

Sans que nous ne nous en rendions compte, les oscillations électriques sont omniprésentes dans notre vie quotidienne. Le fonctionnement de pratiquement tous les « appareils électroniques » est à la base de telles oscillations : montres, téléphones portables, ordinateurs, chaînes audio et vidéo, appareils photo et caméras vidéo numériques, ...

La compréhension de la naissance d'oscillations électriques est très simple, si on aura compris au préalable la charge et la décharge du condensateur ainsi que le comportement de la bobine parcourue par un courant variable.

## Chapitre 6: Oscillations électriques

### 1. Rappels

#### a) Condensateur chargé

1. Un condensateur est formé par deux surfaces métalliques en regard, séparées par un isolant (= diélectrique).
2. Lorsqu'une tension  $U$  est appliquée aux bornes d'un condensateur, des charges  $Q > 0$  et  $-Q < 0$  s'accumulent sur ses armatures. La charge  $Q$  du condensateur est numériquement égale au produit de sa capacité  $C$  par la tension électrique  $U$

$$Q = C \cdot U$$

3. La capacité d'un condensateur est d'autant plus grande que la surface  $S$  commune des armatures en regard est plus grande, que la distance  $d$  entre les armatures est plus petite, et que la permittivité électrique du diélectrique entre les armatures est plus grande.
4. L'énergie électrique emmagasinée par un condensateur de capacité  $C$ , chargé sous la tension  $U$  (et portant alors la charge  $Q$ ) est déterminée par la relation :

$$E_{\text{el.}} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

#### b) Bobine parcourue par le courant

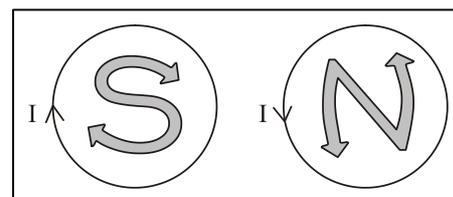
1. L'intensité du champ magnétique  $B$  créé par une bobine parcourue par un courant est proportionnelle à l'intensité du courant. Le sens de  $\vec{B}$  dépend du sens du courant.

Règle pour trouver le sens du champ magnétique  $\vec{B}$  :

on regarde sur l'une des faces et on examine le sens du courant :

s'il correspond au sens indiqué par la lettre S on regarde sur une face Sud ;

s'il correspond à celui indiqué par la lettre N on regarde sur une face Nord.



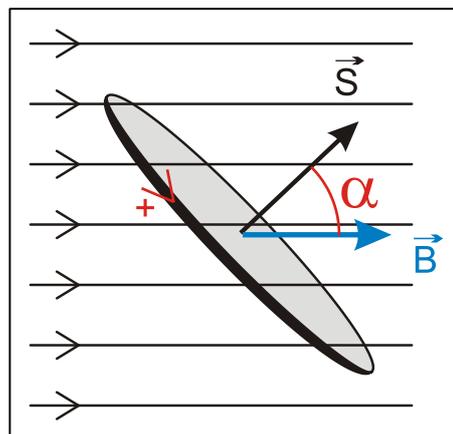
### c) Flux magnétique

- \* Le flux magnétique  $\Phi$  est une mesure du nombre de lignes de champ passant à travers un circuit.
- \* Afin d'exprimer ce flux, les physiciens définissent le vecteur surface  $\vec{S}$ .

On choisit un sens positif pour le contour de la surface.

Les caractéristiques du vecteur surface  $\vec{S}$  sont alors :

- \* point d'application : le centre de la surface
- \* direction : perpendiculaire à la surface
- \* sens : déterminé par la règle de la main droite : si les doigts courbés de la main droite indiquent le sens +, alors le pouce indique le sens de  $\vec{S}$
- \* norme : la valeur S de la surface (en m<sup>2</sup>)



- \* Finalement, le flux d'un champ magnétique  $\vec{B}$  à travers une surface  $\vec{S}$  est défini par le produit scalaire de  $\vec{B}$  par  $\vec{S}$  :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \alpha$$

- \* Si la surface est délimitée par un circuit bobiné comportant N spires, la surface totale équivaut à N fois la surface d'une spire, et :

$$\Phi = N \vec{B} \cdot \vec{S} = NBS \cos \alpha$$

- \* Unité S.I. : le **weber** (Wb): si  $B = 1 \text{ T}$  et  $S = 1 \text{ m}^2$  alors  $\Phi = 1 \text{ Wb}$

### d) Apparition du phénomène de l'induction électromagnétique

Ce phénomène apparaît dans un circuit électrique si le **flux magnétique à travers ce circuit varie**. Il apparaît alors une f.é.m. induite dans le circuit.

Si le circuit est ouvert, on détecte la f.é.m. induite aux bornes du circuit.

Si le circuit est fermé, la f.é.m. induite est la cause d'un courant induit circulant dans le circuit.

**e) Loi de Lenz**

Le courant induit circule dans un sens tel qu'il tente de s'opposer à la cause qui lui donne naissance.

**f) Loi de Faraday**

La f.é.m. induite moyenne  $e_m$  est proportionnelle à la variation du flux  $\Delta\Phi$  et inversement proportionnelle à  $\Delta t$

La f.é.m. induite moyenne dans un circuit est égale à l'opposé de la variation du flux inducteur à travers ce circuit par unité de temps : 
$$e_m = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

La f.é.m. instantanée à un instant  $t$  est la f. é. m. moyenne au cours d'un intervalle de temps très petit englobant  $t$ .

La f.é.m. induite (instantanée) dans un circuit est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux inducteur à travers ce circuit : 
$$e = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

(  $\frac{d\Phi}{dt}$  est une mesure de la **vitesse de variation du flux inducteur** !)

Plus le flux varie vite, plus la f.é.m. induite est importante !

Le signe – traduit la loi de Lenz !

## **2. Inductance d'une bobine et f.é.m. auto-induite (ne figure pas au programme officiel)**

**a) Flux propre et f.é.m. auto-induite**

Un courant traversant une bobine, crée en chaque point de son voisinage un champ magnétique. Par conséquent il existe un flux magnétique créé par le courant de la bobine à travers **elle-même** ; ce flux est appelé **flux propre**.

Si la bobine est parcourue par **un courant d'intensité variable** le flux propre à travers la bobine varie : la bobine crée alors une f.é.m. induite dans elle-même ; cette f.é.m. est appelée f.é.m. auto-induite.

Le phénomène de l'auto-induction apparaît si l'intensité de courant à travers une bobine (un circuit) varie. Il se manifeste par la naissance d'une f.é.m. auto-induite dans la bobine (le circuit).

## b) Expression mathématique du flux propre

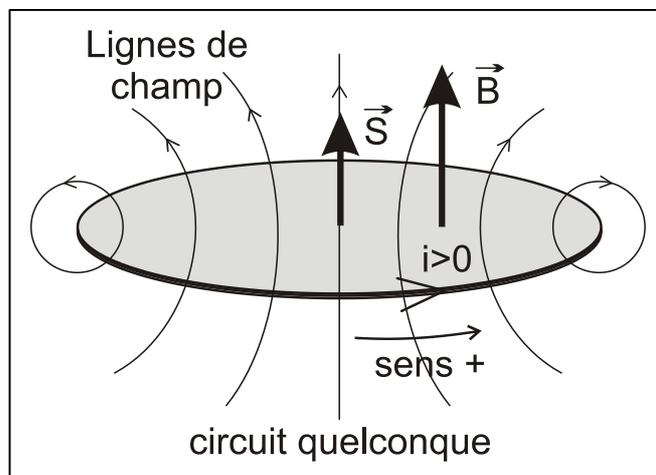
Considérons un circuit sans noyau de fer, de forme quelconque, parcouru par le courant.

### \* Réflexion 1

L'intensité  $B$  du champ magnétique créé par ce circuit (en général non-uniforme) est en tout point proportionnel à l'intensité  $i$  du courant qui le traverse.

### \* Réflexion 2

Le flux propre  $\Phi_P$  est le flux que le circuit envoie à travers lui-même. Il est d'autant plus important que le champ magnétique créé par le courant est plus intense (en tout point de la surface  $S$ ).



### \* Conclusion

Le flux propre  $\Phi_P$  est proportionnel à l'intensité de courant  $i$  qui le crée.

$$\boxed{\Phi_P = L \cdot i}$$

\* La constante de proportionnalité  $L$  s'appelle **inductance du circuit**

\* Unité S. I. pour l'inductance : **le henry (H)**

Si  $\Phi_P = 1$  Wb et  $i = 1$  A alors  $L = 1$  Wb/A = 1 H

## c) Expression mathématique de la f.é.m. auto-induite $e$

D'après la loi de Faraday :  $e = -\frac{d\Phi_P}{dt} = -\frac{d}{dt}(L \cdot i) = -L \frac{di}{dt}$  **si L constant**

Si l'intensité de courant  $i$  à travers une bobine d'inductance  $L$  constante varie, il apparaît une f.é.m. auto-induite  $e$  à ses bornes, dont l'expression mathématique est  $e = -L \frac{di}{dt}$ .

## d) Remarque : inductance d'un circuit

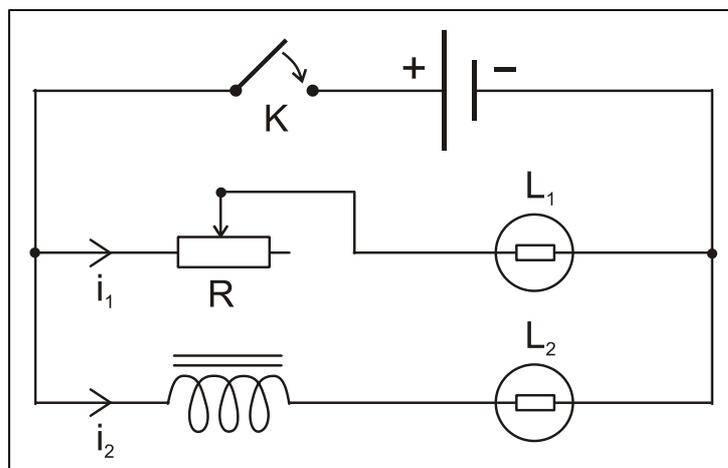
Tout circuit parcouru par le courant est traversé par un flux propre et est donc caractérisé par une inductance non-nulle.

### e) Etude expérimentale de la f.é.m. auto-induite

#### Expérience 1 : Fermeture d'un circuit contenant une bobine

##### Description

$L_1$  et  $L_2$  sont deux lampes à incandescence identiques. La bobine est munie d'un noyau de fer fermé.  
On ajuste la résistance  $R$  à une valeur égale à celle de la bobine.  
(Pourquoi ?)



##### Observation

Lorsqu'on ferme l'interrupteur  $K$ ,  $L_1$  s'allume tout de suite et  $L_2$  s'allume avec un retard d'environ 1 seconde. Puis les deux lampes brillent avec le même éclat.

##### Interprétation

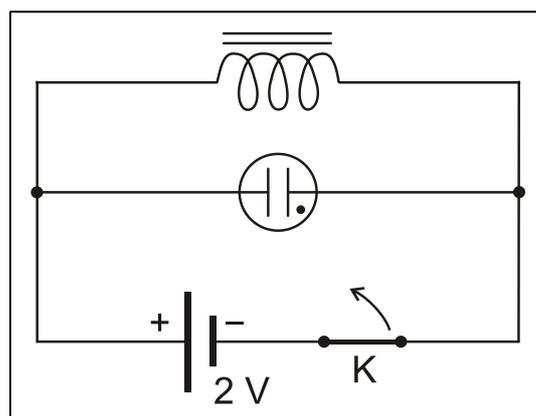
L'augmentation de  $i_2$  fait naître dans la bobine une f.é.m. auto-induite qui s'oppose à sa cause d'après la loi de Lenz.

Or cette cause, c'est justement l'augmentation de  $i_2$ . L'augmentation de  $i_2$  est donc ralentie.

#### Expérience 2 : Ouverture d'un circuit contenant une bobine

##### Description

Initialement, l'interrupteur est fermé.  
La lampe à lueur est une lampe à néon nécessitant une tension d'au moins 80 V pour s'allumer. Comme le générateur ne délivre qu'une tension de 2 V, la lampe ne s'allume pas.  
La bobine est munie d'un noyau de fer fermé.



##### Observation

Lorsqu'on ouvre l'interrupteur  $K$  la lampe s'allume brièvement.

##### Interprétation

La disparition brutale du courant fait naître aux bornes de la bobine une forte f.é.m. auto-induite ( $> 80$  V !).

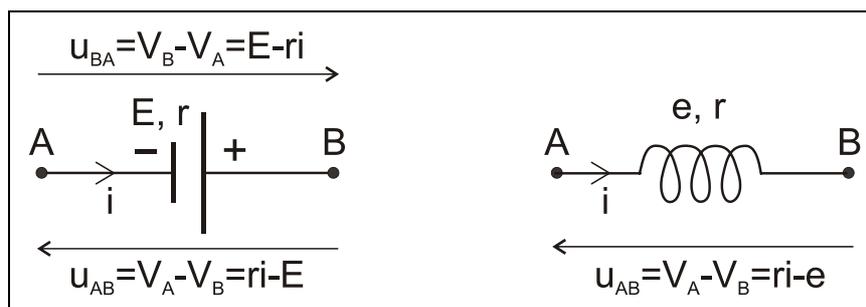
### 3. Loi d'Ohm pour une bobine

#### a) Loi d'Ohm pour une bobine sans noyau de fer

Comme la bobine produit une f.é.m. lorsque l'intensité varie, elle peut être assimilée à un générateur.

D'après la loi d'Ohm pour un générateur (classe de 2<sup>e</sup>), la tension aux bornes du générateur de résistance intérieure  $r$ , traversé par un courant d'intensité  $i$ , et créant une f.é.m.  $E$ , s'écrit :

$$u_{AB} = V_A - V_B = ri - E$$



En appliquant cette relation à la bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $r$ , traversée par un courant d'intensité  $i$ , et créant une f.é.m. auto-induite  $e$ , on obtient :

$$u_{AB} = ri + L \frac{di}{dt}$$

Si  $r = 0$ , la bobine est alors appelée **inductance pure**.

$$u_{AB} = L \frac{di}{dt}$$

Si  $i = c^{te}$ ,  $u_{AB} = ri$  : la bobine se comporte comme une **résistance pure**.

#### b) Définition de l'inductance d'une bobine

L'inductance  $L$  d'une bobine est numériquement égale à la constante de proportionnalité entre la tension à ses bornes et le taux de variation de l'intensité de courant.

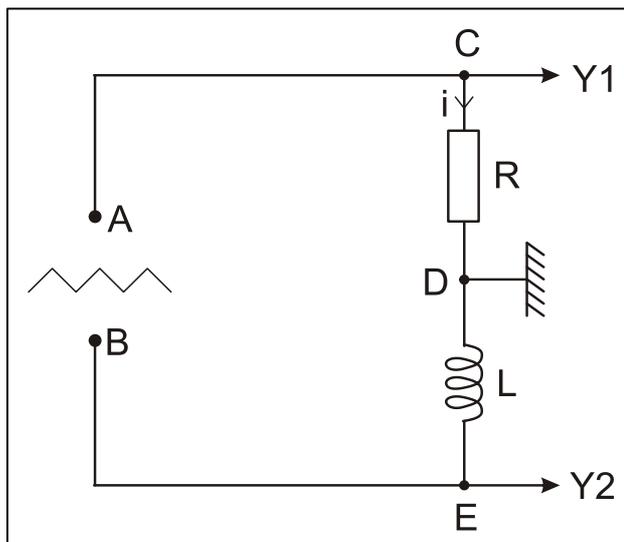
### c) Vérification expérimentale (ne figure pas au programme officiel)

#### Description de l'expérience

Un circuit comprenant une résistance  $R$  et une inductance pure  $L$  ( $r_{\text{Bobine}} \approx 0$ ) **sans noyau de fer**, est alimenté par un générateur de signaux connecté entre A et B, et délivrant une tension  $u_{AB}$  triangulaire.

L'intensité de courant  $i$  dans ce circuit varie dans le temps de la même façon que la tension du générateur.

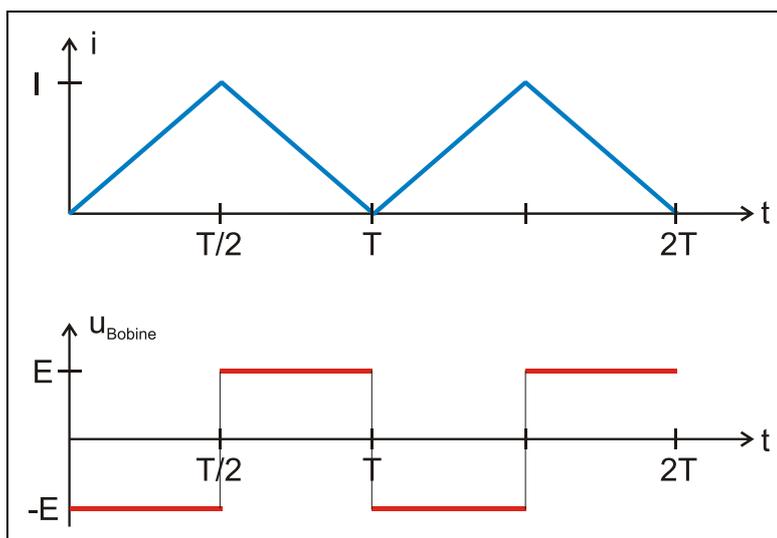
En C et E on connecte les entrées Y1 et Y2 d'un oscilloscope. Le point D est relié à la Terre.



#### Observations

On observe sur l'écran de l'oscilloscope les représentations graphiques en fonction du temps des tensions appliquées aux entrées Y1 et Y2.

- \* A l'entrée Y1 est appliquée la tension  $u_{CD} = Ri$ . Cette tension varie proportionnellement à l'intensité de courant et peut donc être considérée comme une représentation de  $i$  en fonction du temps.
- \* A l'entrée Y2 est appliquée la tension  $u_{ED}$  ! C'est la tension aux bornes de la bobine.



**Interprétation**

- \* D'après la loi d'Ohm pour une bobine :  $u_{DE} = r_{Bob} i + L \frac{di}{dt}$  (sens de i!)
- \* Or l'oscilloscope visualise :  $u_{Bobine} = u_{ED} = -u_{DE} = -r_{Bob} i - L \frac{di}{dt}$
- \* Comme  $r_{Bob} \approx 0$  :  $u_{Bobine} = -L \frac{di}{dt}$ .
- \*  $i$  varie suivant des fonctions affines  $\Leftrightarrow$  le taux de variation de  $i$  est constant  
 $\frac{di}{dt} = \pm \frac{I}{T/2} = \pm \frac{2I}{T}$  (Constante positive ou négative suivant que  $i$  augmente ou que  $i$  diminue).
- \* Finalement :  $u_{Bobine} = \pm E$  avec  $E = L \frac{2I}{T}$  (+E si  $i$  diminue, -E si  $i$  augmente !)
- \* La tension  $u_{Bobine}$  double si on double le taux de variation de l'intensité de courant, c.-à-d.
  - 1) si on double l'amplitude  $I$ , à période  $T$  constante ;
  - 2) si on réduit la période  $T$  de moitié, à amplitude  $I$  constante.
- \* Si on introduit un noyau de fer dans la bobine, à taux de variation de l'intensité constant, alors  $u_{Bobine}$  devient beaucoup plus faible.

**Mesures**

$$E = \text{_____ V}; \quad I = \text{_____ A}; \quad T = \text{_____ s}$$

$$\text{On en déduit que } L = \text{_____ H}$$

#### 4. Energie magnétique emmagasinée par une bobine parcourue par le courant

##### a) Puissance électrique instantanée reçue par une bobine

Rappel de la classe de 2<sup>e</sup> : La puissance électrique  $P$  reçue par un récepteur traversé par un courant d'intensité  $I$ , et aux bornes duquel règne la tension  $U$ , s'écrit :  $P = UI$ .

Si la puissance varie au cours du temps, la puissance instantanée à l'instant  $t$  est égale au produit de la tension instantanée à l'instant  $t$  par l'intensité instantanée à l'instant  $t$  :  $p = ui$

Appliquons cette relation à la bobine :

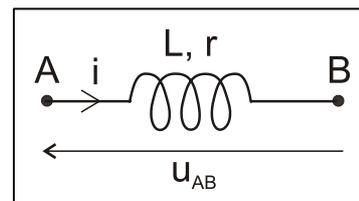
$$p = u_{AB} \cdot i$$

Or :

$$u_{AB} = ri + L \frac{di}{dt}$$

Finalement :

$$p = ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$



##### b) Energies mises en jeu

Rappel de la classe de 2<sup>e</sup> : L'énergie électrique  $E_{\text{électrique}}$  reçue au cours d'une durée  $\Delta t$  par un récepteur dont la puissance électrique est  $P$ , est donnée par la relation :  $E_{\text{électrique}} = P \cdot \Delta t$ .

Appliquons cette relation pour écrire l'énergie électrique (infinitement petite) reçue par la bobine au cours d'une durée  $dt$  infinitement petite pendant laquelle la puissance instantanée  $p$  peut être considérée comme constante :

$$\begin{aligned} dE_{\text{électrique}} &= p \cdot dt \\ &= ri^2 dt + Li \frac{di}{dt} \cdot dt \\ &= ri^2 dt + Li \cdot di \end{aligned}$$

- \*  $ri^2 dt$  représente l'énergie électrique (infinitement petite) transformée en énergie calorifique dans la résistance  $r$  (effet Joule).
- \*  $Li \cdot di$  représente l'énergie électrique (infinitement petite) transformée en énergie magnétique et emmagasinée dans la bobine (cédée par la bobine) pendant l'intervalle de temps  $dt$  où  $i$  augmente (diminue) de  $di$ .

En effet :  $Li \cdot di > 0$  si  $i > 0$  et  $di > 0 \Leftrightarrow$  si l'intensité croît cette énergie est reçue par la bobine;

$Li \cdot di < 0$  si  $i > 0$  et  $di < 0 \Leftrightarrow$  si l'intensité diminue cette énergie est cédée par la bobine.

### c) Energie magnétique emmagasinée dans la bobine

Lorsque l'intensité de courant à travers la bobine augmente de  $di$ , la bobine emmagasine une énergie magnétique (infinitement petite):  $dE_{\text{magnétique}} = Li \cdot di$

Lorsque l'intensité de courant à travers la bobine augmente de 0 à  $I$ , elle emmagasine une énergie magnétique totale :

$$E_{\text{magnétique}} = \int_0^E dE_{\text{magnétique}} = \int_0^I Li \cdot di = \left[ \frac{1}{2} Li^2 \right]_0^I = \frac{1}{2} LI^2$$

$$E_{\text{magnétique}} = \frac{1}{2} LI^2$$

Lorsque l'intensité de courant à travers la bobine reste constante égale à  $I$ , l'énergie magnétique de la bobine reste constante égale à  $E_{\text{magnétique}}$ .

Lorsque l'intensité de courant à travers la bobine s'annule à partir de la valeur  $I$ , la bobine restitue cette énergie au circuit.

### d) Expérience : étincelle de rupture

Description :

On réalise le circuit ci-dessous. L'interrupteur est constitué par un stylet qu'on déplace sur une lime. La pointe du stylet rencontre successivement les bosses et les creux de la lime réalisant ainsi la fermeture et l'ouverture du circuit.

Observation :

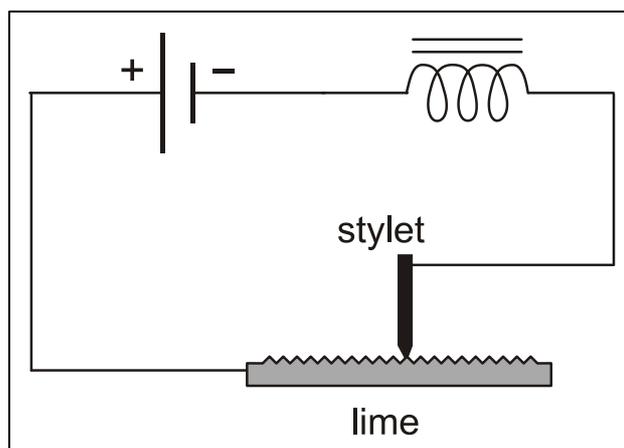
Des étincelles jaillissent entre la pointe du stylet et la lime.

Interprétation :

En ouvrant l'interrupteur d'un circuit parcouru par le courant et comprenant une bobine à forte inductance  $L$ ,

l'intensité de courant diminue brusquement et la bobine est le siège d'une f.é.m. d'auto-induction élevée. Ainsi il apparaît une tension élevée entre les bornes de l'interrupteur.

L'air y devient conducteur et une étincelle jaillit : l'énergie magnétique initialement emmagasinée par la bobine y est libérée.



## 5. Expérience : oscillations libres dans un circuit RLC

### a) Description

Un générateur de signaux applique entre A et B une tension rectangulaire à un circuit, dit **circuit RLC**, constitué par :

- \* un conducteur ohmique de résistance  $R$  ;
- \* une bobine d'inductance  $L$  ;
- \* un condensateur de capacité  $C$ .

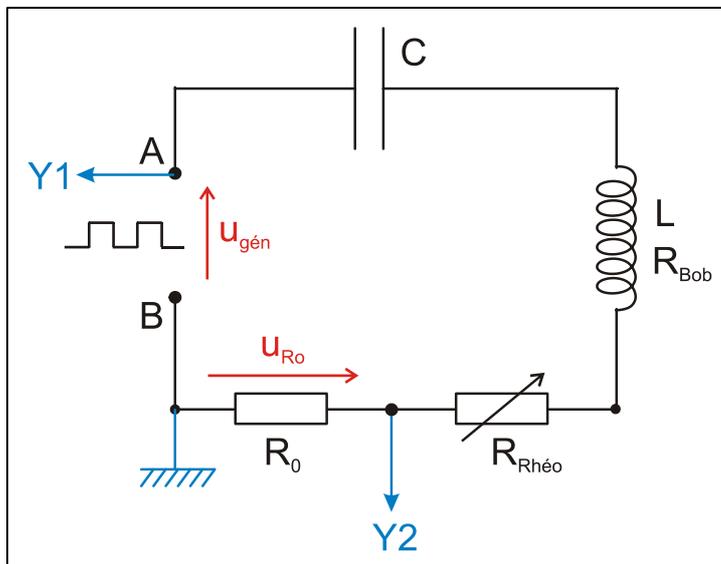
La résistance  $R$  est constituée de 3 résistances en série :

- \* une résistance fixe  $R_0$  ;
- \* la résistance variable  $R_{\text{Rhéo}}$  d'un rhéostat ;
- \* la résistance  $R_{\text{Bob}}$  de la bobine.

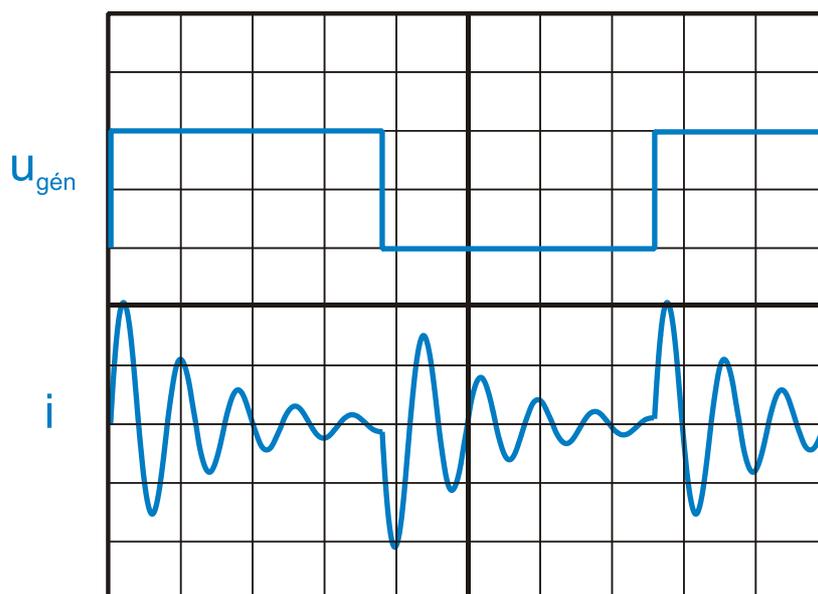
On a évidemment :  $R = R_0 + R_{\text{Rhéo}} + R_{\text{Bob}}$ .

L'oscilloscope visualise les deux tensions appliquées aux entrées Y1 et Y2 :

- \* la tension  $u_{\text{gén}}$  aux bornes du circuit RLC en fonction du temps ;
- \* la tension  $u_{R_0}$  aux bornes de  $R_0$ , proportionnelle à l'intensité  $i$ , en fonction du temps : ce signal peut donc être interprété comme l'intensité de courant en fonction du temps.



### b) Résultats



Le circuit RLC est le siège d'oscillations électriques amorties !

Lorsque la tension du générateur augmente brutalement, une intensité alternative d'amplitude décroissante s'installe dans le circuit. De même lorsque la tension s'annule brusquement.

(Intensité alternative : les électrons libres effectuent un mouvement de va-et-vient !)

L'amortissement des oscillations est dû à la perte d'énergie par effet Joule dans la résistance totale R. L'amortissement est plus important si R est plus grand !

## 6. Etude théorique des oscillations électriques libres dans un circuit LC

### a) Données

Un circuit série comprend un interrupteur, un condensateur de capacité C et une bobine sans résistance d'inductance L. Initialement le condensateur est chargé sous la tension  $U_0$ . A l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur.

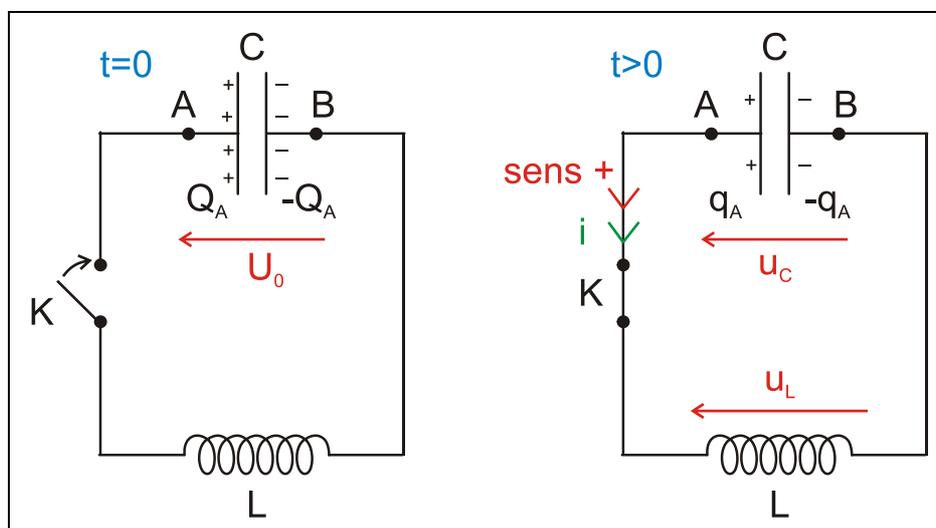
### b) Conditions initiales

A  $t = 0$ ,  $q_{A0} = Q_A = C \cdot U_0$  et  $i_0 = 0$ .

### c) Qu'est-ce qui se passe lorsqu'on ferme l'interrupteur ?

On ferme l'interrupteur K :

- \* le condensateur va se décharger à travers la bobine
- \* la charge  $q_A$  va diminuer :  $dq_A < 0$
- \* un courant d'intensité  $i$  va circuler, d'abord dans le sens + choisi  $\Leftrightarrow i > 0$



**d) Relation entre  $dq_A$  et  $i$** 

Définition de l'intensité de courant instantanée :  $i = \frac{dq}{dt}$  avec  $dq$  = charge élémentaire traversant une section du fil pendant la durée élémentaire  $dt$ .

Pour toute charge élémentaire  $dq > 0$  **circulant dans le sens +**, la charge  $q_A$  de l'armature A du condensateur **diminue** de  $dq$ . La variation élémentaire  $dq_A$  de la charge de l'armature A vaut donc :  $dq_A = -dq$ .

Enfinement : 
$$i = -\frac{dq_A}{dt} \quad (1)$$

On retrouve que  $i$  et  $dq_A$  sont de signe contraire.

(Si on avait choisi le sens + dans le sens opposé, on aurait trouvé  $i = +\frac{dq_A}{dt}$ .)

**e) Equation différentielle**

Sur le schéma, on voit que : 
$$u_{AB} = u_C = u_L \quad (2)$$

Loi du condensateur : 
$$u_C = \frac{q_A}{C} \quad (3)$$

Loi d'Ohm pour la bobine 
$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad (4)$$

Remplaçons (3) et (4) dans (2) : 
$$\frac{q_A}{C} = L \frac{di}{dt} \quad (5)$$

Compte tenu de (1) : 
$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{dq_A}{dt} \right) = -\frac{d^2q_A}{dt^2} \quad (6)$$

(6) dans (5) : 
$$\frac{q_A}{C} = -L \frac{d^2q_A}{dt^2}$$

$$\frac{d^2q_A}{dt^2} = -\frac{1}{LC} q_A$$

**f) Solution de l'équation différentielle**

\* L'équation différentielle est de la forme  $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$  avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} > 0$ .

\* La solution générale de ce type d'équation est une fonction sinusoïdale de la forme

$$q_A = Q_{Am} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (7)$$

$$\text{Et : } i = -\frac{dq_A}{dt} = Q_{Am} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (8)$$

\* Déterminons les constantes  $Q_{Am}$  et  $\varphi$  à l'aide des conditions initiales :

$$t = 0 \Rightarrow q_a = Q_A > 0 \quad \text{et} \quad i = 0$$

Remplaçons dans les équations (7) et (8) :

$$Q_A = Q_{Am} \cos \varphi$$

$$0 = Q_{Am} \omega_0 \sin \varphi$$

Solution :  $\varphi = 0$  et  $Q_{Am} = Q_A$

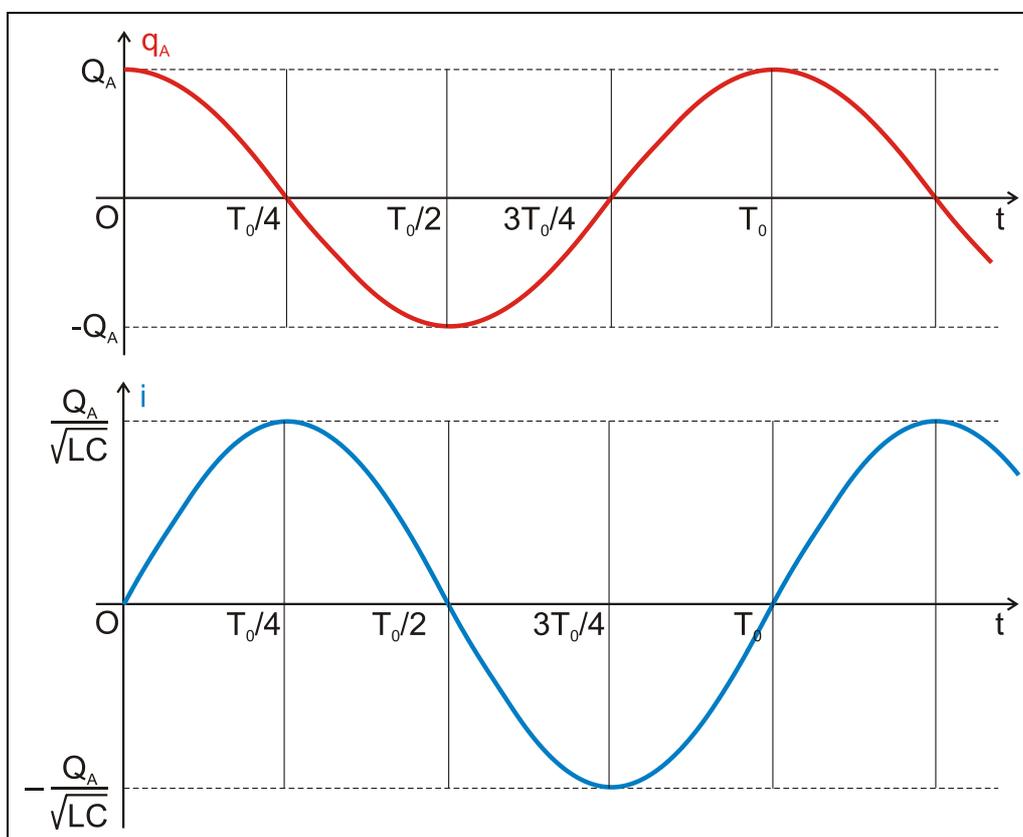
**g) Equations finales de la charge du condensateur, de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité dans le circuit**

\* **La charge du condensateur** varie en fonction du temps suivant l'équation :

$$q_A(t) = Q_A \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right)$$

\* **L'intensité dans le circuit** varie en fonction du temps suivant l'équation :

$$i(t) = -\frac{dq_A}{dt} = \frac{Q_A}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) = \frac{Q_A}{\sqrt{LC}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t - \frac{\pi}{2}\right)$$



- \* **La tension aux bornes du condensateur** varie en fonction du temps suivant l'équation :

$$u_C = \frac{q_A}{C} = \frac{Q_A}{C} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) = U_C \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) \quad (u_C \sim q_A \Leftrightarrow u_C \text{ et } q_A \text{ en phase !})$$

### h) Période propre, fréquence propre et pulsation propre

- \* La pulsation propre des oscillations est :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- \* La période propre des oscillations est :  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$

- \* La fréquence propre est donnée par :  $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

### i) Etablissement de l'équation différentielle à partir de la conservation de l'énergie

- \* S'il n'y a pas de résistance dans le circuit, aucune énergie n'est transformée en chaleur. L'énergie électromagnétique totale du circuit est alors conservée.

$$E = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{q_A^2}{C} = \text{constant}$$

- \* Dérivons par rapport au temps cette expression de l'énergie totale :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{q_A^2}{C} \right) = 0 \quad (\text{la dérivée d'une constante est nulle})$$

On obtient en appliquons les règles de dérivation établies en mathématiques :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L \frac{d}{dt} (i^2) + \frac{1}{2} \frac{1}{C} \frac{d}{dt} (q_A^2) &= 0 \\ \frac{1}{2} L \cdot 2i \frac{di}{dt} + \frac{1}{2} \frac{1}{C} \cdot 2q_A \frac{dq_A}{dt} &= 0 \\ L \cdot i \cdot \frac{d}{dt} \left( -\frac{dq_A}{dt} \right) + \frac{1}{C} \cdot q_A \cdot (-i) &= 0 \end{aligned}$$

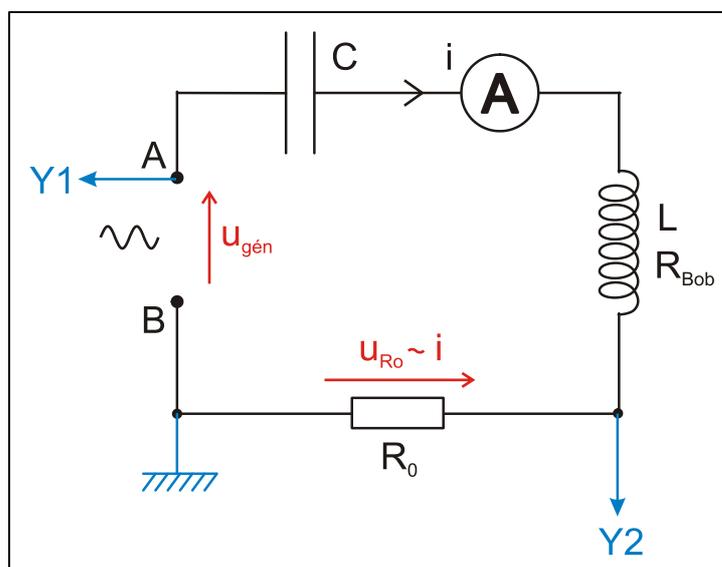
Enfinement :  $L \frac{d^2 q_A}{dt^2} + \frac{1}{C} q_A = 0$

Enfinement, on retrouve l'équation différentielle du mouvement :  $\frac{d^2 q_A}{dt^2} = -\frac{1}{LC} q_A$

## 7. Oscillations forcées. Résonance

### a) Expérience

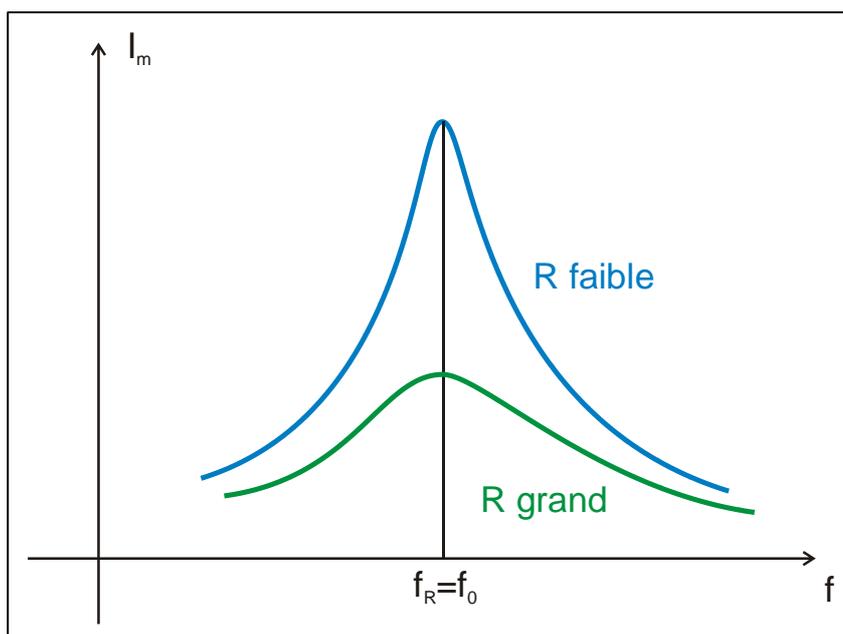
- \* Excitation : Un générateur excite un circuit RLC avec une tension alternative sinusoïdale  $u_{\text{gén}}$  de fréquence variable.
- \* Réponse : Le circuit répond à cette excitation par un courant alternatif d'intensité  $i$ , dont nous observons l'amplitude à l'aide d'un ampèremètre.
- \* En même temps, nous visualisons les courbes de  $u_{\text{gén}}$  et  $i$  en fonction du temps à l'aide d'un oscillographe.



### b) Observations

La courbe de réponse  $I_m(f)$  dépend de la résistance (de l'amortissement) totale du circuit.

- \* Le circuit effectue des oscillations de même fréquence que celle du générateur : il effectue des oscillations forcées.
- \* L'amplitude  $I_m$  de l'intensité dans le circuit dépend de la fréquence du générateur et de la valeur de la résistance totale dans le circuit.
- \*  $I_m$  passe par un maximum : c'est la **résonance**. La fréquence de résonance  $f_R$  est égale à la fréquence propre  $f_0$  du circuit.



### **Afin de mieux comprendre !**

#### **Pourquoi le pendule élastique horizontal effectue-t-il des oscillations mécaniques libres ?**

1. Initialement, le chariot est déplacé vers la droite, le ressort est donc allongé. Dès qu'on lâche le chariot, le ressort le tire vers la gauche, c. à d. vers la position d'équilibre. A cause de son inertie, sa vitesse n'augmente que progressivement. Elle augmentera aussi longtemps que le ressort est encore allongé.
2. A l'instant où le ressort n'est ni allongé, ni comprimé, il n'y a plus de force agissant sur le chariot. Or celui-ci est en mouvement vers la gauche (vitesse maximale).
3. Par la suite, le chariot comprime le ressort. Celui-ci pousse le chariot vers la droite, c. à d. vers la position d'équilibre. A cause de son inertie, le chariot ne sera ralenti que progressivement.
4. A l'instant où le chariot a atteint le repos, la compression du ressort est maximale. Il en est de même de la tension du ressort, force que le ressort exerce sur le chariot. Celui-ci va donc redémarrer aussitôt vers la droite et le même jeu se fait dans l'autre sens.

#### **Pourquoi des oscillations électriques libres naissent-elles dans un circuit LC ?**

1. Une bobine crée un champ magnétique proportionnel à l'intensité du courant qui la traverse. Si cette intensité varie, le champ varie également. Une bobine s'opposant à la variation du champ s'oppose donc à la variation du courant qui la traverse.
2. Le condensateur initialement chargé se décharge à travers la bobine dès qu'on ferme l'interrupteur. Un courant à travers la bobine prend naissance. Or celle-ci s'oppose à l'augmentation du courant : l'intensité du courant n'augmente que progressivement, aussi longtemps que le condensateur n'est pas encore complètement déchargé, c. à d. que les charges mobiles sont encore soumises à des forces propulsives.
3. A l'instant où le condensateur est complètement déchargé, l'intensité a atteint une certaine valeur (intensité maximale), et du coup le condensateur commence à se charger dans l'autre sens. Par sa polarité inversée, il freine le mouvement des charges : l'intensité du courant va baisser. De nouveau la bobine s'oppose à la diminution du courant, de sorte que le courant ne s'annule que progressivement.
4. A l'instant où l'intensité est devenue nulle, le condensateur est chargé au maximum, mais à polarité inversée par rapport à la polarité initiale. Par la suite, le même jeu se fait dans l'autre sens.

### Comparaison entre l'oscillateur mécanique et l'oscillateur électrique

| Grandeurs mécaniques                                  | Grandeurs électriques   |
|---|---|
| Elongation $x$  | charge du condensateur $q_A$  |
| Vitesse $v_x = \frac{dx}{dt}$                         | Intensité de courant $i = -\frac{dq_A}{dt}$   |
| Energie potentielle élastique $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ | Energie emmagasinée dans le condensateur<br>$E_{\text{cond}} = \frac{1}{2} \frac{q_A^2}{C}$ |
| Energie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$             | Energie emmagasinée dans la bobine $E_{\text{bob}} = \frac{1}{2}Li^2$                       |
| Masse $m$ (inertie)                                   | Inductance $L$ (inertie)  |
| Raideur $k$   | Inverse de la capacité $1/C$  |
| Tension du ressort $T_x$                              | Tension électrique du condensateur $u_C$  |
| Frottement  | Résistance électrique   |