Lois générales de l'électrocinétique

« Patience et longueur de temps
Font plus que force ni que rage. »
Jean de La Fontaine in « Fables », le Lion et le Rat.

Résumé

L'électrocinétique traite de la circulation des charges électriques dans les milieux conducteurs appelés réseaux ou circuits. Deux grandeurs essentielles représentées par des fonctions dépendantes du temps sont utilisées, le courant (débit de charges) et la tension (différence de potentiels entre deux points d'un circuit). Ce sont des grandeurs algébriques dont le signe indique la direction par rapport à un sens de référence choisi arbitrairement au début de l'étude et désigné comme conventionnel.

Les charges électriques circulent dans des éléments électriques appelés dipôles. Les éléments de base sont décrits par des lois de comportement linéaires entre la tension et le courant : résistances, sources de tension ou de courant, indépendantes ou liées, condensateurs et inductances. L'interconnexion de ces éléments au sein des réseaux est décrite par les lois de fonctionnement de Kirchhoff qui regroupe la loi des nœuds et la loi des mailles.

Les dipôles électriques et les réseaux peuvent aussi être décrits par leur comportement énergétique. C'est pourquoi la puissance et l'énergie sont définies afin d'envisager leur manifestation au sein des éléments de base.

Enfin, sans les étudier, les différents modes d'étude des réseaux électriques sont introduits : le régime transitoire qui sépare deux régimes permanents des grandeurs tensions, courant, énergie et puissance.

Sommaire

I. Définitions 2
I.1. Les grandeurs électriques 2
I.1.1. Le courant électrique 2
I.1.2. La tension 2
I.2. Conventions d'écriture 2
II. Réseaux de Kirchhoff 3
II.1. Les éléments de base 3
II.1.1. La résistance 3
II.1.2. Sources indépendantes 4
II.1.3. Sources dépendantes 4
II.1.4. Condensateur 5
II.1.5. Inductance 6
II.2. Règles de connexion 6
II.3. Loi des nœuds et loi des mailles 7
II.3.1. Loi des nœuds 7
II.3.2. Loi des mailles 7
II.4. Méthodologie d'étude et exemple 8
II.4.1. Méthodologie 8
II.4.2. Exemple : circuit simple à sept éléments 8
III. Description énergétique des circuits électriques 10
III.1. Définitions 10
III.2. Remarques 10
III.3. Expression de la puissance et de l'énergie pour les dipôles élémentaires 10
III.4. Lois de Kirchhoff au sens énergétique 11
IV. Du réseau… à son étude suivant la nature des grandeurs 12
V. Bibliographie 13

I. Définitions

I.1. Les grandeurs électriques

De manière courante, à l'échelle macroscopique des circuits (et non à l'échelle microscopique des matériaux), deux grandeurs électriques essentielles interviennent dans les circuits électriques : le courant et la tension.

I.1.1. Le courant électrique

Le courant électrique *i(t)* instantané dans un conducteur est le débit de charges *q(t)* :

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}\,q(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

C'est une grandeur algébrique dont le signe marque le sens. Il s'exprime en ampères[1] (A).

Sur le conducteur, on place une flèche pour marquer le sens conventionnel positif du courant (***Figure 1***). Il se trouve que ce sens positif est contraire au sens de déplacement des électrons, mais c'est sans influence sur les évaluations puisque la même convention de signe est conservée pour tous les courants.

I.1.2. La tension

La tension électrique *u(t)* entre deux points d'un circuit est la différence entre les potentiels (notés *v*) en ces deux points. C'est pour cela que la tension électrique est aussi dénommée **différence de potentiel** (ddp). Elle s'exprime en volts[2] (V). La tension est indiquée par une flèche placée entre les deux points du circuit (***Figure 2***). La différence est souvent définie par rapport à un potentiel nul de référence pour le circuit qui est appelé masse (***Figure 3***). La tension est aussi une grandeur algébrique.

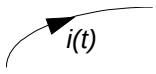


Figure 1 : courant.

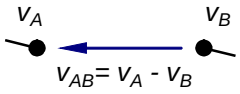


Figure 2 : tension.

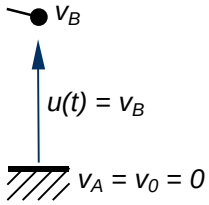


Figure 3 : masse.

I.2. Conventions d'écriture

Dans un circuit électrique, a priori,, on ne connaît ni le signe du courant ni celui de la tension. Des conventions de notation de ces grandeurs sont donc définies : la convention générateur (Figure 4) et la convention récepteur (Figure 5).

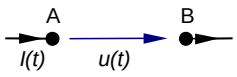


Figure 4 : convention générateur.

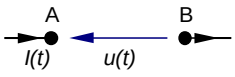


Figure 5 : convention récepteur.

[1] D'après **André-Marie Ampère**, physicien Français (1775-1836).

[2] D'après **Alessandro Volta**, physicien italien (1745-1827).

II. Réseaux de Kirchhoff[3]

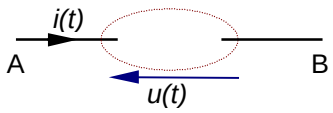
Les réseaux électriques sont constitués par l'interconnexion d'éléments appelés dipôles. Ceux-ci sont définis en exprimant la relation liant la tension à leurs bornes au courant les traversant. On distingue une catégorie d'éléments fondamentaux régis par des relations linéaires. Ces dipôles linéaires sont décrits dans cette partie.

Pour d'autres, le courant et la tension sont attachés par une relation non linéaire (faisant intervenir des fonctions mathématiques plus pour moins complexes). Les évaluations sont délicates à effectuer par les lois de base classiques de l'électrocinétique. Il faut en effet avoir recours à des méthodes numériques sur calculateur, ce qui les écarte de notre étude.

II.1. Les éléments de base

Les éléments disposent d'un nombre fini de bornes destinées à établir les connexions : 2 bornes pour un dipôle, 4 bornes pour un quadripôle et *n* bornes pour un multipôle. Chacune des bornes est soumise à un potentiel tandis qu'elle véhicule un courant (entrant ou sortant). Ces deux grandeurs électriques sont des fonctions réelles du temps (voir §I.1.1et §I.1.2 pour les notations et définitions).

Dans un multipôle, la conservation de la charge électrique impose que la somme des courants entrants est égale à la somme des courants sortants. Les tensions et les courants ont un sens choisi conventionnellement au début de l'étude et invariant par la suite. Le plus généralement, on choisit la convention récepteur, mais la convention inverse est communément utilisée pour les sources de tension (Figure 6).



Dans le cas de ce dipôle, le courant *i* est positif s'il circule réellement de A vers B, tandis que la flèche représentant la tension est notée dans le sens contraire du courant afin de représenter $v_A > v_B$.

Figure 6 : dipôle en convention récepteur.

II.1.1. La résistance

Définitions et notations

Le symbole et les notations associées en convention *récepteur* sont indiquées sur la Figure 7.

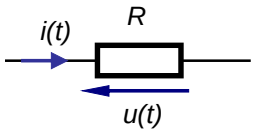


Figure 7 : symbole de la résistance et notations en convention récepteur.

Loi de fonctionnement (loi d'Ohm[4]) : $u(t) = R \cdot i(t)$

Dans cette relation, *R* est la résistance électrique en ohms (Ω), *u* et *i* sont exprimés respectivement en volts (V) et en ampères (A),

En échangeant la tension et le courant, on obtient la relation : $i(t) = G \cdot u(t)$.

Relation dans laquelle la grandeur *G* ($G = \frac{1}{R}$) est la conductance exprimée en siemens[5] (S).

---

3 D'après **Gustav Kirchhoff**, physicien allemand (1824-1887).

4 D'après **Georg Ohm** , physicien allemand (1789-1854).

5 D'après **Werner Von Siemens**, ingénieur et industriel allemand (1816-1892) et/ou son frère **Wilhelm Von Siemens**, ingénieur et industriel britannique d'origine allemande (1823-1883).

Propriétés

- Si *R* est constante, on dit que la résistance est linéaire. Dans le cas contraire, la résistance est non linéaire. La représentation graphique *i* = f(*u*) est la caractéristique tension-courant de la résistance.
- La loi d'Ohm est aisément illustrée par l'homothétie des tracés temporels indiqués sur la Figure 8. Dans la pratique ceci peut être observé sur l'écran d'un oscilloscope.

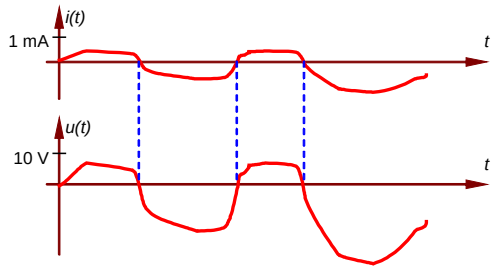
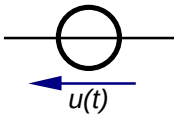


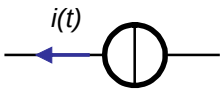
Figure 8 : illustration pratique de la loi d'Ohm.

II.1.2.Sources indépendantes



u(t) est indépendante de *i(t)* : *u* est imposée.

Figure 9 : générateur de tension ; symbole, schéma et notations.



i(t) est indépendant de *u(t)* : *i* est imposé.

Figure 10 : générateur de courant ; symbole, schéma et notations.

Remarques (pour se souvenir des symboles) :

- générateur de tension, résistance interne faible, le trait traverse (conducteur ≡ *R* nulle).
- générateur de courant, résistance interne élevée, trait interrompu (circuit ouvert).

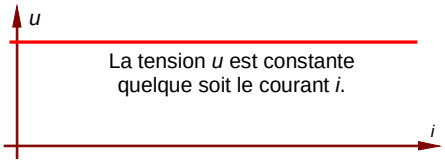


Figure 11 : générateur de tension constante.

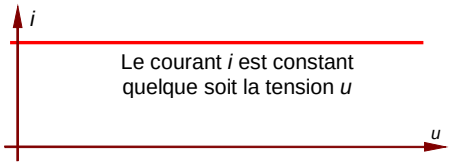


Figure 12 : générateur de courant constant.

On dit que le générateur de tension est éteint lorsqu'il est réduit à une tension identiquement nulle (équivalent à un conducteur). Pour le générateur de courant, il est éteint si le courant est identiquement nul (circuit ouvert).

II.1.3. Sources dépendantes

Sources de tension (Figure 13)

La tension délivrée u(t) est dépendante de la tension ou du courant d'un autre élément du réseau :

$$u_{em}(t) = \alpha \cdot u'(t) \text{ ou } u_{em}(t) = \beta \cdot i'(t)$$

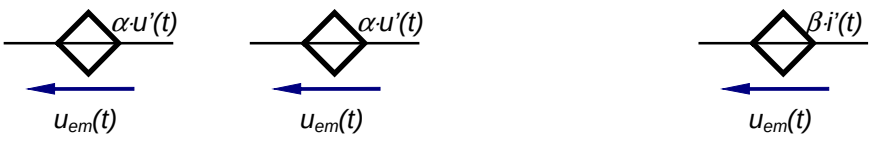


Figure 13 : sources de tension dépendantes.

La relation de dépendance est notée à coté du symbole de la source.

Sources de courant (Figure 14)

Le courant délivré i(t) est dépendant de la tension ou du courant d'un autre élément du réseau :

$$i_{em}(t) = \delta \cdot i'(t) \text{ ou } i_{em}(t) = \varepsilon \cdot u'(t)$$

Figure 14 : sources de courant dépendantes.

II.1.4. Condensateur

Définitions et notations

Le symbole et les notations associées en convention *récepteur* sont indiquées sur la Figure 15.

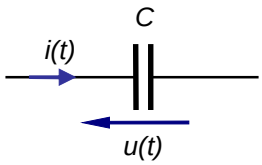


Figure 15 : symbole d'un condensateur et notations en convention récepteur.

Loi de fonctionnement : $\boxed{i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}\,u(t)}{\mathrm{d}\,t}}$.

Dans cette relation, C est la capacité du condensateur en farads[6] (F), indépendante du temps.

Remarque : démonstration

$q(t) = C \cdot u(t)$ (électrostatique) et $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,q(t)}{\mathrm{d}\,t}$ (définition) en éliminant *q* : $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}\,u(t)}{\mathrm{d}\,t}$.

Propriété essentielle

En exprimant la tension aux bornes du condensateur

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(x)\,\mathrm{d}\,x\,,$$

on remarque que la tension est définie par une intégrale fonction de la borne supérieure (*t*). C'est un résultat de mathématique qui permet de conclure que la tension *u(t)* est une fonction continue du temps.

On n'observe jamais de discontinuité de tension aux bornes d'un condensateur.

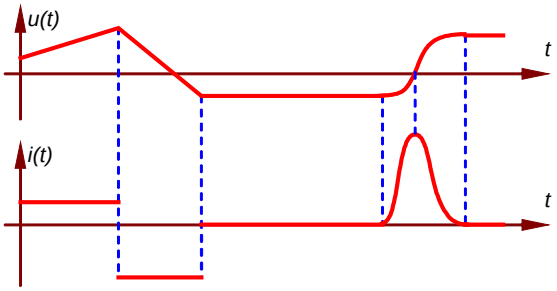


Figure 16 : illustration de la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur.

6 D'après **Mickael Faraday**, physicien anglais (1791-1867).

II.1.5. Inductance

Définitions et notations

Le symbole et les notations associées en convention *récepteur* sont indiquées sur la Figure 15.

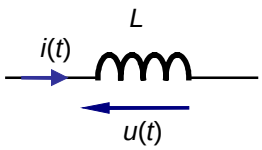


Figure 17 : symbole d'une inductance et notations en convention récepteur.

Loi de fonctionnement : $u(t) = L\dfrac{\mathrm{d}\,i(t)}{\mathrm{d}\,t}$.

Dans cette relation, L est l'inductance du dipôle inductance exprimée en henrys[7] (H), indépendante du temps.

Propriété essentielle

En exprimant le courant dans l'inductance

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t u(x)\,\mathrm{d}\,x\ ,$$

on remarque que l'expression, définie elle aussi par une intégrale fonction de la borne supérieure, permet de conclure que le courant dans l'inductance *i(t)* est une fonction continue du temps.

On n'observe jamais de discontinuité du courant traversant une inductance.

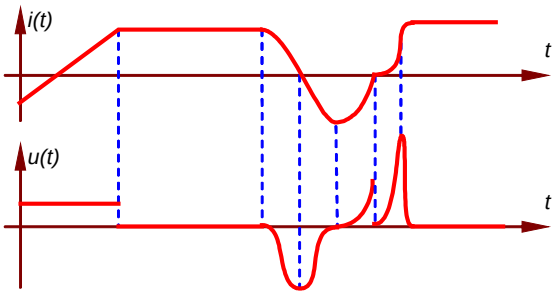


Figure 18 : illustration de la continuité du courant traversant une inductance.

II.2. Règles de connexion

Après les avoir définis, les différents éléments sont assemblés au sein de réseaux. Ils sont composés de branches orientées reliant deux points appelés nœuds. Si les branches sont adjacentes (à la queue leu leu), on est en présence d'un chemin. Si deux chemins disjoints de mêmes extrémités sont reliés, on obtient une maille (ou cycle). Toutes ces définitions sont illustrées dans l'exemple de la ***Figure 19***.

[7] D'après **Joseph Henry**, ingénieur et physicien américain (1797-1878).

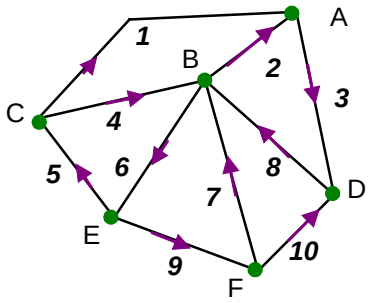


Figure 19 : exemple de réseau.

Le réseau de la ***Figure 19*** est un graphe dans lequel on distingue :

- 6 noeuds, de A, B, C, D, E et F ;
- 10 branches, numérotées de 1 à 10 ;
- (4, 2, 3) est un chemin délimité par C et D.
- (8, 6, 5, 1, 3) est une maille.

Dans la pratique les branches abritent un assemblage d'éléments décrits au §II.1.

II.3. Loi des nœuds et loi des mailles

Pour mettre en équation le réseau définit précédemment afin de rechercher les grandeurs électriques inconnues parmi tous les courants et les tensions, il faut rechercher les relations attachées à l'interconnexion des éléments. Pour y parvenir, on traduit la conservation des charges électriques lorsqu'un nœud est atteint, c'est la loi des nœuds relative aux courants dans les branches. Pour les tensions, il faut traduire que le potentiel nul en un nœud annule la somme des tensions prise sur une maille passant par ce nœud, c'est la loi des mailles pour les tensions.

II.3.1. Loi des nœuds

La somme algébrique des courants circulants dans les branches adjacentes à un nœud est nulle. On peut dire aussi que la somme algébrique des *k* courants entrants dans un nœud est égale à la somme des *l* courants sortants (ceci signifie que toutes les charges apportées sont extraites).

$$\sum_{k \rightarrow \bullet} i_k = \sum_{\bullet \rightarrow l} i_l$$

II.3.2.Loi des mailles

La somme algébrique des tensions rencontrées en parcourant une maille dans un sens prédéfini est nulle.

$$\sum (\pm) v_k = 0 \begin{cases} v_k \text{ est comptée positivement si elle est dans le sens de parcours de la maille.} \\ v_k \text{ est comptée négativement si elle est dans le sens contraire du parcours de la maille.} \end{cases}$$

II.4. Méthodologie d'étude et exemple

II.4.1. Méthodologie

De manière appliquée, pour effectuer la mise en équation puis la résolution d'un circuit électrique, on peut utiliser la démarche suivante :

- dans un premier temps, numéroter les nœuds et les branches ;
- dans chaque branche du circuit, noter les courants (flèche pour le sens conventionnel et nom) ;
- pour chaque élément, noter la tension à ses bornes (flèche et nom) ;
- mettre en équation en utilisant deux groupes de relations :
  - un pour les aspects topologiques (organisation du réseau) : (n-1) lois des noeuds sont nécessaires pour n noeuds recensés et (m-1) lois de mailles sont nécessaires pour m mailles indépendantes recensées (une maille est indépendante si elle n'est pas une combinaison des autres),
  - un second pour les relations attachées à chaque élément utilisé.
- poser les hypothèses simplificatrices (courants ou tensions identiques, contraintes imposées par les éléments, etc.) ;
- simplifier les relations en tenant compte des hypothèses — à ce stade on dispose d'un système d'équations ;
- résoudre le système pour en extraire les grandeurs inconnues.

Remarque :

Cette méthode apparaît très fastidieuse, mais elle offre l'avantage de donner les moyens de mettre en équation et résoudre un réseau électrique. Elle ne constitue qu'une étape transitoire qui s'effacera avec l'expérience. Peu à peu, un ensemble de techniques permettant de franchir les étapes plus rapidement se développe au point de s'affranchir des aspects lourds et fastidieux.

Pour mettre en œuvre cette démarche, intéressons-nous à l'exemple du §II.4.2.

II.4.2. Exemple : circuit simple à sept éléments

Dans le circuit de la Figure 20, toutes grandeurs électriques sont permanentes, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas modifiées au cours du temps. On les note alors en lettres majuscules. Les éléments (résistances et sources) sont complètement connus.

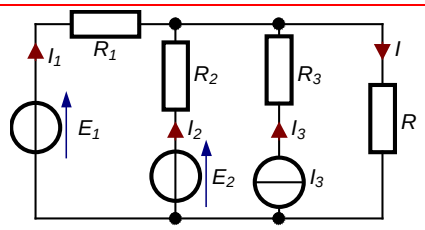


Figure 20

On cherche à évaluer l'expression du courant I dans la dernière résistance R.

Identification des différentes grandeurs (tensions et courants)

- Courants : $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ et $I(t)$ invariants, on peut donc écrire I_1, I_2, I_3 et I.
- Tensions : E_1, E_2, U, U_1, U_2, U_3 (notés sans la variable t car invariantes),

Identification de la topologie du réseau

- Quatre branches : celles de E_1, E_2 , I_3 et U.
- Trois mailles indépendantes : (E_1, R_1, R), (E_2, R_2, R) et (I_3, R_3, R).
- Deux nœuds donc une seule loi des nœuds (attention au piège du dédoublement d'un nœud).

Mise en équation

- 1 loi des nœuds : $I_1 + I_2 + I_3 = I$;
- 3 lois des mailles : $U = E_1 - R_1 \cdot I_1$; $U = E_2 - R_2 \cdot I_2$; $U = E_3 - R_3 \cdot I_3$ (E_3 libre).

Résolution

Exprimer le courant dans chaque branche à l'aide des trois lois des mailles puis remplacer dans la loi des nœuds pour extraire le courant dans la résistance R :

$$I = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1 + R_1 R_2 I_3}{R_1 R_2 + R R_1 + R R_2}$$

III. Description énergétique des circuits électriques

III.1. Définitions

Un dipôle est traversé par un courant $i(t)$ et soumis à la tension $u(t)$ notés en convention récepteur.

Puissance

La puissance électrique instantanée absorbée par ce dipôle s'exprime par :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

La puissance s'exprime en watts[8], W

Energie

L'énergie présente dans le dipôle à l'instant t s'exprime par :

$$w(t) = w(0) + \int_0^t p(x)dx$$

où $w(0)$ est l'énergie initiale (et sous réserve que $p(t)$ soit intégrable).

L'énergie s'exprime en joules[9], J

III.2. Remarques

De par sa définition sous une forme intégrale, l'énergie est une fonction continue du temps.

> On n'observe jamais de discontinuité d'énergie électrique dans un dipôle.
> Cette remarque est valable pour tous les phénomènes physiques de l'univers.

La puissance peut aussi s'exprimer comme la dérivée de l'énergie :

$$p(t) = \frac{\mathrm{d}\, w(t)}{\mathrm{d}\, t}$$

Une puissance positive signifie que le dipôle « reçoit » de l'énergie car elle augmente (dérivée >0).

En respectant la convention de signe établie :

- l'élément est passif si $w(t)$ est positive ou nulle (dissipation énergétique),
- l'élément est actif sinon (l'énergie provient de sources internes au dipôle).

III.3. Expression de la puissance et de l'énergie pour les dipôles élémentaires

	Puissance	Energie
Résistance	$p_R(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) \geq 0$	$w_R(t) = R\int_{-\infty}^{t} i^2(x)\,\mathrm{d}\,x \geq 0$
Condensateur	$p_C(t) = C\frac{\mathrm{d}\,u(t)}{\mathrm{d}\,t}u(t) = \frac{1}{2}C\frac{\mathrm{d}\,u^2(t)}{\mathrm{d}\,t}$	$w_C(t) = \frac{1}{2}C \cdot u^2(t) \geq 0$
Inductance	$p_L(t) = L\frac{\mathrm{d}\,i(t)}{\mathrm{d}\,t}i(t) = \frac{1}{2}L\frac{\mathrm{d}\,i^2(t)}{\mathrm{d}\,t}$	$w_L(t) = \frac{1}{2}L \cdot i^2(t) \geq 0$

Pour ces éléments, on remarque que l'énergie est toujours positive. Cette propriété est caractéristique des éléments passifs.

La résistance tient une place particulière car sa puissance est toujours positive, elle ne peut la restituer, on dit que c'est un élément dissipatif (c'est le phénomène irréversible appelé effet Joule).

8 D'après **James Watt**, ingénieur écossais (1736-1819).

9 D'après **James Joule**, physicien anglais (1818-1889).

La puissance dans le condensateur et l'inductance peut être positive ou négative : ces deux éléments peuvent emmagasiner et restituer de l'énergie. On dit que ces éléments sont réactifs (ils peuvent restituer l'énergie emmagasinée).

III.4. Lois de Kirchhoff au sens énergétique

Loi des nœuds

En exprimant la loi des nœuds sous forme énergétique, le potentiel du nœud ne variant pas, alors la puissance pénétrant par un nœud est identique à celle en sortant.

Loi des mailles

La somme des puissances observées en parcourant une maille est nulle.

Il en résulte que la somme des puissances absorbées par toutes les branches d'un réseau est identiquement nulle. D'autre part, l'énergie fournie par les sources du réseau n'est dissipée que par les éléments passifs.

IV. Du réseau à son étude… suivant la nature des grandeurs

Nous venons de décrire les réseaux de Kirchhoff et proposer en ensemble de méthodes offrant des outils de mise en équation des circuits pour exprimer les grandeurs inconnues.

Cet aspect essentiel nous garantit les fondements sur lesquels nous allons analyser les circuits en se référant, d'une part, à la nature des signaux issus des générateurs, mais aussi en tenant compte de leur évolution depuis leur naissance jusqu'à un temps où tous sont établis.

Nous allons mettre en évidence ces aspects sur un exemple élémentaire de circuit indiqué à la Figure 21.

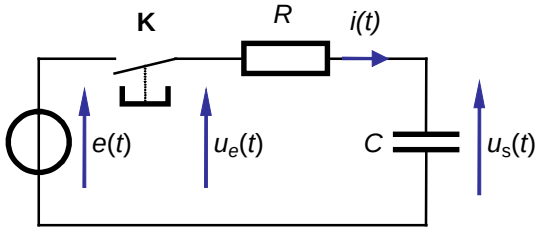


Figure 21 : circuit RC série.

Ce circuit *RC* série peut être mis sous tension à l'instant $t = 0$ par fermeture de l'interrupteur K.

Suivant la nature du signal délivré par le générateur de tension, comment la tension $u_s(t)$ aux bornes du condensateur va-t-elle évoluer ?

Cette question à l'apparente simplicité va trouver ses réponses au travers de différentes études.

Le condensateur est initialement déchargé ($q(0) = 0$), donc la tension $u_s(0)$ est nulle. K étant ouvert, le courant i est nul. Le circuit est alors au repos, c'est un état permanent.

Si la source délivre une tension continue (permanente), dès la fermeture de K, le courant peut exister et le condensateur absorber des charges. La tension $u_s(t)$ se met à croître. Dans ces conditions, la différence entre les deux tensions diminue et $u_s(t)$ se stabilise à la tension de la source. Pendant une période après l'instant initial, on observe un régime transitoire.

Une fois la stabilisation effective, un nouveau régime s'est établi, c'est le régime permanent (Figure 22).

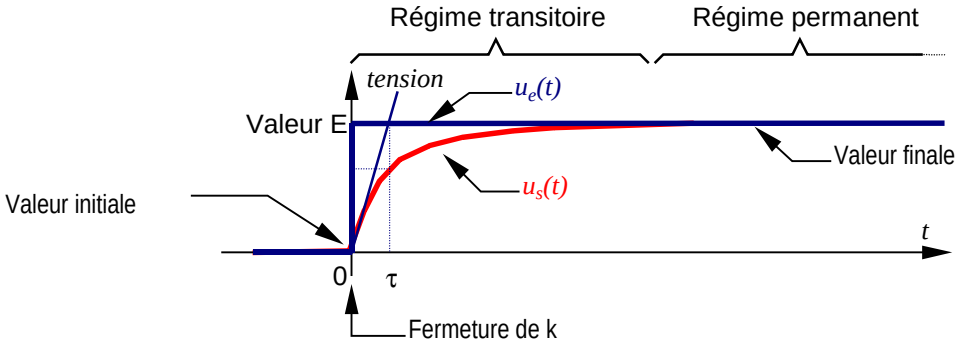


Figure 22 : réponse temporelle du circuit RC.

Si le générateur délivre une tension sinusoïdale, il existe aussi un régime transitoire qui fini par laisser place au régime permanent. Bien entendu la forme des tensions n'est plus la même que dans le cas précédent.

Dès lors que l'on connaît la topologie du circuit, nous disposons des moyens pour le mettre en équation. Si la nature des signaux délivrés par les générateurs est connue, la mise en équations va nous conduire à un ensemble d'équations différentielles dont la résolution aboutit aux résultats évoqués un peu plus haut.

La résolution de l'équation sans second membre fournit une solution générale (SGESSM) décrivant le régime dit "libre", c'est à dire le comportement (ou régime) transitoire. La solution particulière

de l'équation avec second membre (SPEASM) nous décrit les signaux lorsque le générateur aura réussi à s'imposer, à forcer, son régime, c'est le comportement (ou régime) permanent.

La suite du cours suivra donc le cheminement suivant :

- connaître les caractéristiques des signaux et en particuliers des signaux usuels ;
- caractériser le comportement transitoire de certains réseaux ;
- s'intéresser aux éléments soumis aux signaux sinusoïdaux de fréquence fixe ;
- s'attacher au régime permanent pour des signaux sinusoïdaux de fréquence fixe ;
- généraliser l'étude des réseaux soumis à des signaux sinusoïdaux de fréquence variable.

V. Bibliographie

- [1] Boite R. et Neirynck J.. Théorie des réseaux de Kirchhoff. Traité d'électricité, d'électronique et d'électrotechnique. Dunod. 1983.