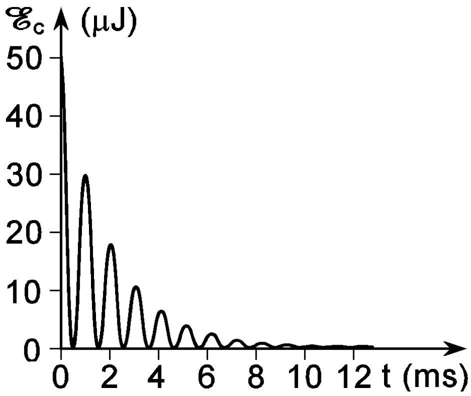
b) On suppose, dans cette question, que r = 0.

i. Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de $u_C(t)$.

ii. En déduire le bilan énergétique du circuit faisant intervenir l'énergie $\mathscr{E}_C$ emmagasinée dans le condensateur et l'énergie $\mathscr{E}_L$ emmagasinée dans la bobine.

iii. Interpréter ce bilan et représenter qualitativement sur une même figure l'allure de $\mathscr{E}_C(t)$ et $\mathscr{E}_L(t)$ emmagasinée dans la bobine.

c) Le document suivant donne l'évolution de l'énergie $\mathscr{E}_C(t)$ emmagasinée dans le condensateur au cours du temps.



i. Que peut-on dire de l'évolution de $\mathscr{E}_C(t)$.
Comparer avec le cas de la question 2°c).

ii. A quel type d'oscillations libres a-t-on affaire ?

iii. Expliquer, sans calcul, comment il faut modifier le bilan d'énergie établie à la question 2) b).

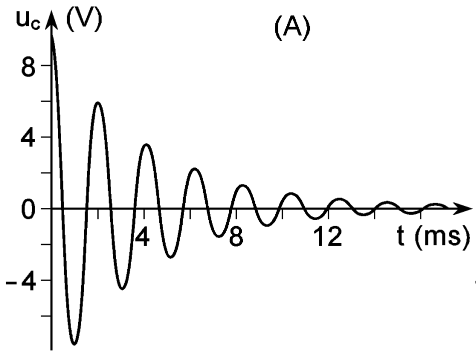
iv. Exprimer en fonction de la capacité C, l'énergie $\mathscr{E}_C(0)$ emmagasinée dans le condensateur à la date t = 0.

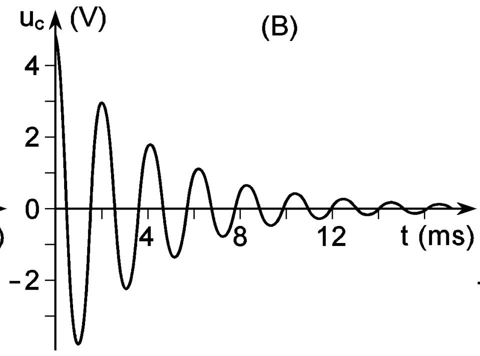
v. En utilisant la courbe $\mathscr{E}_C(t)$, déduire la valeur de C.

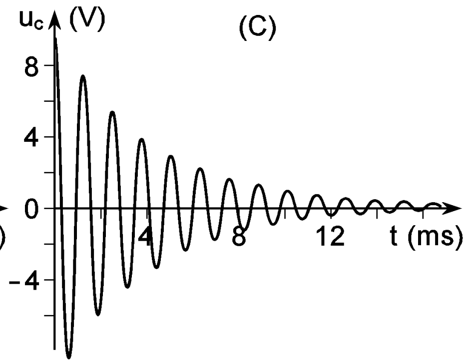
d) On s'intéresse maintenant à la courbe de $u_C(t)$.

i. Calculer la pseudo-période T des oscillations.

ii. Indiquer alors de la courbe (A), (B) ou (C), celle qui représente effectivement $u_C(t)$.

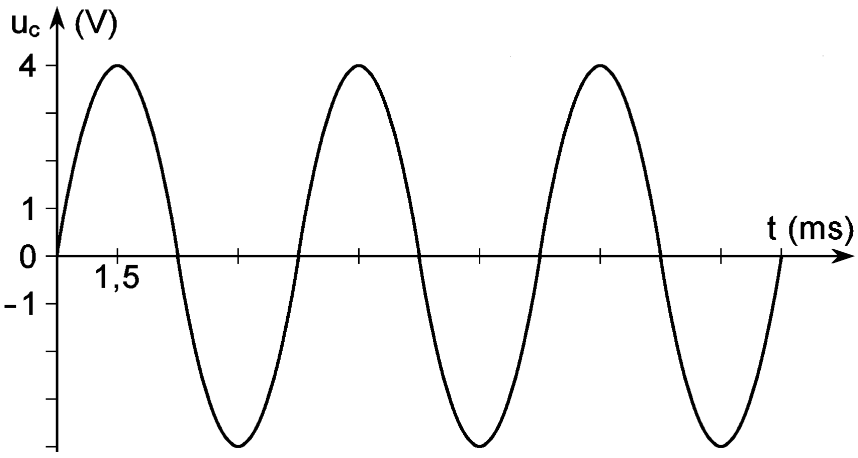






II) Circuit oscillant entretenu.

On considère un circuit oscillant RLC série dont les oscillations sinusoïdales sont entretenues par un dipôle à résistance négative ($-R_0$). Un ordinateur interfacé et muni d'un logiciel de traitement, permet d'effectuer la capture de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.



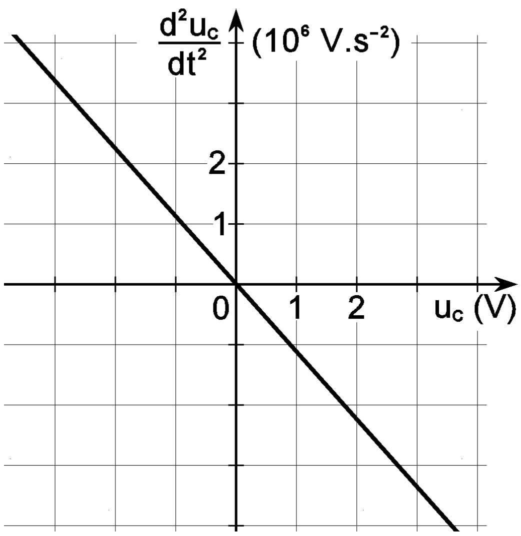
a) Donner la relation qui existe entre la résistance totale R du circuit et R_0.

b) Le graphe est la représentation de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur :
Déterminer graphiquement la valeur de l'amplitude U et de la période T de cette tension.

c) On veut étudier l'influence de l'inductance L et de la capacité C sur la période T de la tension $u_C(t)$. On fait donc varier L et C dans le circuit, on obtient le tableau suivant :

L (mH)	68	2,2	15	100	10	68	68	22	68	100	68	47
C (µF	0,80	0,60	0,40	0,10	0,10	0,40	0,60	0,40	1,0	0,40	0,20	0,40
T (ms)	1,5	0,23	0,49	0,63	0,20	1,0	1,3	0,59	1,6	1,3	0,73	0,86

Tracer deux graphes : un graphe ayant pour abscisse L, et un graphe ayant abscisse C.
Montrer que T est proportionnel à $\sqrt{L.C}$.
Comparer la période T à la période propre T_0 du circuit oscillant.



d) L'équation différentielle d'évolution de l'oscillateur entretenu peut s'écrire : $\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + k^2.u_C(t) = 0$

Pour la tension $u_C(t)$ de la question 2), on a représenté le graphe suivant :
Est-il en accord avec l'équation différentielle ?
Retrouver la valeur de la période T des oscillations.

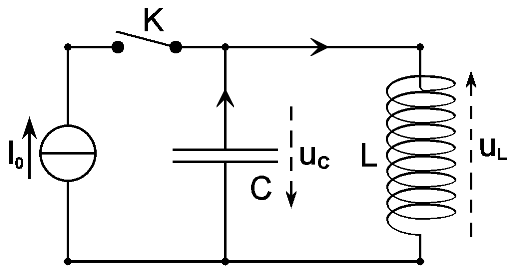
e) Exprimer la conservation de l'énergie $\mathscr{E}$ de l'oscillateur sinusoïdal entretenu et en déduire que :

$$\left[\frac{T_0}{2.\pi}.\frac{du_C(t)}{dt}\right]^2 + [u_C(t)]^2 = K^2$$

Où K sera exprimé en fonction de $\mathscr{E}$ et de la capacité C.

f) Donner l'allure du graphe représentatif des différents couples $\left([u_C(t)]^2 ; \left[\frac{T_0}{2.\pi}.\frac{du_C(t)}{dt}\right]^2\right)$ au cours du temps.

II) "Décharge" d'une bobine dans un condensateur.



Un générateur idéal de courant constant, débitant une intensité I_0 = 225 mA, est connecté à un condensateur de capacité C = 175 nF et à une bobine d'inductance L = 42,2 mH et de résistance négligeable.
A un instant, qu'on prendra comme origine des dates, on ouvre l'interrupteur K.

a) Quelle est, à l'instant de date t = 0, la tension $u_C(0)$ aux bornes du condensateur. Justifier.

b) Quelle est, à cet instant, l'intensité i(0) du courant dans la bobine. Justifier.

c) Etablir l'équation différentielle traduisant l'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

d) Donner la solution de cette équation différentielle en tenant compte des conditions initiales particulières de cet exercice.

e) Quelle valeur maximale U_{C0} atteint la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur ?
En déduire la valeur maximale Q_0 de la charge du condensateur.

f) Quelle est l'énergie $\mathscr{E}_L(0)$ initialement stockée dans la bobine ?

g) En faisant un bilan énergétique, retrouver la valeur maximale U_{C0} atteinte par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

h) A partir du résultat de la question 4), exprimer l'intensité du courant i(t) et la charge q(t) du condensateur au cours du temps.

i) Représenter l'allure de l'évolution de l'état du circuit LC dans un diagramme des phases : q(t) en abscisses (1 cm pour 5 μC) et i(t) en ordonnées (1 cm pour 100 mA).
Indiquer le point représentant l'état initial du circuit et le sens de parcourt du point d'état.