

Cours et exercices de PHYSIQUE :

Électricité.

**Ingénieur CESI
Préparation aux tests de
sélection.**

Programme de physique.

A – Électricité.

Chapitre 1 : Les composants passifs.

- Simplification de schémas comportant des composants passifs (résistances, condensateurs, inductances) en série et en parallèle.
- Calcul de résistance à partir de la formule : $R = \rho \frac{L}{S}$.
- Calcul de la capacité d'un condensateur plan, par la formule : $C = \epsilon \frac{S}{e}$.
- Calcul de la valeur d'une inductance, la formule de calcul étant donnée.
- Unités : Ohm, Farad, Henry, Joule.
- Lois fondamentales des composants passifs : $U = RI$, $P = \frac{dW}{dt}$, $P = UI$, $W = \frac{1}{2} CV^2$,
 $U = L \frac{dI}{dt}$, $W = \frac{1}{2} LI^2$.

Chapitre 2 : Electrocinétique.

- Courant et tension, puissance.
- Unités : ampère, volt, watt.
- Générateur de tension et de courant ; récepteurs.
- Lois de l'électrocinétique :
 - Loi de Joule,
 - Loi d'Ohm,
 - Lois de Kirchhoff (nœuds et mailles),
 - Théorème de superposition,
 - Théorème de Millman,
 - Règle du diviseur de potentiel.

NOTA : les théorèmes de Thévenin et Norton ne sont pas au programme.

- Utilisation pour le calcul de tensions et de courants dans un circuit électrique.

Chapitre 3 : Régime transitoires.

- charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance :
 - Etablissement de l'équation différentielle,
 - Résolution,
 - Constante de temps : définition, détermination graphique.
- Circuit (L,C) et (R, L, C).
 - Etude qualitative uniquement.

Chapitre 4 : Régime alternatif sinusoïdal

- Circuit (R, L, C) série en régime alternatif sinusoïdal (étude par la construction de Fresnel et en notation complexe)
 - Impédance,
 - Résonance en intensité,
 - Bande passante,

- Facteur de qualité.
- Puissance moyenne
 - Définition,
 - Facteur de puissance.

B – Mécanique

Chapitre 5 : Statique

- Forces, moments de forces,
- Equations à l'équilibre
- Notion de frottement.

Chapitre 6 : Cinématique

- Vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes.
- Mouvements rectilignes uniforme et uniformément accéléré.

Chapitre 7 : Dynamique

- Notion de référentiel galiléen
- Relation fondamentale de la dynamique pour les systèmes en translation, dans un référentiel galiléen.
- Applications, notamment à la chute libre.

Chapitre 8 : Energétique

- Travail, puissance,
- Energie cinétique de translation,
- Energie potentielle de pesanteur,
- Energie mécanique.
- Théorème de l'énergie cinétique.

Répartition des séances :
Programme PFI Mars 2005.

	Thème 1	Thème 2	Thème 3
Séance 1	Grandeurs et unités - Grandeurs, unités - Équations aux dimensions	Statique	
Séance 2	Cinématique - Mouvement rectiligne uniforme et uniformément accéléré		
Séance 3		Dynamique - Systèmes en translation, - PFD, - Application à la chute libre.	
Séance 4	Énergétique - Energie cinétique de translation - Travail et puissance, - Energie potentielle de pesanteur, - Energie mécanique. - Théorème de l'énergie cinétique.		
Séance 5			
Séance 6	Electricité - Notion de résistance, de condensateur, d'inductance.	Electrocinétique - Loi d'Ohm - Règle du diviseur de potentiel - Lois de Kirchoff - Théorème de superposition	
Séance 7	Electrocinétique - Théorème de Millman		-
Séance 8	Régime transitoire Etude qualitative des circuits du 1 ^{er} et du 2 nd ordre en régime transitoire (RC, LR, LC, RLC).	Régime alternatif sinusoïdal - Grandeurs alternatives - Circuit RLC série ! - Diagramme de Fresnel	
Séance 9	Régime alternatif sinusoïdal - Circuit en notation complexe		
Séance 10	Test blanc Corrigé Approfondissements : partir des sujets demandés par les élèves.		

Table des matières.

1	COURS.....	8
1.1	LES COMPOSANTS PASSIFS.....	8
1.2	ELECTRODYNAMIQUE.....	22
1.3	REGIME TRANSITOIRE.....	29
1.4	COURANT SINUSOÏDAL.....	29
2	ÉNONCÉS DES EXERCICES.....	39
2.1	QUESTION SUR LES OISEAUX.....	39
2.2	COURANT ET CHARGE.....	39
2.3	CAPACITÉS ÉQUIVALENTES.....	39
2.4	QUESTIONS SUR LES CONDENSATEURS.....	39
2.5	REFLEXION SUR LES CAPACITÉS.....	39
2.6	PUISSANCE DISSIPÉE DANS UNE RÉSISTANCE.....	40
2.7	LUMINOSITÉ D'UNE AMPOULE.....	40
2.8	RÉSISTANCE ET SECTION.....	40
2.9	RÉSISTANCE ET RÉSISTIVITÉ.....	40
2.10	RÉSISTANCE DU CUIVRE.....	40
2.11	RÉSISTANCE DU PLATINE.....	40
2.12	RÉSISTANCE D'UN TRONC DE CÔNE.....	40
2.13	RÉSISTANCE D'UN MILIEU ENTRE DEUX HÉMISPHERES.....	40
2.14	PUISSANCE DISSIPÉE.....	41
2.15	ACCUMULATEUR.....	41
2.16	CHARGE D'UN ACCUMULATEUR.....	41
2.17	RÉSISTANCE ÉQUIVALENTE.....	41
2.18	RÉDUCTION DE LA RÉSISTANCE.....	41
2.19	RÉSISTANCE ÉQUIVALENTE AUX BORNES DE AB.....	41
2.20	RÉSISTANCE ÉQUIVALENTE (2).....	42
2.21	RÉSISTANCE ÉQUIVALENTE À UNE ASSOCIATION EN SÉRIE.....	42
2.22	RÉSISTANCE ÉQUIVALENTE À UNE ASSOCIATION EN DÉRIVATION.....	42
2.23	RÉSISTANCE ÉQUIVALENTE (3).....	42
2.24	RÉSISTANCE ÉQUIVALENTE (4).....	43
2.25	CALCULS DE GRANDEURS : I, U ?.....	43
2.26	CALCULS DE GRANDEURS : I, U ? SUITE.....	43
2.27	GALVANOMÈTRE.....	44
2.28	MESURE D'UNE RÉSISTANCE.....	44
2.29	CONDENSATEUR PLAN DIÉLECTRIQUE.....	44
2.30	CHARGE D'UN CONDENSATEUR, CIRCUIT RC.....	44
2.31	CALCULS DES ÉNERGIES DE DIPOLES PASSIFS.....	45
2.32	BILAN ÉNERGÉTIQUE DE CHARGE D'UN CONDENSATEUR.....	45
2.33	RÉPONSE D'UN CIRCUIT R,L À UN ÉCHELON DE TENSION.....	45
2.34	ÉTABLISSEMENT ET RUPTURE D'UN COURANT.....	45
2.35	RÉPONSE D'UN CIRCUIT R,L,C À UN ÉCHELON DE TENSION.....	46
2.36	CIRCUIT L,C PARALLÈLE SOUMIS À UN ÉCHELON DE COURANT.....	46
2.37	BAC 2004 ÎLE DE LA RÉUNION, EXERCICE 1: QUELQUES USAGES DES CONDENSATEURS.....	47
2.38	ANTILLES 2005 EXERCICE N°3 : SONDE THERMIQUE (4 POINTS).....	51
2.39	2006 ANTILLES ; EXERCICE 1 : BOBINE À INDUCTANCE RÉGLABLE.....	53
2.40	BAC JUIN 2005 : MODÉLISATION D'UNE ALARME : 4 PTS.....	57
2.41	POLYNÉSIE 2006 : EXERCICE 1 : RÉSISTANCE D'UNE BOBINE RÉELLE.....	59
2.42	COURANT INDÉPENDANT DU TEMPS.....	62
2.43	CIRCUIT ÉQUIVALENT.....	62
2.44	RÉSISTANCE ÉQUIVALENTE AUX BORNES D'UN DIPOLE.....	62
2.45	VALEURS ALGÈBRIQUES DE I ET E.....	63
2.46	APPLICATION DU THÉORÈME DE SUPERPOSITION.....	63

2.47	REPRESENTATION MATRICIELLE.	63
2.48	RESISTANCE EQUIVALENTE D'UN MAILLAGE.	63
2.49	TRANSFORMATION DE KENELLY.	64
2.50	VERS LE PONT DE WHEATSTONE.	64
2.51	LOIS DE KIRCHHOFF ET METHODE MATRICIELLE.	64
2.52	APPLICATION DES THEOREMES DE THEVENIN ET NORTON.	65
2.53	PONT DE WHEATSTONE.	65
2.54	COURANT CIRCULANT DANS UNE BRANCHE.	65
2.55	PONT DE MANCE.	65
2.56	COURANT CIRCULANT DANS UNE BRANCHE.	66
2.57	CALCUL D'IMPEDANCES COMPLEXES.	66
2.58	CIRCUIT RLC EN SERIE.	66
2.59	SCHEMA EQUIVALENT.	67
2.60	CALCULS DE GRANDEURS EFFICACES.	67
2.61	VARIATION DE LA PULSATION.	67
2.62	OPTIMISATION DE P.	67
2.63	QUADRATURE DE PHASE.	67
2.64	ÉGALITE DES TENSIONS.	68
2.65	PONT DE WHEATSTONE COMPLEXE.	68
2.66	DIFFERENTES EXPRESSIONS DE LA PUISSANCE	68
2.67	METHODE DES TROIS AMPEREMETRES.	69
2.68	METHODE DES TROIS VOLTMETRES.	69
3	SOLUTIONS DES EXERCICES.	70
3.1	QUESTION SUR LES OISEAUX.	70
3.2	COURANT ET CHARGE.	70
3.3	CAPACITES EQUIVALENTES.	70
3.4	QUESTIONS SUR LES CONDENSATEURS.	70
3.5	REFLEXION SUR LES CAPACITES.	71
3.6	PUISSANCE DISSIPÉE DANS UNE RESISTANCE.	71
3.7	LUMINOSITE D'UNE AMPOULE.	71
3.8	RESISTANCE ET SECTION.	71
3.9	RESISTANCE ET RESISTIVITE.	71
3.10	RESISTANCE DU CUIVRE.	71
3.11	RESISTANCE DU PLATINE.	72
3.12	RESISTANCE D'UN TRONC DE CONE.	72
3.13	RESISTANCE D'UN MILIEU ENTRE DEUX HEMISPHERES.	72
3.14	PUISSANCE DISSIPÉE.	72
3.15	ACCUMULATEUR.	72
3.16	CHARGE D'UN ACCUMULATEUR.	73
3.17	RESISTANCE EQUIVALENTE.	73
3.18	REDUCTION DE LA RESISTANCE.	73
3.19	RESISTANCE EQUIVALENTE.	73
3.20	RESISTANCE EQUIVALENTE (2).	73
3.21	RESISTANCE EQUIVALENTE A UNE ASSOCIATION EN SERIE.	74
3.22	RESISTANCE EQUIVALENTE A UNE ASSOCIATION EN DERIVATION.	74
3.23	RESISTANCE EQUIVALENTE (3).	74
3.24	RESISTANCE EQUIVALENTE (4).	74
3.25	CALCULS DE GRANDEURS : I, U ?	75
3.26	CALCUL DE GRANDEURS : I, U ? SUITE.	75
3.27	GALVANOMETRE.	75
3.28	MESURE D'UNE RESISTANCE.	75
3.29	CONDENSATEUR PLAN DIELECTRIQUE.	76
3.30	CHARGEMENT D'UN CONDENSATEUR.	76
3.31	CALCULS DES ENERGIES DE DIPOLES PASSIFS.	77
3.32	BILAN ENERGETIQUE DE CHARGE D'UN CONDENSATEUR.	77
3.33	REPOSE D'UN CIRCUIT R,L A UN ECHELON DE TENSION.	78
3.34	ETABLISSEMENT ET RUPTURE D'UN COURANT.	79
3.35	REPOSE D'UN CIRCUIT R,L,C A UN ECHELON DE TENSION.	79
3.36	CIRCUIT L,C PARALLELE SOUMIS A UN ECHELON DE COURANT.	82

3.37	SUJET BAC 2004 REUNION ; EXERCICE 1: QUELQUES USAGES DES CONDENSATEURS.....	82
3.38	ANTILLES 2005 : EXERCICE N°3 : SONDE THERMIQUE.	85
3.39	2006 ANTILLES ; EXERCICE 1 : BOBINE A INDUCTANCE REGLABLE.	87
3.40	BAC 2005 : MODELISATION D'UNE ALARME.	91
3.41	2006 POLYNESIE EXERCICE N°1 : RESISTANCE D'UNE BOBINE REELLE	93
3.42	COURANT INDEPENDANT DU TEMPS.	95
3.43	CIRCUIT EQUIVALENT.	95
3.44	RESISTANCE EQUIVALENTE AUX BORNES D'UN DIPOLE.....	96
3.45	VALEURS ALGEBRIQUES DE I ET E.	96
3.46	APPLICATION DU THEOREME DE SUPERPOSITION.	96
3.47	REPRESENTATION MATRICIELLE.	97
3.48	RESISTANCE EQUIVALENTE D'UN MAILLAGE.	97
3.49	TRANSFORMATION DE KENELLY.....	98
3.50	VERS LE PONT DE WHEATSTONE.....	99
3.51	LOIS DE KIRCHHOFF ET METHODE MATRICIELLE.....	99
3.52	APPLICATION DES THEOREMES DE THEVENIN ET NORTON.....	100
3.53	PONT DE WHEATSTONE.	102
3.54	COURANT CIRCULANT DANS UNE BRANCHE.....	103
3.55	PONT DE MANCE.....	104
3.56	COURANT CIRCULANT DANS UNE BRANCHE.....	105
3.57	CALCUL D'IMPEDANCES COMPLEXES.....	105
3.58	CIRCUIT RLC EN SERIE.	106
3.59	SCHEMA EQUIVALENT.....	109
3.60	CALCULS DE GRANDEURS EFFICACES.....	110
3.61	VARIATION DE LA PULSATION.....	110
3.62	OPTIMISATION DE P.	110
3.63	QUADRATURE DE PHASE.	111
3.64	ÉGALITE DES TENSIONS.....	112
3.65	PONT DE WHEATSTONE COMPLEXE.....	113
3.66	DIFFERENTES EXPRESSIONS DE LA PUISSANCE	113
3.67	METHODE DES TROIS AMPEREMETRES.	113
3.68	METHODE DES TROIS VOLTMETRES.....	114

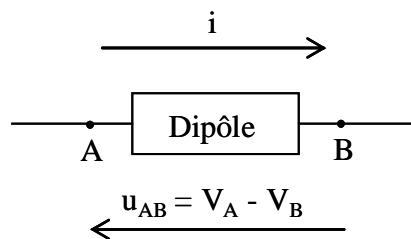
1 Cours.

1.1 Les composants passifs.

1.1.1 Dipôle électrocinétique

On appelle dipôle électrocinétique tout système relié à l'extérieur par deux conducteurs uniquement. Le comportement d'un dipôle est caractérisé par deux grandeurs électriques duales : la tension et le courant.

La tension aux bornes d'un dipôle représente la différence de potentiel $u(t)$ entre les deux bornes du dipôle. La tension s'exprime en Volt (V).



Le courant traversant un dipôle correspond au déplacement de charges électriques sous l'effet du champ électrique induit par la différence de potentiel aux bornes du dipôle. A tout instant le courant entrant par une borne d'un dipôle est égal au courant sortant par l'autre borne. L'intensité $i(t)$ de ce courant mesure le débit des charges électriques qui traversent une section de conducteur :

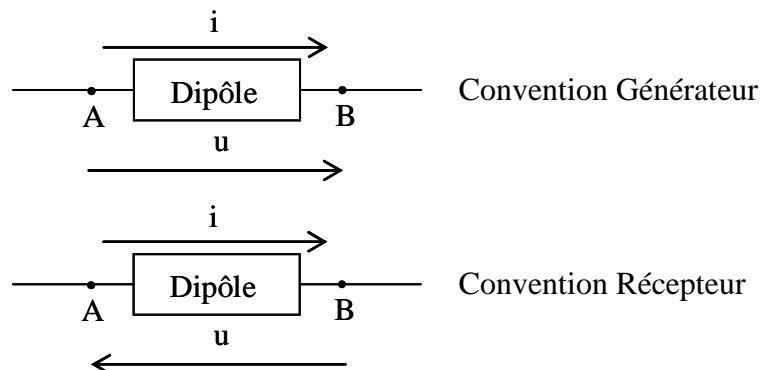
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}.$$

L'intensité s'exprime en Ampère (A). Le courant électrique est une grandeur orientée.

Conventionnellement le sens positif correspond au sens de déplacement des charges positives (sens contraire au déplacement des électrons de charge négative).

On a $i_A(t) = i_B(t) = i(t)$.

Il existe deux possibilités pour le choix des sens conventionnels de la tension et du courant. Selon que u et i sont de même sens ou non nous avons :



En régime stationnaire, indépendant du temps, il existe une relation entre l'intensité i traversant le dipôle et la tension u entre ses bornes. Cette relation peut éventuellement faire intervenir des paramètres extérieurs (température, éclairage, champ magnétique, etc...).

Cette relation peut se mettre sous la forme $i = i(u)$ ou $u = u(i)$. Les graphes obtenus sont appelés caractéristiques statiques :

$i = i(u)$: caractéristique statique courant-tension du dipôle,

$u = u(i)$: caractéristique statique tension-courant du dipôle.

Un dipôle est passif si son intensité de court-circuit et sa tension en circuit ouvert sont nulles : ses caractéristiques statiques passent par l'origine. Il est dit actif dans le cas contraire.

Un dipôle est linéaire si :

$$i(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha i(u_1) + \beta i(u_2)$$

ou

$$u(\alpha i_1 + \beta i_2) = \alpha u(i_1) + \beta u(i_2).$$

1.1.2 Puissance électrique reçue par un dipôle.

Le travail lié au déplacement d'un électron soumis à une différence de potentiel dV est donné par la relation : $dW_e = \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = -e\vec{E} \cdot d\vec{l} = e dV$. Pour un ensemble de charge q , on a la relation différentielle : $dW_q = q dV$. Considérons un dipôle AB parcouru par un courant i_{AB} circulant de A vers B. Pendant un intervalle de temps Δt , une charge $q = i_{AB} \Delta t$ "entre" en A et "sort" en B avec une énergie.

$$dW = i_{AB} (V_A - V_B) dt = P dt \text{ et par conséquent :}$$

$$P = i_{AB} (V_A - V_B).$$

Dans la convention récepteur la quantité $P(t) = u(t) i(t)$ représente la puissance électrique instantanée reçue par le dipôle. Réciproquement dans la convention générateur elle représente la puissance délivrée au reste du circuit par le dipôle.

1.1.3 Lois de Kirchhoff.

Un circuit ou réseau est un ensemble de conducteurs reliés entre eux et contenant en générale des générateurs, des récepteurs et des résistances.

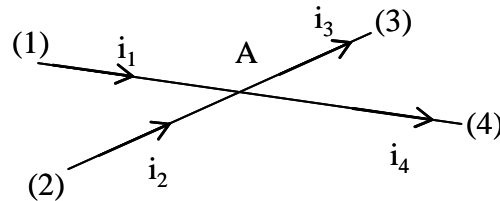
Un nœud est un point du réseau où sont connectés plus de deux conducteurs.

Une branche est une portion de réseaux située entre deux nœuds.

Une maille est un ensemble de branche formant un circuit fermé, qui ne passe qu'une fois par un nœud donné.

1.1.3.1 Loi des noeuds :

En tout noeud d'un circuit, et à tout instant, la somme des courants qui arrivent est égale à la somme des courants qui sortent. Il s'agit d'une conséquence de la conservation de la charge électrique.

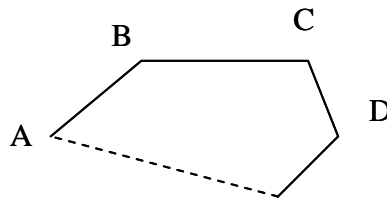


La somme des intensités entrantes est égale à celle des intensités sortantes.

Sur l'exemple : $i_1 + i_2 = i_3 + i_4$.

La loi des noeuds peut encore s'écrire sous la forme suivante : En tout noeud d'un réseau la somme algébrique des courants est nulle : $\sum_k i_k = 0$.

1.1.3.2 Loi des mailles.



Une maille est un circuit fermé pris dans le réseau. Si l'on choisit un sens de parcours sur la maille, la somme de toutes les différences de potentiel est nulle lorsqu'un tour complet a été effectué. Ceci se traduit mathématiquement par la relation suivante :

$$\sum r_{AB} i_{AB} - \sum \varepsilon_{AB} e_{AB} = 0$$

ε_{AB} vaut +1 ou -1 selon le sens du courant et la nature du dipôle.

Pour appliquer les lois de Kirchhoff, on procède de la manière suivante :

- Sur chaque branche, on adopte un sens positif de mesure pour le courant, le plus vraisemblable, et une valeur algébrique du courant. On écrit les lois relatives aux noeuds.
- On écrit ensuite la loi relative aux mailles pour le nombre convenable de mailles indépendantes en prenant sur chaque maille un sens de parcours arbitraire.
- On obtient un système d'équations linéaires permettant de calculer toutes les intensités algébriques inconnues.

Remarque sur les lois de Kirchhoff.

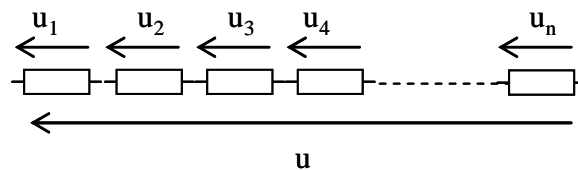
L'emploi des lois de Kirchhoff est aisé et systématique. Celles-ci présentent l'avantage de fournir toutes les intensités dans les branches concernées. Ce dernier avantage peut, du reste,

constituer un inconvénient : en effet, pour un réseau un peu compliqué, les calculs seront très lourds et on risque de s'encombrer dans ceux-ci d'intensités non recherchées et ne présentant pas d'intérêt.

1.1.4 Association de dipôles.

On distingue deux types d'association de dipôles. Les dipôles peuvent être connectés en série, ils sont alors tous traversés par la même intensité. Ils peuvent être connectés en parallèle, ils sont alors tous soumis à la même tension.

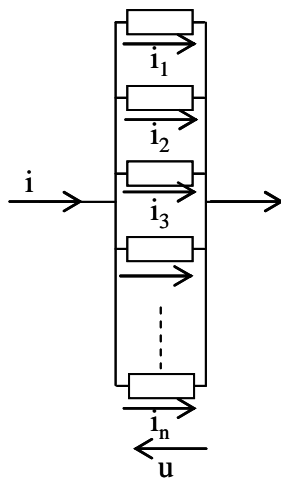
1.1.4.1 Association en série.



Chaque dipôle est traversé par la même intensité et la tension aux bornes du dipôle équivalent est égale à la somme des tensions partielles :

$$u(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t).$$

1.1.4.2 Association en parallèle.



Les dipôles sont soumis à la même tension. Le courant total qui traverse l'ensemble des dipôles est égal à la somme des courants individuels :

$$i(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t).$$

1.1.5 Résistance et lois d'Ohm.

1.1.5.1 Lois d'Ohm.

Un dipôle passif est un ensemble de deux conducteurs possédant deux bornes et pour lequel il y a simplement transformation d'énergie électrique en énergie calorifique. On les appelle *résistances*.

Le passage du courant dans un conducteur électrique est produit par des électrons mobiles. Ceux-ci sont soumis à deux forces :

- La force électrique $\vec{F}_e = -e\vec{E}$.
- Une force de freinage $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, \vec{v} étant la vitesse des électrons mobiles. Cette force est due aux différents chocs des électrons sur les ions fixes du réseau cristallin du métal.

En régime permanent, le vecteur vitesse d'un électron donné est constant et donc : $\vec{F}_e + \vec{F} = \vec{0}$, soit :

$$\vec{v} = -\frac{e}{\lambda} \vec{E}.$$

La densité de courant est $\vec{j} = \rho \vec{v}$, ρ étant la densité volumique de charges mobiles, donc d'électrons mobiles.

Si N est le nombre d'électrons mobiles par unité de volume : $\rho = -N e$, donc :

$$\vec{j} = -N e \vec{v} \text{ soit : } \vec{j} = \frac{Ne^2}{\lambda} \vec{E}.$$

On pose : $\boxed{\gamma = \frac{Ne^2}{\lambda}}$, conductivité électrique du matériau, donc :

$$\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}.$$

Cette expression est dite forme locale de la loi d'Ohm.

Dans le système international, γ s'exprime en siemens par mètre ($S.m^{-1}$).

1.1.5.2 Résistance d'un conducteur.

Considérons un conducteur d'extrémités A et B parcouru par un courant d'intensité I :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS.$$

Par ailleurs, V_A et V_B étant les potentiels du conducteur en A et B : $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

Si l'on multiplie \vec{E} par un scalaire quelconque k , $V_A - V_B$ est multipliée par k , \vec{j} est multiplié par k , il en est de même de I , et par suite, le rapport $\frac{V_A - V_B}{I}$ est inchangé.

Par définition, on appelle résistance du conducteur ohmique la quantité : $\boxed{R = \frac{V_A - V_B}{I}}$.

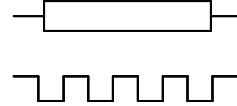
Autrement écrit : $\boxed{u(t) = R i(t)}$.

Le raisonnement précédent montre que la résistance du conducteur ne dépend que du matériau et de la géométrie du conducteur.

La résistance R s'écrit :

$$R = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_S \gamma \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS}.$$

Le symbole d'une résistance est :



R s'exprime en Ohm : Ω .

γ s'exprime en siemens par mètre : $S \cdot m^{-1}$.

On utilise aussi la résistivité du matériau définie par : $\rho = \frac{1}{\gamma}$ qui s'exprime en $\Omega \cdot m$.

1.1.5.3 Résistance d'un conducteur filiforme de section constante.

Un conducteur est dit filiforme lorsque ses dimensions transversales sont faibles devant sa longueur. Les lignes de champs sont alors parallèles aux génératrices du fil. Soit L sa longueur et soit S sa section droite :

$$E = \frac{V_A - V_B}{L} \text{ et } J = \frac{I}{S} = \gamma E \text{ d'où : } \frac{I}{S} = \gamma \frac{V_A - V_B}{L}. \text{ On en déduit :}$$

$$R = \frac{V_A - V_B}{I} = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{S} = \rho \frac{L}{S}.$$

Cette formule peut être généralisée à des conducteurs quelconques.

1.1.5.4 Résistivité.

Sans entrer dans les détails, la résistivité est fonction du matériau, citons par exemple :

Ag : $\rho = 1,6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$.

Quartz fondu : $\rho = 10^{16} \Omega \cdot m$.

Conducteurs : $10^{-7} \Omega \cdot m$.

Isolants : $10^5 \Omega \cdot m$.

Semi-conducteurs : $10^4 \Omega \cdot m$ à $10^6 \Omega \cdot m$.

La résistivité peut dépendre de la température, du champ magnétique extérieur, de la quantité de lumière à laquelle le matériau est exposé.

1.1.5.5 Loi de Joule.

Nous avons deux manières de l'évaluer.

La première consiste à utiliser l'expression de la puissance reçue par un dipôle :

$P = u i$. Puisque $u = Ri$ alors :
$$P = ui = Ri^2 = \frac{u^2}{R}.$$

Seconde méthode : Revenons au conducteur précédent et calculons les travaux pendant un intervalle de temps dt où l'électron se déplace de $d\vec{l}$ des forces électrique et de freinage :

$dW_e = \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = -e\vec{E} \cdot d\vec{l} = e dV$ et $dW_f = -\lambda \vec{v} \cdot d\vec{l} = -\lambda v^2 dt$. Par application du théorème de l'énergie cinétique, on a : $dW_e + dW_f = \Delta E_c = 0$ soit : $e dV = \lambda v^2 dt$.

Le travail dW_f est perdu sous forme de chaleur dans le conducteur. Cette perte de chaleur constitue l'effet Joule.

Soit N le nombre de porteurs par unité de volume. Le travail (par unité de volume) perdu par effet Joule correspond évidemment :

$$dW = N dW_f = N \lambda v^2 dt.$$

Par unité de temps, ce travail (par unité de volume) correspond à une puissance (par unité de volume) dissipée sous forme de chaleur :

$$P = \frac{dW}{dt} = N \lambda v^2,$$

or $\gamma = \frac{Ne^2}{\lambda}$ et $v = \frac{e}{\lambda} E$; donc :

$$\begin{array}{l} P = \gamma E^2 \\ P = \rho j^2 \end{array}.$$

Ces relations constituent la forme locale de la loi de Joule.

Considérons un tube de champ élémentaire d'aire dS de longueur $d\vec{l}$. La puissance dP dissipée sous forme d'effet de Joule par cet élément de volume est :

$$dP = P \cdot dS \cdot \vec{n} \cdot d\vec{l},$$

\vec{n} étant le vecteur unitaire de la normale à dS , $d\vec{l}$ étant un vecteur élémentaire compté sur une ligne de champ, soit :

$$dP = \gamma E^2 dS \vec{n} \cdot d\vec{l} = \gamma E \vec{n} dS E d\vec{l} = (dI)(-dV).$$

Par intégration sur L et S , on obtient :

$$P = I(V_A - V_B) = RI^2 = \frac{(V_A - V_B)^2}{R}.$$

On retrouve le même résultat qu'avec la première méthode.

L'énergie dissipée sous forme d'effet Joule dans le conducteur est telle que : $dW = P dt$ pendant un temps infinitésimal dt :

$$dW = R I^2 dt.$$

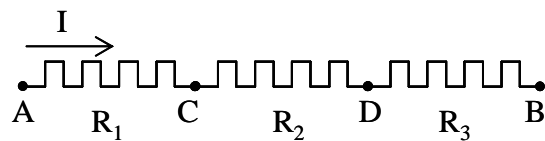
Le courant étant supposé d'intensité constante, pendant un temps fini τ :

$$W = R I^2 \tau.$$

1.1.5.6 Association de résistances.

1.1.5.6.1 Groupement en série :

Considérons 3 résistances R_1, R_2, R_3 montées en série. . Dans ces conditions, les résistances sont traversées par le même courant. On peut écrire la loi d'Ohm aux bornes de chaque résistance :



$$\left. \begin{array}{l} V_A - V_C = R_1 I \\ V_C - V_D = R_2 I \\ V_D - V_B = R_3 I \end{array} \right\} \Rightarrow V_A - V_B = (R_1 + R_2 + R_3) I = RI, \text{ en appelant } R \text{ la résistance équivalente}$$

qui placée entre A et B, soumise à la même différence de potentiel, est traversée par le même courant. On en déduit :

$R = R_1 + R_2 + R_3$ et on généralise aisément :

$$R_{\text{série}} = \sum_i R_i$$

1.1.5.6.2 Groupement en parallèle :

Considérons 3 résistances R_1, R_2, R_3 montées en parallèle. Dans ces conditions, les résistances sont soumises à la même différence de potentiel mais sont traversées par des courants d'intensités différentes.

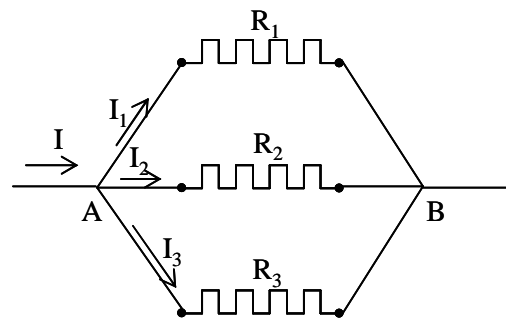
Première Méthode : Les puissances dissipées par effet Joule dans chacune des résistances sont donc :

$$P_1 = \frac{(V_A - V_B)^2}{R_1}, P_2 = \frac{(V_A - V_B)^2}{R_2}, P_3 = \frac{(V_A - V_B)^2}{R_3},$$

La puissance totale dissipée par le groupement sera donc :

$$P = (V_A - V_B)^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{(V_A - V_B)^2}{R}, \text{ par identification :}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \text{ d'où l'on généralise :}$$



$$\boxed{\frac{1}{R_{//}} = \sum_i \frac{1}{R_i}}.$$

Deuxième méthode : Soit I_1 , I_2 et I_3 les intensités traversant les différentes résistances et I l'intensité totale : $I = I_1 + I_2 + I_3$.

Or $V_A - V_B = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 = R I$, soit :

$$I_1 = \frac{V_A - V_B}{R_1}; I_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2}; I_3 = \frac{V_A - V_B}{R_3}; I = \frac{V_A - V_B}{R}.$$

On a donc :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2} + \frac{V_A - V_B}{R_3} = (V_A - V_B) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{V_A - V_B}{R}.$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{//}} = \sum_i \frac{1}{R_i}}.$$

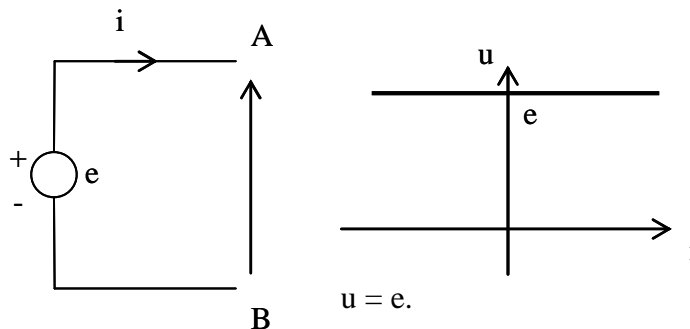
1.1.6 Sources de tension et de courant.

1.1.6.1 Sources de tensions idéales et réelles.

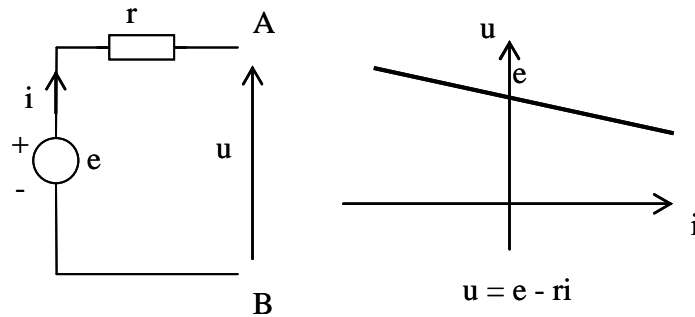
Un générateur de tension idéal délivre une tension indépendante du courant débité :

$$V_A - V_B = e = \text{cte} \quad \forall i.$$

Cette tension est la force électromotrice (f.e.m) du générateur.



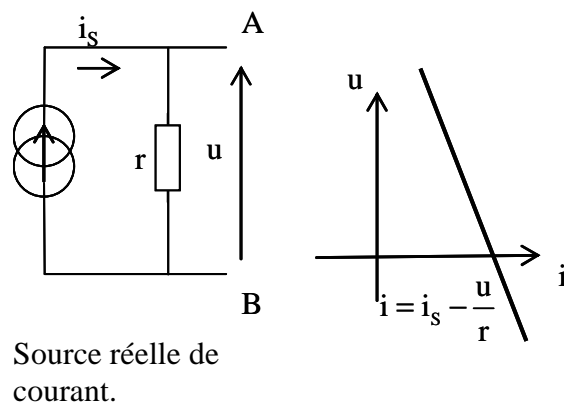
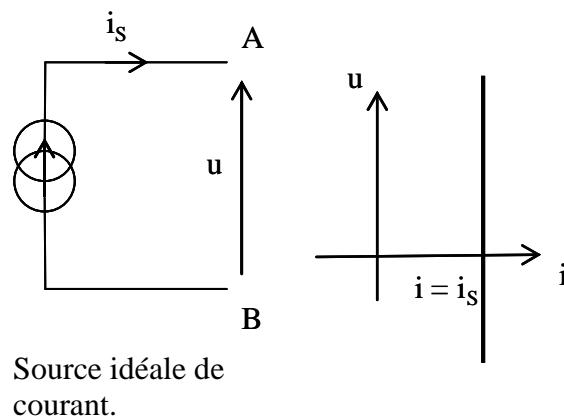
La résistance interne d'un générateur de tension idéal est nulle, ce qui n'est généralement pas le cas pour un générateur réel. Un générateur réel est modélisé par un générateur idéal en série avec sa résistance interne. En convention générateur, la caractéristique statique tension-courant du générateur de tension réel devient : $u = e - r i$. La résistance interne induit une chute de tension.



1.1.6.2 Sources de courant idéales et réelles.

Un générateur de courant idéal débite un courant dont l'intensité est indépendante de la tension aux bornes du générateur : $i = i_s = \text{cte}$.

La résistance interne d'une source de courant idéale est infinie. Pour un générateur réel on tient compte de sa résistance interne, en le modélisant par une source idéale de courant en parallèle avec sa résistance interne r . En convention générateur, la caractéristique statique courant-tension du générateur de courant réel est donc : $i = i_s - \frac{u}{r}$.



1.1.7 Le condensateur.

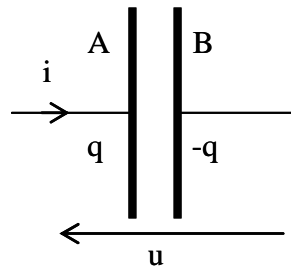
1.1.7.1 Définition.

Un condensateur est un dipôle qui emmagasine une charge électrique q proportionnelle à la tension qui lui est appliquée :

$$q(t) = C u(t) = C (V_A(t) - V_B(t)).$$

La charge q est portée par l'armature A.

Symbole d'un condensateur :



Le coefficient de proportionnalité C est appelé capacité du condensateur. L'unité est le Farad noté F.

1.1.7.2 Capacité d'un condensateur.

La capacité C d'un condensateur dépend de sa forme, de sa composition. Dans le cas « classique », il est composé de deux plaques conductrices disposées face à face, séparées par un isolant (diélectrique). Si les deux plaques sont planes de surface S , distante de d et séparées par un diélectrique de permittivité relative ϵ_r , alors la capacité est donnée par l'expression :

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}.$$

ϵ_0 est la permittivité du vide et est donnée par l'expression : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}.$

ϵ_r dépend du diélectrique.

Diélectrique	Permittivité relative
Alumine	4.5 à 8.5
Air	1
Mica	6 à 9
Verre	5 à 12
Plastique	2 à 5
Céramique	15 à 30000

1.1.7.3 Puissance et énergie d'un condensateur.

D'autre part la variation par unité de temps de la charge q est égale à l'intensité du courant traversant le condensateur :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}.$$

La charge et donc la tension d'un condensateur ne peuvent pas varier de manière infiniment rapide. La charge et la tension d'un condensateur sont donc toujours des fonctions continues par rapport au temps. Cette caractéristique est utile pour la détermination de conditions initiales.

La puissance instantanée reçue par un condensateur peut s'écrire :

$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{1}{2}C \frac{d^2u(t)}{dt^2}.$$

L'énergie reçue par le condensateur pendant un intervalle de temps t s'écrit :

$$W = \int_0^t p(x) dx = \frac{1}{2}Cu^2(t) = \frac{1}{2}q(t)u(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C}.$$

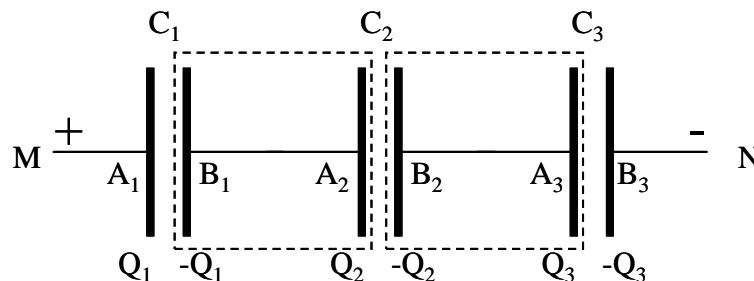
1.1.7.4 Groupements de condensateurs.

Lorsqu'on dispose de plusieurs conducteurs, on peut les grouper de différentes façons :

- Soit en série ;
- Soit en parallèle.

1.1.7.4.1 Le groupement en série :

Dans ce type de groupement, l'armature interne de l'un des condensateurs est reliée à l'armature externe du suivant. Pour trois condensateurs, par exemple, en appelant encore A les armatures internes et B les armatures externes. Soient C_1 , C_2 , C_3 les capacités des condensateurs. Supposons ces condensateurs initialement non chargés et cherchons la capacité du condensateur équivalent à ce groupement.



Etablissons entre M et N une différence de potentiel $V_M - V_N$, C_1 prend une charge Q_1 , C_2 une charge Q_2 et C_3 une charge Q_3 .

L'ensemble étant initialement neutre, la charge de chacun des conducteurs entourés de pointillés sur la figure ci-dessus reste nulle (sinon, il y aurait déplacement de charges). Donc :

$$-Q_1 + Q_2 = 0,$$

$$-Q_2 + Q_3 = 0,$$

d'où $Q_1 = Q_2 = Q_3$.

Exprimons la différence de potentiel entre M et N :

$$V_M - V_N = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = Q_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right).$$

Le condensateur équivalent sera tel que, placé entre M et N, soumis à la différence de potentiel $V_M - V_N$, il prendra la charge Q_1 . Donc, si C est la capacité de ce condensateur équivalent :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

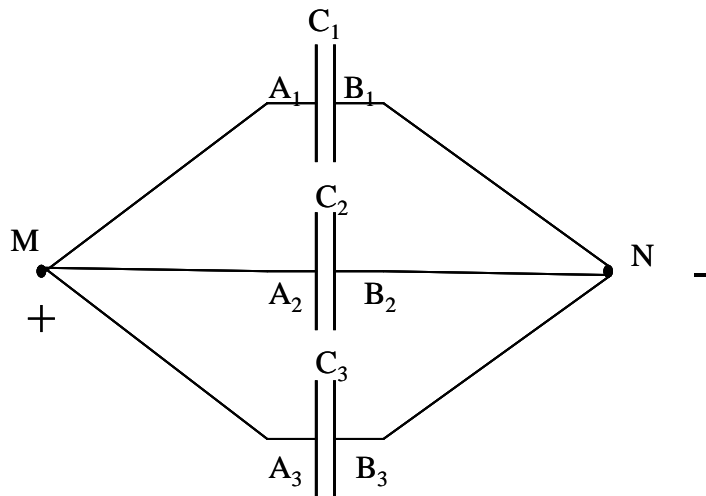
Plus généralement, pour un nombre quelconque de condensateur associés en **série** :

$$\frac{1}{C_{\text{série}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}.$$

1.1.7.4.2 Le groupement en parallèle :

Dans ce type de groupement, toutes les armatures internes sont reliées ensemble, de même que toutes les armatures externes. Pour trois condensateurs, par exemple, on aura un schéma comme celui de la figure ci-contre.

Cette fois, chaque condensateur est soumis à la même différence de potentiel $V_M - V_N$. Si Q_1, Q_2, Q_3 sont les charges des condensateurs, on a donc :



$V_M - V_N = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3}$. La charge totale prise par le groupement est la somme des charges prises par chacun des condensateurs, donc :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3, \text{ soit } Q = (C_1 + C_2 + C_3) (V_M - V_N).$$

Le condensateur équivalent aura une capacité C telle que lorsqu'il est soumis à la différence de potentiel $V_M - V_N$, il prenne la charge Q : $Q = C (V_M - V_N)$.

Par identification, on obtient : $C = C_1 + C_2 + C_3$.

Plus généralement, pour un nombre quelconque de condensateurs en **parallèle** :

$$C_{//} = \sum_i C_i.$$

1.1.8 L'inductance.

La tension aux bornes d'une bobine est donnée par l'expression : $u = L \frac{di}{dt}$.

L'inductance s'exprime en Henry, H.

L'intensité traversant une bobine ne peut pas varier de manière instantanée. L'intensité dans une bobine est donc une fonction continue du temps. Cette caractéristique est utile pour la détermination de conditions initiales.

La puissance reçue par la self est donnée par l'expression :

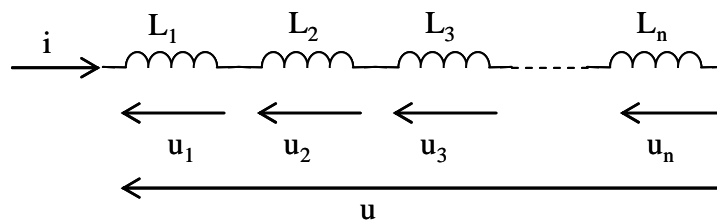
$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{1}{2}L \frac{d^2i(t)}{dt^2}.$$

En intégrant sur un intervalle de temps t, on obtient l'énergie accumulée dans une self :

$$W = \int_0^t p(x) dx = \frac{1}{2}Li^2(t).$$

1.1.8.1 Associations de bobines.

1.1.8.1.1 Association en série.



Chaque self est parcourue par le même courant d'intensité i et est soumise à une tension u_k :

$$u_k(t) = L_k \frac{di(t)}{dt}$$

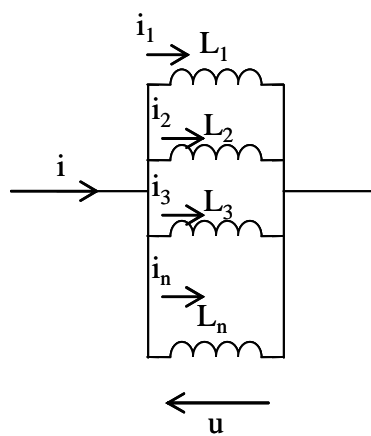
La tension aux bornes de l'ensemble est égale à la somme des tensions partielles, donc :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) = \frac{di(t)}{dt} \sum_{k=1}^n L_k = L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow L = \sum_{k=1}^n L_k.$$

En série, l'inductance équivalente est égale à la somme des inductances.

1.1.8.1.2 Association en parallèle.



Chaque self est soumise à la même tension :

$$u(t) = L_k \frac{di_k(t)}{dt}.$$

$$i(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t) \text{ implique :}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{u(t)}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{di_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{u(t)}{L_k} \Rightarrow \frac{1}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}.$$

En parallèle, l'inductance équivalente est égale à l'inverse de la somme des inverses des inductances.

1.2 Electrocinétique.

1.2.1 Théorème de superposition.

1.2.1.1 Principe.

Les lois de Kirchhoff conduisent à des équations linéaires vis-à-vis des intensités et des forces électromotrices et contre-électromotrices.

Lorsqu'on tient compte, dans les équations, de la loi de Kirchhoff relative aux mailles, des équations relatives aux nœuds, on obtient un système de n équations linéaires à n inconnues (les n intensités indépendantes). Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$(R)(I) = (E)$$

(I) représente la matrice des intensités algébriques inconnues, (E) représente la matrice des forces électromotrices et contre-électromotrices (avec la condition d'algébrisation), (R) représente la matrice de toutes les résistances.

Il est bien évident que l'on peut écrire :

$$(G)(E) = (I)$$

(G) étant la matrice des conductances, avec évidemment $(G)(R) = (1)$.

1.2.1.2 Théorème.

Considérons un réseau donné dont toutes les résistances sont fixées (y compris celles des générateurs et des récepteurs) : la matrice des conductances (G) est parfaitement connue.

Imaginons alors que l'on applique à ce réseau un système de forces électromotrices et contre-électromotrices caractérisées par la matrice (E_1) . Il s'établit un régime de courants permanents caractérisé par la matrice (I_1) telle que :

$$(G) (E_1) = (I_1).$$

Remplaçons ce système par un autre système de forces électromotrices et contre-électromotrices caractérisé par la matrice (E_2) . Il s'établit un régime de courants permanents caractérisé par la matrice (I_2) telle que :

$$(G) (E_2) = (I_2).$$

Supposons maintenant les deux systèmes de forces électromotrices et contre-électromotrices de manière à obtenir un système caractérisé par la matrice $(E_1 + E_2)$. Il s'établit un régime de courants permanents caractérisé par la matrice (I) telle que :

$$(I) = (G) (E_1 + E_2).$$

Du fait de la linéarité :

$$(I) = (G) (E_1) + (G) (E_2)$$

donc

$$(I) = (I_1) + (I_2)$$

Énoncé du théorème :

Lorsque, dans un réseau de conducteurs, on superpose plusieurs systèmes de forces électromotrices et contre-électromotrices, l'intensité du courant dans chaque branche est la somme des intensités dans cette branche dues à chacun des systèmes agissant seul.

1.2.2 Courants fictifs de mailles.

Le principe est le suivant : on imagine que chacune des mailles d'un réseau est parcourue par un courant qui est précisément le courant fictif de maille. Ces courants fictifs parcourent tous des mailles forcément indépendantes.

Une fois connus les courants fictifs de mailles, on peut déterminer les courants réels circulant dans les branches.

On introduit la représentation matricielle sur un exercice :

Exercice : Représentation matricielle.

Pour introduire la représentation matricielle, nous allons utiliser un réseau simple permettant de bien mettre en évidence les courants de mailles.

On a ici trois mailles indépendantes. Nous noterons j_1, j_2, j_3 les courants fictifs de maille, parcourant toutes les mailles dans le même sens (sens trigonométrique direct ou sens rétrograde, cela importe peu). On écrit maintenant la loi de Kirchhoff pour chaque maille :

- maille (1) : $R_5(j_1 - j_2) + R_2(j_1 - j_3) + r_1 j_1 + e_1 = 0$
- maille (2) : $R_3 j_2 + R_4(j_2 - j_3) + R_5(j_2 - j_1) = 0$
- maille (3) : $R_2(j_3 - j_1) + R_4(j_3 - j_2) + R j_3 - e = 0$

Cela s'arrange sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} r_1 + R_2 + R_5 & -R_5 & -R_2 \\ -R_5 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & R_2 + R_4 + R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_1 \\ 0 \\ e \end{pmatrix}$$

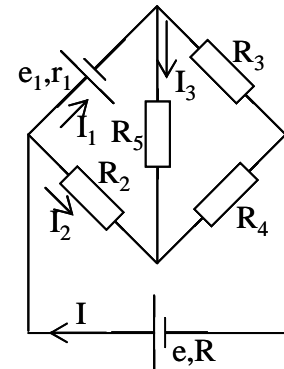
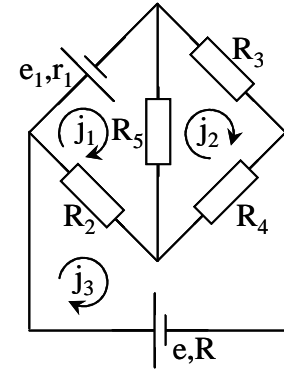
On calcule ensuite les intensités fictives j_1, j_2 et j_3 . Ceci étant fait, on introduit les courants réels tels que :

$$I = j_3,$$

$$I_1 = j_1,$$

$$I_2 = -j_1 + j_3,$$

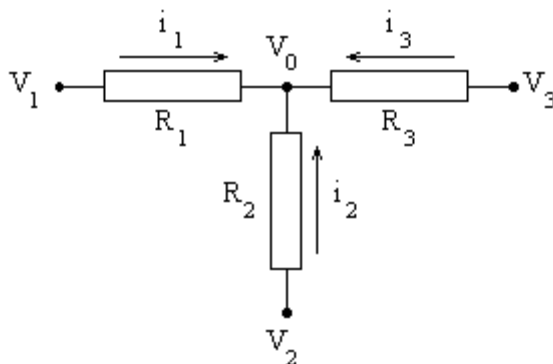
$$I_3 = j_1 - j_2.$$



L'avantage de la méthode est certain lorsque l'on a un réseau très complexe. L'écriture de la matrice est immédiate. Par inversion, on peut en déduire la matrice des courants fictifs de maille et, par suite, déterminer les seuls courants fictifs intéressants pour ce que l'on cherche. On en déduit alors les courants de branches.

1.2.3 Théorème de Millman :

Considérons le circuit suivant :



Pour chacune des branches nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} V_1 - V_0 = R_1 i_1 \\ V_2 - V_0 = R_2 i_2 \\ V_3 - V_0 = R_3 i_3 \end{cases}$$

Soit encore :

$$\begin{cases} i_1 = \frac{V_1 - V_0}{R_1} \\ i_2 = \frac{V_2 - V_0}{R_2} \\ i_3 = \frac{V_3 - V_0}{R_3} \end{cases}$$

En sommant ces relations il vient :

$$i_1 + i_2 + i_3 = \frac{V_1 - V_0}{R_1} + \frac{V_2 - V_0}{R_2} + \frac{V_3 - V_0}{R_3}.$$

Or nous avons : $i_1 + i_2 + i_3 = 0$, donc :

$$V_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}$$

ou

$$V_0 = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Ce résultat se généralise à un nombre quelconque de branches :

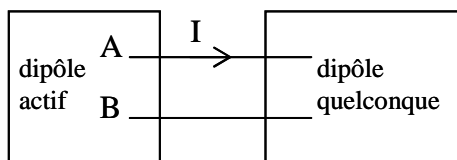
$$V_0 = \frac{\sum_k \frac{V_k}{R_k}}{\sum_k \frac{1}{R_k}} = \frac{\sum_k G_k V_k}{\sum_k G_k}.$$

La tension au nœud est la moyenne des tensions aux bornes de tous les dipôles pondérée par les conductances respectives.

1.2.4 Théorème de Thévenin (hors programme).

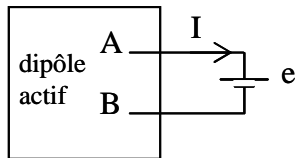
Le théorème de Thévenin permet de modéliser des portions de circuit afin de calculer les intensités dans des branches déterminées.

Considérons un dipôle actif jouant globalement le rôle de générateur et relierons ce dipôle actif à un dipôle quelconque (actif ou passif).



Soit $U = V_A - V_B$ la différence de potentiel aux bornes du dipôle et soit I l'intensité du courant débité par le dipôle actif dans le dipôle quelconque.

1] Débranchons le dipôle quelconque et branchons aux bornes de A et B du dipôle actif un générateur parfait, c'est-à-dire dépourvu de résistance interne dont la force électromotrice e est précisément la différence de potentiel $V_A - V_B$.



Le dipôle actif se présente alors de la manière suivante :
L'intensité I débitée est évidemment inchangée par rapport au cas précédent. On a ainsi transformé le dipôle actif en réseau fermé par le générateur de force électromotrice e . La branche AeB n'est

rien d'autre qu'une branche de ce réseau. Les lois de Kirchhoff étant linéaires en I et e :

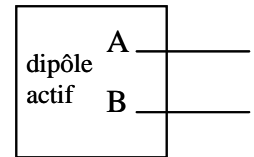
$$I = \sum_i G_i e_i + G e,$$

$\sum_i G_i e_i$ étant relatif à toutes les autres branches du réseau comportant éventuellement des forces électromotrices et contre-électromotrices.

2] Considérons maintenant le dipôle actif en circuit ouvert. Le courant débité est nul, $I = 0$.

La différence de potentiel aux bornes de A et B devient U_0 et l'expression ci-dessus de I subsiste en faisant $e = U_0$ et $I = 0$:

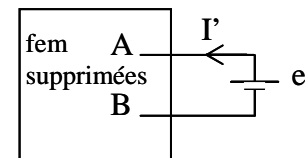
$$\sum_i G_i e_i + G U_0 = 0.$$



On en déduit : $I = G e - G U_0$, soit puisque $e = V_A - V_B$: $I = G (V_A - V_B) - G U_0$.

3] Supprimons maintenant toutes les forces électromotrices du générateur mais en gardant les sources (on dit qu'on éteint les sources) et appliquons aux bornes de A et de B le générateur de force électromotrice e . Il débite un courant I' tel que :

$I' = \frac{e}{R_i}$, R_i étant la résistance équivalente du dipôle actif vue de A et B.



Or, l'expression précédente de I , $I = \sum_i G_i e_i + G e$, subsiste (en faisant $e_1 = \dots = e_n = 0$) :

$I = G e$, et compte tenu des sens des intensités, $I = -I'$, d'où : $-I' = G e$ et :

$$G e = -\frac{e}{R_i}, \text{ soit } G = -\frac{1}{R_i}.$$

En reportant dans $I = G (V_A - V_B) - G U_0$, il vient :

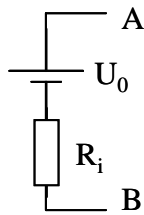
$$I = -\frac{1}{R_i} (V_A - V_B) + \frac{U_0}{R_i}, \text{ soit :}$$

$$(V_A - V_B) = U_0 - R_i I.$$

Cette relation traduit le théorème de Thévenin.

Un dipôle actif est équivalent, vu de ses deux bornes, à un générateur de tension dont la force électromotrice est la différence de potentiel aux bornes du dipôle en circuit ouvert et dont la

résistance interne est la résistance équivalente, vue des deux bornes du dipôle lorsque l'on a enlevé toutes les forces électromotrices et en gardant les résistances.



Ce générateur équivalent est dit générateur de Thévenin.

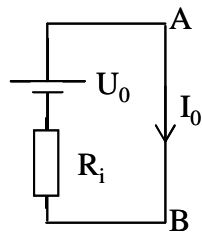
Il faut bien remarquer qu'il s'agit d'une modélisation du dipôle actif : on remplace ainsi un circuit complexe à étudier par un circuit qui lui est équivalent, mais seulement vu des bornes A et B du dipôle.

1.2.4.1 Méthodologie :

- 1) Supprimer le dipôle AB.
- 2) Déterminer la tension aux bornes du dipôle AB, U_0 .
- 3) Déterminer l'impédance équivalente vue depuis les bornes AB lorsque toutes les sources sont éteintes, R_i
- 4) Remplacer le circuit par le schéma équivalent ci-dessus.

1.2.5 Théorème de Norton (hors programme).

Ce théorème donne une autre modélisation d'un dipôle actif.



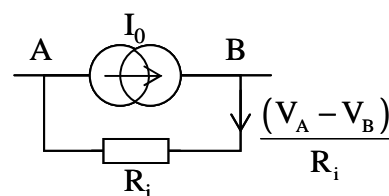
Schématisons à nouveau le dipôle actif par un générateur de Thévenin et court-circuitons les bornes A et B. Le dipôle est traversé par un courant d'intensité I_0 :

$I_0 = \frac{U_0}{R_i}$. La relation $(V_A - V_B) = U_0 - R_i I$ devient :

$$I = I_0 - \frac{(V_A - V_B)}{R_i}.$$

Cette relation traduit le théorème de Norton :

Un dipôle actif est équivalent, vu de ses deux bornes, à un générateur de courant dont le courant principal est le courant de court-circuit du dipôle et dont la résistance interne montée en parallèle est la résistance équivalente vue de deux bornes du dipôle lorsqu'on a enlevé toutes les forces électromotrices, cette résistance détournant un courant $\frac{(V_A - V_B)}{R_i}$.



Ce générateur équivalent est dit générateur de Norton.

Il faut remarquer qu'il s'agit là encore d'une modélisation du dipôle actif, au demeurant parfaitement équivalente à la précédente.

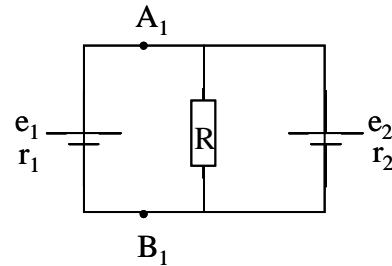
1.2.5.1 Méthodologie :

- 1) Court-circuiter le dipôle AB.
- 2) Déterminer le courant de court-circuit circulant dans AB, I_0 .
- 3) Déterminer l'impédance équivalente vue depuis les bornes AB lorsque toutes les sources sont éteintes, R_i
- 4) Remplacer le circuit par le schéma équivalent ci-dessus.

1.2.5.2 Exemples d'application des théorèmes de Thévenin et de Norton :

Proposons nous de calculer au moyen des théorèmes de Thévenin et de Norton l'intensité traversant le dipôle (e_1, r_1) .

Pour cela, il nous faut modéliser le dipôle $A_1 e_2 B_1$.



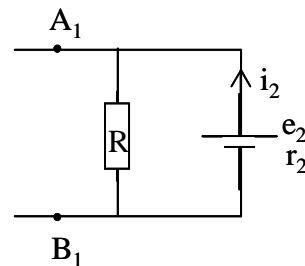
Modélisation de Thévenin :

- Calcul de U_0 :

$$i_2 = \frac{e_2}{R + r_2}.$$

$V_A - V_B = R i_2$, or $V_A - V_B$ n'est rien d'autre que U_0 :

$$U_0 = \frac{e_2 R}{R + r_2}.$$



- Détermination de R_i :

Vu de A et B, le dipôle, lorsqu'on a supprimé e_2 , se réduit à R et r_2 montées en parallèle donc :

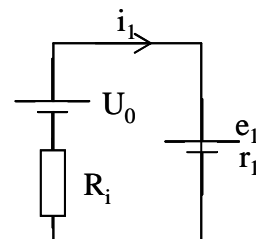
$$R_i = \frac{R r_2}{R + r_2}.$$

Le circuit étudié est donc équivalent au suivant :

Par conséquent :

$$i_1 = \frac{U_0 - e_1}{R_i + r_1} \quad \text{ou} \quad i_1 = \frac{\frac{e_2 R}{R + r_2} - e_1}{\frac{R r_2}{R + r_2} + r_1} = \frac{e_2 R - e_1 (R + r_2)}{R r_2 + r_1 (R + r_2)},$$

$$\text{soit : } i_1 = \frac{R(e_2 - e_1) - e_1 r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}.$$

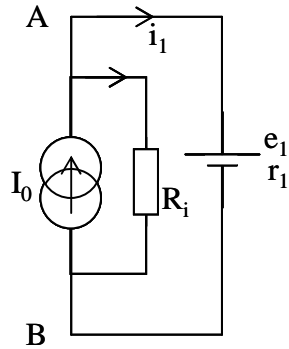


Modélisation de Norton :

Détermination de I_0 :

$$I_0 = \frac{U_0}{R_i} = \frac{\frac{e_2 R}{R + r_2}}{\frac{R r_2}{R + r_2}} = \frac{e_2}{r_2}.$$

Le circuit étudié est donc équivalent au suivant :



$$V_A - V_B = e_1 + r_1 i_1.$$

Par ailleurs, d'après le théorème de Norton :

$$I_1 = I_0 - \frac{(V_A - V_B)}{R_i} \text{ soit : } I_1 = \frac{e_2}{r_2} - \frac{e_1 + r_1 I_1}{\frac{R r_2}{R + r_2}}, \text{ soit :}$$

$$I_1 \left(1 + \frac{r_1 (R + r_2)}{R r_2} \right) = \frac{e_2}{r_2} - \frac{e_1 (R + r_2)}{R r_2}, \text{ on en déduit :}$$

$$I_1 = \frac{R(e_2 - e_1) - e_1 r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}.$$

1.3 Régime transitoire.

1.3.1 Charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance.

Voir la partie exercice.

1.3.2 Circuit (L,C)

Voir la partie exercice.

1.3.3 Circuit (R,L,C)

Voir la partie exercice.

1.4 Courant sinusoïdal.

1.4.1 Rappels sur les fonctions sinusoïdales.

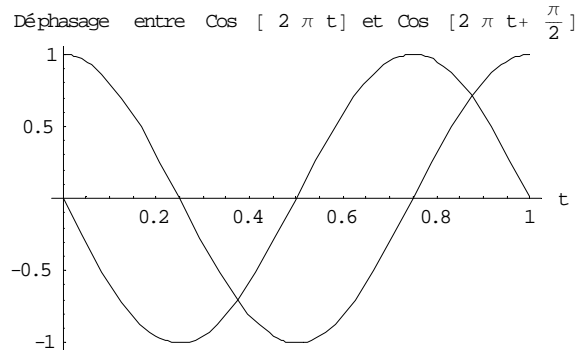
Soit une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : $f(t) = F \cos(\omega t + \phi)$ avec F réel positif.

- Calculons la valeur absolue de la fonction : $|f(t)| = |F| |\cos(\omega t + \phi)|$ or $|\cos(\omega t + \phi)| \leq 1$ d'où l'on déduit que $|f(t)| \leq |F| = F$. F est la valeur maximale de la fonction $f(t)$.
- $\omega t + \phi$ est la phase instantanée.
- ω est la pulsation propre de la fonction, elle s'exprime en rad.s^{-1} .
- On sait que la fonction cosinus est 2π -périodique donc :

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t + \phi + 2\pi) = \cos(\omega(t+T) + \phi) \Rightarrow \omega T = 2\pi \text{ et } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}. \text{ T, la période,}$$

s'exprime en seconde, s, et f, la fréquence, en Hertz, Hz. (Ne pas confondre f et f(t), l'une est une fréquence et l'autre est la fonction introduite).

Afin de bien comprendre la notion de phase, on trace la fonction $\cos(2\pi t)$ et la fonction $\cos(2\pi t + \pi/2)$: Le déphasage correspond à une avance ou à un retard d'une courbe l'une par rapport à l'autre.

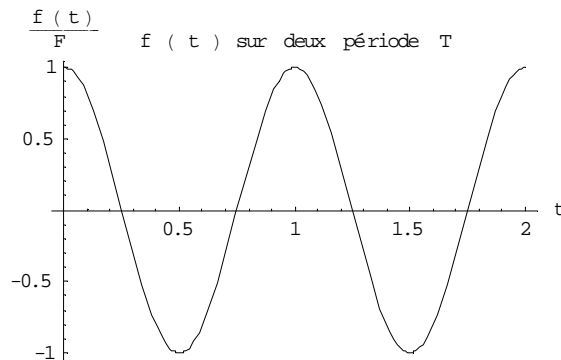


- Valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale :

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T F \cos(\omega t + \phi) dt = \frac{F}{\omega T} [\sin(\omega t + \phi)]_0^T,$$

$$\langle f(t) \rangle = \frac{F}{\omega T} [\sin(\omega T + \phi) - \sin \phi] = 0 \text{ et donc :}$$

$\langle f(t) \rangle = 0$, la valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale est nulle.

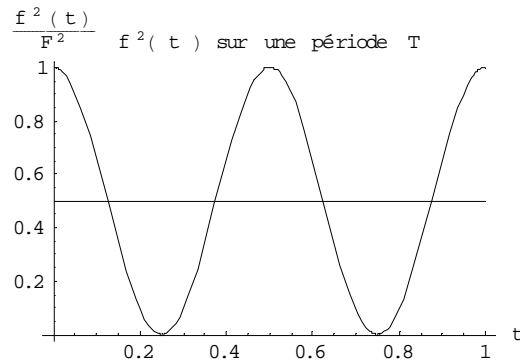


- Valeur efficace d'une fonction sinusoïdale :

$$\langle f^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{F^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \phi) dt = \frac{F^2}{2T} \int_0^T 1 + \cos 2(\omega t + \phi) dt,$$

$$\langle f^2(t) \rangle = \frac{F^2}{2T} (T + 0) = \frac{F^2}{2}.$$

On définit la valeur efficace : $F_{\text{eff}} = \sqrt{\langle f^2(t) \rangle} = \frac{F}{\sqrt{2}}.$



1.4.2 Rappels sur les nombres complexes.

1.4.2.1 Définition :

L'ensemble des nombres complexes est l'ensemble des nombres qui s'écrivent $a + jb$ avec a et b appartenant à \mathbb{R} et $j^2 = -1$, muni des opérations d'addition et de multiplication ayant les mêmes propriétés que celle de \mathbb{R} .

1.4.2.2 Nombre j .

Nous avons un nouvel ensemble de nombres qui est composé de deux termes d'une somme : celui qui n'est pas multiplié par le symbole j et celui qui est multiplié par le symbole j , qu'il existe des opérations sur ces nombres, que ces opérations ont les propriétés des opérations sur \mathbb{R} mais que j est un symbole spécial, quand on le multiplie par lui-même on a : $j^2 = -1$.

C'est donc ce nombre qui caractérise les nombres complexes. Dans le cas où $b = 0$ on a : $a + 0j = a$. Ce qui nous fait dire que l'ensemble des nombres réels est inclus dans les nombres complexes ou que les nombres complexes sont une extension des nombres réels.

1.4.2.3 Partie réelle, partie imaginaire

Dans $z = a + jb$:

a est appelé partie réelle de z qui est notée $\text{Re}(z)$,

b est appelé partie imaginaire de z qui est notée $\text{Im}(z)$.

Si $\text{Re}(z) = 0$ alors z est un imaginaire pur.

Si $\text{Im}(z) = 0$ alors z est un réel.

1.4.2.4 Module d'un nombre complexe

Définition : Le module d'un nombre complexe est le nombre réel positif ou nul tel que :

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

Propriétés :

$|z| = 0$ ssi $z = 0$, le module est nul si et seulement si le nombre complexe est nul.

$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$. Le module d'un produit est égal au produit des modules.

$|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Comme le module est une distance, au même titre que la valeur absolue des réels dont il est l'équivalent pour les complexes, il "obéit" à l'inégalité triangulaire. C'est ce qu'indique cette propriété.

1.4.2.5 Conjugaison complexe

Il y a deux nombres dont le carré est -1 : i et $-i$, et ce n'est que de manière arbitraire que nous avons choisi i et non pas $-i$, il n'empêche que toutes les propriétés vraies pour i le sont pour $-i$, d'où l'importance du nombre complexe $a - ib$.

Ce nombre s'appelle conjugué de z et se note \bar{z} .

Si $z = a + ib$ alors $\bar{z} = a - ib$

La conjugaison complexe est très importante, car toutes les propriétés que z possède, \bar{z} les possède aussi.

1.4.2.6 Notations des nombres complexes

Considérons le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . De part la définition des nombres complexes que nous avons donnée, nous pouvons repérer, sur l'axe des abscisses, la partie réelle et, sur l'axe des ordonnées, la partie imaginaire de chaque nombre complexe.

Nous pouvons donc faire correspondre à tout nombre complexe le vecteur :

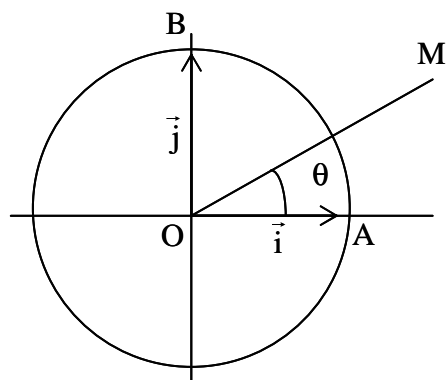
$$\vec{W} = \text{Re}(z) \vec{i} + \text{Im}(z) \vec{j}$$

Si $z = a + jb$, alors nous avons $\vec{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$. Le point M est unique, on l'appelle image de z .

Dans un tel plan, on a $OM^2 = a^2 + b^2$, d'après le théorème de Pythagore, ce qui reste cohérent avec la notion de module. On peut donc identifier les points du plan, muni d'un tel repère, à l'ensemble des nombres complexes. C'est le plan complexe.

Le point A de la figure ci-dessous a pour coordonnées $(1 ; 0)$ et le point $B(0 ; i)$.

L'axe (OA) est l'axe des réels et l'axe (OB) celui des imaginaires purs. On dira axe des réels et axe des imaginaires.



A chaque point M du plan complexe, on peut associer le couple unique :

$(OM ; (\vec{OA}, \vec{OM})(2\pi))$, c'est à dire le couple distance du point à l'origine et l'angle orienté, modulo 2π , formé entre l'axe des abscisses (réels) et \vec{OM} .

Dans le plan complexe, soit M un point d'affixe z , l'angle $(\vec{OA}, \vec{OM})(2\pi)$ est appelé argument de z . On le note : $\arg(z)$.

Soit z un nombre complexe, $z = a + ib$. Notons r le module de z et θ son argument. On a :

$a = r \cdot \cos\theta$ et $b = r \cdot \sin\theta$ d'où $z = r \cdot \cos\theta + ir \cdot \sin\theta$

Et nous pouvons écrire : $z = r(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$ qui est la notation trigonométrique de z .

L'addition n'a aucun intérêt à être faite avec la notation trigonométrique, au contraire elle complique les choses. Par contre, la multiplication des nombres complexes écrits sous la forme trigonométrique possède certains avantages.

Soit $z = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i.\sin\theta')$, on a :

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos\theta + i.\sin\theta) r'(\cos\theta' + i.\sin\theta') \\ &= rr'(\cos\theta.\cos\theta' + \cos\theta.i.\sin\theta' + i.\sin\theta.\cos\theta' - \sin\theta.\sin\theta') \\ &= rr'(\cos\theta.\cos\theta' - \sin\theta.\sin\theta' + i(\cos\theta.\sin\theta' + \sin\theta.\cos\theta')) \end{aligned}$$

D'après les formules de trigonométrie (sinus et cosinus d'une somme), nous avons :

$$zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i.\sin(\theta + \theta'))$$

On en conclut que : pour multiplier deux nombres complexes, écrits sous la forme trigonométrique, il faut multiplier leurs modules et additionner leurs arguments. Ceci n'est pas sans rappeler les propriétés des exponentielles.

L'argument d'un nombre complexe se comporte comme un exposant. On conviendra de noter $z = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$ ainsi : $z = r.e^{i\theta}$. C'est la notation exponentielle.

Dans ce cas le conjugué de z s'écrit : $\bar{z} = r.e^{-i\theta}$. Cette notation a un gros avantage, elle permet de calculer rapidement les produits, de plus elle donne le module et l'argument du nombre.

1.4.2.7 Notation complexe.

À toute grandeur sinusoïdale d'amplitude a et de phase instantanée $\omega t + \phi$, on fait correspondre un nombre complexe défini par :

$$y(t) = a \cos(\omega t + \phi) \quad \parallel \quad \bar{y}(t) = a e^{j(\omega t + \phi)}$$

Ici, nous faisons le choix de la convention $j\omega t$ et non l'opposée $-j\omega t$. Le choix de l'une ou de l'autre dépend de l'utilisateur et de la matière considérée. En électricité, on utilise généralement la convention $j\omega t$. En théorie de la propagation, on utilise souvent $-j\omega t$.

Si l'on dérive et intègre $y(t)$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{y}(t) = j\omega a e^{j(\omega t + \phi)} = j\omega \bar{y}(t), \\ \int \bar{y}(t) dt = \frac{1}{j\omega} a e^{j(\omega t + \phi)} = \frac{1}{j\omega} \bar{y}(t). \end{cases}$$

Ainsi la dérivée est remplacée par une multiplication par : $j\omega$, $\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$.

L'intégration est remplacée par la multiplication par : $\frac{1}{j\omega}$, $\int dt = \frac{1}{j\omega}$.

1.4.3 Impédance complexe d'un dipôle linéaire.

1.4.3.1 Définition :

Considérons un dipôle linéaire AB :

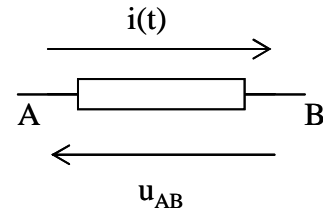
Choisissons $u(t) = U \cos \omega t$ et $i(t) = I \cos (\omega t + \phi)$.

Dans ces conditions,

$$\bar{u}(t) = U e^{j\omega t}, \bar{i}(t) = I e^{j(\omega t + \phi)}.$$

La relation linéaire entre $\bar{u}(t)$ et $\bar{i}(t)$ est :

$$\bar{u}(t) = \bar{Z} \bar{i}(t)$$



\bar{Z} est l'impédance complexe, elle dépend de ω . Ainsi $\bar{Z} = \frac{\bar{u}}{\bar{i}} = \frac{U}{I} e^{j\phi} = Z e^{j\phi}$ où

- Le module $Z = |\bar{Z}|$ est l'impédance. Elle s'exprime en Ohms.
- L'argument ϕ est le déphasage de u par rapport à i .

Pour chaque dipôle, on écrit la relation « courant-tension » que l'on compare à $\bar{u}(t) = \bar{Z} \bar{i}(t)$.

1.4.3.2 Résistance :

$u = R i$ $\bar{u}(t) = R \bar{i}(t)$ comparée à $\bar{u}(t) = \bar{Z} \bar{i}(t)$ donne : $\bar{Z} = R = Z e^{j\phi}$, d'où l'on déduit :

$$Z_R = R, \phi_R = 0.$$

1.4.3.3 Condensateur parfait :

$u = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i(t) dt$ $\bar{u}(t) = \frac{1}{jC\omega} \bar{i}(t) = \bar{Z} \bar{i}(t)$ donne : $\bar{Z} = \frac{1}{jC\omega}$ d'où l'on déduit :

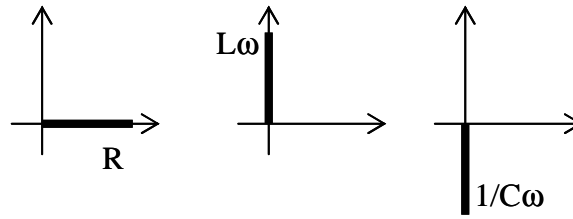
$$Z_C = \frac{1}{C\omega}, \phi_C = -\frac{\pi}{2}.$$

1.4.3.4 Inductance idéale :

$u = L \frac{di}{dt}$ $\bar{u}(t) = jL\omega \bar{i}(t) = \bar{Z} \bar{i}(t)$ donne : $\bar{Z} = jL\omega$ d'où l'on déduit :

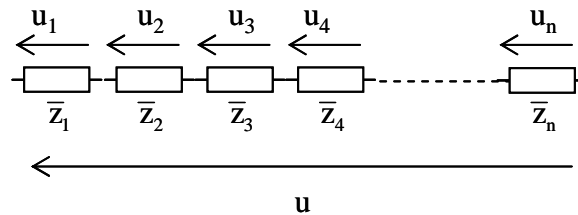
$$Z_L = L\omega, \phi_L = \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on représente les impédances complexes dans le plan complexe, on a :



1.4.4 Association d'impédances complexes.

1.4.4.1 Associations en série.



En série, les tensions s'ajoutent : $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$ ce qui donne :
 $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \bar{u}_4 + \dots + \bar{u}_n = (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 + \bar{z}_4 + \dots + \bar{z}_n) \bar{i} = \bar{z} \bar{i}$ et par conséquent,
 l'impédance équivalente est :

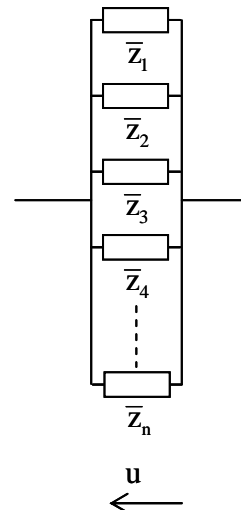
$$\bar{z}_{\text{série}} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 + \bar{z}_4 + \dots + \bar{z}_n.$$

1.4.4.2 Association en parallèle.

En parallèle, la tension aux bornes de chaque impédance est constante, l'intensité totale est la somme des intensités dans chaque branche :

$$\bar{i} = \bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3 + \dots + \bar{i}_n = \frac{\bar{u}}{\bar{z}_1} + \frac{\bar{u}}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{u}}{\bar{z}_3} + \dots + \frac{\bar{u}}{\bar{z}_n} = \frac{\bar{u}}{\bar{z}} \text{ d'où l'on déduit :}$$

$$\frac{1}{\bar{z}_{//}} = \frac{1}{\bar{z}_1} + \frac{1}{\bar{z}_2} + \frac{1}{\bar{z}_3} + \dots + \frac{1}{\bar{z}_n}.$$



1.4.5 Puissance.

1.4.5.1 Puissance instantanée.

Soit un dipôle d'impédance z ; à l'instant t , la puissance consommée, en convention récepteur, est :

$$p(t) = u(t) i(t),$$

Si $u(t) = U \cos \omega t$ et $i(t) = I \cos(\omega t + \phi)$, la puissance est égale à :

$$p(t) = u(t) i(t) = UI \cos \omega t \cos(\omega t + \phi),$$

$$p(t) = UI \cos(\omega t) (\cos(\omega t) \cos \phi - \sin(\omega t) \sin \phi),$$

$$p(t) = UI (\cos^2(\omega t) \cos \phi - \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin \phi),$$

$$p(t) = \frac{1}{2} UI ((1 + \cos(2\omega t)) \cos \phi - \sin(2\omega t) \sin \phi),$$

$$p(t) = \frac{1}{2} UI (\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)).$$

1.4.5.2 Puissance moyenne ou active.

Si l'on fait la moyenne de l'expression temporelle de la puissance, on obtient, sachant que la valeur moyenne de la fonction cosinus est nulle sur une période :

$$P = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} UI \cos \phi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi.$$

P est la puissance active.

$U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ est la puissance apparente.

$\cos \phi$ est le facteur de puissance.

Exercice : Autre expression de la puissance active.

Montrer que la puissance active aux bornes d'un dipôle d'impédance $\bar{Z} = r + jx$ est $P = r I_{\text{eff}}^2$.

Solution :

$\bar{u} = U e^{j\omega t}$ et $\bar{i} = I e^{j(\omega t + \phi)}$ sont liés par $\bar{u} = \bar{Z} \cdot \bar{i}$. On a donc :

$$\bar{u} = \bar{Z} \cdot \bar{i} \Rightarrow \begin{cases} U = |\bar{Z}| I \\ 0 = \arg(\bar{Z}) + \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{\text{eff}} = |\bar{Z}| I_{\text{eff}} \\ \phi = -\arg(\bar{Z}) \end{cases} \text{ et } \cos \phi = \frac{r}{|\bar{Z}|}. \text{ On en déduit :}$$

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi = |\bar{Z}| I_{\text{eff}}^2 \frac{r}{|\bar{Z}|} = r I_{\text{eff}}^2. \text{ Il est important de connaître cette dernière relation.}$$

1.4.5.3 Théorème de Boucherot.

Considérons la tension $\bar{u} = U e^{j\omega t}$ et l'intensité du courant $\bar{i} = I e^{j(\omega t + \phi)}$. On introduit la

puissance complexe : $\bar{p} = \frac{\bar{u} \bar{i}^*}{2}$.

$$\bar{p} = \frac{\bar{u} \bar{i}^*}{2} = \frac{1}{2} U e^{j\omega t} I e^{-j(\omega t + \phi)} = \frac{1}{2} UI e^{-j\phi} = \frac{1}{2} UI (\cos \phi - j \sin \phi) \text{ soit :}$$

$$\bar{p} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi - j U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \phi = P + jP_r.$$

On retrouve :

La puissance active $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi$ et on introduit la puissance réactive : $P_r = -U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \phi$. Elle s'exprime en VAR, Volt Ampère Réactif.

Considérons alors les impédances complexes \bar{z}_k $k = 1$ à n , montées en série (le même raisonnement peut être tenu avec un circuit en parallèle). Elles sont traversées par le même courant \bar{i} . Soient \bar{v}_k les différences de potentiel complexe aux bornes de chaque impédance. On a évidemment aux bornes de l'ensemble :

$$\bar{v} = \sum_k \bar{v}_k \text{ soit } \bar{v} \bar{i}^* = \sum_k \bar{v}_k \bar{i}^* .$$

Donc, \bar{p}_k , $k = 1$ à n , étant les puissances complexes dissipées dans chaque impédance :

$$\bar{p} = \sum_k \bar{p}_k, k = 1 \text{ à } n.$$

Pour des impédances en série, les puissances complexes s'ajoutent par conséquent. En identifiant partie réelle et partie imaginaire, il vient :

$$\begin{cases} P = \sum_k P_k \\ P_r = \sum_k P_{r,k} \end{cases},$$

Or les puissances actives sont positives ou nulles. Les puissances réactives sont positives, négatives ou nulles. On exprime les résultats ci-dessus par le théorème de Boucherot :

La puissance active consommée dans un réseau alimenté en courant sinusoïdal est égale à la somme des puissances actives consommées par les appareils du réseau ; la puissance réactive est égale à la somme algébrique des puissances réactives.

On retiendra donc que : $u = U \cos \omega t$ et $i = I \cos (\omega t + \phi)$

$$P_{\text{active}} = P = \frac{1}{2} U I \cos \phi.$$

$$P_{\text{réactive}} = Q = \frac{1}{2} U I \sin \phi.$$

$$P_{\text{apparente}} = S = \frac{1}{2} U I = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P_{\text{active}}^2 + P_{\text{réactive}}^2}$$

Cas des dipôles :

Résistance R : $\phi = 0$ donc $\cos \phi = 1$ et $\sin \phi = 0$

$$P_{\text{active}} = P = \frac{1}{2} U I.$$

$$P_{\text{réactive}} = Q = \frac{1}{2} U I \sin \phi = 0.$$

$$P_{\text{apparente}} = S = \frac{1}{2} U I = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P_{\text{active}}^2 + P_{\text{réactive}}^2} = P.$$

Capacité C : $z = 1/jC\omega = -j/C\omega$ d'où $\phi = -\pi/2$ donc $\cos \phi = 0$ et $\sin \phi = -1$.

$$P_{\text{active}} = P = 0.$$

$$P_{\text{réactive}} = Q = \frac{1}{2} U I \sin \phi = -U^2 C \omega.$$

$$P_{\text{apparente}} = S = \frac{1}{2} U I = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P_{\text{active}}^2 + P_{\text{réactive}}^2} = |Q|.$$

Inductance L : $z = jL\omega$ d'où $\phi = \pi/2$ donc $\cos \phi = 0$ et $\sin \phi = 1$.

$$P_{\text{active}} = P = 0.$$

$$P_{\text{réactive}} = Q = \frac{1}{2} U I \sin \phi = U^2 / L \omega.$$

$$P_{\text{apparente}} = S = \frac{1}{2} U I = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P_{\text{active}}^2 + P_{\text{réactive}}^2} = Q.$$

1.4.6 Circuit RLC, résonance en intensité, bande passante, facteur de qualité.

Voir l'exercice sur le circuit RLC.

2 Énoncés des exercices.

2.1 Question sur les oiseaux.

Pourquoi les oiseaux ne prennent-ils pas de chocs électriques sur les gros fils?

2.2 Courant et charge.

Un fil transporte un courant de 2 A. Combien d'électrons passent par le fil en 1 s ?

La charge élémentaire d'un électron est de $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

2.3 Capacités équivalentes.

A partir de condensateurs de capacités 1 μF , constituer une portion de circuit de capacité équivalente égale à 3 μF , 0,5 μF .

2.4 Questions sur les condensateurs.

1) Vrai ou faux ?

- a. La tension aux bornes d'un condensateur double quand sa charge double.
- b. La tension aux bornes d'un condensateur est égale au produit de sa charge par sa capacité.
- c. Deux condensateurs de même capacité ont toujours la même charge.
- d. L'énergie emmagasinée dans un condensateur est proportionnelle à la tension à ces bornes.
- e. Sous une tension donnée, un condensateur emmagasine d'autant plus d'énergie que sa capacité est grande.
- f. La constante de temps d'une association RC en série double quand la capacité double.

2) Déterminer la charge d'un condensateur de capacité 220 nF chargé sous une tension de 10 V.

3) Déterminer l'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité 0,40 mF chargé sous une tension de 10 V.

4) L'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité de 30 μF est de 1,5 mJ. Quelle est sa charge ? Quelle est la tension à ses bornes ?

5) On charge un condensateur de capacité 1,0 mF initialement déchargé avec un générateur de courant constant délivrant une intensité de 4,0 mA. Quelle est l'énergie emmagasinée dans le condensateur au bout de $t = 0,50$ s ?

2.5 Réflexion sur les capacités.

Un condensateur de capacité C est soumis à une différence de potentiel $V_A - V_B$.

- 1) Quelle est l'expression de la charge q_A de l'armature A du condensateur ?
- 2) Quelle est l'expression de la charge q_B de l'armature B du condensateur ?
- 3) Quelle est l'expression de la charge du condensateur ?
- 4) Quelle est l'expression de son énergie électrostatique ?

2.6 Puissance dissipée dans une résistance.

Aux bornes d'un générateur de force électromotrice e et de résistance interne r , on branche une résistance variable R . Déterminer la valeur de R pour laquelle la puissance perdue par effet Joule dans celle-ci est maximale.

2.7 Luminosité d'une ampoule.

La luminosité d'une ampoule augmente avec l'intensité du courant qui la traverse.
Pour réduire la luminosité d'une ampoule, doit-on brancher en série ou en parallèle une résistance auxiliaire ?

2.8 Résistance et section.

Un fil de longueur L et de section S a une résistance de 5Ω .
Quelle est la résistance d'un fil de même longueur mais de section $S/2$?

2.9 Résistance et résistivité.

On donne les conductivités suivantes :

$$\gamma_{\text{Cu}} = 58 \cdot 10^6 \text{ S.m}, \gamma_{\text{Al}} = 35 \cdot 10^6 \text{ S.m}, \gamma_{\text{Ag}} = 61 \cdot 10^6 \text{ S.m}.$$

Quelle est la résistance d'un câble de cuivre de 1 m de long et de diamètre 1,8 mm ?

Quelle doit être le diamètre d'un câble, de même longueur et de même résistance, en aluminium ?

Quelle doit être la longueur d'un câble, de même section et de même résistance, en argent ?

2.10 Résistance du cuivre.

Un fil de cuivre a un diamètre 0.9 mm et une longueur de 20 m. La résistivité du cuivre est : $1.7 \cdot 10^{-8} \Omega.\text{m}$. Quelle est sa résistance ?

Quelle est la résistance d'un fil de cuivre de section 4 mm^2 et de longueur 100 m ?

2.11 Résistance du platine.

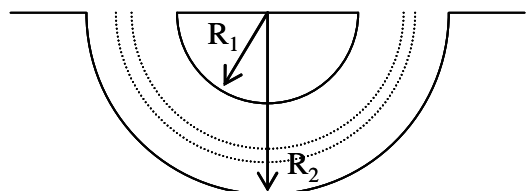
Un fil de platine de longueur 80 cm doit avoir une résistance de 1Ω . Quelle doit être son diamètre ? La résistivité du platine est de : $1.1 \cdot 10^{-7} \Omega.\text{m}$.

2.12 Résistance d'un tronç de cône.

Calculer la résistance d'un conducteur tronconique de rayons a et b et de hauteur h .

2.13 Résistance d'un milieu entre deux hémisphères.

Calculer la résistance d'un milieu compris entre deux hémisphères concentriques de rayons R_1 et R_2 .



2.14 Puissance dissipée.

Le courant passant par une résistance de $50\ \Omega$ est de $2\ \text{A}$. Quelle est la puissance dissipée en chaleur ?

2.15 Accumulateur.

Un accumulateur de $12\ \text{V}$ d'une voiture a une capacité de $80\ \text{A.h}$ (il peut débiter $80\ \text{A}$ pendant $1\ \text{h}$).

Quelle est l'énergie emmagasinée dans l'accumulateur ?

Les lampes du véhicule nécessitent une puissance de $60\ \text{W}$, combien de temps l'accumulateur peut-il les maintenir allumées quand le moteur (et donc son générateur) ne tourne pas ?

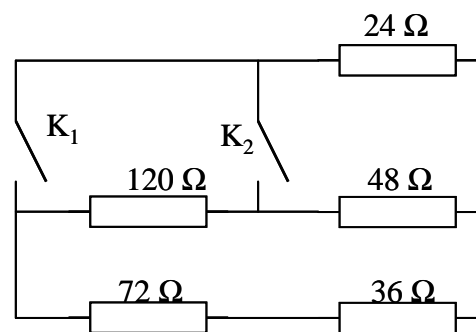
2.16 Charge d'un accumulateur.

Quelle doit être la différence de potentiel de la source de tension pour que l'on puisse charger un accumulateur de f.e.m $6\ \text{V}$ et de résistance $r = 0.1\ \Omega$ à raison de $10\ \text{A}$?

2.17 Résistance équivalente.

On considère le circuit de la figure ci-contre dans lequel K_1 et K_2 sont deux interrupteurs. Calculer la résistance qui est en parallèle avec la résistance de $36\ \Omega$, entre les points A et B, dans les cas suivants :

- 1) K_1 et K_2 sont fermés ;
- 2) K_1 et K_2 sont ouverts ;
- 3) K_1 est ouvert et K_2 est fermé ;
- 4) K_1 est fermé et K_2 est ouvert.

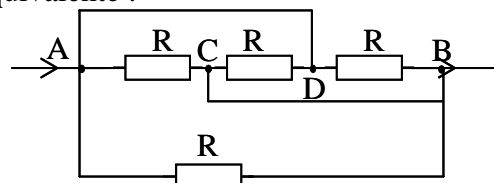


2.18 Réduction de la résistance.

Un circuit a une résistance de $50\ \Omega$. Comment peut-on la ramener à $20\ \Omega$?

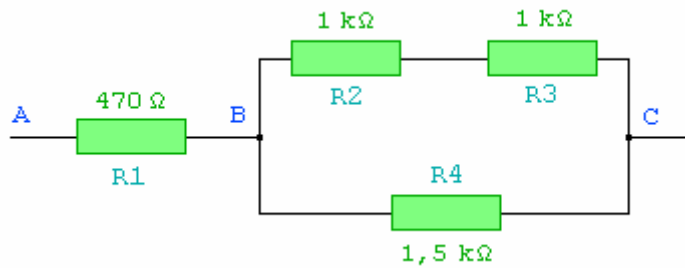
2.19 Résistance équivalente aux bornes de AB.

Déterminer la résistance équivalente :



2.20 Résistance équivalente (2).

Soit le schéma ci-contre. Calculez la résistance équivalente entre A et C.



2.21 Résistance équivalente à une association en série.

On associe en série deux résistances l'une de $330\ \Omega$ et l'autre de $470\ \Omega$. L'ensemble est alimenté par un générateur délivrant une différence de potentiel de $24\ \text{V}$. Calculer :

1. La résistance équivalente à l'association.
2. L'intensité du courant dans le circuit.
3. La ddp aux bornes de chaque résistance.
4. La puissance dissipée par effet joule dans chaque résistance.

2.22 Résistance équivalente à une association en dérivation.

On associe en parallèle cinq résistances identiques $100\ \Omega - 1\ \text{W}$ Calculer :

1. La résistance équivalente du montage.
2. L'intensité maximale du courant admissible par une résistance.
3. L'intensité maximale du courant admissible par le montage.
4. La ddp maximale applicable aux bornes du montage.
5. La puissance maximale admissible par le montage.

2.23 Résistance équivalente (3).

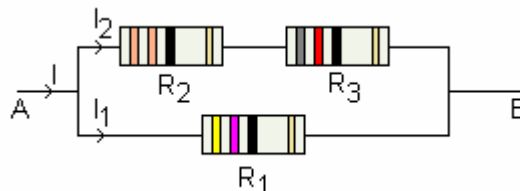
On réalise le circuit ci-contre où $R_1 = 47\ \Omega$, $R_2 = 33\ \Omega$ et $R_3 = 82\ \Omega$. On applique entre les bornes A et B une tension $U_{AB} = 12\ \text{V}$.

1. Quelle est l'intensité I_1 du courant traversant R_1 ?
2. Quelle est l'intensité I_2 du courant traversant R_2 ?

En déduire la tension aux bornes de la résistance R_3 .

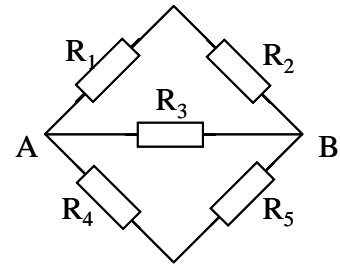
3. Calculer la valeur de l'intensité I du courant dans la branche principale. En déduire la valeur de la résistance équivalente R du circuit.

4. Retrouver la valeur de R en utilisant les lois d'association des conducteurs ohmiques.



2.24 Résistance équivalente (4).

Calculer R_{AB} la résistance équivalente à l'ensemble de résistances suivant, sachant que $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 500 \Omega$, $R_3 = 4,7 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 2,2 \Omega$, $R_5 = 7 \text{ k}\Omega$.



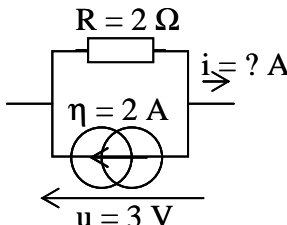
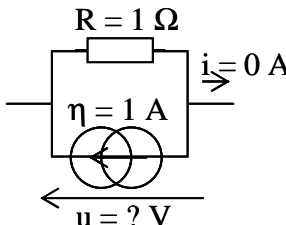
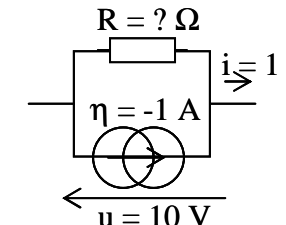
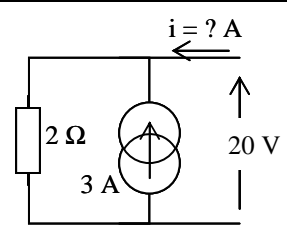
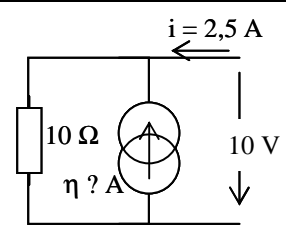
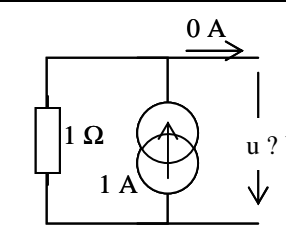
2.25 Calculs de grandeurs : i, u ?

Déterminer dans chaque cas ci-dessous la grandeur suivies d'un « ? ».

1		2	
3		4	
5		6	
7		8	

2.26 Calculs de grandeurs : i, u ? Suite.

Déterminer dans chaque cas ci-dessous la grandeur suivies d'un « ? ».

1		2		3	
4		5		6	

2.27 Galvanomètre.

Un galvanomètre qui mesure des courants de 0 à 1 mA a une résistance de 40 Ω. Comment ce galvanomètre peut-il être utilisé pour mesurer des courants de 0 à 1 A ?

Le même galvanomètre doit être utilisé pour mesurer des différences de potentiel de 0 à 1 V. Comment peut-on réaliser cela ?

2.28 Mesure d'une résistance.

Un voltmètre de résistance 1 kΩ est branché aux bornes d'une résistance et l'ensemble est monté en série avec un ampèremètre. Quand une différence de potentiel est appliquée, le voltmètre indique 40 V et l'ampèremètre 0,05 A. Quelle est la valeur de la résistance ?

2.29 Condensateur plan diélectrique.

Les caractéristiques d'un condensateur sont les suivantes : $C = 0,12 \mu\text{F}$, épaisseur du diélectrique $e = 0,2 \text{ mm}$; permittivité relative de l'isolant : $\epsilon_r = 5$; tension de service : $U_s = 100 \text{ V}$. $\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$. Calculer :

- La surface des armatures.
- La charge du condensateur soumis à la tension de service.
- L'énergie emmagasinée dans ces conditions.

Le condensateur étant chargé, on l'isole, puis on l'associe en parallèle à un condensateur de capacité $C_1 = 0,15 \mu\text{F}$ initialement déchargé. Calculer :

- La charge totale de l'ensemble formé par les deux condensateurs.
- La tension commune aux deux condensateurs en régime permanent.
- L'énergie emmagasinée par le montage.

2.30 Charge d'un condensateur, circuit RC.

Un condensateur de capacité $C = 500 \mu\text{F}$, initialement déchargé, est chargé sous une tension constante $E = 10 \text{ V}$, à travers une résistance $R = 1 \text{ k}\Omega$.

- 1) Représenter l'évolution de la tension et de l'intensité aux bornes du condensateur en fonction du temps. On fera apparaître un temps caractéristique.
- 2) Au bout de combien de temps la tension u_C aux bornes du condensateur sera-t-elle de 9 V ?

2.31 Calculs des énergies de dipôles passifs.

Démontrer les expressions d'énergies emmagasinées et rayonnées aux bornes d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine.

2.32 Bilan énergétique de charge d'un condensateur.

On considère un circuit composé d'un condensateur initialement non chargé, d'une source de tension continue de fem E , d'une résistance R et d'un interrupteur K initialement ouvert. A l'instant $t = 0$, l'interrupteur est fermé.

1) Représenter l'évolution de la tension au cours du temps aux bornes de la fem. Comment appelle-t-on la représentation ?

2) La réponse du circuit que nous allons étudier est la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur ou l'intensité $i(t)$ traversant le circuit.

Donner l'équation différentielle en fonction de la charge du condensateur q .

Intégrer l'équation différentielle à partir des conditions initiales.

Introduisez une constante dont vous préciserez la dimension.

2) Réponse en tension. En déduire l'évolution temporelle de $v(t)$. Tracer la courbe représentant l'évolution de la tension $v(t)$.

3) Réponse en courant. En déduire l'évolution temporelle de $i(t)$.

4) Bilan énergétique.

Calculez l'énergie fournie par le générateur entre les instants 0 et $t_1 > 0$.

Calculez l'énergie dissipée sous forme de chaleur dans R .

Calculez l'énergie emmagasinée dans le condensateur C .

Conclure.

2.33 Réponse d'un circuit R,L à un échelon de tension.

Considérons un circuit contenant en série un générateur de tension de fem E , une résistance R , une inductance L et un interrupteur initialement ouvert et fermé à $t = 0$.

1) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par i ?

2) Intégrer cette équation en tenant compte des conditions initiales. On introduira une constante de temps.

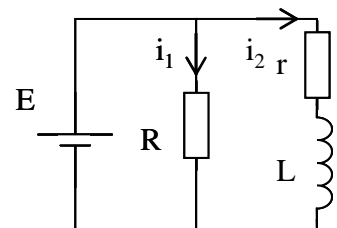
3) Tracer l'allure de $i(t)$.

4) Bilan d'énergie. Vérifier que l'énergie pour le générateur est intégralement redistribuée dans la résistance R et dans l'inductance L .

2.34 Etablissement et rupture d'un courant.

1) A l'instant $t = 0$, on ferme un interrupteur placé près de la source de tension E . Déterminer les courants i_1 et i_2 .

2) Au bout d'un temps très long, on ouvre l'interrupteur K . Calculer le courant circulant dans la bobine ainsi que la ddp aux bornes de R ; montrer que pendant un laps de temps court, la ddp peut être très supérieure à E si les paramètres sont bien choisis.



2.35 Réponse d'un circuit R,L,C à un échelon de tension.

Considérons un circuit contenant en série un générateur de tension de fem E , une résistance R , une inductance L , un condensateur de capacité C et un interrupteur initialement ouvert et fermé à $t = 0$.

1) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la tension v aux bornes du condensateur. On introduit deux constantes : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $\tau = \frac{2L}{R}$.

2) Trouver une solution particulière à l'équation différentielle.

3) En supposant une solution exponentielle à l'équation, trouvez une équation caractéristique du second degré.

4) Cas du discriminant strictement positif.

Quelle condition doit vérifier la résistance R pour que le discriminant soit positif ?

Donner la solution générale de l'équation différentielle vérifiée par v .

Tracer l'allure de $v(t)$.

Comment nomme-t-on ce régime ?

5) Cas du discriminant nul.

Quelle condition doit vérifier la résistance R pour que le discriminant soit nul ? Comment nomme-t-on cette résistance ?

Donner la solution générale de $v(t)$.

Tracer l'allure de $v(t)$. Quelle différence observez vous ?

Comment nomme-t-on ce régime ?

6) Cas du discriminant négatif.

Déterminer la solution générale de $v(t)$.

Tracer l'allure de $v(t)$.

Quel type de régime observe-t-on ? Introduire et évaluer la pseudo-période.

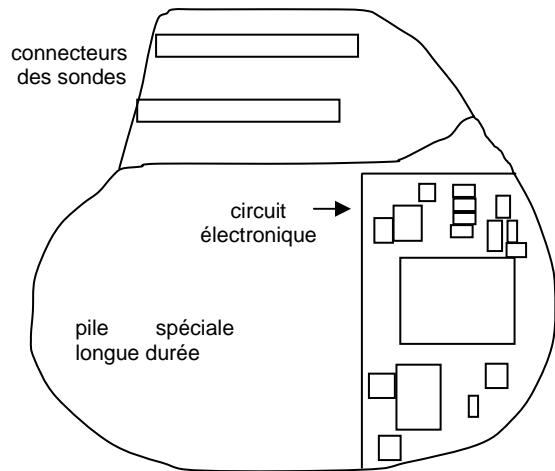
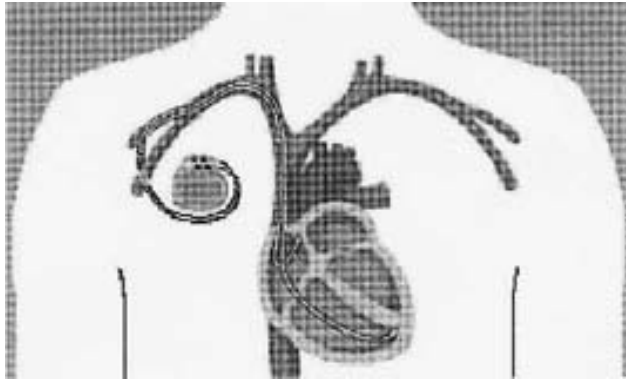
2.36 Circuit L,C parallèle soumis à un échelon de courant.

On considère un circuit comprenant un générateur de courant d'intensité I , en parallèle une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C . Le condensateur est initialement déchargé. On note $v(t)$ la tension aux bornes de condensateur. A $t = 0$, le circuit est fermé.

Déterminer les intensités dans chaque branche ainsi que la tension $v(t)$.

2.37 BAC 2004 Île de la Réunion, Exercice1: Quelques usages des condensateurs.

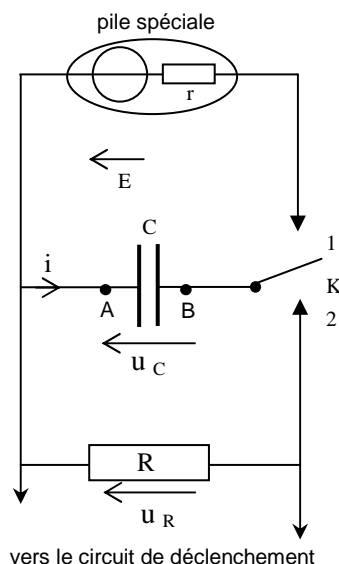
2.37.1 Génération d'impulsions: le stimulateur cardiaque



Notre cœur se contracte plus de 100 000 fois par jour. Il bat 24 h sur 24 pendant toute notre vie, entre 60 et 80 fois par minute, grâce à un stimulateur naturel: le nœud sinusal.

Lorsque celui-ci ne remplit plus correctement son rôle, la chirurgie permet aujourd'hui d'implanter dans la cage thoracique un stimulateur cardiaque artificiel (appelé aussi pacemaker) qui va forcer le muscle cardiaque à battre régulièrement en lui envoyant de petites impulsions électriques par l'intermédiaire de sondes.

Le boîtier de celui-ci est de petite taille : 5 cm de large et 6 mm d'épaisseur. Sa masse est d'environ 30 g.



Ce pacemaker est en fait un générateur d'impulsions ; il peut être modélisé par le circuit électrique en dérivation, ci-contre, qui comprend un condensateur de capacité $C = 470 \text{ nF}$, un conducteur ohmique de résistance R , une pile spéciale et un transistor qui joue le rôle d'interrupteur, K .

La pile qui apparaît dans ce dispositif peut être modélisée par l'association en série d'une résistance r (ici très faible voire négligeable) et d'un générateur de tension idéal de force électromotrice E .

Quand l'interrupteur est en position (1) le condensateur se charge de façon quasi-instantanée. Puis, quand l'interrupteur bascule en position (2), le condensateur se décharge lentement à travers le conducteur ohmique de

résistance R , élevée, jusqu'à une valeur limite $u_{\text{limite}} = \frac{E}{e}$

avec $\ln e = 1$ où \ln représente le logarithme népérien.

A cet instant, le circuit de déclenchement envoie une impulsion électrique vers les sondes qui la transmettent au cœur : on obtient alors un battement !

Cette dernière opération terminée, l'interrupteur bascule à

nouveau en position (1) et le condensateur se charge, etc...

La tension u_C aux bornes du condensateur a alors au cours du temps l'allure indiquée sur la **courbe 1**, représentée sur l'annexe 1 à remettre avec la copie.

2.37.1.1 Charge du condensateur

2.37.1.1.1 Quand l'interrupteur est en position (1), il se charge de façon quasi instantanée. Pourquoi ce phénomène est-il très rapide ?

2.37.1.1.2 Pour obtenir l'enregistrement de l'évolution temporelle de la tension u_C , on utilise un ordinateur muni d'une interface d'acquisition de données et d'un logiciel de saisie.

Reproduire le schéma 1 et indiquer où doivent être branchées la masse M de l'interface et la voie Y_A d'acquisition pour étudier les variations de la tension u_C aux bornes du condensateur.

2.37.1.1.3 Sur la courbe 1, colorier la (ou les) portion(s) qui correspondent à la tension u_C lors de la charge du condensateur. Justifier votre choix.

2.37.1.1.4 On considère que le condensateur est complètement chargé. Quelle est la valeur de l'intensité du courant qui circule alors dans le circuit ?

La force électromotrice E est la valeur de la tension aux bornes de la pile lorsqu'elle ne débite pas de courant.

A partir de l'enregistrement $u_C = f(t)$, donner la valeur de E.

2.37.1.2 Décharge du condensateur

2.37.1.2.1 En respectant les conventions d'orientations du schéma du circuit :

- préciser le signe de l'intensité i du courant lors de la décharge ;
- écrire la relation entre l'intensité i du courant et la tension u_R ;
- écrire la relation entre la charge q de l'armature A du condensateur et la tension u_C ;
- écrire la relation entre l'intensité i et la charge q ;
- écrire la relation entre les tensions u_R et u_C lors de la décharge.

2.37.1.2.2 En déduire que lors de la décharge, l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C est de la forme :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = 0$$

2.37.1.2.3 Donner l'expression littérale de la constante de temps τ . Montrer que cette grandeur a la même unité qu'une durée.

2.37.1.2.4 Déterminer graphiquement la valeur de τ par la méthode de son choix qui apparaîtra sur la figure de l'annexe à rendre avec la copie.

2.37.1.2.5 En déduire la valeur de R.

2.37.1.3 Lien entre la décharge du condensateur et les battements du cœur

2.37.1.3.1 A l'instant t_1 , le circuit de déclenchement génère une impulsion électrique ; le condensateur n'est pas complètement déchargé.

Quelle est l'expression littérale de la tension u_C aux bornes du condensateur, à cet instant ?

Graphiquement la valeur de cette tension est 2,1 V. Est-ce en accord avec la valeur de E obtenue à la question I.1.d ?

2.37.1.3.2 Sachant qu'une solution générale de l'équation différentielle précédemment établie est de la forme: $u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$, montrez que $t_1 = \tau$.

2.37.1.3.3 En déduire la durée Δt qui doit séparer deux impulsions électriques consécutives.

2.37.1.3.4 Quel est alors le nombre de battements du cœur par minute ?

2.37.2 Stockage d'énergie: le flash électronique

L'énergie libérée en un temps très bref par l'éclair d'un flash est au préalable stockée dans un condensateur de grande capacité, chargé par quatre piles en série équivalentes à un générateur de f.e.m. $U = 6$ V. Elles contiennent une énergie totale $E = 18$ kJ, lorsqu'elles sont neuves. On admettra que pour un fonctionnement optimal, la moitié de cette énergie est transférable au condensateur. Au-delà, les piles doivent être changées.

<i>Le mode d'emploi du flash Minolta® 5400HS indique, pour une alimentation par quatre piles alcalines de type AA :</i>	
<i>Autonomie (en nombre d'éclairs)</i>	<i>Temps de recharge après un éclair en secondes</i>
100 à 3500	0,2 à 11
<i>L'autonomie indique le nombre d'éclairs possibles avant de changer de piles. La durée de l'éclair peut être limitée par un circuit électronique, ce qui explique les fourchettes de données. Les indications en gras correspondent à des éclairs d'intensité lumineuse et de durée maximales, résultant de la décharge complète du condensateur.</i>	

2.37.2.1 En utilisant les données du mode d'emploi, calculer la valeur de l'énergie libérée par un éclair d'intensité lumineuse et de durée maximales.

2.37.2.2 En déduire la capacité C du condensateur qui a été chargé sous la tension constante $U = 6 \text{ V}$.

2.37.2.3 En utilisant les données du mode d'emploi, donner un ordre de grandeur de la constante de temps du circuit de charge.

2.37.2.4 En déduire l'ordre de grandeur de la résistance à travers laquelle s'est chargé le condensateur.

2.37.3 Oscillations électriques: le détecteur de fraude

La photo ci-contre montre un circuit électrique collé sous l'étiquette du boîtier d'un logiciel.

C'est un oscillateur électrique du type LC, dont la période propre vaut $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. Démontrer la relation précédente.

Si le boîtier est tombé «par mégarde» dans un sac du client au lieu de passer par la caisse du magasin, ce circuit va se retrouver entre les portiques de sécurité à la sortie. Ces portiques contiennent des bobines émettant en permanence une onde radio de faible intensité mais de haute fréquence $N = 10 \text{ MHz}$, exactement égale à la fréquence propre du petit oscillateur.

Dans ces conditions, le circuit capte l'énergie émise, se met à osciller, et émet à son tour une onde qui vient perturber l'onde des portiques. La détection de cette perturbation déclenche une alarme.

Question: l'inductance de la bobine vaut $L = 0,5 \mu\text{H}$. En déduire la capacité C du condensateur.

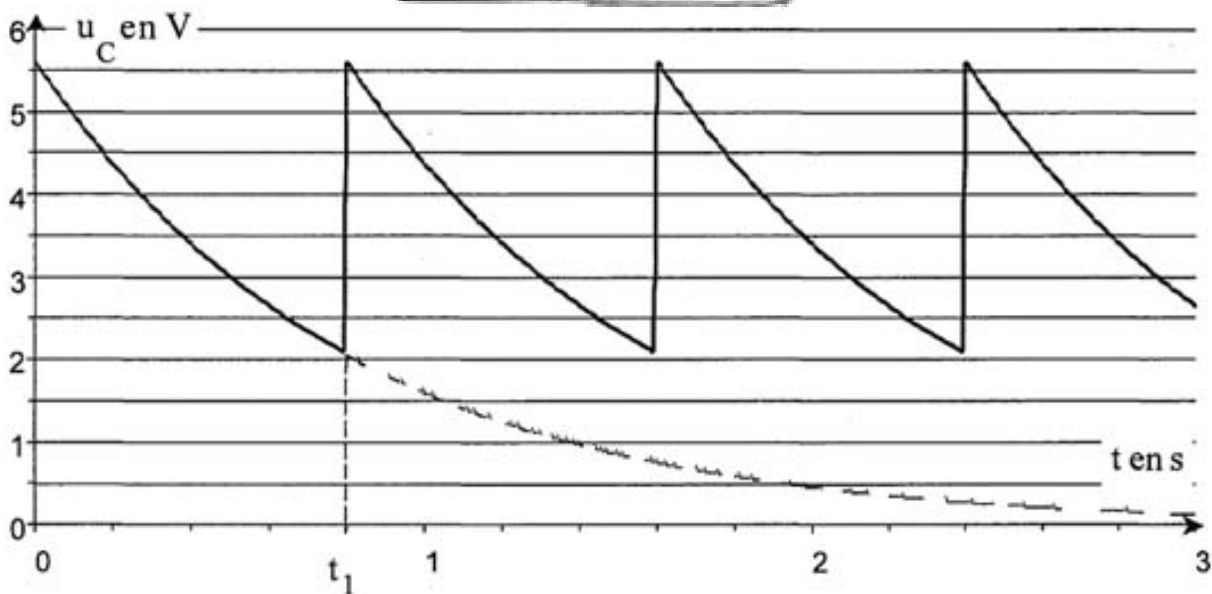
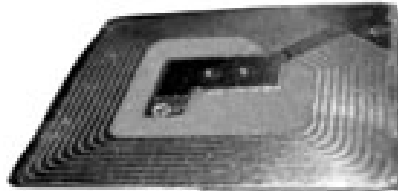
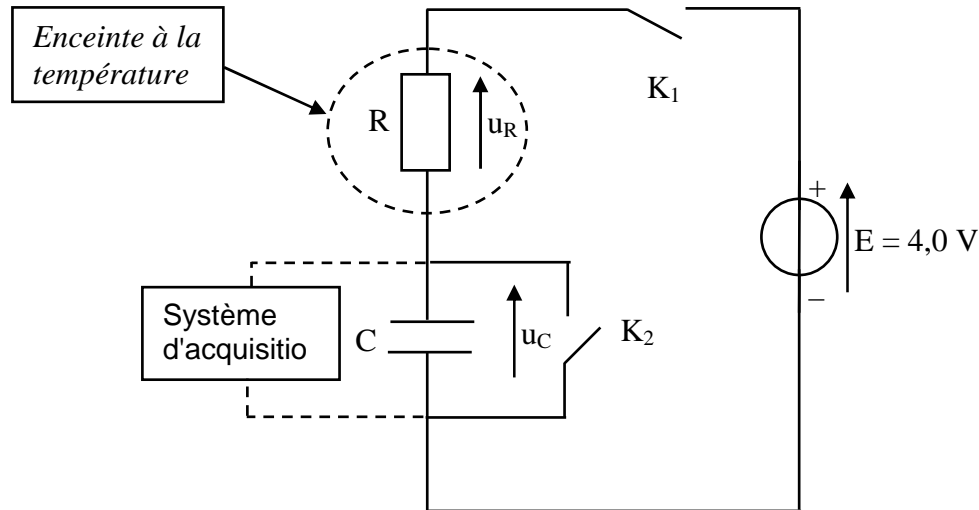


Figure 1 : Courbe 1.

2.38 Antilles 2005 Exercice n°3 : Sonde thermique (4 points)

On peut constituer une sonde thermique à l'aide d'un dipôle (R,C) série. On réalise le circuit suivant :



Le condensateur a une capacité $C = 1,0 \mu\text{F}$

Le conducteur ohmique est une thermistance : la valeur R de sa résistance dépend de la température. On le place dans une enceinte dont la température interne est notée θ .

Un système d'acquisition permet d'enregistrer l'évolution au cours du temps de la tension u_C aux bornes du condensateur.

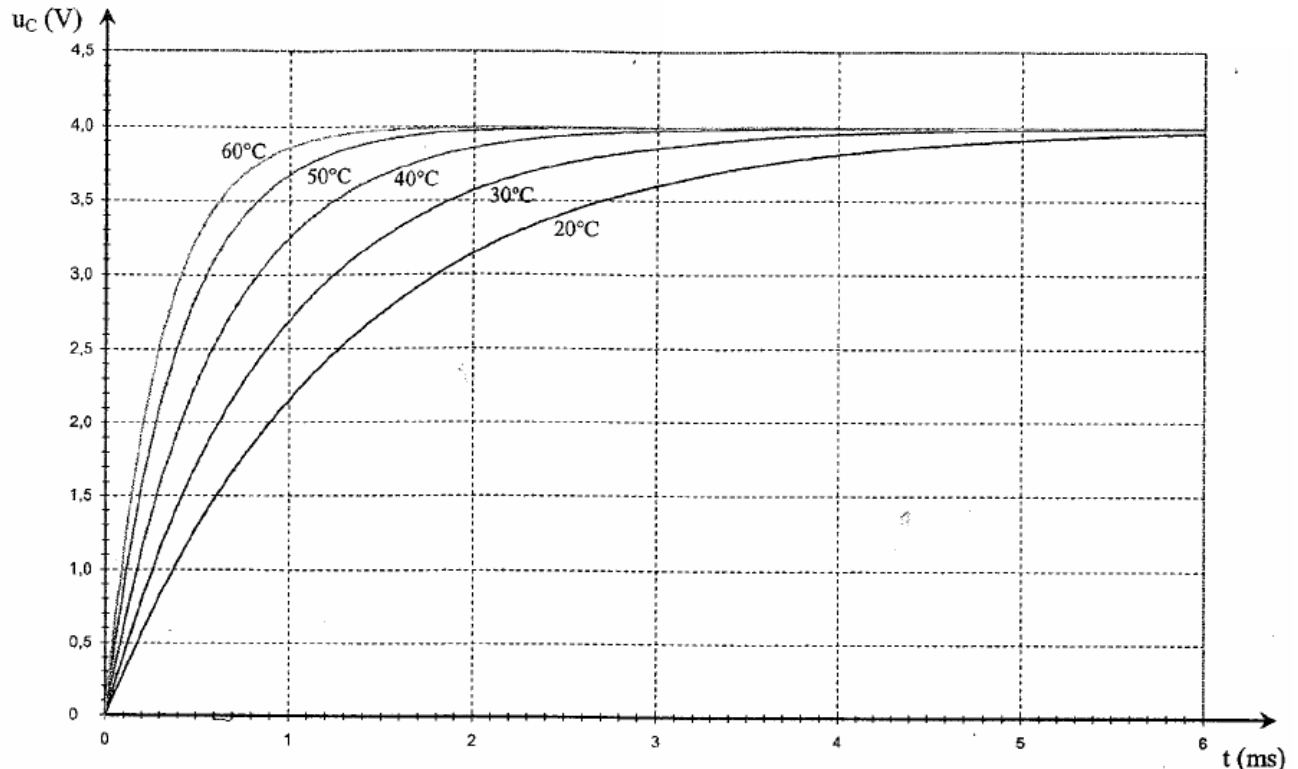
1. Étalonnage de la sonde

Protocole expérimental :

On souhaite tracer la courbe de l'évolution de la valeur de la résistance de la thermistance en fonction de la température. On réalise le protocole suivant :

Le condensateur est initialement déchargé et les interrupteurs K_1 et K_2 sont ouverts. À $t = 0$, on ferme K_1 et on enregistre l'évolution de la tension u_C jusqu'à la fin de la charge du condensateur. Ensuite, on ouvre K_1 et on ferme K_2 : le condensateur se décharge complètement. On ouvre enfin K_2 .

On modifie la température de l'enceinte et on recommence le protocole précédent. On opère pour plusieurs valeurs de température et on obtient le graphique suivant :



À l'aide des résultats expérimentaux, étudions la charge du condensateur.

- 1.1. Établir la relation entre la tension E aux bornes du générateur, la tension u_R aux bornes du conducteur ohmique et la tension u_C aux bornes du condensateur.
- 1.2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C pendant la phase de charge.
- 1.3. La solution analytique de cette équation est de la forme : $u_C = A + B e^{-t/(RC)}$
 - 1.3.1. En tenant compte des conditions finales de la charge, déterminer A .
 - 1.3.2. En tenant compte des conditions initiales de la charge, déterminer B .
 - 1.3.3. Dédire l'expression de u_C .
- 1.4. On donne l'expression de la constante de temps du dipôle (R, C) : $\tau = RC$.
 - 1.4.1. Vérifier par analyse dimensionnelle l'homogénéité de cette formule.
 - 1.4.2. Déterminer la valeur τ_1 de la constante de temps, relative à la température $\theta_1 = 20^\circ\text{C}$, à partir du graphique. Expliquer la méthode employée.
 - 1.4.3. En déduire la valeur R_1 de la résistance correspondante.
 - 1.4.4. Procéder de la même manière pour les autres températures et compléter le tableau de l'**annexe** à rendre avec la copie.
 - 1.4.5. Tracer sur papier millimétré (à rendre avec la copie) la courbe d'étalonnage $R = f(\theta)$ en respectant l'échelle suivante : abscisse : 1 cm pour 5°C
ordonnée : 1 cm pour $0,1 \text{ k}\Omega$

2. Mesure d'une température :

Essayons la sonde thermique en la plaçant dans une enceinte de température interne θ à déterminer. On mesure la résistance de la thermistance à l'aide d'un ohmmètre et on obtient :

$R = 0,50 \text{ k}\Omega$. En vous servant de la courbe d'étalonnage, déterminer la température de l'enceinte.

ANNEXE 2 (À RENDRE AVEC LA COPIE)
(Seules les cases blanches sont à compléter)

Température θ (°C)	$\theta_1 = 20$	25	30	35	40	45	50	55	60
Constante de temps τ (ms)	$\tau_1 =$								
Résistance R (k Ω)	$R_1 =$	1,07		0,74		0,49		0,34	

2.39 2006 Antilles ; exercice 1 : bobine à inductance réglable.

Au cours d'une séance de travaux pratiques, on veut vérifier la valeur de l'inductance indiquée par le curseur du dispositif de réglage d'une bobine à noyau de fer doux. Pour cela on va procéder en deux étapes :

Première étape : on détermine la valeur de la capacité d'un condensateur par l'étude expérimentale de sa décharge à travers un conducteur ohmique.

Seconde étape: on étudie la décharge de ce condensateur à travers la bobine pour en déduire la valeur de son inductance.

1. DÉTERMINATION DE LA CAPACITÉ DU CONDENSATEUR.

Le circuit d'étude du condensateur est schématisé sur le document N° 1 en ANNEXE N° 1, à rendre avec la copie.

L'interrupteur est en position 1. Le condensateur est chargé sous la tension E .

À la date $t = 0$, on commute l'interrupteur en position 2. Le condensateur se décharge à travers un conducteur ohmique de résistance $R = 5,6 \text{ k}\Omega$.

La courbe de décharge est donnée sur le document N° 2 en ANNEXE N°1 à rendre avec la copie.

1.1. En utilisant la convention récepteur, flécher les tensions u_C aux bornes du condensateur et u_R aux bornes du conducteur ohmique. Noter par q et $-q$ les charges des armatures du condensateur.

1.2. Montrer que l'équation différentielle du circuit vérifiée par la tension u_C peut s'écrire :

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} = 0$$

La solution de l'équation est $u_C(t) = E \cdot e^{-t/\tau}$ avec la constante de temps $\tau = RC$.

1.3. À $t = \tau$, la tension aux bornes du condensateur est-elle égale à 37 %, 63% ou 93% de sa valeur initiale ? Justifier la réponse.

1.4. À l'aide du graphe donné sur le **document N°2**, déterminer la valeur de la constante de temps τ .

1.5. En déduire la valeur de la capacité C du condensateur.

1.6. Sur le graphe donné sur le **document N°2**, tracer l'allure de la courbe de décharge $u_C = f(t)$ dans le cas où on utilise un conducteur ohmique de résistance R' plus faible. Justifier.

2. MESURE DE L'INDUCTANCE DE LA BOBINE.

La bobine étudiée a une inductance L que l'on peut régler de 0,1 H à 1,1 H et une résistance $r = 12 \Omega$.

On admet que la relation $u_L = ri + L \frac{di}{dt}$ où u_L et i sont définis en convention récepteur, reste valable aux bornes de la bobine avec noyau de fer doux.

Pour mesurer une valeur L de l'inductance de la bobine, on place l'index de réglage sur 0,5 H.

On réalise le circuit donné sur le **document N° 3 en ANNEXE N° 1 à rendre avec la copie**, en utilisant le condensateur de capacité $C = 2,2 \mu F$.

L'interrupteur est en position 1. Le condensateur est chargé sous la tension E .

À la date $t = 0$, on commute l'interrupteur en position 2.

On obtient la courbe $u_C = f(t)$ donnée sur le **document N° 4 en ANNEXE N° 1 à rendre avec la copie**.

2.1. Pour visualiser à l'ordinateur la tension u_C aux bornes du condensateur, représenter sur le schéma du circuit donné sur le **document N°3 en ANNEXE N° 1 à rendre avec la copie** les connexions de la voie 1 et de la masse de la carte d'acquisition.

2.2. Pourquoi qualifie-t-on le régime de la tension u_C de pseudo-périodique ?

2.3. Dans notre expérience, on peut considérer que la pseudo-période T est égale à la période propre donnée par la relation: $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{LC}$.

En vous aidant de la courbe $u_C = f(t)$ du **document N° 4 en ANNEXE N° 1 à rendre avec la copie**, déterminer la valeur de l'inductance L du circuit en expliquant votre démarche.

2.4. Comparer la valeur de l'inductance obtenue précédemment avec la valeur pointée par l'index de la bobine en calculant l'écart relatif $\frac{|L_{\text{exp}} - L_{\text{bobine}}|}{L_{\text{bobine}}}$. L'indication de l'index est-elle correcte ? Justifier la réponse.

3. BILAN ÉNERGÉTIQUE.

Maintenant on s'intéresse à l'évolution temporelle des énergies emmagasinées par le condensateur et la bobine, W_C et W_L . Les courbes sont données sur le **document N° 5 en ANNEXE N° 1 à rendre avec la copie**.

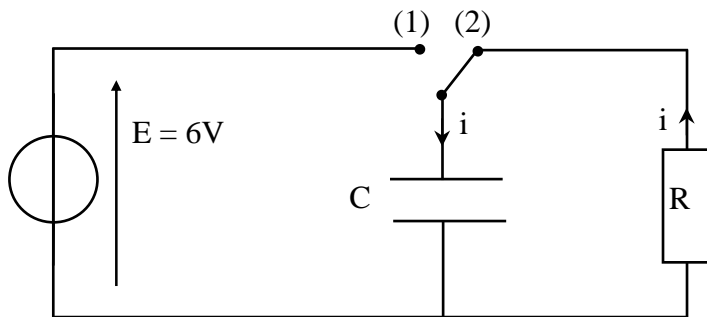
3.1. Écrire les expressions des énergies W_C et W_L en fonction des données u_C , i intensité du courant dans le circuit, C et L .

3.2. En vous aidant des conditions initiales, identifier sur le **document N°5 en ANNEXE N°**

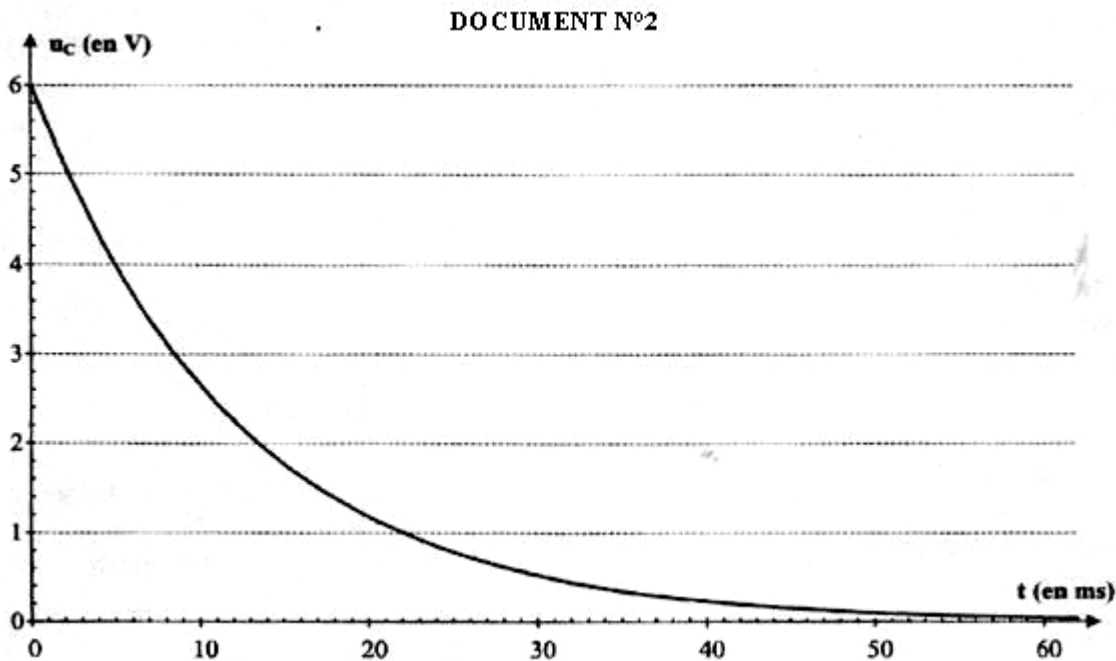
1 à rendre avec la copie les courbes W_C et W_L . Justifier votre réponse.

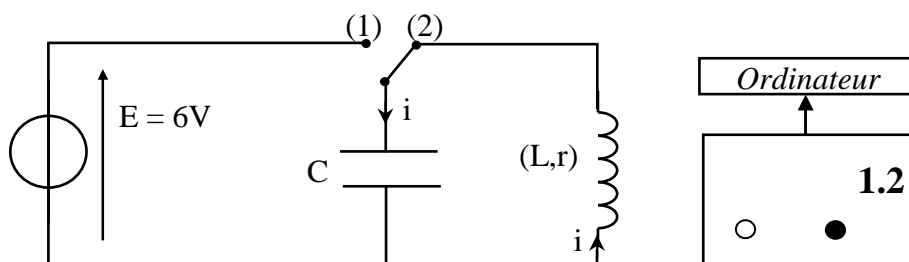
- 3.3. En comparant les évolutions temporelles des énergies W_C et W_L , que se passe-t-il entre le condensateur et la bobine ?
- 3.4. L'énergie totale $W = W_C + W_L$ emmagasinée par le circuit décroît au cours du temps. Quelle est l'origine de cette perte d'énergie ?
- 3.5. On aurait pu faire cette étude en associant en série avec la bobine à inductance réglable et le condensateur, un dipôle qui entretient les oscillations électriques. Quel est le rôle de ce dipôle ?

ANNEXE N°1 (À RENDRE AVEC LA COPIE)

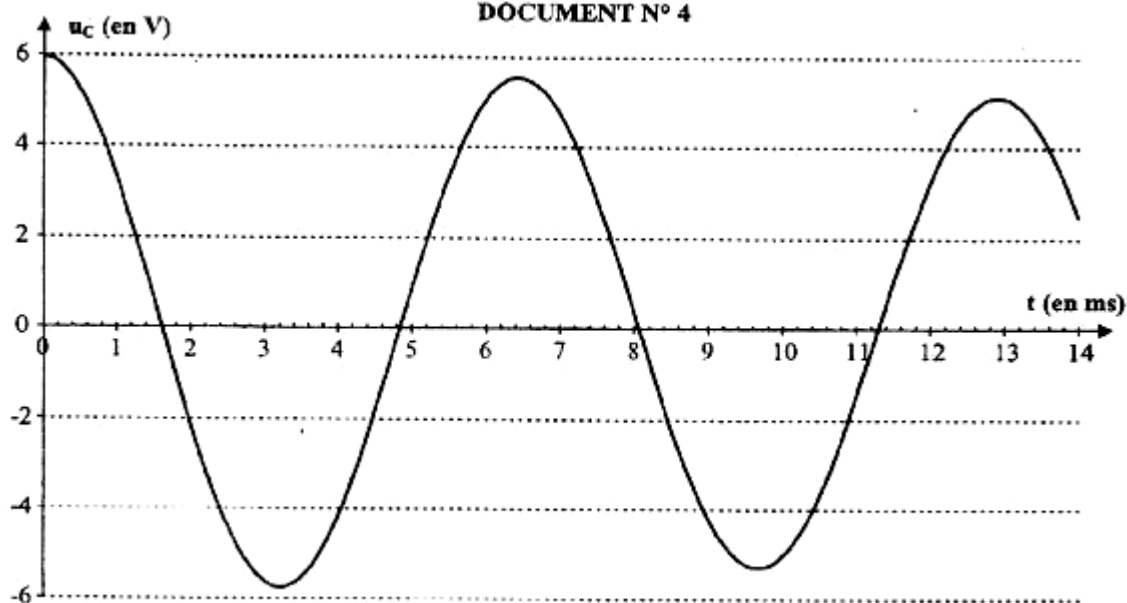


DOCUMENT 1.

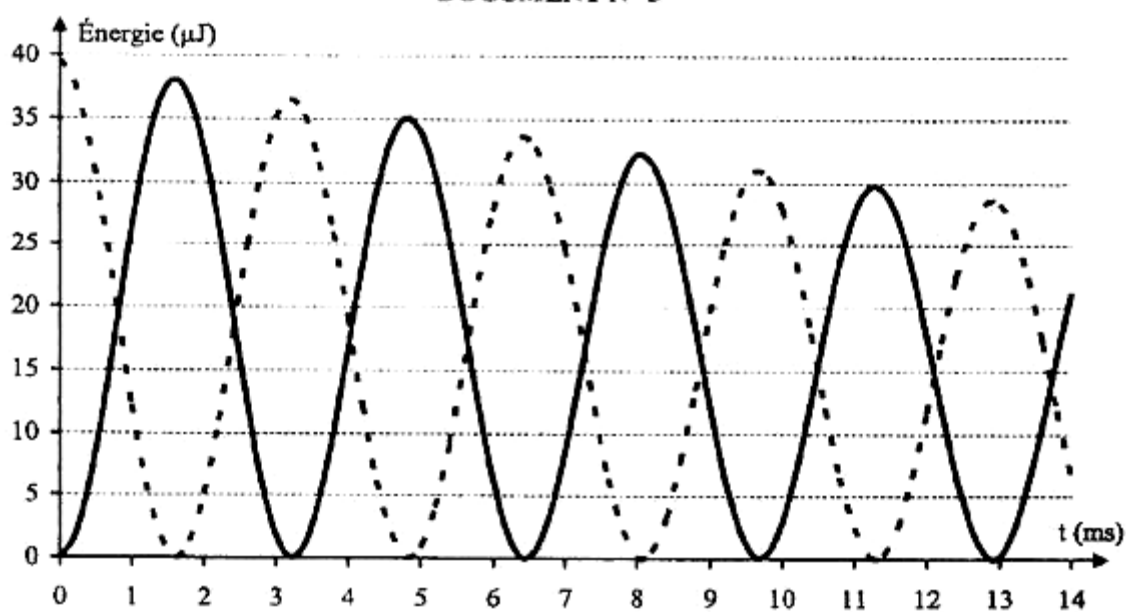




DOCUMENT N° 4



DOCUMENT N° 5

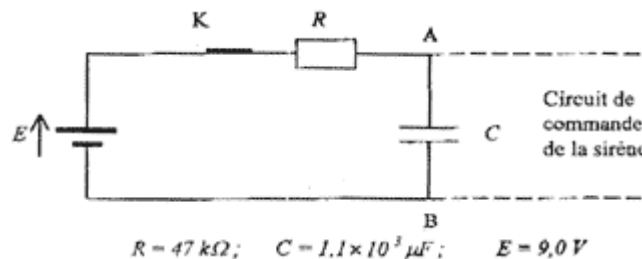


2.40 Bac Juin 2005 : Modélisation d'une alarme : 4 pts.

Un élève, dans le cadre de travaux personnels, souhaite étudier un système d'alarme. Après avoir modélisé la mise sous tension du circuit de commande de la sirène (première partie de l'exercice), il cherche à savoir si des phénomènes inductifs peuvent provoquer le déclenchement intempestif de la sirène (deuxième partie de l'exercice).

I. Première partie : fonctionnement simplifié d'une alarme d'appartement

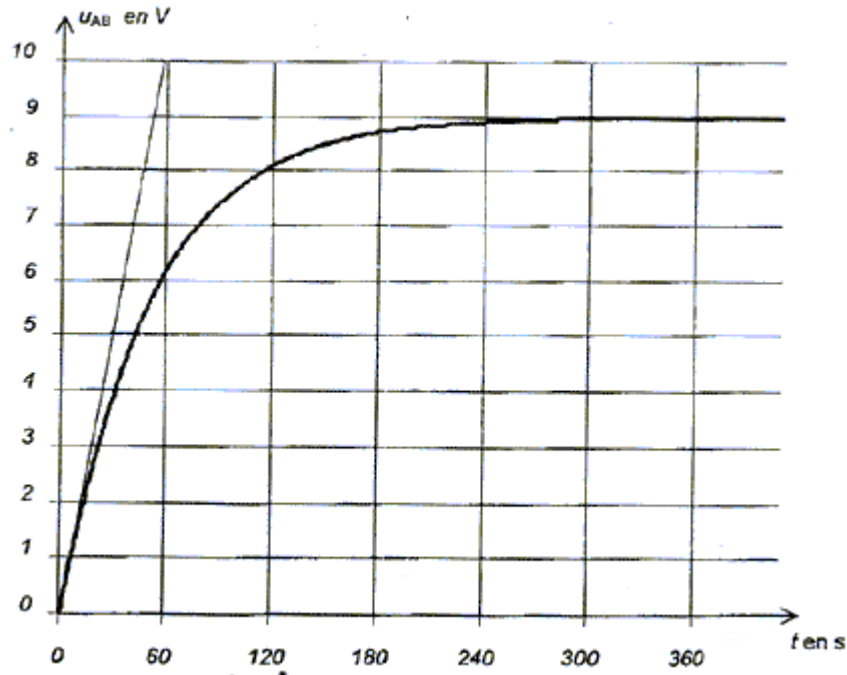
Après avoir mis sous tension l'alarme d'un appartement, il faut pouvoir disposer d'une durée suffisante pour sortir sans la déclencher. Pour cela certains dispositifs utilisent la charge et la décharge d'un condensateur. Le circuit est alimenté par une batterie d'accumulateurs de force électromotrice (f.e.m.) E . Le schéma simplifié de l'alarme est le suivant.



La mise sous tension de l'alarme correspond à la fermeture de l'interrupteur (K). Le circuit de commande de la sirène est tel qu'à la fermeture de la porte de l'appartement, le condensateur est mis en court-circuit (ses armatures sont alors reliées par un fil conducteur non représenté sur le schéma).

1. Étude de la charge du condensateur dans le circuit RC

Pour étudier la charge du condensateur de capacité C , l'élève visualise la tension $u_{AB} = f(t)$ à ses bornes à l'aide d'une interface reliée à un ordinateur. Le circuit de commande de la sirène n'est pas relié au condensateur lors de cette expérience. L'acquisition commence lors de la fermeture de l'interrupteur (K), le condensateur étant préalablement déchargé. L'élève obtient la courbe $u_{AB} = f(t)$ suivante :



- Indiquer sur le schéma du circuit les branchements de l'interface pour visualiser $u_{AB} = f(t)$. L'entrée et la masse de l'interface sont respectivement équivalents à une voie Y et à la masse d'un oscilloscope.

- En utilisant une méthode au choix, déterminer, à partir de la courbe $u_{AB} = f(t)$, la constante de temps τ de ce circuit. La construction qui permet sa détermination doit figurer sur la courbe.

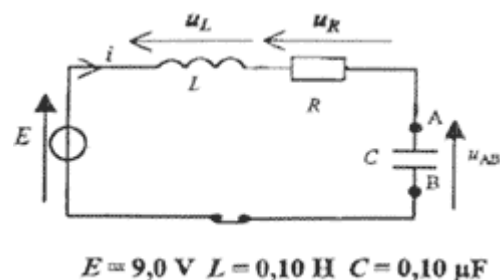
- Donner l'expression de la constante de temps τ en fonction des caractéristiques du circuit et vérifier par le calcul la valeur trouvée à la question précédente.

2. Déclenchement de l'alarme

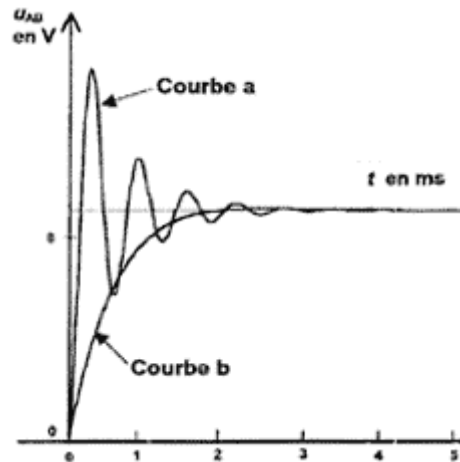
Ce circuit commande une sirène qui se déclenche dès que la tension aux bornes du condensateur atteint la valeur de 8 V. À l'aide de la courbe $u_{AB} = f(t)$ donnée, déterminer la durée Δt dont dispose l'habitant pour quitter l'appartement et fermer la porte, en indiquant clairement cette durée sur le graphe.

- Expliquer pourquoi le fait de fermer la porte empêche l'alarme de se déclencher.

Deuxième partie : l'alarme peut-elle se déclencher de manière intempestive ? Des phénomènes inductifs peuvent apparaître dans le circuit. Celui-ci est alors analogue à un circuit RLC série. Pour comprendre l'influence de l'inductance l'élève réalise, au laboratoire, le montage ci-dessous, avec les composants dont les caractéristiques sont données :



L'élève enregistre comme dans la première partie de l'exercice la tension $u_{AB} = f(t)$ aux bornes du condensateur, pour deux valeurs de résistance $R_1 = 160 \, \Omega$ et $R_2 = 2,4 \, k\Omega$. Il obtient les courbes a et b ci-dessous.



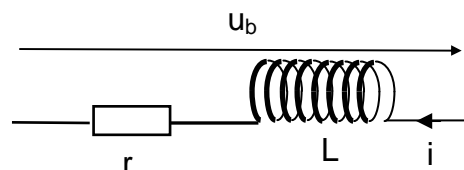
1. Donner les noms des régimes associés aux courbes a et b. Indiquer pour chacun d'eux la valeur donnée à la résistance R , en précisant la raison de ce choix.
Pour étudier les régimes de charge du condensateur, on appliquera les mêmes conclusions que dans le cas de la décharge du condensateur en série avec une bobine et une résistance.
2. À partir de ces courbes, montrer que l'intensité du courant dans le circuit s'annule au bout d'une durée suffisamment longue.
3. En appliquant la loi des tensions, trouver la valeur finale de la tension u_{AB} .
4. Quel inconvénient présenterait le régime associé à la courbe (a) si cette modélisation correspondait au circuit de déclenchement de l'alarme précédente ?
5. Dans un circuit de capacité C , d'inductance L et de résistance R , on évite les oscillations si la condition suivante est vérifiée : $\frac{1}{2}R(C/L)^{1/2} \geq 1$. La valeur de l'inductance dans le circuit d'alarme est supposée inférieure à 1 mH. Dire, en justifiant la réponse, si des oscillations peuvent apparaître dans le circuit d'alarme étudié dans la première partie, immédiatement après la fermeture de l'interrupteur K.

2.41 Polynésie 2006 : EXERCICE 1 : résistance d'une bobine réelle.

Dans tout l'exercice, on tiendra compte de la précision des données afin d'exprimer les résultats numériques en accord avec cette précision.

Un étudiant, curieux, veut vérifier la valeur de la résistance r d'une bobine réelle d'inductance 250 mH, modélisée sous forme d'un dipôle (r , L) en série. La tension en fonction du temps dans le cas général d'un courant électrique d'intensité $i(t)$ aux bornes d'une telle bobine est donnée par la relation :

$$u_b = r \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$$



Il dispose de tout le matériel souhaitable et procède à plusieurs essais.

A – En régime permanent

Pour mesurer la valeur de r , l'étudiant réalise un circuit comportant un générateur de tension continue de valeur $E = 6,0 \text{ V}$ de résistance interne négligeable, un ampèremètre numérique, un voltmètre numérique, des fils de connexion et la bobine à étudier.

1. Compléter le schéma du circuit en indiquant les positions de l'ampèremètre et du voltmètre (annexe à rendre avec la copie). Faire figurer la tension $U_g = E$ (tension aux bornes du générateur) ainsi que la tension $U_b =$ (tension aux bornes de la bobine). On négligera la tension aux bornes de l'ampèremètre.

2. Les mesures des appareils donnent $U_b = 5,95 \text{ V}$ et $I_b = 410 \text{ mA}$. En déduire la valeur r_1 de la résistance de la bobine dans ce cas particulier. Justifiez votre démarche.

B – En régime transitoire

L'étudiant modifie le montage précédent auquel il ajoute une résistance $R' = 10,0 \Omega$ en série. Il remplace les appareils de mesure par un système d'acquisition informatisé qui lui donne les variations de $i(t)$ obtenues à la fermeture de l'interrupteur. La tension du générateur reste fixe et égale à $6,00 \text{ V}$.

1. Quel est alors le phénomène observé dans le circuit ?

2. Sur le schéma du circuit modifié (annexe à rendre avec la copie), indiquer comment brancher le système d'acquisition (voie d'entrée et voie de référence) afin d'obtenir une tension proportionnelle à l'intensité du courant dans le circuit. Justifier votre réponse.

3. Déterminer la valeur de la constante de temps τ à partir du document obtenu par le système d'acquisition. Détailler clairement la méthode utilisée sur le graphe donné en annexe à rendre avec la copie.

4.1. La valeur de τ de ce circuit est égale au rapport $\frac{L}{R}$ où R représente la résistance électrique totale du circuit. Donner l'expression littérale de τ en fonction des paramètres du circuit et vérifier par une analyse dimensionnelle que τ est homogène à un temps.

4.2. La bobine ayant une inductance $L = 250 \text{ mH}$, déduire la valeur r_2 de sa résistance.

5. On considère que l'intensité $i(t)$ atteint la valeur limite $I_\infty = 240 \text{ mA}$ au bout d'une durée 5 fois supérieure à τ .

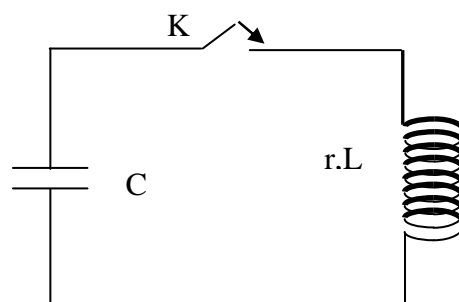
5.1. Quel est alors le régime de fonctionnement de la bobine ?

5.2. Exprimer r , résistance de la bobine en fonction de E , I_∞ et R' . Calculer sa valeur r_3 .

6. Les trois valeurs r obtenues dans les parties A et B sont-elles cohérentes entre elles ?

C – En régime oscillatoire

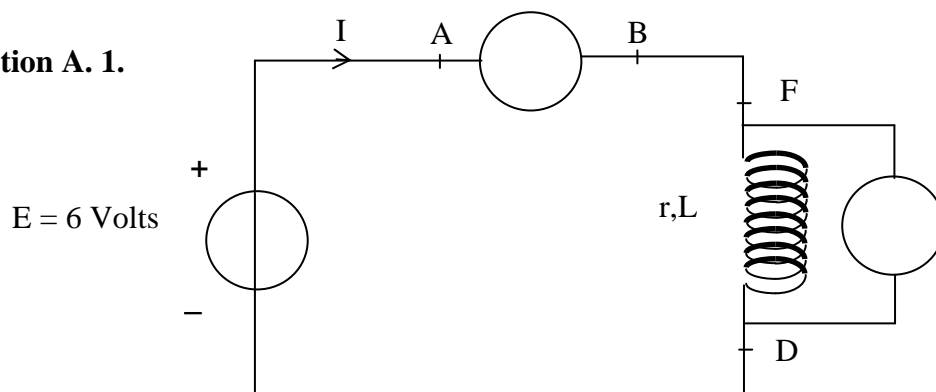
Cette bobine est branchée aux bornes d'un condensateur de capacité $C = 4 \mu\text{F}$, préalablement chargé par un circuit annexe non représenté, selon le schéma ci-dessous :



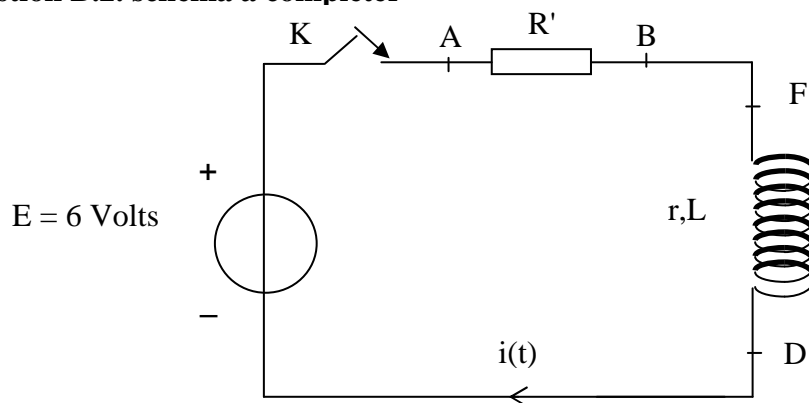
- 1.1. Rappeler l'expression littérale de la période propre T_0 d'un oscillateur LC.
- 1.2. Calculer la valeur de cette période T_0 .
- 2.1. On branche un oscilloscope aux bornes du condensateur et on observe sur l'écran des oscillations pseudo-périodiques de pseudo-période T .
Interpréter l'amortissement des oscillations.
- 2.2. On constate, avec une base de temps de 2 millisecondes par division, que 2 pseudo-périodes occupent entre 6,2 et 6,4 divisions.
Donner un encadrement de la pseudo-période T ainsi mesurée.
- 2.3. Comparer ce résultat à T_0 .

ANNEXE à rendre avec la copie

Question A. 1.

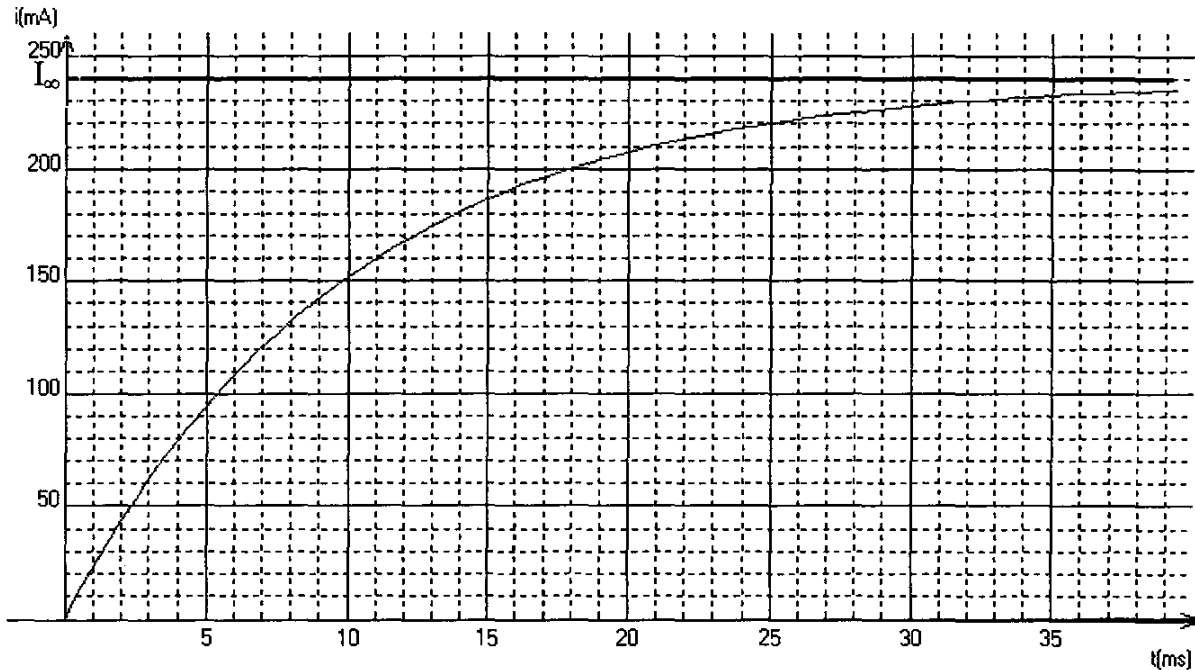


Question B.2. schéma à compléter



Question B.3 :

Résultat de l'acquisition donné par le système informatisé : $i(t)$ en mA, t en ms



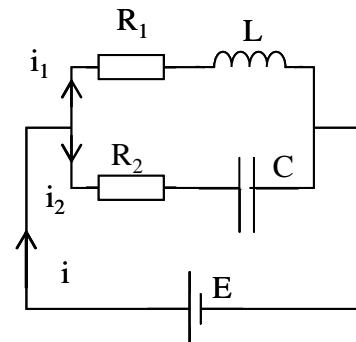
2.42 Courant indépendant du temps.

On considère le circuit ci-contre.

A quelles conditions, l'intensité du courant total est-elle indépendante du temps ?

Combien vaut-elle alors ?

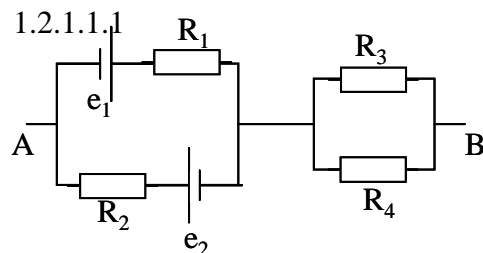
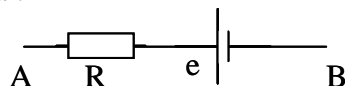
On suppose qu'à l'instant $t = 0$, où on ferme le circuit, le condensateur est non chargé.



2.43 Circuit équivalent.

Une portion AB d'un circuit comporte 4 conducteurs ohmiques de résistances R_1 , R_2 , R_3 , R_4 et deux sources de tension de fem e_1 et e_2 .

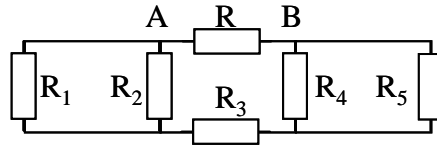
1) Montrer que cet élément de circuit est équivalent à :



2) R_1 , R_2 , R_3 , $R_4 = 4 \Omega$. $E_1 = 5 \text{ V}$ et $E_2 = 10 \text{ V}$. Calculer R et e puis la tension entre A et B si l'intensité qui circule de A vers B est égale à 1 A.

2.44 Résistance équivalente aux bornes d'un dipôle.

Déterminer la résistance équivalente au dipôle AB suivant :



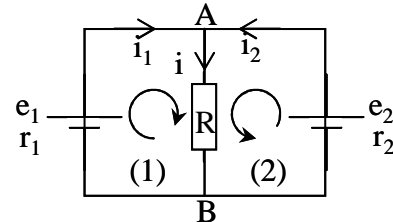
2.45 Valeurs algébriques de i et e .

Déterminer les courants en respectant les sens arbitraires choisis.

AN : $e_1 = 6 \text{ V}$; $e_2 = 12 \text{ V}$.

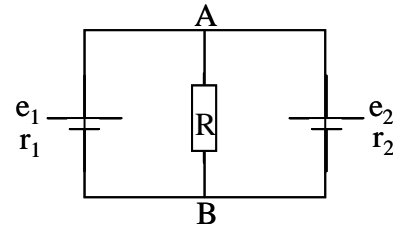
$r_1 = 1 \Omega$, $r_2 = 2 \Omega$.

$R = 10 \Omega$.



2.46 Application du théorème de superposition.

On reprend l'exercice précédent. On désire connaître l'intensité du courant dans chaque branche.



2.47 Représentation matricielle.

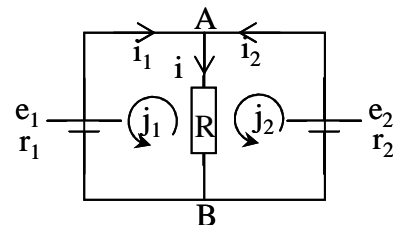
Même exercice.

$$\begin{pmatrix} r_1 + R & -R \\ -R & r_2 + R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \text{ d'où l'on extrait :}$$

$$j_1 = \frac{R(e_2 - e_1) - e_1 r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \text{ et } j_2 = \frac{R(e_1 - e_2) + e_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}.$$

De plus $I_1 = -j_1$, $I_2 = j_2$ et $I = j_2 - j_1$.

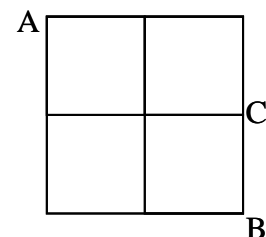
On retrouve les résultats précédents : $i = \frac{e_2 r_1 + e_1 r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}$.



2.48 Résistance équivalente d'un maillage.

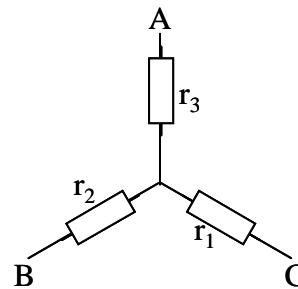
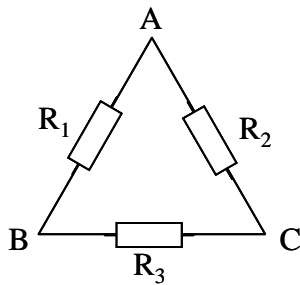
Déterminer la résistance équivalente au réseau de résistances suivant, tous les cotés ayant la même résistances r :

- vue de A et B,
- vue de A et C.



2.49 Transformation de Kenelly.

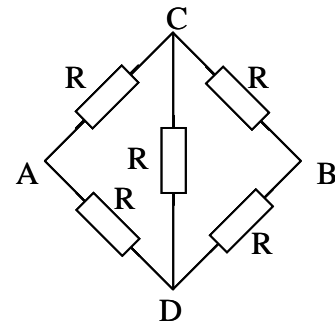
On considère un triangle de résistances. On remplace ce triangle par une étoile branchée entre A, B et C de sorte que les deux réseaux soient équivalents.



Déterminer r_1 , r_2 et r_3 en fonction de R_1 , R_2 et R_3 .

2.50 Vers le pont de Wheatstone.

Par application de la transformation de Kenelly, calculer la résistance équivalente vue de A et B du réseau ci-contre.



2.51 Lois de Kirchhoff et méthode matricielle.

On considère le circuit suivant :

1) Faire l'inventaire du nombre total de nœuds et de mailles puis du nombre de nœuds et mailles indépendants

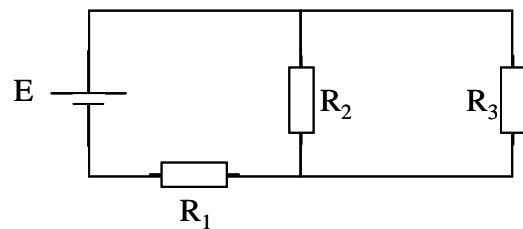
2) Fixer un sens aux intensités et aux tensions et écrire les équations de Kirchhoff.

3) Résoudre ces équations par la méthode directe.

Résoudre ces équations par la méthode matricielle.

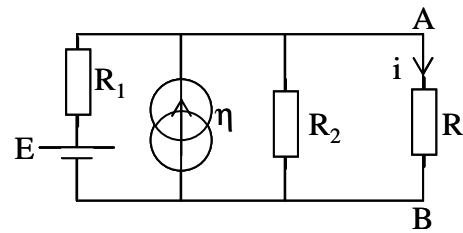
4) Définir des courants de mailles, puis par la méthode des nœuds, calculer les intensités dans chaque branche.

5) AN : $E = 6 \text{ V}$, $R_1 = 5 \text{ W}$, $R_2 = 10 \text{ } \Omega$, $R_3 = 5 \text{ } \Omega$.



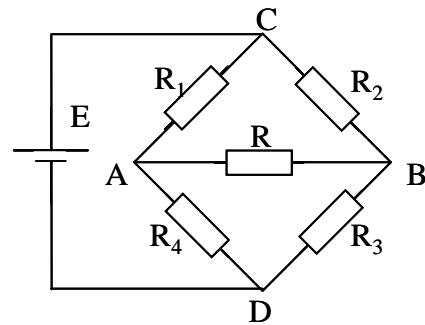
2.52 Application des théorèmes de Thévenin et Norton.

- 1) Calculer l'intensité i du dipôle AB en appliquant le théorème de superposition.
- 2) Exprimer le dipôle de Thévenin entre A et B puis calculer i .
- 3) Même question avec le dipôle de Norton.

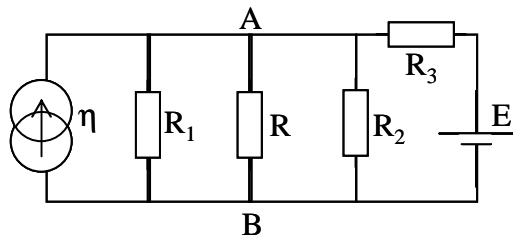


2.53 Pont de Wheatstone.

Déterminer, en utilisant le théorème de Thévenin, la relation liant les 4 résistances R_i , $i = 1 : 4$, pour que le courant circulant dans la résistance R soit nul.



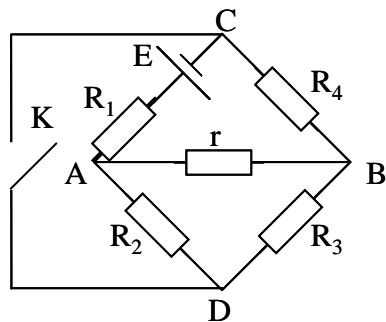
2.54 Courant circulant dans une branche.



Déterminer l'intensité du courant circulant dans la branche AB par :

- 1) la méthode de la superposition,
- 2) le théorème de Thévenin.

2.55 Pont de Mance.

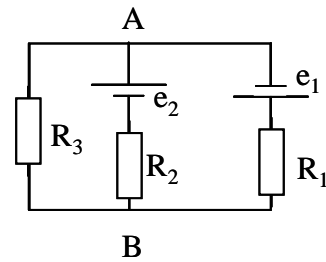


- 1) En appliquant le théorème de Thévenin, calculer l'intensité du courant circulant dans la branche AB lorsque l'interrupteur est ouvert puis fermé.
- 2) Quelle relation doit-il exister entre les résistances R_1 , R_2 , R_3 et R_4 pour que l'intensité du courant circulant dans la branche AB soit la même dans les deux cas ?

2.56 Courant circulant dans une branche.

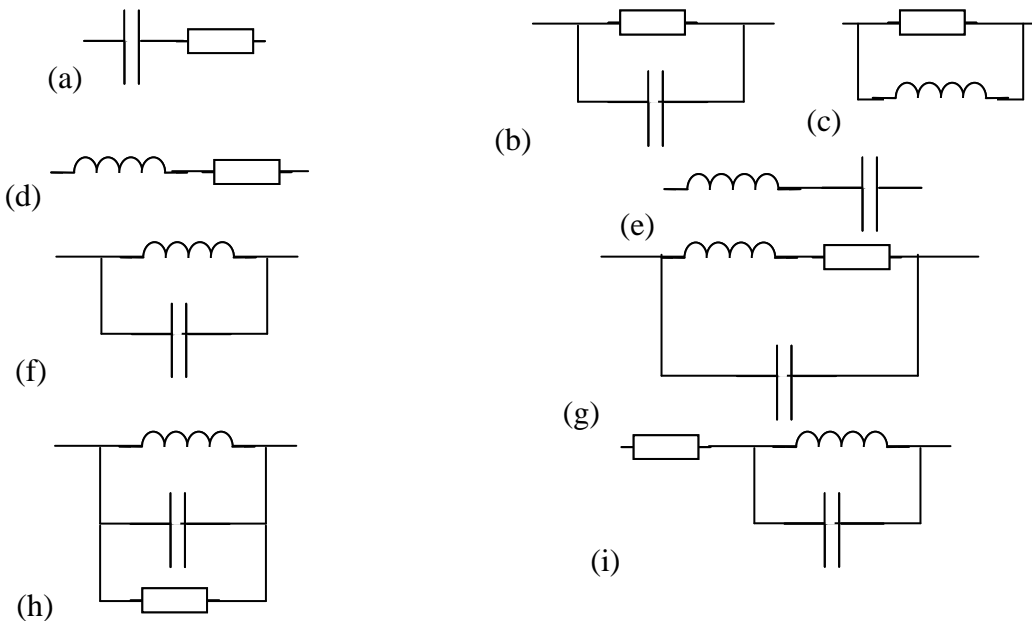
Déterminer l'intensité du courant circulant dans la résistance R_3 par :

- 1) Le principe de superposition,
- 2) Le théorème de Thévenin.



2.57 Calcul d'impédances complexes.

Calculer les impédances complexes, les modules et les arguments des circuits suivants :



2.58 Circuit RLC en série.

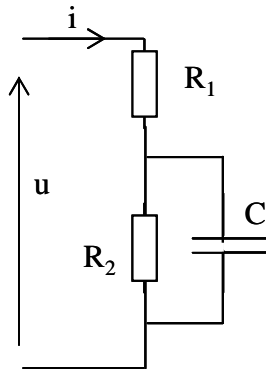
Considérons un circuit formé d'une résistance R , une inductance L , une capacité C montées en série aux bornes d'un générateur de tension alternative $e = E_m \cos \omega t$.

- 1) Déterminer l'équation différentielle satisfaite par l'intensité du courant.
- 2) Quelle est la forme générale de la solution de l'équation différentielle. Montrer qu'en régime sinusoïdal forcé, seule une des solutions est retenue. Déterminer la forme de $i(t)$ dans ce cas là, montrer qu'elle peut s'écrire : $i = I_m \cos(\omega t + \phi)$.
- 3) Méthode algébrique : De l'expression de $i(t)$ trouvée précédemment, déterminer les constantes.
- 4) Méthode de Fresnel : En prenant pour origine des phases la phase de i , construire le diagramme de Fresnel et en déduire l'intensité efficace I_m en fonction de la tension efficace E_m . Déterminer l'expression du déphasage entre l'intensité et la tension.
- 5) Méthode symbolique : Utiliser la méthode complexe pour obtenir les mêmes résultats.
- 6) La pulsation ω varie, étudier les variations avec ω de :
 - l'intensité maximale I_m ,
 - la phase ϕ en choisissant i sous la forme $I_m \cos(\omega t + \phi)$.

2.59 Schéma équivalent.

Une bobine d'inductance L est placée en série avec une résistance R . Calculer l'impédance L' et la résistance R' équivalentes lorsque les impédances sont en parallèles pour avoir la même impédance complexe. On exprimera L' et R' en fonction du rapport $q = L\omega/R$. Que se passe-t-il lorsque q est très supérieur à 1 ?

2.60 Calculs de grandeurs efficaces.



On applique au circuit ci-contre la tension $\bar{u}(t) = U e^{j\omega t}$, l'intensité $\bar{i}(t) = I e^{j(\omega t - \phi)}$.

- 1) Ecrire l'impédance z du circuit en fonction de la pulsation.
- 2) Calculer le module de l'impédance et l'angle ϕ si :
 $\omega = 1000 \text{ rad.s}^{-1}$, $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 2,5 \text{ }\mu\text{F}$.
- 3) En déduire I_{eff} si $U_{\text{eff}} = 100 \text{ V}$.
- 4) Evaluer \bar{u}_C , tension aux bornes du condensateur.
- 5) En déduire les intensités dans les deux dipôles correspondants.

2.61 Variation de la pulsation.

Aux bornes d'un circuit « RL » ($R = 200 \text{ }\Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$) série on applique la tension : $\bar{u} = U e^{j\omega t}$ et on note $\bar{i} = I e^{j(\omega t + \phi)}$ l'intensité du courant.

- 1) Ecrire l'impédance complexe \bar{z} du circuit.
- 2) Exprimer I et ϕ en fonction de ω .
- 3) Pour quelle pulsation notée ω_1 a-t-on $\phi = -45^\circ$?
- 4) Quelle est dans ces conditions la puissance P consommée dans ce circuit ? A.N. : On donne $U_e = 10 \text{ V}$.
- 5) Aux bornes de quel dipôle (conducteur ohmique ou bobine) la tension efficace (U_{eR} ou U_{eL}) tend-elle vers $U_e = 10 \text{ V}$ lorsque la pulsation tend vers l'infini puis vers 0 ?

2.62 Optimisation de P.

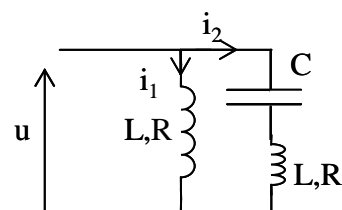
Soit un générateur de f.é.m. \bar{e} et d'impédance $\bar{Z} = R + jX$. Ce générateur alimente un dipôle d'impédance $\bar{z} = r + jx$.

Déterminer la puissance moyenne P consommée par ce dipôle. Quelle relation doit-il exister entre les impédances pour que P soit maximale ?

2.63 Quadrature de phase.

On considère le circuit suivant. On pose $u = U_m \cos \omega t$.

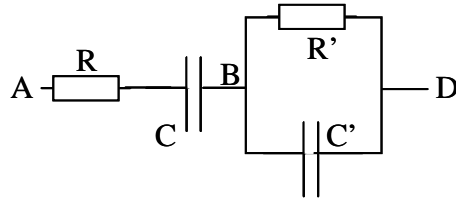
- 1) Déterminer les intensités efficaces des courants i_1 et i_2 ainsi que leur déphasages ϕ_1 et ϕ_2 .
- 2) Pour quelle valeur de C , i_1 et i_2 sont elles en quadrature ?
- 3) On veut que i_1 et i_2 soient non seulement en quadrature, mais en plus égales en valeurs efficaces. Trouver la relation



entre R , L et ω .

2.64 Égalité des tensions.

Les deux parties AB et BD de la portion du circuit AD (figure 1) sont composées de résistances pures R et R' et de condensateurs parfaits de capacités C et C' .



On applique entre A et D la différence de potentiel sinusoïdale : $V_A - V_D = v = V\sqrt{2} \cos \omega t$ et il passe alors dans le circuit orienté de A vers D un courant d'intensité algébrique : $i = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi)$.

a) Trouver les deux relations réelles exprimant R' et C' en fonction de R , C et ω pour que les différences de potentiel sinusoïdales :

$$v_1 = V_A - V_B \text{ et } v_2 = V_B - V_D \text{ soient constamment égales.}$$

b) Les capacités C et C' sont données et fixes ; on pose $C' = C / a$, a étant une constante.

Montrer que la condition $v_1 = v_2$ fixe la valeur de R' en fonction de celle de R , et la valeur de ω en fonction de R et C .

Le coefficient a peut-il être quelconque ?

c) On choisit $a = 2$, valeur que l'on conservera par la suite. Vérifier que l'on a alors : $R' = 2R$ et $RC\omega = 1$.

A.N. : $C = 0,5 \mu\text{F}$, $R = 1000 \Omega$.

Calculer la valeur numérique de ω pour laquelle $v_1 = v_2$.

d) La condition $v_1 = v_2$ étant réalisée avec $a = 2$, calculer les valeurs efficaces : I , $I_{R'}$, $I_{C'}$ des courants dans AB, R' , C' respectivement, en fonction de V , R et les déphasages ϕ , $\phi_{R'}$, $\phi_{C'}$ correspondant.

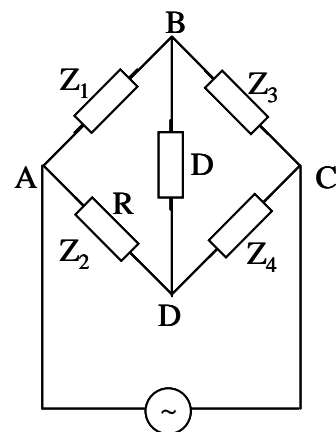
A.N. : $V = 20 \text{ V}$.

2.65 Pont de Wheatstone complexe.

On considère un pont de Wheatstone en alternatif schématisé ci-contre : D est un détecteur de zéro en alternatif (oscilloscope, écouteur téléphonique, etc.).

Etablir la condition d'équilibre du pont.

Application au pont de Nernst où z_1 est constituée d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C en parallèle, z_2 est constituée d'une résistance R' et d'un condensateur de capacité C' en série, z_3 et z_4 sont des résistances de valeurs respectives P et Q .



2.66 Différentes expressions de la puissance

On considère un circuit RLC série dans lequel est dissipée une puissance P .

Montrer que :

$$1- R = \frac{\bar{Z} + \bar{Z}^*}{2},$$

$$2- P = \frac{\bar{Z} + \bar{Z}^*}{4} \bar{i} \bar{i}^*,$$

$$3- P = \frac{\bar{v} \bar{i}^* + \bar{v}^* \bar{i}}{4},$$

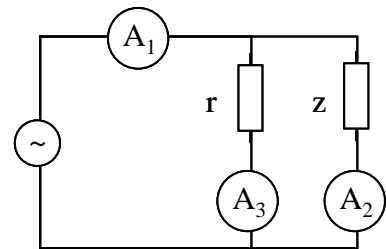
$$4- P = \left(\frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}^*} \right) \frac{\bar{v} \bar{v}^*}{4}.$$

2.67 Méthode des trois ampèremètres.

On se propose de déterminer la puissance P dissipée dans une impédance z quelconque. Pour cela, on considère le montage suivant.

r est une résistance morte, A_1, A_2, A_3 sont des ampèremètres de résistances négligeables.

Exprimer P en fonction des intensités efficaces I_1, I_2 et I_3 mesurées par A_1, A_2 et A_3 .

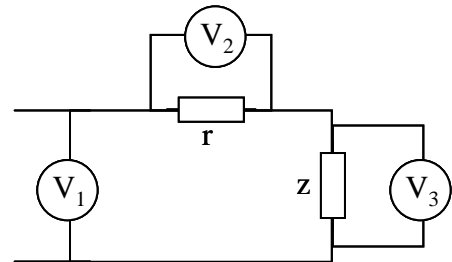


2.68 Méthode des trois voltmètres.

On se propose de déterminer la puissance P dissipée dans une impédance z quelconque. Pour cela, on considère le montage suivant.

r est une résistance morte, V_1, V_2 et V_3 sont trois voltmètres dont on supposera les résistances infinies.

Exprimer P en fonction des tensions efficaces V_1, V_2 et V_3 mesurées par V_1, V_2 et V_3 .



3 Solutions des exercices.

3.1 Question sur les oiseaux.

Les deux pattes sont au même potentiel électrique. Il ne peut y avoir passage du courant et donc électrocution.

3.2 Courant et charge.

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \rightarrow \Delta q = i \Delta t = 2 \text{ C}.$$

Le nombre d'électron traversant une section pendant 1 s est : $N = \frac{\Delta q}{e} = 1.25 \cdot 10^{19}$.

3.3 Capacités équivalentes.

$$\text{En série : } \frac{1}{C_{\text{serie}}} = \sum_i \frac{1}{C_i} = \frac{n}{C} \text{ d'où : } C_{\text{serie}} = \frac{C}{n}.$$

$$\text{En parallèle : } C_{\text{parallèle}} = \sum_i C_i = nC.$$

Pour obtenir un condensateur équivalent de capacité 3 μF , il suffit de monter en parallèle 3 condensateurs.

Pour obtenir un condensateur équivalent de capacité 0,5 μF , il suffit de monter en série 2 condensateurs.

3.4 Questions sur les condensateurs.

1) Vrai ou faux ?

a. $q = CU$ donc $2q = C 2U$.

b. faux.

c. faux. Pas nécessairement la même tension.

d. $E = \frac{1}{2} C U^2$. Faux.

e. Vrai.

f. Vrai.

$$2) q = CU = 220 \cdot 10^{-9} \cdot 10 = 2,2 \mu\text{C}.$$

$$3) E = \frac{1}{2} C U^2 = 0,5 \cdot 0,40 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 = 20 \text{ mJ}.$$

$$4) E = q^2/2C \text{ d'où } q = (2EC)^{1/2} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ C}. U = q/C = 10 \text{ V}.$$

5) $P = u i = (q/C)i$. $dE = (q/C)i dt = (q/C) (dq/dt) dt = 1/C q dq$ d'où $E = \frac{1}{C} \int q dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$, q ici étant la charge finale. Puisque le courant est continu, cette charge vaut simplement $q = i t$ d'où

$$E = \frac{1}{2} \frac{(it)^2}{C} = 2 \text{ mJ}.$$

3.5 Réflexion sur les capacités.

- 1) $q_A = C (V_A - V_B)$.
- 2) $q_B = C (V_B - V_A)$.
- 3) q_A ou q_B .
- 4) $\frac{1}{2} C (V_A - V_B)^2$.

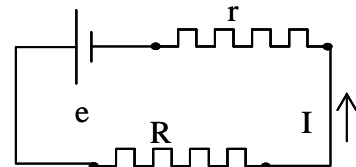
3.6 Puissance dissipée dans une résistance.

La loi d'Ohm conduit à : $(R + r) I = e$. La puissance dissipée dans la résistance variable est $P = R I^2$. On a donc :

$$P = e^2 \frac{R}{(r + R)^2}. \text{ On calcule la dérivée :}$$

$$\frac{dP}{dR} = \frac{e^2}{(r + R)^3} (r - R). \quad \frac{dP}{dR} \geq 0 \Leftrightarrow R \leq r \text{ d'où :}$$

$$P_{\max} = P(R = r) = \frac{e^2}{4R}.$$



3.7 Luminosité d'une ampoule.

Si l'ampoule est branchée sur un circuit électrique domestique, délivrant une tension constante, il faut brancher la résistance en série. En effet l'intensité parcourant le circuit diminue dans ce cas là.

Si l'ampoule est branchée aux bornes d'un générateur de courant, pour diminuer le courant circulant dans l'ampoule, il faut placer une résistance en parallèle.

3.8 Résistance et section.

Sa résistance sera de 10Ω .

3.9 Résistance et résistivité.

$$1) \text{ La résistance d'un fil est donnée par : } R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\gamma} \frac{4 l}{\pi d^2}.$$

On a donc : $R_{Cu} = 6,8 \text{ m}\Omega$.

$$2) d = d_{Cu} \sqrt{\frac{\gamma_{Cu}}{\gamma}} = 2,3 \text{ mm}.$$

$$3) l = l_{Cu} \frac{\gamma}{\gamma_{Cu}} = 1,05 \text{ m}.$$

3.10 Résistance du cuivre.

$$R = \rho \frac{L}{S} = \rho \frac{4L}{\pi d^2} = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \frac{4,20 \text{ m}}{\pi (0,9 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = 0,53 \Omega.$$

$$R = 0,425 \Omega.$$

3.11 Résistance du platine.

$$R = \rho \frac{L}{S} = \rho \frac{4L}{\pi d^2} \Rightarrow d = 2\sqrt{\frac{\rho L}{\pi R}} \sim 1 \text{ mm.}$$

3.12 Résistance d'un tronc de cône.

au niveau dimensionnel, la relation entre la résistance, la résistivité est donnée par la relation :

$$R = \rho \frac{L}{S}.$$

On a donc ici la résistance élémentaire entre z et

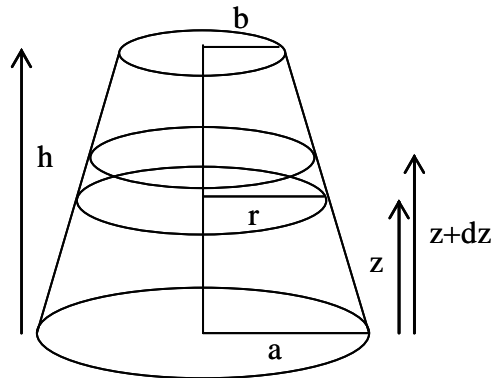
$$z+dz : dR = \rho \frac{dz}{\pi r^2}.$$

La relation linéaire qui lie r et z est donnée par :

$$r = -\frac{a-b}{h}z + a \text{ d'où l'on tire :}$$

$$dr = -\frac{a-b}{h}dz \rightarrow dz = -\frac{h}{a-b}dr. \text{ On a donc : } dR = -\rho \frac{h}{a-b} \frac{dr}{\pi r^2}.$$

$$\text{On intègre : } R = -\rho \frac{h}{\pi(a-b)} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho h}{\pi(a-b)} \left[\frac{1}{r} \right]_a^b = \rho \frac{h}{\pi ab}.$$



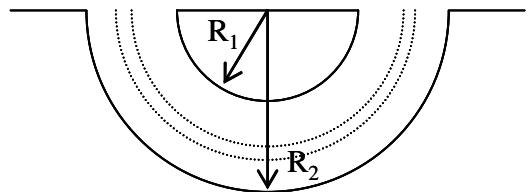
3.13 Résistance d'un milieu entre deux hémisphères.

Par raison de symétrie, le courant circule de manière radiale.

$$\text{L'élément de résistance est : } dR = \rho \frac{dr}{S(r)} \text{ où } S(r)$$

est la surface de l'hémisphère de rayon r .

$$S(r) = 2\pi r^2 \rightarrow dR = \rho \frac{dr}{2\pi r^2} \rightarrow R = \frac{\rho}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{2\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$



3.14 Puissance dissipée.

$$U = RI \text{ et } P = UI \text{ soit } P = RI^2 = 200 \text{ W.}$$

3.15 Accumulateur.

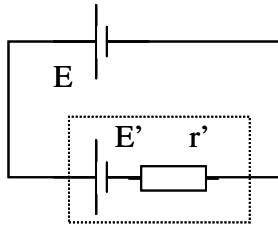
$$E = \frac{1}{2} q u.$$

$$80 \text{ A.h est une charge : } \delta q = 80.3600 \text{ A.s} = 288000 \text{ C.}$$

$$\text{L'énergie emmagasinée est donc : } W = 1.726 \cdot 10^6 \text{ J.}$$

$$\text{Si la puissance vaut } 60 \text{ W alors : } W = P \Delta t \Rightarrow \Delta t = W/P = 28800 \text{ s} = 8 \text{ h.}$$

3.16 Charge d'un accumulateur.



On applique la loi des mailles.
 $r' i - E + E' = 0$ d'où $E = E' + r' i = 7 \text{ V}$.

3.17 Résistance équivalente.

1) Il n'y a pas de différence de potentiel aux bornes de la résistance de 120Ω .

$$R = 72 + \frac{48 + 24}{48 \times 24} = 88 \Omega.$$

2) Il n'y a pas de différence de potentiel aux bornes de la résistance de 24Ω .

$$R = 72 + 48 + 120 = 240 \Omega.$$

3) Les résistances de 24 et 48Ω sont en parallèles, $R = 72 + 120 + \frac{48 + 24}{48 \times 24} = 208 \Omega$.

4) Les résistances de 120 et 48Ω sont en série entre elles et en parallèle avec celle de 24Ω .

$$R = 72 + \frac{(120 + 48) \times 24}{120 + 48 + 24} = 93 \Omega.$$

3.18 Réduction de la résistance.

On doit monter en parallèle une résistance. $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_i} \rightarrow R_i = \frac{RR_{eq}}{R - R_{eq}} = 33.3 \Omega$.

3.19 Résistance équivalente.

On note que $V_A = V_D$ et que $V_B = V_C$. Il est facile de montrer que la différence de potentiel aux bornes de chaque résistance est alors égale et que par conséquent, les 4 résistances sont en parallèles ; $R_{eq} = R / 4$.

3.20 Résistance équivalente (2).

Observez que le dipôle entre "A" et "B" est en série avec le dipôle entre "B" et "C". A l'intérieur du dipôle BC, R_2 et R_3 sont en série et ce dipôle R_2 - R_3 est en // avec R_4 .

$$R_2 + R_3 = 2 \text{ k}\Omega.$$

$$R_{BC} = \frac{(R_2 + R_3)R_4}{(R_2 + R_3) + R_4} = 857 \text{ k}\Omega.$$

$$R_{eq} = R_1 + R_{BC} = 470 + 857 = 1327 \Omega = 1,327 \text{ k}\Omega.$$

3.21 Résistance équivalente à une association en série.

Résistance équivalente : $R_{\text{équi}} = 330 + 470 = 800 \, \Omega$.

Intensité du courant dans le circuit : $i = U / R_{\text{équi}} = 24 / 800 = 0,03 \text{ A}$.

ddp aux bornes de la première résistance : $u_1 = 330 * 0,03 = 9,9 \text{ V}$.

Aux bornes de la seconde résistance : $u_2 = 470 * 0,03 = 14,1 \text{ V}$.

Puissance consommée par la première résistance $P = u_1 i = 9,9 * 0,03 = 0,3 \text{ W}$.

Par la seconde : $u_2 i = 14,1 * 0,03 = 0,42 \text{ W}$.

3.22 Résistance équivalente à une association en dérivation.

Résistance équivalente $R_{\text{équi}} = 100 / 5 = 20 \, \Omega$.

Intensité maximale admissible par chaque résistance : $P = Ri^2$ d'où $i = 0,1 \text{ A}$.

Intensité maximale admissible par le montage : $5 \times 0,1 = 0,5 \text{ A}$.

ddp maximale applicable aux bornes du montage = $R_{\text{équi}}$ fois intensité maximale = $20 \times 0,5 = 10 \text{ V}$.

Puissance maximale admissible par le montage = tension maximale admissible fois intensité maximale admissible

$P_{\text{max}} = 10 \times 0,5 = 5 \text{ W}$.

3.23 Résistance équivalente (3).

1. Intensité du courant traversant R_1 : D'après la loi d'ohm aux bornes de R_1 , $U_{AB} = R_1 \cdot I_1$

$I_1 = 0,255 \text{ A}$

2. Intensité du courant traversant R_2 : On applique la loi d'ohm aux bornes de l'association $R_2 + R_3$,

$U_{AB} = (R_2 + R_3) \cdot I_2$

$I_2 = 0,104 \text{ A}$

La tension aux bornes de R_3 est: $U_3 = R_3 \cdot I_2$

$U_3 = 82 \cdot 0,104 = 8,53 \text{ V}$.

3. Intensité du courant principal: D'après la loi des noeuds, $I = I_1 + I_2 = 0,255 + 0,104 = 0,359 \text{ A}$.

Résistance du circuit: $U_{AB} = R \cdot I$

$R = 33,4 \, \Omega$.

4. Résistance du circuit: L'association série R_2, R_3 a pour résistance:

$R' = R_2 + R_3 = 33 + 82 = 115 \, \Omega$.

R' et R_1 sont associées en dérivation, d'où: $R = 33,4 \, \Omega$.

3.24 Résistance équivalente (4).

R_1 et R_2 sont en série. R_3 et R_4 sont en série. R_3 est en parallèle avec les ensembles $\{R_1, R_2\}$ et $\{R_3, R_4\}$.

$R_{AB} = 1,39 \text{ k}\Omega$.

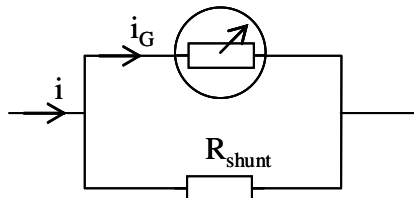
3.25 Calculs de grandeurs : i , u ?

1	Soit C un point entre le générateur et la résistance. $u = V_A - V_B = V_A - V_C + V_C - V_B$ $= e - R i = 10 - 5 i = 20$ d'où $i = -2$ A.	2	Soit i_1 le courant passant dans le générateur, dirigé vers le bas; soit i_2 le courant passant dans la résistance, dirigé vers le bas, de telle manière que $i = i_1 + i_2$. $i_1 = -3$ A, d'où : $i_2 = i - i_1 = 1 + 3 = 4$ A. $u = V_A - V_B = R i_2 = 20$ V.
3	$u = e - R i = 0$ $e = R i \Rightarrow i = e / R = 1$ A.	4	$u = -R i + e = -2 \times 1 + 5 = 3$ V.
5	$15 = -2 - 12 i \Rightarrow i = -1,41$ A.	6	$12 = 4 + 0,8 R \Rightarrow R = 10 \Omega$.
7	$u = 20 \times 2 - (-5) = 45$ V.	8	$15 = -e + R i = -e - 25 \times 3$ $\Rightarrow e = -90$ V.

3.26 Calcul de grandeurs : i , u ? Suite.

1	On pose $i = i_1 + i_2$. $3 = 2 i_1$. $i_1 = 1,5$ A. $i_2 = -2$ A donc $i = -0,5$ A.	2	$i_1 + i_2 = 0$. $i_2 = -1$ A. $i_1 = 1$ A. $u = R i_1 = 1$ V.	3	$i_1 + i_2 = 1$ A. $i_2 = -1$ A. $i_1 = 2$ A, $10 = R i_1$. $R = 5 \Omega$.
4	$i = i_1 + i_2$. $i_2 = -3$ A. $u = 5 i_1$. $20 = 5 i_1$. $i_1 = 4$ A.	5	$2,5 = i_1 - \eta$. $10 = -10 i_1$. $i_1 = -1$ A. $\eta = -3,5$ A.	6	$u = -R \eta = -1$ V.

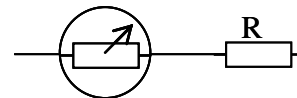
3.27 Galvanomètre.



Le galvanomètre est monté en parallèle avec une résistance de shunt. On applique la loi des mailles.

On obtient :

$$R_{\text{shunt}} = R_{\text{gal}} \frac{I_{\text{gal}}}{I - I_{\text{gal}}} = 40 \frac{10^{-3}}{0,999} \sim 0,04 \Omega.$$



Le galvanomètre est monté en série avec une résistance.

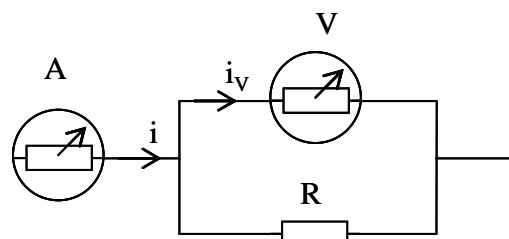
$$u = R_{\text{gal}} I_{\text{gal}} + R I_{\text{gal}} \text{ d'où :}$$

$$R = \frac{u}{I_{\text{gal}}} - R_{\text{gal}} = \frac{1}{10^{-3}} - 40 = 960 \Omega.$$

3.28 Mesure d'une résistance.

Soit u la tension aux bornes du voltmètre et i l'intensité mesurée, on a :

$$\begin{cases} r_v i_v = u \\ r_v i_v - R(i - i_v) = 0 \end{cases}, \text{ d'où : } R = \frac{u}{i - \frac{u}{r_v}} = 4 \text{ k}\Omega.$$



3.29 Condensateur plan diélectrique.

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r S / e \text{ soit } S = C e / (\epsilon_0 \epsilon_r)$$

$$S = 0,12 \cdot 10^{-6} \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} / (8,84 \cdot 10^{-12} \cdot 5) = 0,543 \text{ m}^2.$$

$$\text{charge } q = C U_s = 0,12 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 0,12 \cdot 10^{-4} \text{ C} = 12 \text{ } \mu\text{C}.$$

$$\text{Énergie stockée : } E = \frac{1}{2} C U_s^2 = 0,5 \cdot 0,12 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 0,6 \text{ mJ}.$$

Conservation de la charge $q = q_1 + q_2 = 12 \cdot 10^{-6}$.

Exprimons la tension u de deux manières différentes : $u = q_1 / C = q_2 / C_1$. Soit $q_1 C_1 = q_2 C$;
 $0,15 \cdot 10^{-6} q_1 = 0,12 \cdot 10^{-6} q_2$ ou encore $q_1 = 0,8 q_2$.

On a donc : $0,8 q_2 + q_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ C}$.

$$q_2 = 6,66 \cdot 10^{-6} \text{ C et } q_1 = 5,33 \cdot 10^{-6} \text{ C}.$$

$$\text{Tension } u = 5,33 \cdot 10^{-6} / 0,12 \cdot 10^{-6} = 5,33 / 0,12 = 44,4 \text{ V}.$$

$$\text{Énergie stockée : } E = \frac{1}{2} C u^2 + \frac{1}{2} C_1 u^2 = \frac{1}{2} (C + C_1) u^2$$

$$E = 0,5 (0,12 \cdot 10^{-6} + 0,15 \cdot 10^{-6}) 44,4^2 = 2,66 \cdot 10^{-4} \text{ J} = 0,266 \text{ mJ}.$$

Une partie de l'énergie initiale a été perdue (effet joule, rayonnement électromagnétique lors de l'association)

3.30 Chargement d'un condensateur.

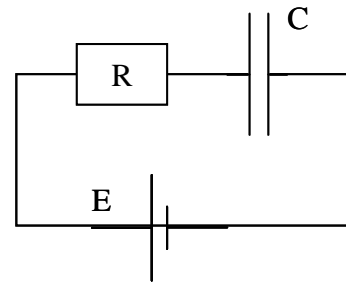
On applique la loi des mailles :

$$Ri(t) + \frac{q}{C} = E \rightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \Leftrightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}.$$

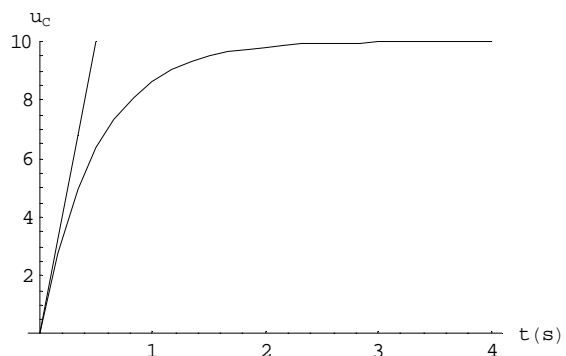
En tenant de la condition initiale, $q = 0$ à $t = 0$, on a :

$$q(t) = CE \left(1 - e^{-t/RC} \right) \rightarrow u_c = \frac{q}{C} = E \left(1 - e^{-t/RC} \right).$$

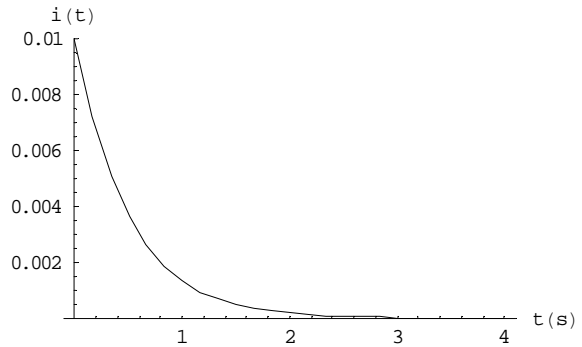
$$\text{Et } i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/RC}.$$



Evolution de la tension aux bornes du condensateur :



Evolution de l'intensité :



$$2) u_{Cf} = E \left(1 - e^{-t_f/RC} \right) \rightarrow t_f = RC \ln \left(\frac{E}{E - u_{Cf}} \right) = 1.15 \text{ s.}$$

3.31 Calculs des énergies de dipôles passifs.

Dans tous les cas : $P = u i$. $dE = P dt = u i dt$.

Résistance : $u = Ri$. $P = R i^2$. $E = R i^2 t$.

Condensateur : $u = q/C$. $P = u i = q/C i = 1/C q dq/dt$. $dE = 1/C q dq$. $E = q^2/2C$.

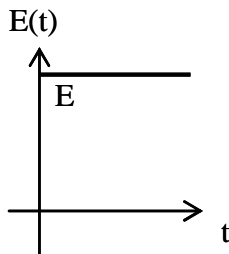
Bobine : $u = L di/dt$. $P = i L di/dt$. $dE = L i di$. $E = 1/2 Li^2$.

Remarque : l'énergie emmagasinée dans le condensateur est donnée avec une constante d'intégration nulle. Ceci parce que l'on considère le condensateur initialement déchargé. Idem pour la bobine.

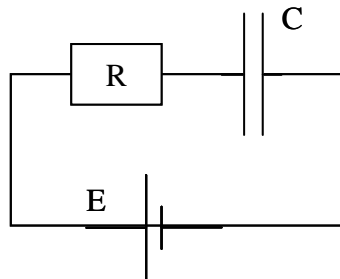
3.32 Bilan énergétique de charge d'un condensateur.

1) La tension appliquée au circuit R,C E(t) est représentée sur la figure suivante.

Elle représente un échelon de tension.



2)



L'équation différentielle est :

$$Ri(t) + \frac{q}{C} = E \rightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E.$$

L'intégration s'effectue de la manière suivante :

a) on cherche une solution à l'équation différentielle sans second membre : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0$. On réarrange les termes de manière à séparer les variables :

$$\frac{dq}{q} + \frac{dt}{RC} = 0 \rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \rightarrow \int \frac{dq}{q} = -\int \frac{dt}{RC} \rightarrow \ln \frac{q}{q_0} = -\frac{t}{RC} \rightarrow q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

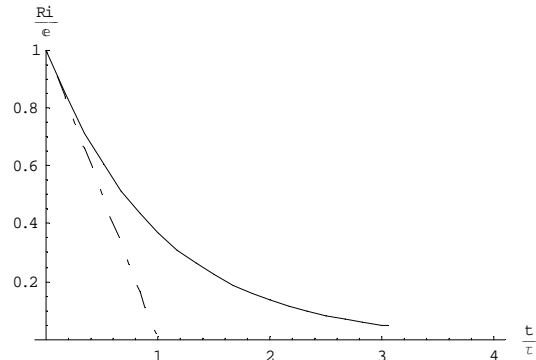
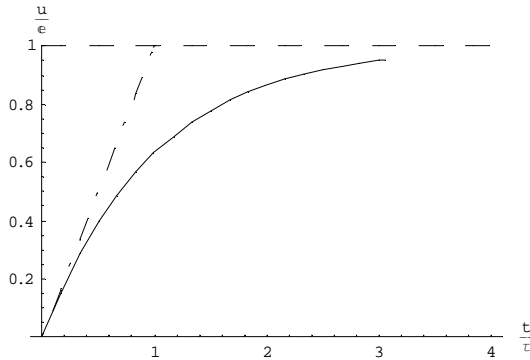
b) On cherche une solution particulière, ici la solution constante : $q = CE$.

c) La solution est la somme des deux solutions : $q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} + CE$. La constante est déterminée à partir des conditions initiales, $q = 0$ à $t = 0$. Cela implique que : $q_0 = -CE$ et par conséquent :

$$q = CE \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

On introduit une constante ayant pour dimension un temps : $\tau = RC$: constante de temps du circuit.

2) La tension aux bornes du condensateur $v(t) = q/C$. Soit : $v(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$.



3) Réponse en courant : $i = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$.

4) Bilan énergétique.

Energie fournie par le générateur :

$$dW_{\text{fem}} = E i dt \rightarrow W_{\text{fem}} = \int_0^{t_1} E i dt = \frac{E^2}{R} \int_0^{t_1} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = E^2 C \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} \right).$$

Energie dissipée sous forme de chaleur dans R :

$$u_R = Ri. P_R = Ri^2 \text{ d'où : } dW_R = Ri^2 dt \rightarrow W_R = \frac{E^2}{R} \int_0^{t_1} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{E^2 C}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t_1}{\tau}} \right).$$

Energie emmagasinée dans le condensateur C :

$$dW_C = \frac{q}{C} i dt = \frac{1}{C} q dq \rightarrow W_C = \frac{1}{C} \int_0^{t_1} q dq = \frac{q^2(t_1)}{2C} = \frac{E^2 C}{2} \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} \right)^2.$$

Si l'on fait la somme de l'énergie dissipée sous forme de chaleur et de celle emmagasinée dans le condensateur, on montre qu'elle est égale à celle délivrée par le générateur.

3.33 Réponse d'un circuit R,L à un échelon de tension.

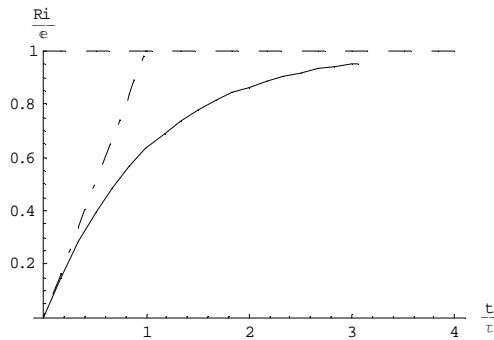
1) $E = Ri + L \frac{di}{dt}$.

2) On réécrit l'équation différentielle sous la forme : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$. On intègre :

$\frac{di}{i} + \frac{dt}{\tau} = 0$ avec $\tau = R/L$ constante du circuit. On trouve (Cf exercice précédent pour la méthode) :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

3) Evolution de $i(t)$:



4) Bilan d'énergie.

$$W_{\text{fem}} = E i dt \rightarrow W_{\text{fem}} = \int_0^{t_1} E i dt = \frac{E^2}{R} \int_0^{t_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) dt = \frac{E^2}{R} \left[t_1 + \tau \left(e^{-\frac{t_1}{\tau}} - 1 \right) \right].$$

$$dW_R = R i^2 dt \rightarrow W_R = \frac{E^2}{R} \int_0^{t_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 dt = \frac{E^2}{R} \left[t_1 + \tau \left(e^{-\frac{t_1}{\tau}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{2t_1}{\tau}} - \frac{3}{2} \right) \right].$$

$$dW_L = L \frac{di}{dt} i dt = L i di \rightarrow W_L = \frac{L}{2} i^2(t_1) = \frac{\tau E^2}{2R} \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right)^2.$$

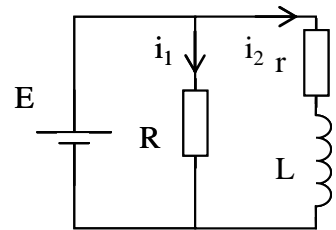
On vérifie bien que $W_{\text{fem}} = W_R + W_L$. Conservation de l'énergie.

3.34 Etablissement et rupture d'un courant.

1) 1^{ère} branche : $E = R i_1$.

2^{ème} branche : $r i_2 + L \frac{di_2}{dt} = E$. Solution particulière $E = r i_2$. On

$$\text{en déduit : } i_2 = \frac{E}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L} t}\right).$$



2) Lorsque l'on ouvre l'interrupteur après un long moment, le courant i_2 est approximativement égale à : $E = r i_2$. On considère la maille formée par les deux résistances et

la bobine. On a donc : $(r + R) i_2 + L \frac{di_2}{dt} = 0$ que l'on intègre : $i_2 = \frac{E}{r} e^{-\frac{r+R}{L} t}$.

La ddp aux bornes de R est alors : $U = \frac{R}{r} E e^{-\frac{r+R}{L} t}$. Si $R \gg r$ alors la tension aux bornes de la résistance R est très supérieure à E .

3.35 Réponse d'un circuit R,L,C à un échelon de tension.

Considérons un circuit contenant en série un générateur de tension de fem E , une résistance R , une inductance L , un condensateur de capacité C et un interrupteur initialement ouvert et fermé à $t = 0$.

$$1) E = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \text{ avec } v = \frac{q}{C} \text{ et } i = \frac{dq}{dt}. \text{ On a donc : } E = RC \frac{dv}{dt} + LC \frac{d^2 v}{dt^2} + v \text{ et par}$$

$$\text{conséquent : } \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = \frac{E}{LC} \text{ que l'on réécrit : } \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 E.$$

2) Une solution particulière évidente est la solution constante : $v = E$.

3) On cherche une solution de la forme : $v = a \exp(rt)$. On introduit cette solution dans l'équation précédente pour obtenir après simplification : $r^2 + \frac{2}{\tau}r + \omega_0^2 = 0$, le discriminant

réduit s'écrit : $\Delta' = \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - \omega_0^2$.

4) Cas du discriminant strictement positif.

$$\Delta' = \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - \omega_0^2 > 0 \Leftrightarrow R^2 > \frac{4L}{C} \Rightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Les solutions de l'équation caractéristiques sont :

$$r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\Delta'}. \text{ On en déduit la solution sans second membre :}$$

$v = e^{-\frac{t}{\tau}} (a e^{\sqrt{\Delta'}t} + b e^{-\sqrt{\Delta'}t}) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \operatorname{ch}\sqrt{\Delta'}t + B \operatorname{sh}\sqrt{\Delta'}t)$. La seconde forme est plus adaptée à l'introduction des conditions initiales.

La solution générale s'écrit : $v = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \operatorname{ch}\sqrt{\Delta'}t + B \operatorname{sh}\sqrt{\Delta'}t) + E$, reste à déterminer les constantes A et B.

A $t = 0$, $q = 0$ donc $v = 0 = A + E$ d'où $A = -E$.

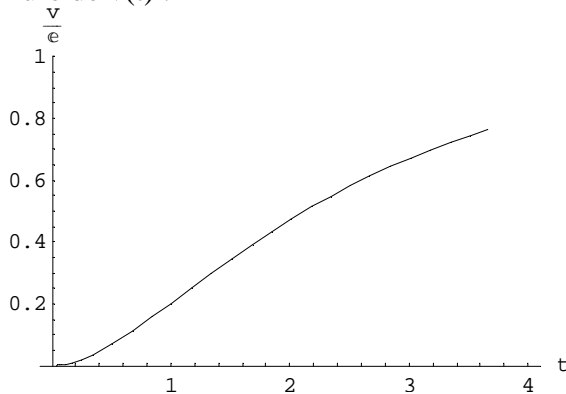
A $t = 0$, $i = 0$ d'où $dq/dt = 0$ d'où $dv/dt = 0$. Calculons dv/dt :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} (A \operatorname{ch}\sqrt{\Delta'}t + B \operatorname{sh}\sqrt{\Delta'}t) + e^{-\frac{t}{\tau}} \sqrt{\Delta'} (A \operatorname{sh}\sqrt{\Delta'}t + B \operatorname{ch}\sqrt{\Delta'}t), \text{ en } t = 0, \text{ cela donne :}$$

$$B = \frac{-E}{\tau\sqrt{\Delta'}} = \frac{-E}{\sqrt{1 - \omega_0^2\tau^2}}. \text{ Finalement :}$$

$$v(t) = E \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\operatorname{ch}\sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - \omega_0^2}t + \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_0^2\tau^2}} \operatorname{sh}\sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - \omega_0^2}t \right) \right].$$

Allure de $v(t)$:



Régime apériodique.

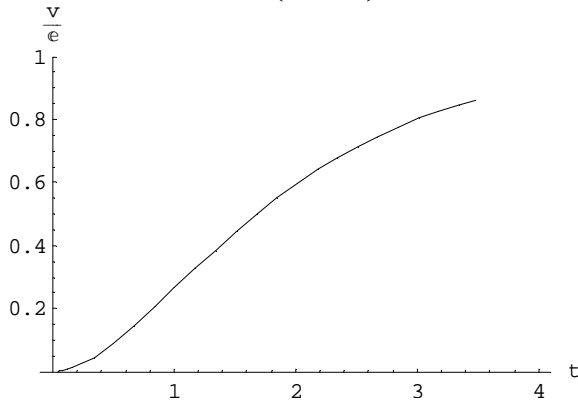
5) Cas du discriminant nul.

$$\Delta' = \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow R^2 = \frac{4L}{C} \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{\text{critique}}. \text{ Résistance critique.}$$

$$v(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} [At + B]. \text{ La solution générale s'écrit : } v(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} [At + B] + E.$$

Les conditions initiales donnent : $B = -E$ et $A = -E/\tau$.

Finalement : $v(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \left[1 + \frac{t}{\tau} \right]$.



L'allure de la courbe est la même, la croissance est plus rapide dans ce dernier cas.
Régime critique.

6) Cas du discriminant négatif.

$$\Delta' = \left(\frac{1}{\tau} \right)^2 - \omega_0^2 < 0 \Leftrightarrow R^2 < \frac{4L}{C} \Rightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{\text{critique}}.$$

On réécrit le discriminant sous la forme : $\Delta' = \left(\frac{1}{\tau} \right)^2 - \omega_0^2 = i^2 \left[\omega_0^2 - \left(\frac{1}{\tau} \right)^2 \right] = i^2 \Delta''$.

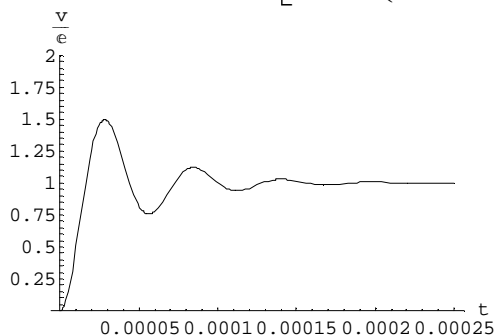
Les solutions s'écrivent : $\begin{matrix} r_+ \\ r_- \end{matrix} = -\frac{1}{\tau} \pm i\sqrt{\Delta'}.$

La solution générale s'écrit :

$$v = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(a e^{i\sqrt{\Delta'}t} + b e^{-i\sqrt{\Delta'}t} \right) + E = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(A \cos\sqrt{\Delta''}t + B \sin\sqrt{\Delta''}t \right) + E.$$

Les conditions initiales donnent : $A = -E$ et $B = \frac{-E}{\tau\sqrt{\Delta'}} = \frac{-E}{\sqrt{\omega_0^2\tau^2 - 1}}.$

Finalement : $v(t) = E \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos\sqrt{\left(\omega_0^2 - \left(\frac{1}{\tau} \right)^2}t} + \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2\tau^2 - 1}} \sin\sqrt{\left(\omega_0^2 - \left(\frac{1}{\tau} \right)^2}t} \right) \right) \right].$



Régime pseudo-périodique.

La pseudo-période est donnée par l'expression : $T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{\omega_0^2\tau^2 - 1}}$.

3.36 Circuit L,C parallèle soumis à un échelon de courant.

Soit i le courant circulant dans la branche capacitive et i' celui dans la bobine.

On a $I = i + i'$. On considère la maille formée par le condensateur et la bobine : $\frac{q}{C} - L \frac{di'}{dt} = 0$.

Il faut résoudre ce système d'équation sachant que $i = \frac{dq}{dt}$.

$$\begin{cases} \frac{q}{C} - L \frac{di'}{dt} = 0 \\ I = i + i' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} - L \frac{d^2i'}{dt^2} = 0 \\ \frac{dq}{dt} + i' = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{C} \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2i'}{dt^2} = 0 \\ \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} i' = \frac{1}{C} I \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2i'}{dt^2} + \frac{i'}{LC} = \frac{I}{LC}.$$

La solution s'écrit sous la forme : $i' = a \cos\sqrt{\frac{1}{LC}}t + b \sin\sqrt{\frac{1}{LC}}t + I$. Reste à déterminer les constantes.

A $t = 0$, par continuité $i' = 0$ d'où $a = -I$. De plus à $t = 0$, $q = 0$ or $q = LC \frac{di'}{dt}$. On en déduit après dérivation que $b = 0$.

On a donc : $i'(t) = I \left(1 - \cos\sqrt{\frac{1}{LC}}t \right)$. Et donc : $i(t) = I \cos\sqrt{\frac{1}{LC}}t$.

La tension aux bornes du condensateur est égale à celle aux bornes de la bobine d'où :

$$v(t) = \frac{q}{C} = L \frac{di'}{dt} = I \sqrt{\frac{L}{C}} \sin\sqrt{\frac{1}{LC}}t.$$

La réponse à une excitation continue est sinusoïdale.

3.37 Sujet BAC 2004 Réunion ; Exercice 1: Quelques usages des condensateurs.

3.37.1 Génération d'impulsions: le stimulateur cardiaque

3.37.1.1 Charge du condensateur

3.37.1.1.1 Le condensateur est chargé à 99,9%

au bout d'une durée égale à 5τ .

Dans cette partie du circuit $\tau = r.C$.

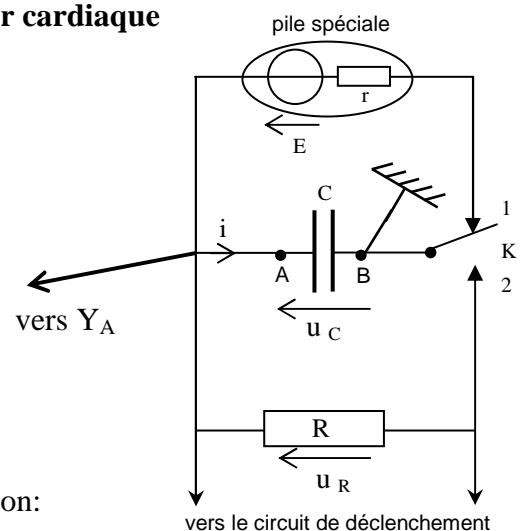
C est faible puisque $C = 470 \text{ nF}$ soit $4,70 \times 10^{-7} \text{ F}$.

La valeur de la résistance est très faible,

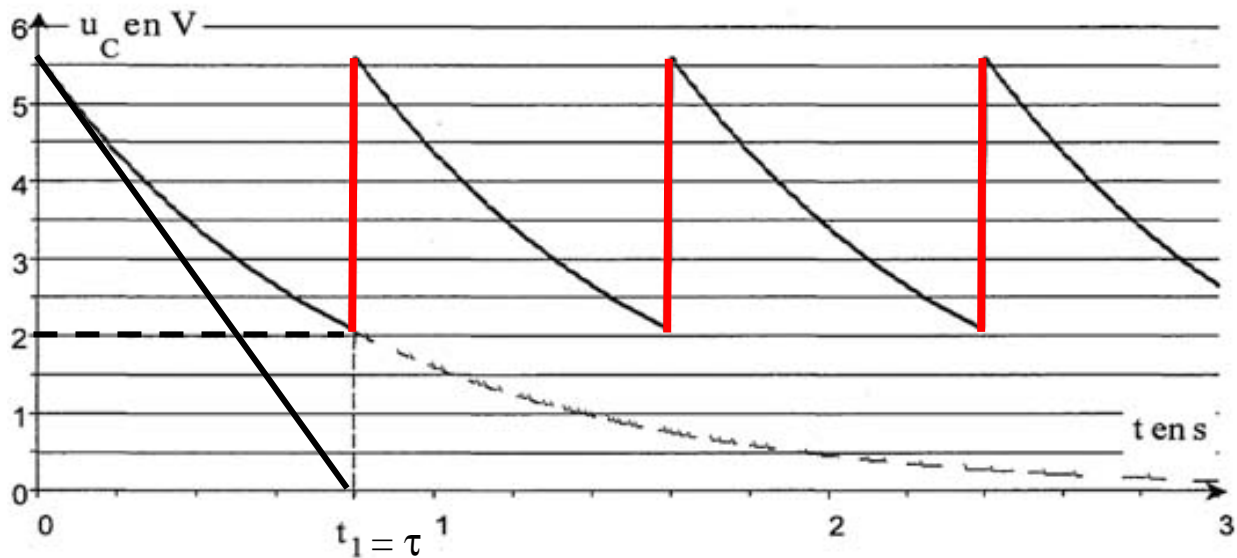
donc τ est proche de 0 s.

Le condensateur se charge presque instantanément.

3.37.1.1.2 Branchements de l'interface d'acquisition:



En rouge, la tension u_C lors de la charge du condensateur. (u_C est croissante et cela très rapidement)



3.37.1.1.3 Lorsque le condensateur est complètement chargé, il n'y a plus de courant qui circule. $i = 0$ A.

On lit sur la courbe 1: u_C maximale = **5,7 V = E**.

3.37.2 Décharge du condensateur

3.37.2.1 :

- signe de l'intensité i du courant lors de la décharge: i négative
- D'après la loi d'Ohm: $u_R = - R.i$ (signe – car flèche i et flèche u_R dans le même sens)
- $q = C.u_C$
- $i = \frac{dq}{dt}$
- lors de la décharge d'après la loi d'additivité des tensions: $u_C = u_R$

3.37.2.2 :

$$u_C = - R.i$$

$$u_C + R.i = 0$$

$$u_C + R \frac{dq}{dt} = 0$$

$$u_C + R.C. \frac{du_C}{dt} = 0$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} . u_C = 0 \text{ avec } \tau = R.C, \text{ on obtient finalement } \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} . u_C = 0$$

3.37.2.2.1 :

$$\tau = R.C$$

D'après la loi d'Ohm: $u = R.i$, $R = \frac{u}{i}$ donc $[R] = \frac{[U]}{[I]}$

Comme expliqué dans la question précédente: $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ soit $C = i \cdot \frac{dt}{du_C}$ donc $[C] = [I] \cdot \frac{[T]}{[U]}$

$$[R.C] = [R] \times [C] = \frac{[U]}{[I]} \times [I] \cdot \frac{[T]}{[U]}$$

$[R.C] = [T]$ la constante de temps est bien homogène à une durée.

3.37.2.2.2 Détermination graphique de τ .

Méthode 1: Pour $t = \tau$, la tension aux bornes du condensateur est égale à 37% de sa valeur maximale

$$u_C = 0,37 \times E.$$

$u_C = 2,1 \text{ V}$. On trouve $\tau = 0,8 \text{ s}$.

Méthode 2 (moins précise): On trace la tangente à la courbe représentative de $u_C(t)$ en $t = 0 \text{ s}$.

La tangente coupe l'asymptote horizontale $u_C = 0$ à l'instant $t = \tau$.

On trouve $\tau = 0,8 \text{ s}$.

3.37.2.2.3 :

$$R = \frac{\tau}{C} = \frac{0,8}{470 \cdot 10^{-9}} = 1,7 \text{ M}\Omega.$$

3.37.3 Lien entre la décharge du condensateur et les battements du cœur

3.37.3.1 :

L'énoncé indique que l'impulsion est créée quand $u_C(t_1) = u_{\text{limite}} = \frac{E}{e}$ donc $E = u_C \times e$.

$$E = 2,1 \times e = 5,7 \text{ V}.$$

On vérifie que la valeur de E est en accord avec celle trouvée précédemment.

3.37.3.2 :

$$u_C(t) = E \cdot e^{-t/\tau}, u_C(t_1) = u_{\text{limite}} = \frac{E}{e} = E \cdot e^{-1} = E \cdot e^{-t_1/\tau}, \text{ par analogie, on a } t_1/\tau = 1 \text{ donc } t_1 = \tau.$$

3.37.3.3 :

La durée Δt qui sépare deux impulsions consécutives doit être proche τ (τ durée nécessaire pour que u_C atteigne $u_{\text{limite}} + t_0$ durée très faible pour recharger le condensateur).

3.37.3.4 :

Nombre de battements du cœur par minute: Toutes les $\tau = 0,8 \text{ s} \rightarrow 1$ battement

$$\text{toutes les } 60 \text{ s} \rightarrow N \text{ battement } N = \frac{60}{0,8} = 75 \text{ battements par minute, ce qui semble réaliste.}$$

3.37.4 Stockage d'énergie: le flash électronique

1. Les piles permettent d'obtenir 100 éclairs de durée et d'intensité lumineuse maximales.

L'énergie totale des piles vaut $E = 18\text{kJ}$

La moitié de cette énergie est utilisée pour fournir 100 éclairs.

Donc pour 1 éclair: $E_1 = \frac{E}{2 \times 100} = 90\text{ J}$

2. $E_1 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$ donc $C = \frac{2E_1}{U^2} = \frac{2 \times 90}{36} = 5\text{ F}$ grande capacité par rapport aux valeurs

rencontrées au cours de l'année scolaire (de l'ordre de 10^{-6} ou 10^{-9} F).

3. La recharge dure 11 s.

Donc $5\tau = 11$

$\tau = 2,2\text{ s}$ environ

4. $\tau = R \cdot C$

$R = \frac{\tau}{C} = \frac{2,2}{5} = 0,44\ \Omega$

3.37.5 Oscillations électriques: le détecteur de fraude

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$T_0^2 = 4\pi^2 \cdot L \cdot C$$

$$C = \frac{T_0^2}{4\pi^2 \cdot L}$$

$$N_0 = N = 1/T_0$$

$$C = \frac{1}{4\pi^2 \cdot L \cdot N^2}$$

$$C = \frac{1}{4\pi^2 \times 0,5 \cdot 10^{-6} \times (10 \cdot 10^6)^2}$$

$$C = 5 \cdot 10^{-10}\text{ F}$$

$$C = 0,5\text{ nF.}$$

3.38 Antilles 2005 : Exercice n°3 : Sonde thermique.

1. Étalonnage de la sonde

1.1. D'après la loi d'additivité des tensions, on a : $E = u_R + u_C$

1.2. Loi d'Ohm: $u_R = R \times i$ or $i = \frac{dq}{dt}$ et $q = C \times u_C$. On a donc $i = C \times \frac{du_C}{dt}$.

Soit $u_R = R \times C \times \frac{du_C}{dt}$ en remplaçant dans l'équation de la question 1.1. on obtient : $E =$

$$R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C$$

Soit l'équation différentielle : $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}$.

1.3.1. $u_C = A + B e^{-t/(RC)}$

Le condensateur est complètement chargé quand t tend vers l'infini, on a alors $u_C = E$.

Le terme en exponentielle tend alors vers zéro, il vient $\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

1.3.2. A l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé, $u_C = 0$

$$0 = E + B e^{-0/(RC)} = E + B.$$

Donc $\mathbf{B} = -\mathbf{E}$

$$\mathbf{1.3.3.} \quad u_C = E - E e^{-t/(RC)} = E \times (1 - e^{-t/(RC)})$$

1.4.1. τ est homogène à un temps, montrons que le produit RC l'est également :

$$R = \frac{U}{I}, C = \frac{q}{U}. \quad \text{Soit } [R \times C] = \frac{[U]}{[I]} \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[Q]}{[I]}$$

$$\text{Or } I = \frac{Q}{\Delta t} \quad \text{soit } [I] = [Q] \cdot [T]^{-1}$$

$[R \times C] = [T]$ donc RC est bien homogène à un temps

1.4.2. Méthode 1: $E = 4,0 \text{ V}$ Or τ_1 correspond à l'abscisse du point d'ordonnée $0,63 \times E = 2,5 \text{ V}$

$\tau_1 = 1,3 \text{ ms}$ (voir figure page suivante)

il faut savoir poser une multiplication !

4,0
$\times 0,63$

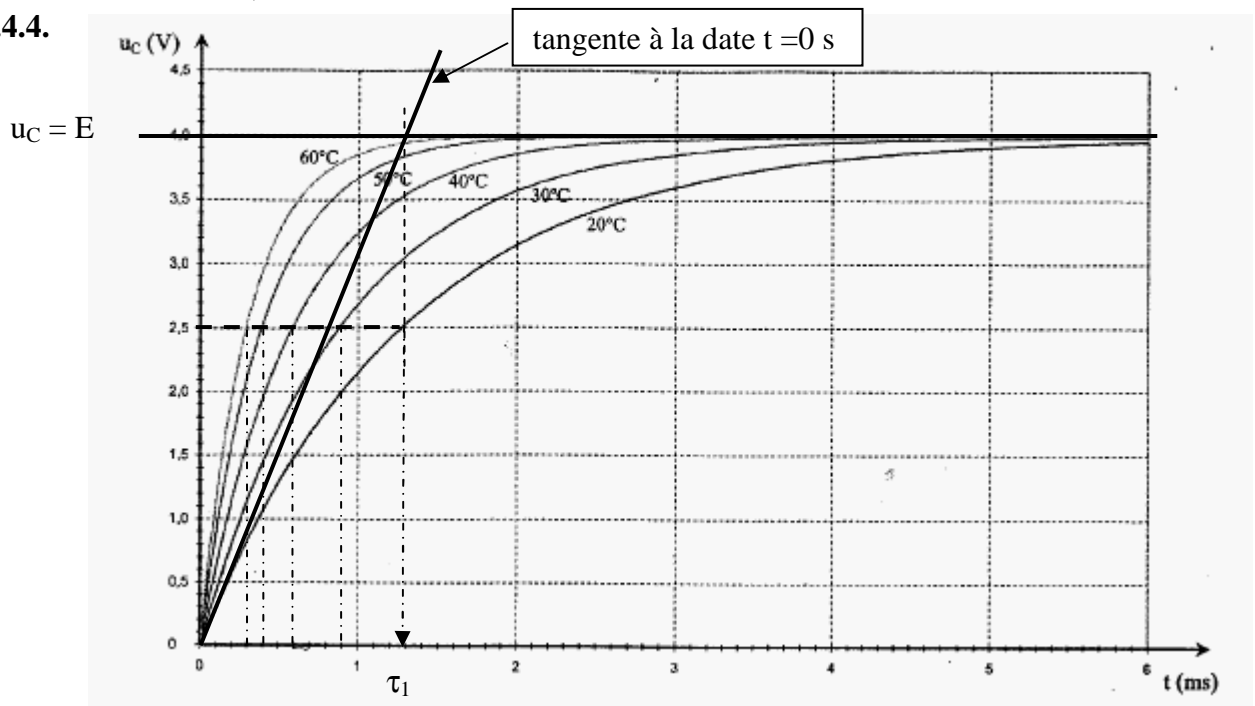
120
$+ 2400$

2,520

Méthode 2 : On peut tracer la tangente à la courbe représentative de $u_C = f(t)$ à la date $t = 0 \text{ s}$. Elle coupe l'asymptote horizontale d'équation $u_C = E = 4,0$ à la date $t = \tau_1$. Cette méthode est cependant peu précise car le tracé de la tangente n'est jamais aisé.

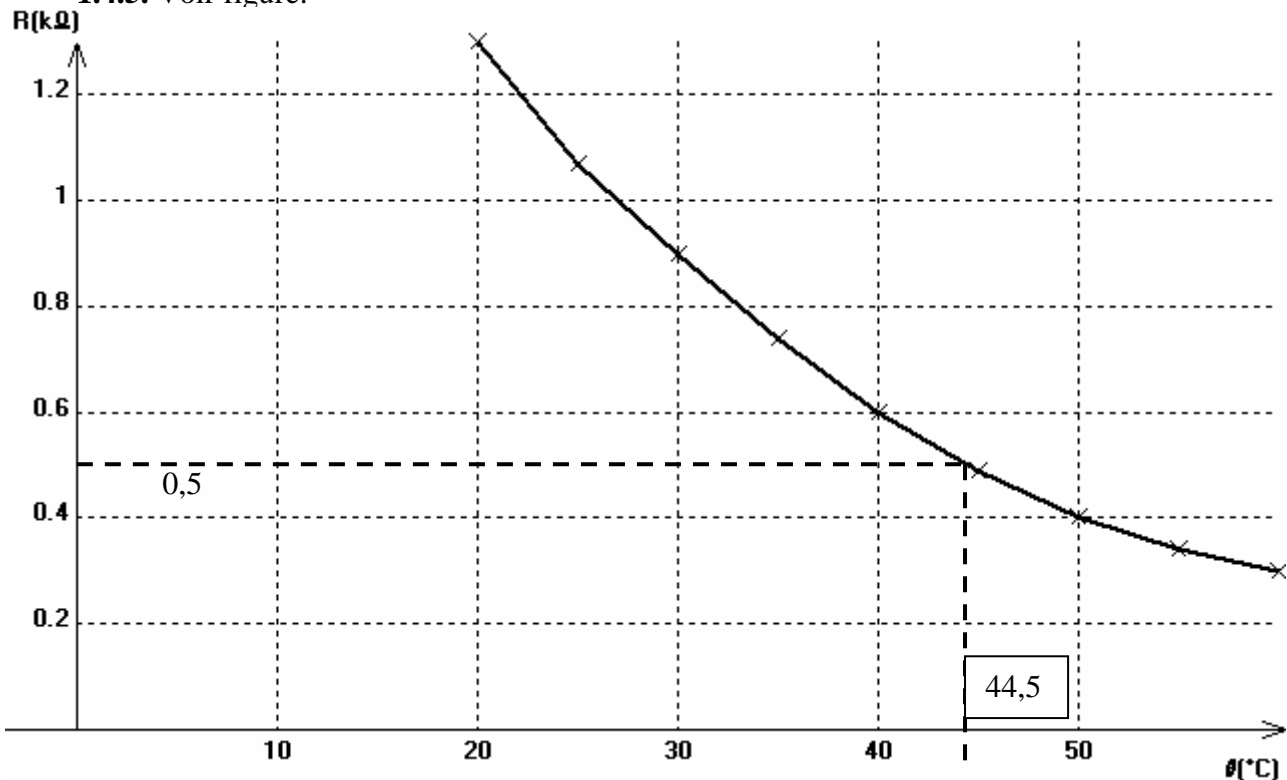
$$\mathbf{1.4.3.} \quad R = \frac{\tau}{C}, R_1 = \frac{1,3 \cdot 10^{-3}}{1,0 \cdot 10^{-6}} = \mathbf{1,3 \text{ k}\Omega}.$$

1.4.4.



Température θ (°C)	$\theta_1 = 20$	25	30	35	40	45	50	55	60
Constante de temps τ (ms)	$\tau_1 = 1,3$		0,9		0,6		0,4		0,3
Résistance R (k Ω) = τ / C	$R_1 = 1,3$	1,07	0,9	0,74	0,6	0,49	0,4	0,34	0,3

1.4.5. Voir figure:



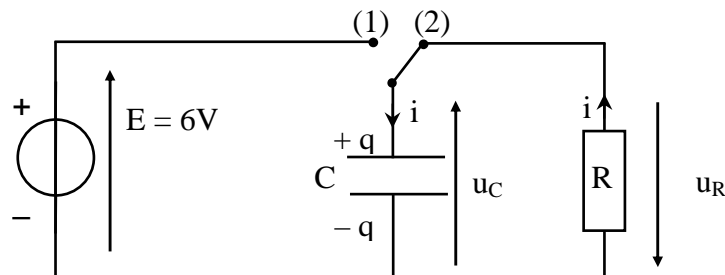
Par lecture graphique, il vient $\theta = 44,5^{\circ}C$

3.39 2006 Antilles ; exercice 1 : bobine à inductance réglable.

1. DÉTERMINATION DE LA CAPACITÉ DU CONDENSATEUR.

1.1. En convention récepteur, le sens des flèches tensions est opposé au sens du courant.

Lorsque l'interrupteur était en position 1, le générateur a arraché des électrons sur l'armature reliée à sa borne positive, il est apparu une charge $+q$ sur cette armature. Le générateur a apporté autant d'électrons sur l'autre armature où il est apparu une charge $-q$.



1.2 Loi d'additivité des tensions: $u_C(t) + u_R(t) = 0$

Or d'après la loi d'Ohm: $u_R(t) = R.i(t)$

Donc $u_C(t) + R.i(t) = 0$ (1)

Compte tenu du sens du courant : $i(t) = \frac{dq}{dt}$ et $q(t) = C.u_C(t)$

Donc: $i(t) = \frac{d(C.u_C)}{dt} = C. \frac{du_C}{dt}$ car C est une constante

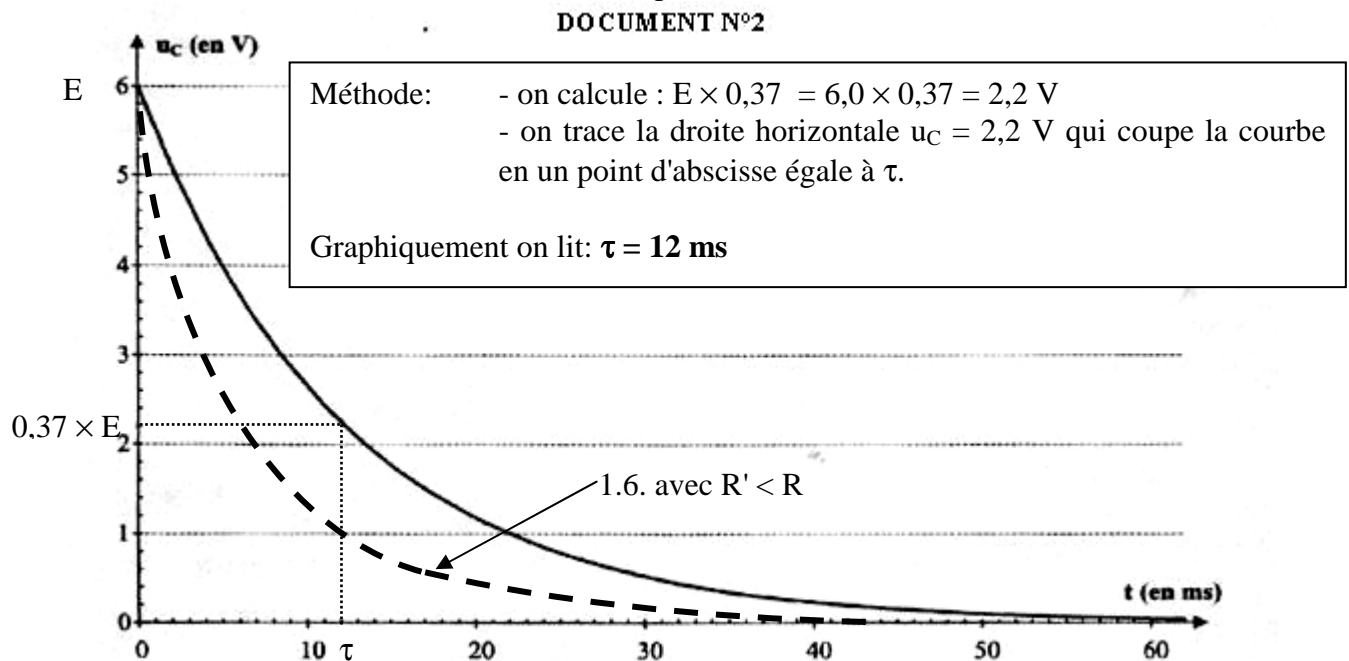
En reportant l'expression de $i(t)$ dans (1) il vient :

$u_C + R.C. \frac{du_C}{dt} = 0$ qui est bien l'équation différentielle demandée.

1.3 Pour $t = \tau$, $u_C(t = \tau) = E. e^{-\frac{\tau}{\tau}}$ donc $u_C(\tau) = E. e^{-1} = E. \frac{37}{100}$.

Donc la tension aux bornes du condensateur est égale à 37 % de sa valeur initiale.

1.4 Détermination la valeur de la constante de temps τ :



1.5 Comme $\tau = R.C$ on a : $C = \frac{\tau}{R}$

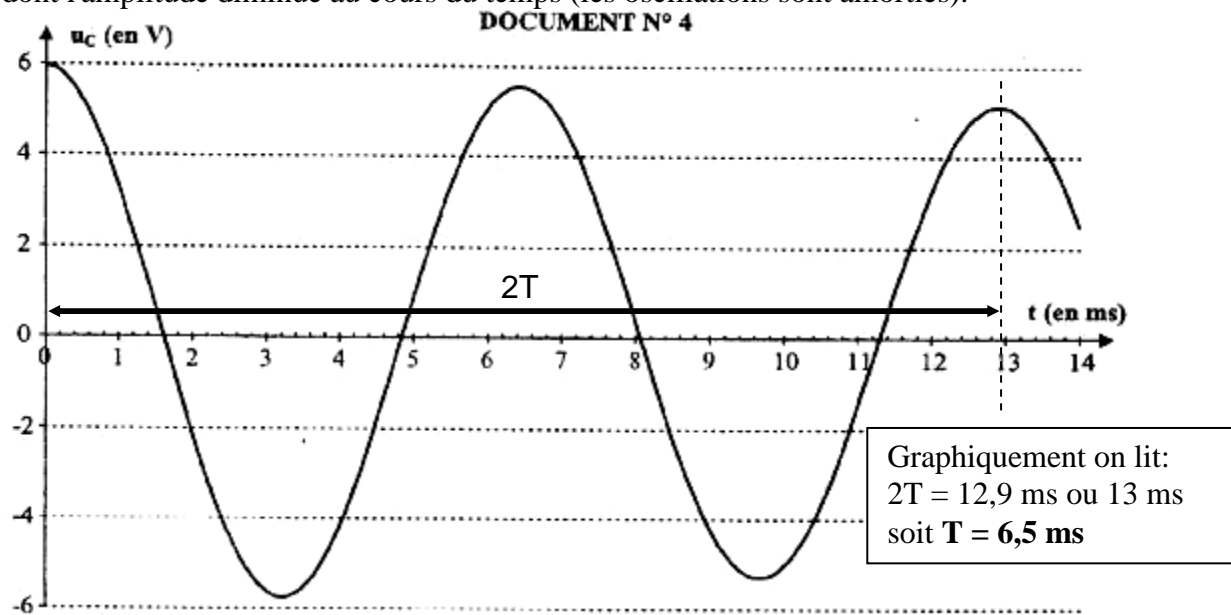
$$C = \frac{12 \times 10^{-3}}{5,6 \times 10^3} = 2,1 \times 10^{-6} \text{ F} = 2,1 \mu\text{F}.$$

1.6 Dans le cas où on utilise un conducteur ohmique de résistance $R' < R$, avec C identique au cas précédent, on a $\tau' = R'.C$ alors $\tau' < \tau$. Le condensateur se décharge plus rapidement que dans le premier cas, d'où l'allure de la courbe $u_C(t)$ en pointillés page précédente.

2. MESURE DE L'INDUCTANCE DE LA BOBINE.

2.1 Connexions de la voie 1 et de la masse de la carte d'acquisition pour visualiser $u_C(t)$:

2.2 Le régime de la tension u_C est **pseudo-périodique** car on observe une tension sinusoïdale dont l'amplitude diminue au cours du temps (les oscillations sont amorties).



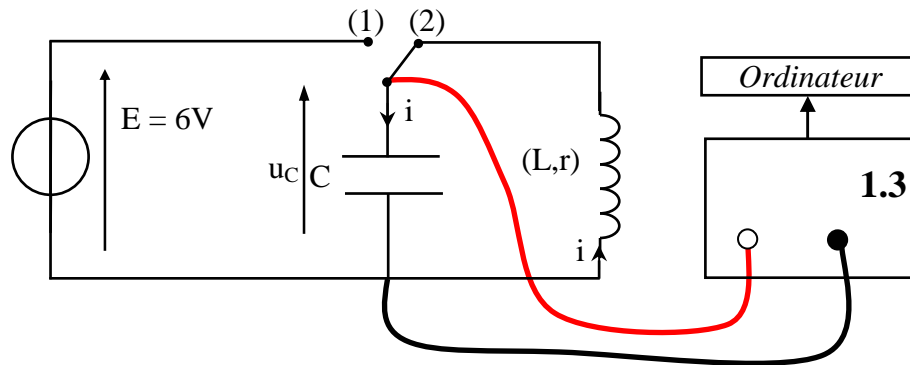
On considère que la pseudo-période T est égale à la période propre donnée par la relation : $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{LC}$

donc $T_0^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot LC$ soit $L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 \cdot C}$

$$L = \frac{(6,5 \times 10^{-3})^2}{4\pi^2 \times 2,2 \times 10^{-6}} = \mathbf{0,48 \text{ H}}$$

calcul effectué avec la valeur non arrondie de T .

2.4 écart relatif $\frac{|L_{\text{exp}} - L_{\text{bobine}}|}{L_{\text{bobine}}} = \frac{|0,49 - 0,5|}{0,5} = \mathbf{4,2 \%}$. *calcul effectué avec la valeur non arrondie de L .*



L'indication de l'index est correcte à environ 4 % près (mais peut être erreur de mesure sur T , de plus on ne dispose que d'un chiffre significatif sur L_{bobine} ...).

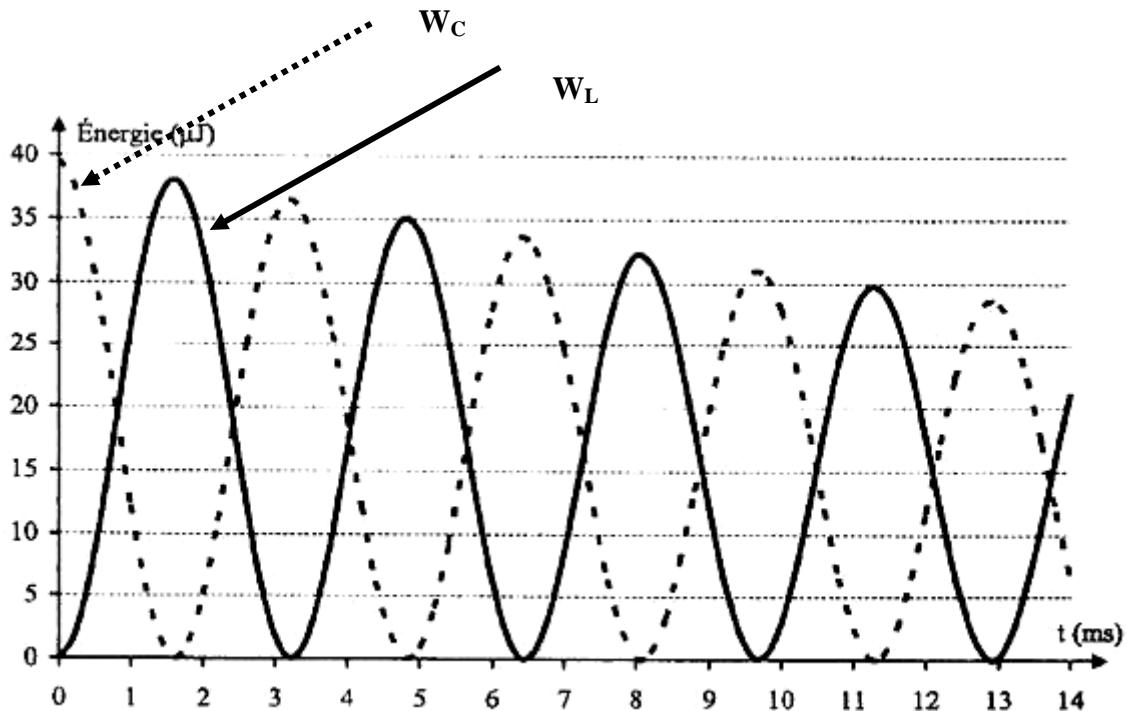
3. BILAN ÉNERGÉTIQUE

3.1. W_C : énergie emmagasinée par le condensateur $W_C = \frac{1}{2} C u_C^2$

W_L : énergie emmagasinée par la bobine $W_L = \frac{1}{2} L i^2$

3.2. A $t = 0$, le condensateur est chargé avec la tension $u_C(0) = E = 6,0 V$ et aucune courant ne circule dans le circuit donc $i(0) = 0 A$.

Donc la courbe non nulle à $t = 0$ correspond à W_C (courbe en pointillés), et la courbe nulle à $t = 0$ correspond à W_L (courbe en trait plein).



3.3. Lorsque W_C augmente, W_L diminue et inversement. Lorsque W_C est maximale alors W_L est nulle et inversement. Il y a donc échange d'énergie entre le condensateur et la bobine au cours du temps.

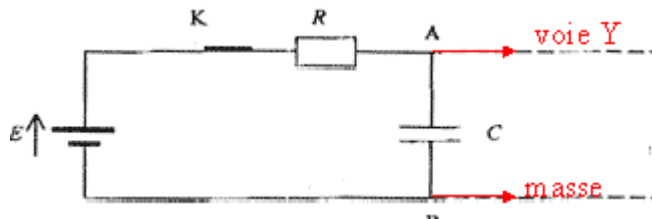
3.4. L'énergie totale $W = W_C + W_L$ emmagasinée par le circuit décroît au cours du temps. Cette perte d'énergie est due à la présence de la résistance $r = 12 \Omega$ de la bobine.

Une partie de l'énergie stockée par le condensateur et la bobine est dissipée par effet Joule sous forme de chaleur dans la résistance r au cours du temps.

3.5. On aurait pu faire cette étude en associant en série avec la bobine à inductance réglable et le condensateur, un dipôle qui entretient les oscillations électriques.

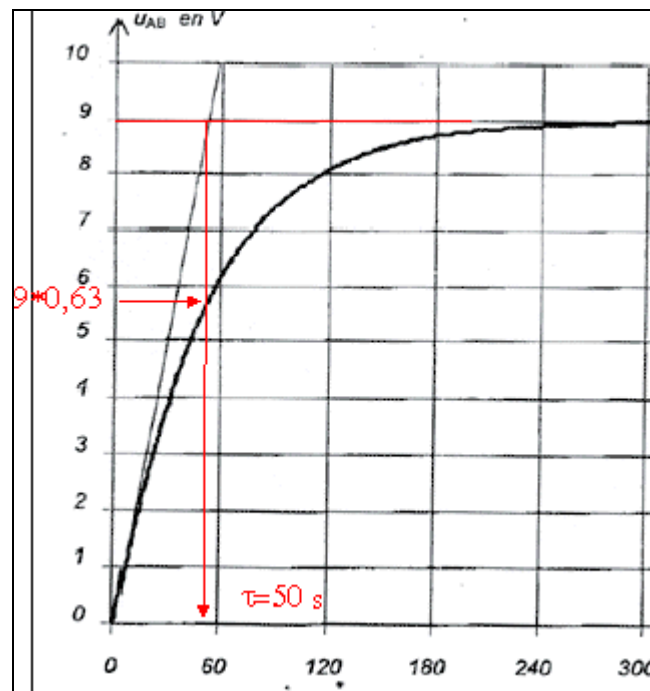
Le rôle de ce dipôle est de compenser les pertes énergétiques dans la résistance r , afin que l'énergie totale W reste constante au cours du temps. On a alors des oscillations sinusoïdales non amorties.

3.40 Bac 2005 : Modélisation d'une alarme.

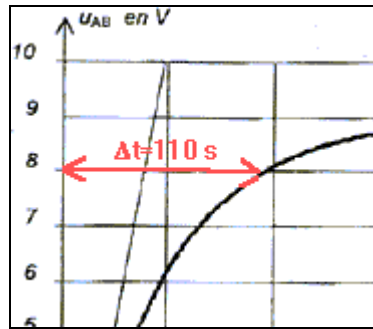


L'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote donne un point dont l'abscisse est la constante de temps.

Ou bien tracer une horizontale d'ordonnée $0,63 \times 9 = 5,7$ V ; à partir de l'intersection avec la courbe tracer la verticale.



$$\tau = RC = 47 \cdot 10^3 \cdot 1,1 \cdot 10^{-3} = \underline{52 \text{ s.}} \text{ (valeur est compatible avec celle trouvée graphiquement)}$$



En fermant la porte, le condensateur est mis en court-circuit : la tension à ses bornes s'annule. La tension aux bornes du condensateur ne pouvant plus atteindre 8V (seuil de déclenchement de l'alarme), l'alarme ne se déclenche pas tant que la porte reste fermée.

régimes associés aux courbes a et b :

Courbe a : régime pseudopériodique ; la résistance R n'est pas très élevée ($R_1 = 160 \Omega$).

Courbe b : régime apériodique ; la résistance R n'est élevée ($R_2 = 2400 \Omega$).

l'intensité du courant dans le circuit s'annule à partir de $t = 4 \text{ ms}$:

la charge q du condensateur est égale à : $q = C u_{AB}$.

L'intensité est égale à la dérivée de la charge par rapport au temps : $i = dq/dt = C du_{AB}/dt$

du_{AB}/dt correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe $u_{AB}=f(t)$ pour une date donnée.

Les courbes a et b se rapprochent de l'horizontale vers $t = 4 \text{ ms}$: à partir de cette date, la tangente aux courbes a et b est horizontale (coefficient directeur nul) et en conséquence l'intensité s'annule.

valeur finale de la tension u_{AB} : $u_{AB} + u_R + u_L = E$

$u_R = Ri$ avec $i_{fin}=0$ donc u_R s'annule.

$u_L = L di/dt$ avec $i_{fin}=0$ soit $di_{fin}/dt = 0$ et $u_L=0$.

en conséquence $u_{AB}=E= 9 \text{ V}$ au delà de $t = 4 \text{ ms}$.

Dans le cas de la courbe (a), la tension u_{AB} dépasse plusieurs fois la valeur limite de déclenchement de l'alarme : celle-ci se déclenche par intermittence.

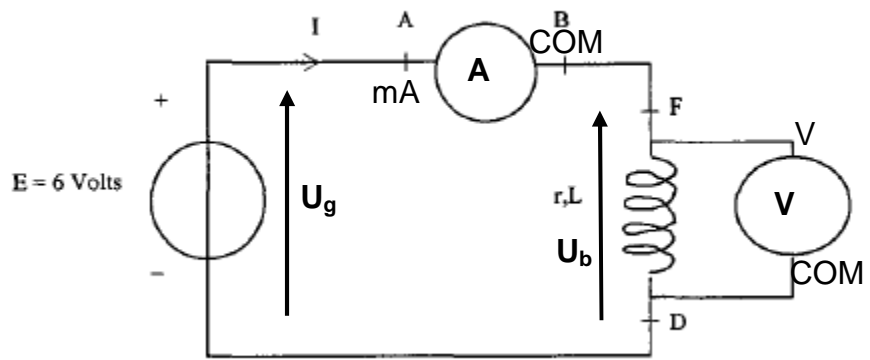
calcul de $\frac{1}{2}R(C/L)^{1/2} \gg 1$ avec $C = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ F}$; $L = 10^{-3} \text{ H}$; $R = 4,7 \cdot 10^4 \Omega$.

$0,5 \cdot 4,7 \cdot 10^4 (1,1)^{1/2} = 2,5 \cdot 10^4$, valeur bien supérieure à 1 : donc il n'y a pas d'oscillations.

3.41 2006 Polynésie Exercice n°1 : résistance d'une bobine réelle

A – En régime permanent

A.1.



A.2. D'après la loi d'additivité des tensions $U_g = E = U_b$

$U_b = r_1 \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$, or en régime permanent l'intensité est constante et égale à I_b , alors $\frac{di}{dt} = 0$.

Il vient $U_b = r_1 \cdot I = E$ soit $r_1 = \frac{U_b}{I_b}$

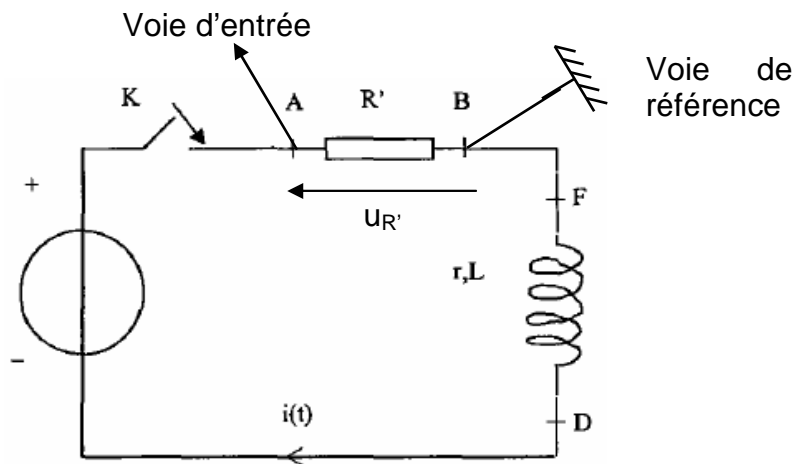
$$r_1 = \frac{5,95}{0,410} = 14,5 \, \Omega$$

b – En régime transitoire

B.1. La bobine s'oppose à l'établissement du courant. La valeur maximale de l'intensité n'est pas atteinte immédiatement.

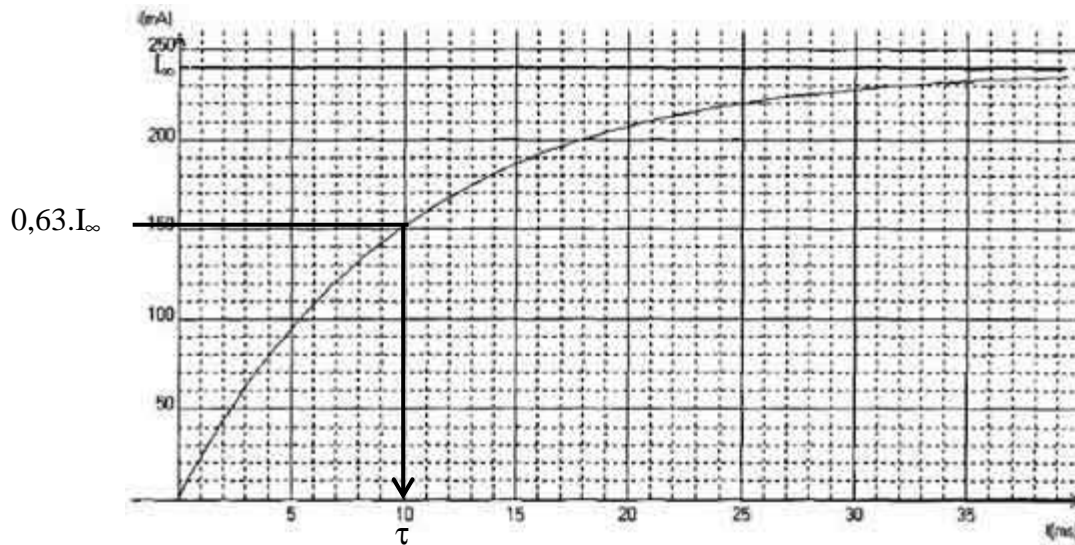
B.2. D'après la loi d'Ohm : $u_{R'}(t) = R' \cdot i(t)$.

La mesure de $u_{R'}$ au cours du temps nous permet d'accéder à $i(t)$, connaissant la valeur de R' .



B.3. L'abscisse du point d'ordonnée $i(t) = 0,63 \cdot I_\infty$ correspond à la valeur de la constante de temps τ .

$i(\tau) = 0,63 \times 240 = 151 \, \text{mA}$. (voir schéma ci-après)



$$\tau = 10 \text{ ms}$$

$$\text{B.4.1. } \tau = \frac{L}{R} \text{ soit ici } \tau = \frac{L}{R' + r}$$

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R' + r]} = \frac{[L]}{[R]}$$

$$\text{D'après la loi d'Ohm } U = R.I \text{ (loi d'Ohm) donc } [R] = \frac{[U]}{[I]}$$

$$\text{et } U = L \cdot \frac{di}{dt} \quad [U] = [L] \cdot \frac{[I]}{[T]} \quad [L] = \frac{[U] \cdot [T]}{[I]}$$

$$\text{Il vient } [\tau] = \frac{\frac{[U] \cdot [T]}{[I]}}{\frac{[U]}{[I]}} = \frac{[U] \cdot [T]}{[I]} \cdot \frac{[I]}{[U]} = [T]$$

τ est bien homogène à un temps.

$$\text{B.4.2. } \tau = \frac{L}{R' + r_2} \quad R' + r_2 = \frac{L}{\tau} \quad r_2 = \frac{L}{\tau} - R'$$

$$r_2 = \frac{250}{10} - 10 = 15 \, \Omega$$

B.5.1. La bobine fonctionne en **régime permanent** (intensité constante), elle se comporte comme un conducteur ohmique de résistance r_2 .

B.5.2. D'après la loi d'additivité des tensions $U_g = E = U_b + U_{R'} = r \cdot I_\infty + R' \cdot I_\infty$

$$r \cdot I_\infty = E - R' \cdot I_\infty \quad \text{soit } r = \frac{E - R' \cdot I_\infty}{I_\infty}$$

$$r_3 = \frac{6,00 - 10 \times 0,240}{0,240} = 15,0 \, \Omega$$

B.6. Les trois valeurs r obtenues dans les parties A et B sont **cohérentes** entre elles (environ 3% d'écart)

C – En régime oscillatoire

$$\text{C. 1.1. période propre d'un oscillateur LC : } T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$$

C.1.2. $T_0 = 2\pi\sqrt{0,250 \times 4 \times 10^{-6}} = 6 \text{ ms}$

C.2.1. La bobine possède une résistance interne r , en raison de l'effet Joule de l'énergie est dissipée sous forme de chaleur. Il y a amortissement des oscillations.

C.2.2. $k_h = 2 \text{ ms/div}$ $6,2 \text{ div} < x < 6,4 \text{ div}$

Or $2.T = k_h.x$ $\frac{6,2 \times 2}{2} < T < \frac{6,4 \times 2}{2}$

$6,2 < T < 6,4 \text{ ms}$

C.2.3. Les deux valeurs obtenues sont semblables compte-tenu de la faible précision sur la valeur de C (1 chiffre significatif).

3.42 Courant indépendant du temps.

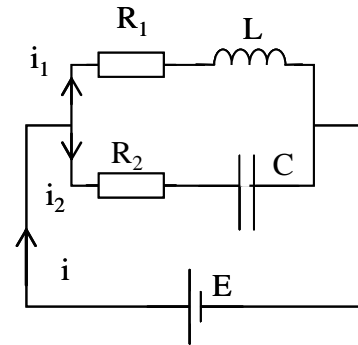
On a $i = i_1 + i_2$.

On a aussi : $R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} = E$, $R_2 i_2 + \frac{q}{C} = E$ avec $i_2 = \frac{dq}{dt}$.

La solution de la première équation différentielle est :

$i_1 = a \exp\left(-\frac{R_1}{L}t\right) + \frac{E}{R_1}$, à $t = 0$, $i_1 = 0$ d'où $a = -E$ et :

$i_1(t) = \frac{E}{R_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{R_1}{L}t\right)\right)$.



Considérons la seconde branche, l'équation différentielle s'écrit : $R_2 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$.

$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R_2 C} = \frac{E}{R_2}$. La solution particulière est $q = CE$ et la solution générale est :

$q(t) = CE + a \exp\left(-\frac{t}{R_2 C}\right)$. A $t = 0$, $q = 0$ d'où : $a = -CE$ et : $q(t) = CE \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{R_2 C}\right)\right]$.

$i_2(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R_2} \exp\left(-\frac{t}{R_2 C}\right)$.

$i = i_1(t) + i_2(t) = \frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_1} \exp\left(-\frac{R_1}{L}t\right) + \frac{E}{R_2} \exp\left(-\frac{t}{R_2 C}\right)$. i s'écrit comme la somme d'un

terme constant et de deux termes dépendant du temps. Pour que i soit constant quelque soit le temps, il faut que la somme des deux termes dépendant du temps soit nulle à tout instant.

$\frac{1}{R_1} \exp\left(-\frac{R_1}{L}t\right) = \frac{1}{R_2} \exp\left(-\frac{t}{R_2 C}\right) \Rightarrow -\frac{R_1}{L}t - \ln R_1 = -\frac{t}{R_2 C} - \ln R_2$ d'où :

$t\left(\frac{R_1}{L} - \frac{1}{R_2 C}\right) = \ln \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

3.43 Circuit équivalent.

On scinde en deux la portion.

On s'intéresse à la deuxième portion. La résistance équivalente de cette dernière est :

$R_{3//4} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$.

Première portion : Supposons un courant i passant en A et se divisant en i_1 et i_2 dans chaque branche. Considérons un point sur la boucle, mettons devant le générateur de tension e_1 , il est à un certain potentiel. Si nous faisons le tour de la boucle pour y revenir, la différence de potentiel totale est nulle. On a donc : $-e_1 + R_1 i_1 - e_2 - R_2 i_2 = 0$. De cette équation, on tire :

$$i_1 = \frac{e_1 + e_2 + R_2 i}{R_1 + R_2}.$$

On évalue la tension aux bornes du dipôle : $u_{AB} = -e_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2}(e_1 + e_2 + R_2 i) + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} i$.

En regroupant les termes : $u_{AB} = \frac{R_1 e_2 - R_2 e_1}{R_1 + R_2} + \left(\frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) i = e + Ri$.

2) $e = 2,5 \text{ V}$ et $R = 10 \text{ W}$.

Si $i = 1 \text{ A}$, $u = 12,5 \text{ V}$.

3.44 Résistance équivalente aux bornes d'un dipôle.

R_1 et R_2 sont en parallèles. Idem pour R_4 et R_5 . R_{12} , R_{45} et R_3 sont en séries entre elles et en parallèle avec R .

3.45 Valeurs algébriques de i et e .

Le réseau comporte deux nœuds A et B, trois branches et trois mailles dont deux seulement sont indépendantes.

Loi des nœuds en A :

$$i_1 + i_2 - i = 0 \text{ soit :}$$

$$i = i_1 + i_2.$$

On choisit des sens arbitraire sur les mailles (1) et (2) :

$$\text{Maille (1) : } R i + r_1 i_1 - (+e_1) = 0$$

$$\text{Maille (2) : } R i + r_2 i_2 - (+e_2) = 0$$

Soit en remplaçant i par son expression trouvée précédemment :

$$(R + r_1) i_1 + R i_2 = e_1$$

$$R i_1 + (R + r_2) i_2 = e_2$$

La résolution de ce système linéaire conduit à :

$$i_1 = \frac{(e_1 - e_2)R + e_1 r_2}{(r_1 + r_2)R + r_1 r_2} \text{ et } i_2 = \frac{(e_2 - e_1)R + e_2 r_1}{(r_1 + r_2)R + r_1 r_2}.$$

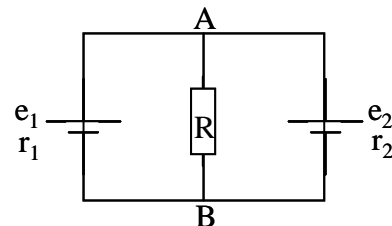
A.N. : $i_1 = -1,5 \text{ A}$; $i_2 = 2,25 \text{ A}$ soit $i = 0,75 \text{ A}$.

$i_1 < 0$ ce qui signifie que le sens réel du courant est de A vers B dans la branche (1).

3.46 Application du théorème de superposition.

On décompose le schéma en trois systèmes.

1^{er} système : On supprime e_1 , on garde e_2 .

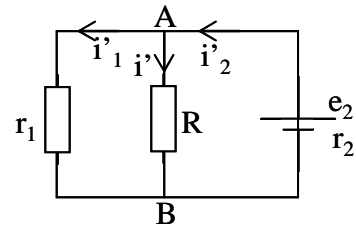


$$V_A - V_B = R i' = r_1 i'_1 = e_2 - r_2 i'_2.$$

$$i'_2 = i'_1 + i'.$$

$$i'_1 = \frac{e_2 R}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \text{ et } i'_2 = \frac{e_2 (R + r_1)}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \text{ d'où :}$$

$$i' = \frac{e_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}.$$



Deuxième système :

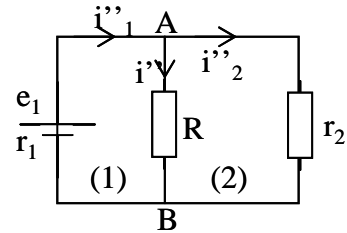
On supprime e_2 , on garde e_1 .

$$V_A - V_B = R i'' = r_2 i''_2 = e_1 - r_1 i''_1.$$

$$i''_2 = i''_1 + i''.$$

$$i''_1 = \frac{e_1 (R + r_2)}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \text{ et } i''_2 = \frac{e_1 R}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \text{ d'où :}$$

$$i'' = \frac{e_1 (R + r_2)}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}.$$



Troisième système : on superpose les deux systèmes précédents. Avec les sens choisis pour les intensités sur la figure ci-après, il vient :

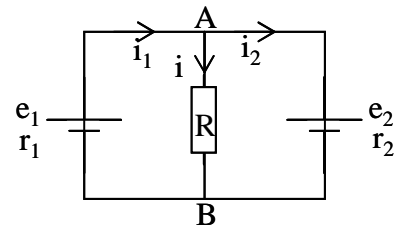
$$i_1 = -i'_1 + i''_1$$

$$i_2 = i'_2 - i''_2$$

$$i = i' + i''.$$

soit :

$$i_1 = \frac{R(e_1 - e_2) + e_1 r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \text{ et } i_2 = \frac{R(e_2 - e_1) + e_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}$$



$$\text{Finalement : } i = \frac{e_2 r_1 + e_1 r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}.$$

3.47 Représentation matricielle.

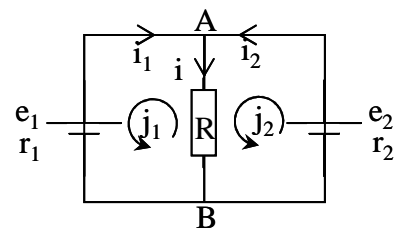
Même exercice.

$$\begin{pmatrix} r_1 + R & -R \\ -R & r_2 + R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \text{ d'où l'on extrait :}$$

$$j_1 = \frac{R(e_2 - e_1) - e_1 r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \text{ et } j_2 = \frac{R(e_1 - e_2) + e_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}.$$

$$\text{De plus } I_1 = -j_1, I_2 = j_2 \text{ et } I = j_2 - j_1.$$

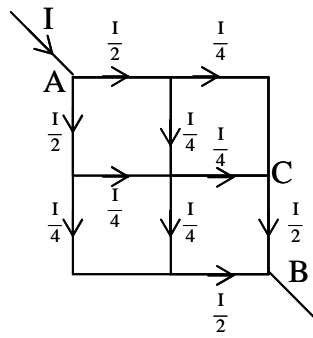
$$\text{On retrouve les résultats précédents : } i = \frac{e_2 r_1 + e_1 r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}.$$



3.48 Résistance équivalente d'un maillage.

- Etablissons entre A et B une différence de potentiel $V_A - V_B$ de sorte que le courant total traversant le réseau soit I.

La résistance équivalente est R telle que : $R = (V_A - V_B) / I$.

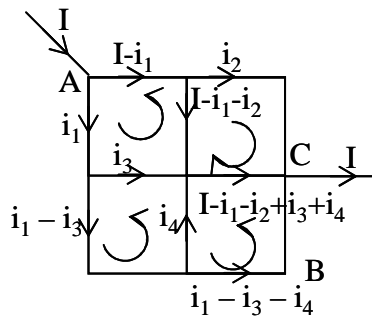


Entre A et B, on a un élément de symétrie : le centre. Les différentes branches sont traversées par les courants ci-contre.

On a alors : $V_A - V_B = r \frac{I}{2} + r \frac{I}{4} + r \frac{I}{4} + r \frac{I}{2} = \frac{3}{2} r I = R I$, on en déduit :

$$R = \frac{3}{2} r.$$

Entre A et C, il n'en est plus ainsi car il n'y a plus de symétrie.



Les lois de Kirchhoff relatives aux mailles permettent d'écrire :

Maille haute gauche : $r i_1 + r i_3 - r (I - i_1 - i_2) - r (I - i_1) = 0$,

soit en simplifiant par r :

$$3 i_1 + i_2 + i_3 = 2 I.$$

Maille basse gauche : $2 i_1 - 3 i_3 + i_4 = 0$,

Maille haute droite : $2 i_1 + 4 i_2 - i_3 - i_4 = 2 I$,

Maille basse droite : $3 i_1 + i_2 - 3 i_3 - 4 i_4 = I$.

On a donc un système de 4 équations à quatre inconnues dont la solution est :

$$i_1 = 11/24 I, i_2 = I/3, i_3 = 7/24 I, i_4 = -I/24.$$

On en déduit :

$$V_A - V_C = r(I - i_1) + 2 r i_2 = 29/24 r I = R I,$$

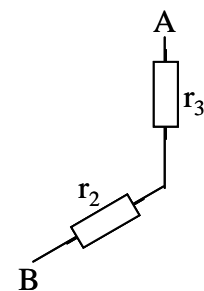
d'où :

$$R = 29/24 r.$$

3.49 Transformation de Kenelly.

Les deux réseaux sont équivalents si les tensions entre les points A, B et C sont les mêmes que les points soient reliés ou non au reste du réseau.

Débranchons, par exemple, C du réseau, on a donc le schéma équivalent ci-contre et : R_2 et R_3 en série, en parallèle avec R_1 ; r_3 et r_2 en série.



On a donc l'égalité suivante : $r_2 + r_3 = \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$.

Par symétrie, on a :

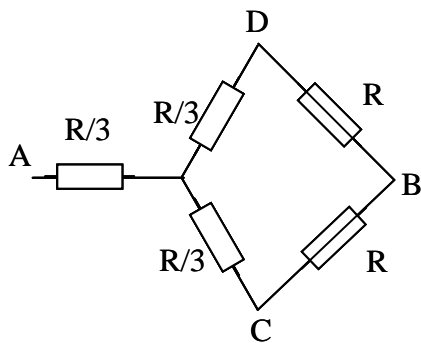
$$r_1 + r_2 = \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \text{ et } r_3 + r_1 = \frac{R_2 (R_3 + R_1)}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

La résolution de ce système est simple :

$$\begin{cases} r_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ r_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ r_3 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \end{cases}$$

3.50 Vers le pont de Wheatstone.

D'après l'exercice précédent, le système est équivalent à :



$r = R^2 / (3 R) = R / 3$. On a ensuite de bras en parallèle de résistance $R + R/3 = 4 R / 3$. La résistance équivalente est : $2 R / 3$.

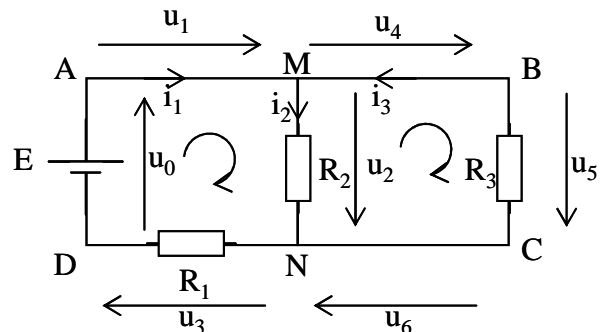
Finalement la résistance équivalente est :
 $R / 3 + 2 R / 3 = R$.

3.51 Lois de Kirchhoff et méthode matricielle.

1) Ce circuit compte deux noeuds M et N et trois mailles : ABCDA, AMNDA et MBCNM.

Il y a trois branches donc trois intensités inconnues.

2) On fixe un sens arbitraire, voir figure ci-contre. On écrit les équations de Kirchhoff :



$$i_2 = i_1 + i_3$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_0 = 0$$

$$u_4 + u_5 + u_6 - u_2 = 0.$$

Remplaçons ces tensions par leurs expressions :

$$u_1 = u_4 = u_6 = 0,$$

$$u_2 = -R_2 i_2$$

$$u_3 = -R_1 i_1$$

$$u_5 = R_3 i_3$$

$$u_0 = E.$$

On en déduit le système :

$$\begin{cases} i_1 & -i_2 & +i_3 = 0 \\ R_1 i_1 & +R_2 i_2 & +0 = E \\ 0 & +R_2 i_2 & +R_3 i_3 = 0 \end{cases}$$

3) La résolution du système est directe :

$$i_1 = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}, i_2 = \frac{ER_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}, i_3 = \frac{-ER_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Par la méthode matricielle :

On a : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{vmatrix}$. On calcule le déterminant de cette matrice 3 x 3 :

$$D = R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2.$$

Pour calculer les courants, nous devons calculer les déterminants réduits :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ E & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} = E(R_2 + R_3), D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ R_1 & E & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{vmatrix} = ER_3, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & E \\ 0 & R_2 & 0 \end{vmatrix} = -ER_2.$$

Et $i_j = \frac{D_j}{D}, j=1:3$.

4) Nous définissons les mailles indépendantes, voir figure. Dans la maille AMNDA circule le courant d'intensité I_1 . Dans la maille MBCN circule le courant I_2 .

La loi des mailles donne :

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) = E \\ R_3 I_2 + R_2 (I_2 - I_1) = 0 \end{cases}, \text{ par la méthode matricielle, la résolution est très rapide :}$$

$$\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E \\ 0 \end{vmatrix}, D = (R_1 + R_2)(R_2 + R_3) - R_2^2 = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3, \text{ par suite :}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} E & -R_2 \\ 0 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & E \\ -R_2 & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-ER_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Les courants réels sont reliés aux courants de mailles par :

$$\begin{aligned} i_1 &= I_1, \\ i_2 &= I_1 - I_2, \\ i_3 &= -I_2. \end{aligned}$$

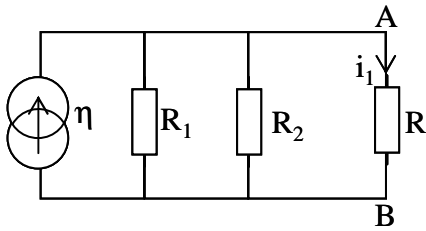
5) $i_2 = 0,24 \text{ A}$, $i_3 = -0,48 \text{ A}$ et $i_1 = 0,72 \text{ A}$.

3.52 Application des théorèmes de Thévenin et Norton.

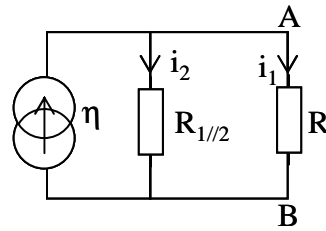
1) Nous pouvons appliquer le théorème de superposition car le circuit comporte plusieurs sources.

a) Tout d'abord, nous éteignons la source de tension, soit $E = 0$. Nous avons donc deux résistances en parallèle R_1 et R_2 .

Le schéma équivalent est alors :



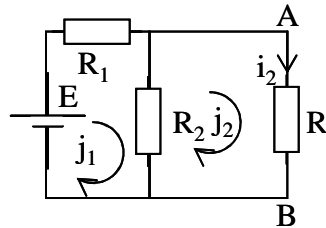
Finalement :



$$R_{1/2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad \eta = i_1 + i_2. \quad R_{1/2} i_2 = R i_1 \text{ d'où : } i_1 = \frac{R_{1/2}}{R + R_{1/2}} \eta.$$

b) On enlève la source de courant (interrupteur ouvert) :

Le schéma équivalent est alors :



On pose j_1 et j_2 les courants de maille, on obtient le système :

$$R_1 j_1 + R_2 (j_1 - j_2) - E = 0$$

$$R j_2 + R_2 (j_2 - j_1) = 0. \text{ Il se réécrit sous forme matricielle :}$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R + R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ on calcule le déterminant :}$$

$$D = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R + R_2 \end{vmatrix} = R_1 R + R_2 R + R_1 R_2.$$

$$\text{On en déduit immédiatement le courant } i_2 \text{ car } i_2 = j_2 : i_2 = \frac{E R_2}{R_1 R + R_2 R + R_1 R_2}.$$

D'après le théorème de superposition, le courant circulant dans la branche AB est :

$$i = i_1 + i_2 = R_2 \frac{E + \eta R_1}{R_1 R + R_2 R + R_1 R_2}.$$

2) Théorème de Thévenin :

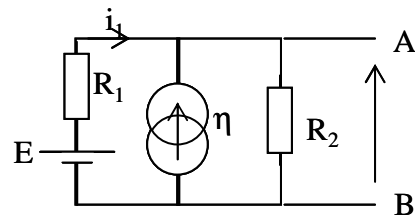
a) La première étape consiste à supprimer le dipôle AB. On calcule la tension $u_0 = V_A - V_B$:

Le schéma équivalent est représenté ci-contre :

Le courant circulant dans la résistance R_2 est $i_1 + \eta$.

On a donc : $i_1 = \frac{E - \eta R_2}{R_1 + R_2}$. On en déduit la tension :

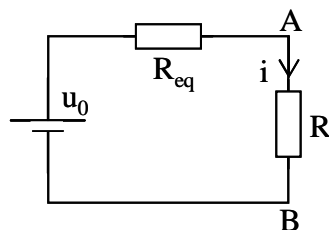
$$u_0 = R_2 (i_1 + \eta) = R_2 \frac{E + \eta R_1}{R_1 + R_2}.$$



b) On calcule la résistance équivalente lorsque toutes les sources sont éteintes ; dans ce cas,

$$R_1 \text{ et } R_2 \text{ sont en parallèle, on a donc : } R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

c) On a finalement le schéma équivalent :

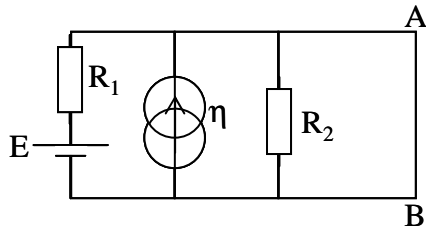


On a donc : $(R_{eq} + R)i = u_0$ d'où on tire i :

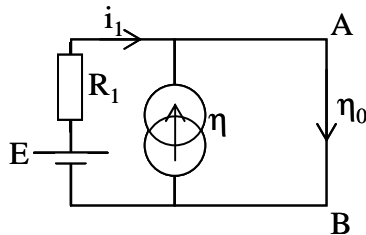
$$i = \frac{u_0}{R_{eq} + R} = R_2 \frac{E + \eta R_1}{R_1 R + R_2 R + R_1 R_2}.$$

3) Théorème de Norton :

On court-circuite la branche AB, c'est-à-dire que l'on enlève la résistance dans la branche :



Il apparaît que la tension aux bornes de R_2 est nulle.
Le schéma équivalent au montage ci-contre est présenté ci-dessous :



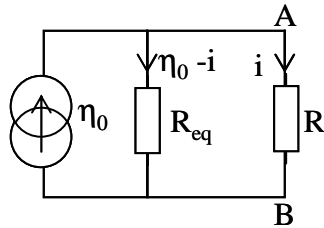
On cherche à déterminer le courant de court-circuit.

On a deux relations :

$$i_1 + \eta = \eta_0 \text{ et } R_1 i_1 = E \text{ d'où l'on déduit :}$$

$$\eta_0 = \eta + \frac{E}{R_1}.$$

La résistance équivalente a déjà été calculée à la question 2). Le schéma final équivalent :

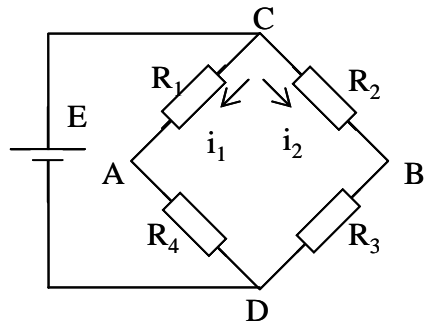


On a donc :

$$i = \eta_0 \frac{R_{eq}}{R + R_{eq}} = R_2 \frac{E + \eta R_1}{R_1 R + R_2 R + R_1 R_2}.$$

3.53 Pont de Wheatstone.

On calcule la tension $u_0 = V_A - V_B$ lorsque l'on débranche la résistance R :



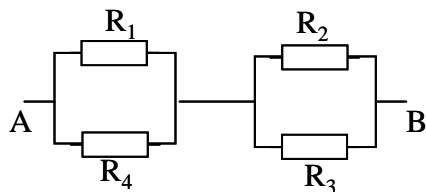
$$(R_1 + R_4) i_1 = E = (R_2 + R_3) i_2 \text{ qui donne :}$$

$$i_1 = \frac{E}{R_1 + R_4}, i_2 = \frac{E}{R_2 + R_3} \text{ or}$$

$$u_0 = V_A - V_B = -R_1 i_1 + R_2 i_2 \text{ d'où :}$$

$$u_0 = E \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)}.$$

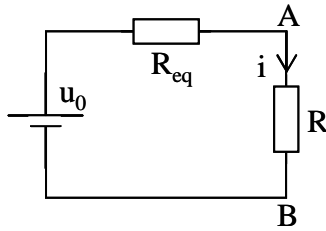
On débranche la source de tension et cherchons la résistance équivalente vue depuis A et B. Cela revient à court-circuiter C et D. On a donc :



La résistance équivalente est :

$$R_{eq} = R_{1//4} + R_{2//3}.$$

Le schéma final équivalent est :



On a la relation : $(R_{eq} + R)i = u_0$. On veut que i soit nul, ceci impose que u_0 soit nulle puisque la résistance équivalente ne l'est pas. $u_0 = 0$ implique :

$$R_1 R_3 - R_2 R_4 = 0.$$

Cette relation permet de mesurer une résistance connaissant les trois autres. Ce schéma est le « pont de Wheatstone », la résistance R est remplacée expérimentalement par un détecteur de courant.

3.54 Courant circulant dans une branche.

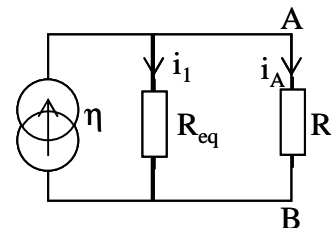
1) Méthode de la superposition : on coupe successivement la tension électrique E et on ouvre le circuit où se trouve le générateur de courant.

Si l'on coupe la tension E , le schéma est équivalent à :

La résistance équivalente correspond à la mise en parallèle des trois résistances R_1 , R_2 et R_3 . On a :

$\eta = i_1 + i_A$ et $R i_A - R_{1//2/3} i_1 = 0$, on en déduit :

$$i_A = \eta \frac{R_{1//2/3}}{R + R_{1//2/3}} \text{ avec } R_{1//2/3} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

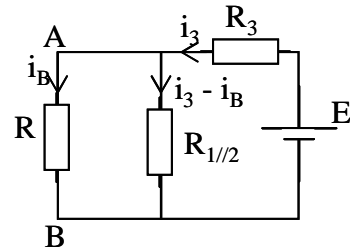


Si l'on coupe la source de courant en ouvrant l'interrupteur sur cette branche, le schéma équivalent est :

$$\begin{cases} R_3 i_3 + R_{1//2} (i_3 - i_B) = E \\ R i_B - R_{1//2} (i_3 - i_B) = 0 \end{cases} \text{ d'où l'on déduit par la méthode}$$

matricielle, en posant au préalable : $R_{1//2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$,

$$i_B = \frac{\begin{vmatrix} R_3 + R_{1//2} & E \\ -R_{1//2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_3 + R_{1//2} & -R_{1//2} \\ -R_{1//2} & R + R_{1//2} \end{vmatrix}} = \frac{ER_{1//2}}{RR_3 + RR_{1//2} + R_3 R_{1//2}}.$$

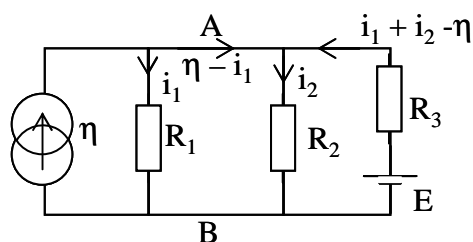


On en déduit que le courant i circulant dans la branche AB est : $i = i_A + i_B$.

$$\text{On trouve après calcul : } i = (E + \eta R_3) \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3 + RR_1 R_2 + RR_1 R_3 + RR_2 R_3}.$$

2) Méthode de Thévenin :

a) On débranche le dipôle AB , on obtient le schéma équivalent suivant :



On cherche à déterminer la différence de potentiel entre A et B :

On a résolu le système :

$$\begin{cases} R_3 (i_1 + i_2 - \eta) + R_2 i_2 = E \\ R_1 i_1 - R_2 i_2 = 0 \end{cases} \text{ . On détermine } i_2 :$$

$$i_2 = \frac{R_1(E + \eta R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}, \text{ d'où } u_0 = V_A - V_B = R_2 i_2 = (E + \eta R_3) \frac{R_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

On débranche toutes les sources et calcule la résistance équivalente vue de A et B. La résistance équivalente correspond à la mise en parallèle des trois résistances R_1 , R_2 et R_3 .

On a donc le schéma équivalent de Thévenin avec une source de tension u_0 et deux résistances R et $R_{1//2//3}$. On a donc :

$$i = \frac{u_0}{R + R_{1//2//3}} = (E + \eta R_3) \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3 + R R_1 R_2 + R R_1 R_3 + R R_2 R_3}.$$

3.55 Pont de Mance.

1) a) Interrupteur ouvert :

On supprime la résistance r .

On calcule la résistance équivalente en débranchant la source de tension.

$$R_{eq} = (R_1 + R_4) // (R_2 + R_3), \text{ soit : } R_{eq} = \frac{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

On calcule la tension $u_0 = V_A - V_B$. Soit i le courant circulant dans la boucle :

$$(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)i = E \text{ d'où : } i = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \text{ et l'on en déduit la tension :}$$

$$u_0 = (R_2 + R_3)i = E \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

On a ensuite la relation désormais classique : $(r + R_{eq})i = u_0$ d'où l'on déduit l'intensité du

$$\text{courant dans la branche AB : } i_{\text{ouvert}} = \frac{u_0}{r + R_{eq}} = E \frac{R_2 + R_3}{r(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + (R_2 + R_3)(R_1 + R_4)}.$$

b) Interrupteur fermé

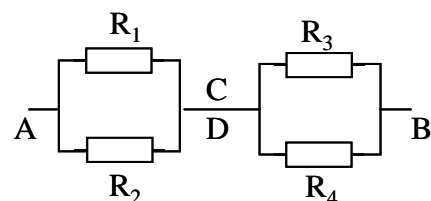
On supprime la résistance r .

On calcule la résistance équivalente en débranchant la source de tension.

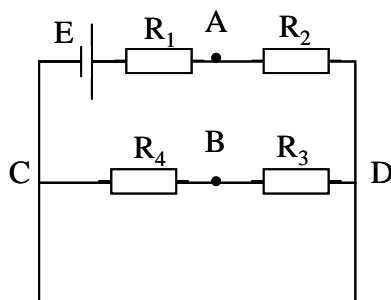
Puisque C et D sont au même potentiel, le schéma équivalent est :

On en déduit :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}.$$



On calcule la tension $u_0 = V_A - V_B$.



Les points C et D sont au même potentiel lorsque l'interrupteur est fermé, la différence de potentiel est donc nulle entre C et D, par conséquent, il n'y a pas de courant dans la branche DBC.

$$(R_1 + R_2)i = E \text{ soit } i = \frac{E}{R_1 + R_2}, \text{ d'où la tension } u_0 :$$

$$u_0 = R_2 i = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

On a ensuite la relation désormais classique : $(r + R_{eq})i = u_0$ d'où l'on déduit l'intensité du courant dans la branche AB :

$$i_{\text{fermé}} = \frac{u_0}{r + R_{\text{eq}}} = E \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{r(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)}.$$

2) Les deux intensités sont égales si (après un calcul ennuyeux...) : $R_1 R_3 = R_2 R_4$.

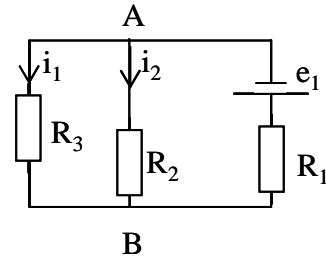
3.56 Courant circulant dans une branche.

1) Principe de superposition :

On éteint e_2 , $e_2 = 0$. Le schéma équivalent est représenté ci-contre. On a :

$R_3 i_1 - R_2 i_2 = 0$ et $R_2 i_2 + R_1 (i_1 + i_2) + e_1 = 0$. On en déduit :

$$i_1 = \frac{-e_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$



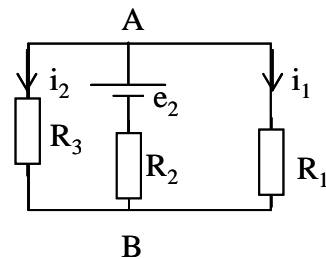
On éteint e_1 , $e_1 = 0$. Le schéma équivalent est représenté ci-contre. On a :

$R_3 i_2 - R_1 i_1 = 0$ et $R_1 i_1 + R_2 (i_1 + i_2) = e_2$. On en déduit :

$$i_1 = \frac{e_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Par conséquent le courant circulant à travers la résistance R_3 est :

$$i = i_1 + i_2 = \frac{e_2 R_1 - e_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$



2) Théorème de Thévenin :

On débranche R_3 . Le schéma équivalent est représenté ci-contre.

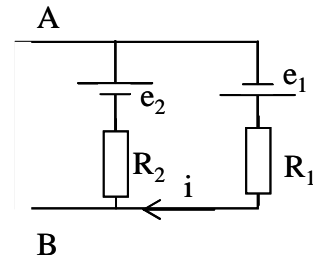
La résistance équivalente est : $R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

La tension $u_0 = V_A - V_B$ est :

$$(R_1 + R_2) i = e_1 + e_2 \text{ d'où : } i = \frac{e_1 + e_2}{R_1 + R_2} \text{ et :}$$

$$u_0 = e_2 - R_2 i = \frac{e_2 R_1 - e_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

$$\text{On a finalement : } (R_3 + R_{\text{eq}}) i = u_0 \text{ et } i = \frac{e_2 R_1 - e_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$



3.57 Calcul d'impédances complexes.

$$(a) : \bar{Z} = R + \frac{1}{jC\omega}, Z^2 = R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}, \tan \phi = -\frac{1}{RC\omega}.$$

$$(b) : \bar{Z} = \frac{R(1 - jRC\omega)}{1 + R^2 C^2 \omega^2}, Z = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}, \tan \phi = -RC\omega.$$

$$(c) : \bar{Z} = \frac{RL\omega}{R^2 + L^2\omega^2} (L\omega - jR), Z = \frac{RL\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}, \tan \phi = -\frac{R}{L\omega}.$$

$$(d) : \bar{Z} = R + jL\omega, Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}, \tan \phi = \frac{L\omega}{R}.$$

$$(e) : \bar{Z} = j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right), \phi = \frac{\pi}{2}.$$

$$(f) : \bar{Z} = jL\omega \frac{1}{1 - LC\omega^2}, \phi = \frac{\pi}{2}.$$

$$(g) : \bar{Z} = \frac{R + j\omega [L(1 - LC\omega^2) - R^2C]}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}, Z = \frac{R^2 + \omega^2 [L(1 - LC\omega^2) - R^2C]^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2},$$

$$\tan \phi = \frac{\omega [L(1 - LC\omega^2) - R^2C]}{R}.$$

$$(h) : \bar{Z} = \frac{RL\omega (L\omega + jR(1 - LC\omega^2))}{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + L^2\omega^2}.$$

$$(i) : \bar{Z} = R + j \frac{C\omega}{R(1 - LC\omega^2)}.$$

3.58 Circuit RLC en série.

1) L'équation différentielle est obtenue en appliquant la loi des mailles :

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = E_m \cos \omega t \text{ soit, puisque } i = \frac{dq}{dt} : Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = E_m \cos \omega t.$$

2) Il est plus facile d'étudier l'équation différentielle satisfaite par la charge q :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_m \cos \omega t.$$

La solution générale est la somme de deux termes.

Le premier terme provient de la résolution de l'équation différentielle sans second membre, à

savoir : $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$. On cherche une solution sous la forme : $q = a \exp(bt)$, en

remplaçant dans l'équation différentielle, il vient : $q = a e^{-\frac{R}{2L}t} f(t)$.

Le second terme prend en compte le second terme d'oscillation forcée, la solution est donc de la forme du second membre, à savoir une solution sinusoïdale de type : $q = A \sin \omega t + B \cos \omega t$.

La solution générale s'écrit donc : $q = a e^{-\frac{R}{2L}t} f(t) + A \sin \omega t + B \cos \omega t$.

Au bout d'un temps plus ou moins bref selon la constante de temps $\frac{2L}{R}$, la charge tend vers la valeur : $q = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ et par conséquent le courant tend vers une valeur de la forme :

$i = D \sin \omega t + E \cos \omega t$ soit : $i = I_m \cos(\omega t + \phi)$. Il s'agit donc de déterminer I_m et ϕ . Pour ce faire, on dispose de trois méthodes :

3) Méthode algébrique :

On a $i = I_m \cos(\omega t + \phi)$ mais il est plus facile de partir de la charge q , on écrit q sous la forme : $q = Q_m \sin(\omega t + \phi)$, on a donc : $i = \frac{dq}{dt} = Q_m \omega \cos(\omega t + \phi) \rightarrow I_m = Q_m \omega$. On remplace l'expression de q dans l'équation différentielle. On arrive à :

$Q_m \left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right) \sin(\omega t + \phi) + R Q_m \omega \cos(\omega t + \phi) = E_m \cos \omega t$, on développe les fonctions sinusoïdales :

$$\left[Q_m \left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right) \cos \phi - R Q_m \omega \sin \phi \right] \sin \omega t + \left[Q_m \left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right) \sin \phi + R Q_m \omega \cos \phi - E_m \right] \cos \omega t = 0$$

expression qui doit être vérifiée quelque soit t , par conséquent :

$$\begin{cases} Q_m \left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right) \cos \phi - R Q_m \omega \sin \phi = 0 \\ Q_m \left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right) \sin \phi + R Q_m \omega \cos \phi = E_m \end{cases} \quad \text{en utilisant } I_m = Q_m \omega, \text{ le système devient :}$$

$$\begin{cases} I_m \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right) \cos \phi - R I_m \sin \phi = 0 \\ I_m \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right) \sin \phi + R I_m \cos \phi = E_m \end{cases} \quad , \text{ la résolution du système donne :}$$

$$I_m \neq 0, \phi \neq \frac{\pi}{2} : \begin{cases} \tan \phi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R} \\ I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right)^2}} \end{cases}$$

4) Méthode de Fresnel :

Elle consiste à représenter une fonction sinusoïdale de la forme $y = a \cos(\omega t + \phi)$ par un vecteur \overrightarrow{OM} tournant autour d'un point fixe O à une vitesse angulaire ω , ce vecteur ayant une longueur a et faisant avec un axe polaire dit axe origine des phases un angle $\omega t + \phi$. Dans le cas du régime sinusoïdale forcé, tous les vecteurs considérés tournant à la même vitesse angulaire ω , l'ensemble de ceux-ci, dit construction de Fresnel, tourne autour de O sans se déformer : aussi a-t-on coutume de représenter les vecteurs à $t = 0$.

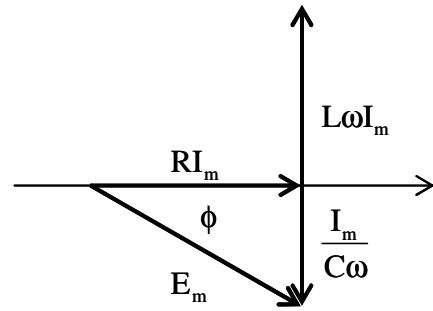
La fonction $\frac{dy}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \phi) = a\omega \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$ sera représentée par le vecteur $\overrightarrow{OM'}$

de longueur $a\omega$, faisant avec \overrightarrow{OM} un angle $\frac{\pi}{2}$.

La fonction $\int y dt = \frac{a}{\omega} \sin(\omega t + \phi) = \frac{a}{\omega} \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)$ sera représentée par le vecteur $\overrightarrow{OM''}$

de longueur $\frac{a}{\omega}$ faisant avec \overrightarrow{OM} un angle $-\frac{\pi}{2}$.

Ainsi :
$$\begin{cases} Ri \rightarrow RI_m \\ L \frac{di}{dt} \rightarrow L\omega I_m, +\frac{\pi}{2} \text{ soit :} \\ \frac{1}{C} \int i \, dt \rightarrow \frac{I_m}{C\omega}, -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



On en déduit immédiatement : $R^2 I_m^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right)^2 I_m^2 = E_m^2$ d'où le résultat.

De la même manière pour l'angle en évaluant la tangente de l'angle.

5) Méthode symbolique.

L'impédance totale est : $\bar{z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$, or $\bar{u} = \bar{z} \bar{i}$ avec : $\bar{u} = E_m e^{j\omega t}$ et $\bar{i} = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$,

on a donc : $E_m e^{j\omega t} = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] I_m e^{j(\omega t + \phi)}$ qui donne :

$$E_m e^{j\omega t} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} e^{j \arctan \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right)} I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$
 soit en séparant les complexes le résultat attendu.

6) On étudie les variations de I_m en fonction de ω :

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right)^2}}$$
, lorsque $\omega \rightarrow 0, I_m \rightarrow 0$ et lorsque $\omega \rightarrow +\infty, I_m \rightarrow 0$.

$$\frac{dI_m}{d\omega} = E_m \left[R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right)^2 \right]^{-3/2} \left(L + \frac{1}{C\omega^2} \right) \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right)$$
 d'où :

$$\frac{dI_m}{d\omega} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right) \geq 0 \Rightarrow \omega^2 \leq \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$
 en introduisant la fréquence de résonance ω_0

définie par : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. On a à la résonance $I_m(\omega_0) = \frac{E_m}{R}$.

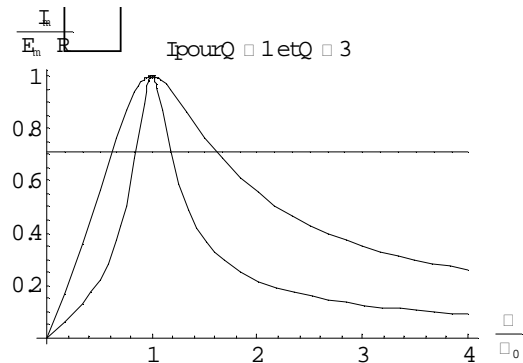
On peut réécrire l'intensité efficace sous la forme :

$$I_m = \frac{E_m}{R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$
 en introduisant le facteur de qualité Q donné par : $Q = \frac{L\omega_0}{R}$.

On calcule les valeurs ω_1 et ω_2 telles que $I_m(\omega_{12}) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$, on a alors :

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} \left(\sqrt{1+4Q^2} - 1 \right) \\ \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} \left(\sqrt{1+4Q^2} + 1 \right) \end{cases} \text{ et}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \text{ la bande passante.}$$



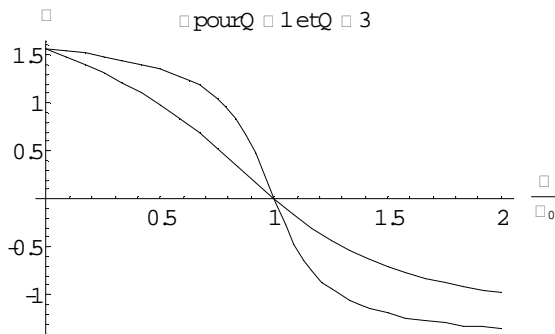
L'écart relatif entre les deux pulsations s'exprime sous la forme :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{L\omega_0} = \frac{1}{Q}.$$

La résonance est d'autant plus aiguë que le facteur de qualité est élevé.

On étudie les variations de ϕ en fonction de ω :

On a $\tan \phi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}$, soit lorsque $\begin{cases} \omega \rightarrow 0, \tan \phi \rightarrow +\infty, \phi \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \omega \rightarrow +\infty, \tan \phi \rightarrow -\infty, \phi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ et finalement :



3.59 Schéma équivalent.

On égalise les deux impédances : $\frac{1}{R + jL\omega} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{jL'\omega}$ d'où l'on tire :

$$\frac{R - jL\omega}{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{L'\omega - jR'}{R'L'\omega} \text{ et en séparant les parties réelles et imaginaires :}$$

$$\begin{cases} \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{L'\omega}{R'L'\omega} = \frac{1}{R'} \Rightarrow R' = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{R} = R(1 + q^2) \\ \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{R'}{R'L'\omega} = \frac{1}{L'\omega} \Rightarrow L' = L \left(1 + \frac{1}{q^2} \right). \end{cases}$$

Lorsque $q \gg 1$, R' tend vers Rq soit vers l'infini et L' tend vers L .

3.60 Calculs de grandeurs efficaces.

$$1) \bar{Z} = R_1 + \frac{R_2}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2} - j \frac{R_2^2 C \omega}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2}.$$

$$2) Z = |\bar{Z}| = \sqrt{\left(R_1 + \frac{R_2}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{R_2^2 C \omega}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2}\right)^2}. \text{ A.N. : } Z = 1189 \, \Omega.$$

$$\text{On a : } U e^{j\omega t} = Z e^{j\phi_z} I e^{j(\omega t - \phi)} \Rightarrow \begin{cases} U = ZI \\ \omega t = \phi_z + \omega t - \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{\text{eff}} = Z I_{\text{eff}} \\ \phi_z = \phi \end{cases}$$

$$\text{On en tire : } \tan \phi = -\frac{R_2^2 C \omega}{R_2 + R_1 (1 + R_2^2 C^2 \omega^2)}. \text{ A.N. : } \phi = -16.85^\circ.$$

$$3) \text{ On a : } I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z} = \frac{100}{1189} = 84 \text{ mA.}$$

$$4) \bar{u} = R_1 \bar{i} + \bar{u}_C \rightarrow \bar{u}_C = \bar{u} - R_1 \bar{i} = (\bar{Z} - R_1) \bar{i} \text{ d'où : } \bar{u}_C = \frac{R_2}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2} (1 - j R_2 C \omega) \bar{i}.$$

$$5) \bar{u}_C = \frac{1}{j C \omega} \bar{i}_C \rightarrow \bar{i}_C = j C \omega \bar{u}_C = \frac{R_2 C \omega}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2} (R_2 C \omega + j) \bar{i}.$$

$$\bar{u}_C = R_2 \bar{i}_2 \rightarrow \bar{i}_2 = \frac{\bar{u}_C}{R_2} = \frac{1}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2} (1 - j R_2 C \omega) \bar{i}.$$

3.61 Variation de la pulsation.

$$1) \bar{Z} = R + j L \omega$$

$$2) \bar{u} = \bar{Z} \bar{i} \Rightarrow U e^{j\omega t} = (R + j L \omega) I e^{j(\omega t + \phi)} \text{ d'où : } U = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} e^{j \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)} I e^{j\phi} \text{ et donc :}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \text{ et } \phi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right).$$

$$3) \phi = -\arctan\left(\frac{L\omega_1}{R}\right) = -\frac{\pi}{4} \rightarrow 1 = \frac{L\omega_1}{R} \Rightarrow \omega_1 = \frac{R}{L} = 2000 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$4) P_e = U_e I_e \cos \phi = \frac{U_e^2}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_1^2}} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ W.}$$

$$5) U_R e^{j(\omega t + \chi)} = R I e^{j(\omega t + \phi)} \rightarrow U_R = R I \rightarrow U_{eR} = R I_e = U_e \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_1^2}} \text{ et :}$$

$$U_L e^{j(\omega t + \chi)} = j L \omega I e^{j(\omega t + \phi)} \rightarrow U_L = L \omega I \rightarrow U_{eL} = L \omega I_e = U_e \frac{L \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_1^2}} \text{ d'où tire que :}$$

$$\omega \rightarrow 0 \left| \begin{array}{l} U_{eR} \rightarrow U_e \\ U_{eL} \rightarrow 0 \end{array} \right., \omega \rightarrow +\infty \left| \begin{array}{l} U_{eR} \rightarrow 0 \\ U_{eL} \rightarrow U_e \end{array} \right.$$

3.62 Optimisation de P.

On a montré précédemment que la puissance active aux bornes d'un dipôle $\bar{Z} = r + jx$ était donné par : $P = r I_{\text{eff}}^2$.

La loi des mailles donne ici : $\bar{e} = (\bar{z} + \bar{Z}) \bar{i} \rightarrow \bar{i} = \frac{\bar{e}}{(\bar{z} + \bar{Z})} \rightarrow I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{|\bar{z} + \bar{Z}|}$ d'où l'on tire :

$$P = r I_{\text{eff}}^2 = E_{\text{eff}}^2 \frac{r}{|\bar{z} + \bar{Z}|^2} = E_{\text{eff}}^2 \frac{r}{(r+R)^2 + (x+X)^2}.$$

La puissance active est maximale, R et X sont fixées, lorsque $x = -X$. Dans ce cas, la puissance devient : $P = E_{\text{eff}}^2 \frac{r}{(r+R)^2}$. L'étude de $P(r)$ montre qu'elle est maximale pour $r = R$.

En résumé, les conditions à réaliser pour assurer l'adaptation d'impédance sont :

$$r = R \text{ et } x = -X \text{ soit } \bar{z} = \bar{Z}^*.$$

3.63 Quadrature de phase.

1) $\bar{i}_1 = \frac{\bar{u}}{jL\omega + R}$ et $\bar{i}_2 = \frac{\bar{u}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R}$. On en déduit :

$$\bar{i}_1 = \sqrt{2} I_{1,\text{eff}} e^{j(\omega t + \phi_1)} = \frac{\bar{u}}{jL\omega + R} = \frac{\sqrt{2} U_{\text{eff}} e^{j\omega t}}{|jL\omega + R|} = \frac{\sqrt{2} U_{\text{eff}} e^{j\omega t}}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} e^{j \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)}} = \frac{\sqrt{2} U_{\text{eff}}}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} e^{j\left(\omega t - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right)}$$

$$\text{d'où : } I_{1,\text{eff}} = \frac{U_m}{\sqrt{2} \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}, \phi_1 = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right),$$

$$\bar{i}_2 = \sqrt{2} I_{2,\text{eff}} e^{j(\omega t + \phi_2)} = \frac{U_m e^{j\omega t}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} e^{j\left(\omega t - \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)\right)} \text{ d'où :}$$

$$I_{2,\text{eff}} = \frac{U_m}{\sqrt{2} \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}, \phi_2 = -\arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right).$$

On remarque que $\phi_2 > \phi_1$, i_1 et i_2 sont en quadrature si : $\phi_2 - \phi_1 = \frac{\pi}{2}$ soit :

$$\tan \phi_2 = \tan\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \phi_1} \text{ d'où : } \tan \phi_2 \tan \phi_1 = -1 \text{ soit :}$$

$$\left(\frac{-L\omega + \frac{1}{C\omega}}{R}\right) \frac{L\omega}{R} = 1 \rightarrow C = \frac{L}{R^2 + L^2 \omega^2}.$$

$$I_{2,\text{eff}} = I_{1,\text{eff}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \text{ d'où :}$$

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{R^4}{L^2 \omega^2}}} \Rightarrow L^2 \omega^2 = \frac{R^4}{L^2 \omega^2} \Rightarrow R = L\omega. \text{ Par conséquent :}$$

$$C = \frac{L}{R^2 + L^2 \omega^2} = \frac{1}{2R\omega}.$$

3.64 Égalité des tensions.

a) On écrit les tensions complexes : $\bar{v}_1 = \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right) \bar{i}$ et $\bar{v}_2 = \left(\frac{1}{R'} + jC'\omega \right)^{-1} \bar{i} = \frac{R'}{1 + jR'C'\omega} \bar{i}$,

si elles sont égales alors : $R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{R'}{1 + jR'C'\omega}$. On arrive donc à :

$$R - R' + R' \frac{C'}{C} = 0 \text{ et } R R' C C' \omega^2 = 1 \text{ qui donne finalement :}$$

$$C' = \frac{C}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \text{ et } R' = \frac{1 + R^2 C^2 \omega^2}{R C^2 \omega^2}.$$

b) La dernière expression combinée avec la relation $C' = C/a$ donne : $R' = R \frac{a}{a-1}$.

L'expression de C' amène à : $\omega^2 = \frac{a-1}{R^2 C^2} \rightarrow \omega = \frac{\sqrt{a-1}}{RC}$. a doit être supérieur à 1.

c) $a = 2$, $R' = 2R$ et $\omega = \frac{1}{RC}$ d'où $RC\omega = 1$.

$$\omega = 2000 \text{ rad/s.}$$

d) $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \rightarrow \bar{v} = 2\bar{v}_1 = 2 \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right) \bar{i}$, on a donc en développant :

$$V\sqrt{2}e^{j\omega t} = 2\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}} e^{-j \arctg \frac{1}{RC\omega}} I \sqrt{2} e^{j(\omega t + \phi)} \text{ d'où l'on déduit :}$$

$$I = \frac{V}{2\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}} \text{ ce qui d'après la relation } RC\omega = 1 \text{ donne : } I = \frac{V}{2\sqrt{2}R}.$$

$$\phi = \arctg \frac{1}{RC\omega} = \arctg(1) \Rightarrow \frac{\pi}{4} [\pi].$$

$$\bar{v}_2 = \frac{\bar{v}}{2} = R' \bar{i}_{R'} \rightarrow \bar{i}_{R'} = \frac{\bar{v}}{2R'} \Rightarrow \begin{cases} I_{R'} = \frac{V}{2R'} = \frac{V}{4R} \\ \phi_{R'} = 0. \end{cases}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{\bar{v}}{2} = \frac{1}{jC'\omega} \bar{i}_{C'} \rightarrow \bar{i}_{C'} = jC'\omega \frac{\bar{v}}{2} = \frac{1}{4} jC\omega \bar{v} \Rightarrow \begin{cases} I_{C'} = \frac{VC\omega}{4} = \frac{V}{4R} \\ \phi_{C'} = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

A.N. : $I = 7,1 \text{ mA}$, $I_{R'} = 5 \text{ mA}$, $I_{C'} = 5 \text{ mA}$.

3.65 Pont de Wheatstone complexe.

On applique le théorème de Thévenin entre les bornes B et D. On débranche donc le dipôle BD et cherchons à calculer la tension entre les bornes B et D.

$$V_B - V_D = \bar{z}_3 \bar{i}_3 - \bar{z}_4 \bar{i}_{24}$$

$$\begin{cases} (\bar{z}_1 + \bar{z}_3) \bar{i}_3 - (\bar{z}_2 + \bar{z}_4) \bar{i}_{24} = 0 \\ (\bar{z}_1 + \bar{z}_3) \bar{i}_3 + 0 = e \end{cases}, D = \begin{vmatrix} \bar{z}_1 + \bar{z}_3 & -(\bar{z}_2 + \bar{z}_4) \\ \bar{z}_1 + \bar{z}_3 & 0 \end{vmatrix} = (\bar{z}_1 + \bar{z}_3)(\bar{z}_2 + \bar{z}_4) \text{ d'où :}$$

$$\bar{i}_3 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & -(\bar{z}_2 + \bar{z}_4) \\ e & 0 \end{vmatrix} = \frac{e}{D} (\bar{z}_2 + \bar{z}_4) \text{ et } \bar{i}_{24} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \bar{z}_1 + \bar{z}_3 & 0 \\ \bar{z}_1 + \bar{z}_3 & e \end{vmatrix} = \frac{e}{D} (\bar{z}_1 + \bar{z}_3), \text{ on en déduit :}$$

$$V_B - V_D = \bar{z}_3 \bar{i}_3 - \bar{z}_4 \bar{i}_{24} = \frac{e}{D} (\bar{z}_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_1 \bar{z}_4).$$

On débranche la source de tension alternative et cherchons la résistance équivalente :

$$\bar{z}_{eq} = \bar{z}_1 // \bar{z}_3 + \bar{z}_2 // \bar{z}_4.$$

On a donc : $(\bar{z}_{eq} + \bar{z}_D) \bar{i} = V_B - V_D$, on veut que le courant soit nul donc la tension doit être nulle puisque l'impédance ne l'est pas et finalement : $\bar{i} = 0 \Rightarrow V_B - V_D = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{z}_2 \bar{z}_3 = \bar{z}_1 \bar{z}_4}$.

Application : $\bar{z}_1 = \frac{R}{1 + jRC\omega}$, $\bar{z}_2 = R' + \frac{1}{jC\omega}$, $\bar{z}_3 = P$ et $\bar{z}_4 = Q$; on a :

$$R' = \frac{Q}{P} \frac{R}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \text{ et } C' = \frac{P}{Q} \frac{1 + R^2 C^2 \omega^2}{R^2 C \omega^2}.$$

3.66 Différentes expressions de la puissance

$$1- \bar{z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \text{ et } \bar{z}^* = R - j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \text{ d'où en faisant la somme : } R = \frac{\bar{z} + \bar{z}^*}{2}.$$

$$2- \text{On sait que la puissance complexe est : } \bar{p} = \frac{\bar{v} \bar{i}^*}{2} = P + jP_r \rightarrow P = \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{v} \bar{i}^*}{2} \right),$$

$$P = \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{v} \bar{i}^*}{2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\bar{z} \bar{i} \bar{i}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\bar{z}) \bar{i} \bar{i}^* = \frac{1}{2} R \bar{i} \bar{i}^* = \frac{\bar{z} + \bar{z}^*}{4} \bar{i} \bar{i}^*.$$

$$3- P = \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{v} \bar{i}^*}{2} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{v} \bar{i}}{2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{v} \bar{i}^*}{2} + \frac{\bar{v} \bar{i}}{2} \right) = \frac{\bar{v} \bar{i}^* + \bar{v} \bar{i}}{4}.$$

$$4- P = \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{v} \bar{i}^*}{2} \right) = P = \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{v} \bar{v}^*}{2 \bar{z}^*} \right) = \frac{1}{2} \bar{v} \bar{v}^* \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\bar{z}^*} \right) = \frac{1}{2} \bar{v} \bar{v}^* \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{\bar{z}^*} \right) = \left(\frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{\bar{z}^*} \right) \frac{\bar{v} \bar{v}^*}{4}.$$

3.67 Méthode des trois ampèremètres.

L'intensité dans la branche 1 est $\bar{i}_1 = \bar{i}_2 + \bar{i}_3$ et la tension aux bornes de l'impédance est

$$\bar{u} = r \bar{i}_3 = z \bar{i}_2. \text{ La puissance est : } P = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \bar{u} \bar{i}_2^* \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} r \bar{i}_3 \bar{i}_2^* \right). \text{ On calcule :}$$

$$\overline{\dot{\mathbf{i}}_1} \overline{\dot{\mathbf{i}}_1}^* = (\overline{\dot{\mathbf{i}}_2} + \overline{\dot{\mathbf{i}}_3})(\overline{\dot{\mathbf{i}}_2} + \overline{\dot{\mathbf{i}}_3})^* \rightarrow 2I_1^2 = 2I_2^2 + 2I_3^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{\dot{\mathbf{i}}_3} \overline{\dot{\mathbf{i}}_2}^*) \text{ d'où : } P = \frac{r}{2}(I_1^2 - I_2^2 - I_3^2).$$

3.68 Méthode des trois voltmètres.

$$\overline{V}_1 = \overline{V}_2 + \overline{V}_3 \text{ et } \overline{V}_2 = r \overline{\mathbf{i}} \text{ d'où : } P = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} \overline{V}_3 \overline{\mathbf{i}}^*\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2r} \overline{V}_3 \overline{V}_2^*\right).$$

$$\text{Or : } \overline{V}_1 \overline{V}_1^* = (\overline{V}_2 + \overline{V}_3)(\overline{V}_2 + \overline{V}_3)^* \rightarrow 2V_1^2 = 2V_2^2 + 2V_3^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{V}_3 \overline{V}_2^*) \text{ et donc :}$$

$$P = \frac{1}{2r}(V_1^2 - V_2^2 - V_3^2).$$