

1 INTERACTIONS COULOMBIENNES ou ELECTROSTATIQUES

1.1 Charge électrique

La charge électrique est une propriété fondamentale de la matière (au même titre que la masse) intervenant dans les phénomènes électromagnétiques.

À l'échelle atomique et dans le cadre de la Physique des basses énergies, on distingue trois types de particules :

- les particules neutres, sans charge,
- les électrons (e^-) chargés négativement (-),
- les protons (p^+) chargés positivement (+).

Unité, dimension

L'unité de charge est le coulomb (C)

$$[q] = I.T \quad 1 \text{ C} = 1 \text{ A.S}$$

La nature discrète (quantification) de la charge électrique a été mise en évidence par Millikan (1909 cf. TD). Les deux types de particules e^- et p^+ ont même charge en valeur absolue :

$$e = |e^-| = p^+ = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

- On peut rencontrer des particules chargées sous forme d'ions (atomes ou molécules chargées).

1.2 Matériaux conducteurs, matériaux isolants

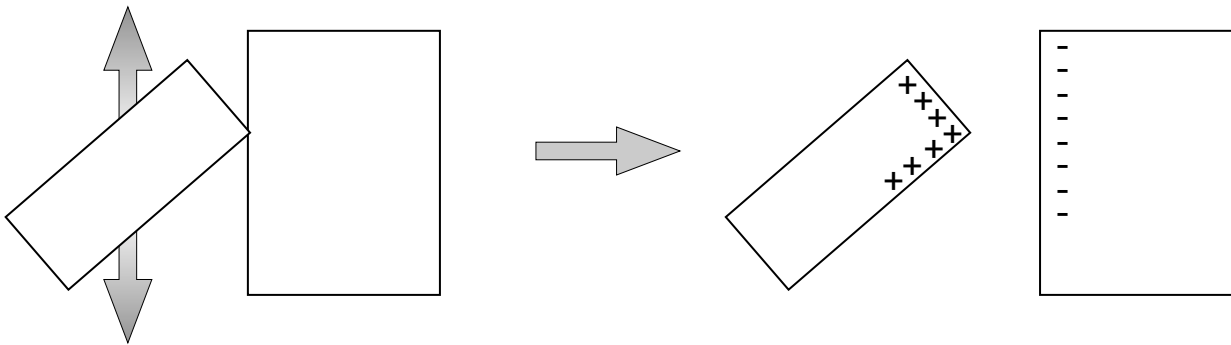
Du point de vue électrique, on distingue deux grandes familles de matériaux : les **isolants** et les **conducteurs**

• Matériaux isolants / diélectriques

Dans les matériaux isolants, les charges sont fixes.

Le phénomène de charges est localisé de manière fixe.

Un isolant se charge par friction :



Les deux isolants sont initialement neutres

Les deux conducteurs ont une charge opposée

À l'échelle macroscopique :

- un objet chargé **négativement** comporte un **excès** de charges négatives ;
- un objet chargé **positivement** comporte un **déficit** de charges négatives.

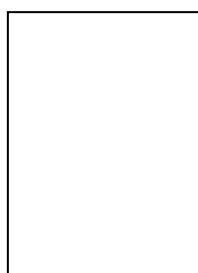
- <http://www.edu.upmc.fr/uel/physique/elecstat/> observer

• Matériaux conducteurs

Dans ce type de matériau, les charges sont libres de se déplacer. \Rightarrow pas de localisation fixe du phénomène de charge.

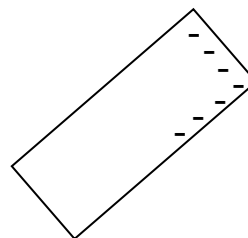
Les charges se répartissent dans l'ensemble du matériau sous l'effet de la répulsion électrostatique (on verra par la suite).

Un conducteur se charge par induction :

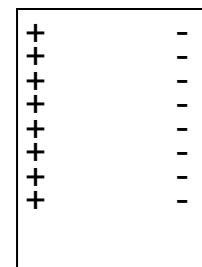


CONDUCTEUR
NEUTRE

①

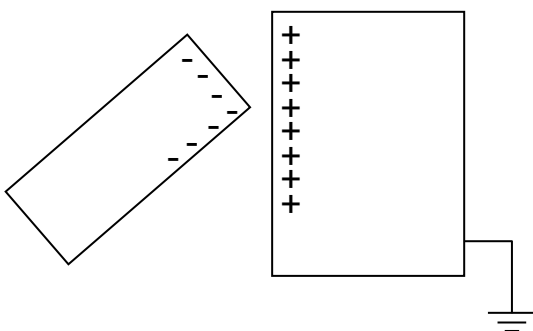


ISOLANT
CHARGÉ

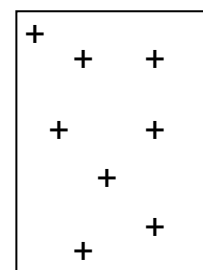


CONDUCTEUR
NEUTRE

② : Polarisation



③ : mise à la terre



④ : les charges se répartissent en surface

Remarques :

- une charge globale positive est généralement due à un déficit de charges négatives.

- Pour un objet chargé électriquement, la charge totale est donnée par :

$$q = (N_{p+} - N_{e-}) \cdot e$$

Le nombre de charges est beaucoup plus petit que le nombre d'atomes dans le matériau :

$$|N_{p+} - N_{e-}| \ll N_{p+}, N_{e-}$$

- Pour un système isolé, la charge électrique totale, c.a.d. la somme algébrique des charges positives et négatives, est constante : **conservation de la charge**

1.3 Distributions de charges

L'étude des propriétés physiques des corps chargés électriquement nécessite une description mathématique de la répartition des charges.

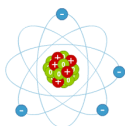
On distinguera les distributions discrètes et les distributions continues :

1.3.1 Distributions discrètes

- charge ponctuelle

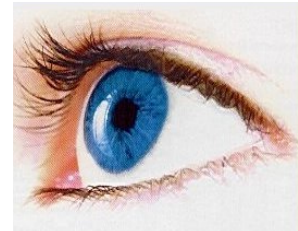
On considérera une charge comme ponctuelle quand la distance charge – observateur est très grande devant la taille caractéristique de la charge :

Atome,
molécule



$r \approx 10^{-10} \text{ m}$

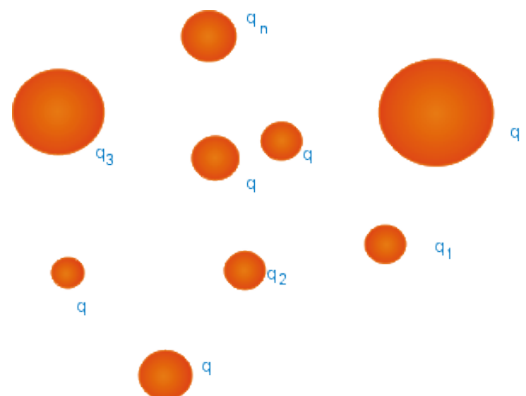
$d \approx 1 \text{ m}$



- distribution discrète

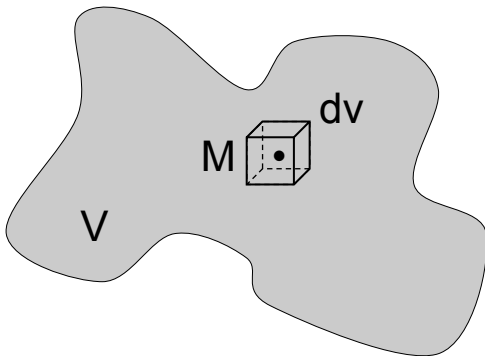
Ensemble de charges discernables
par un observateur

$q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$



1.3.2 Distributions continues

- distribution volumique :



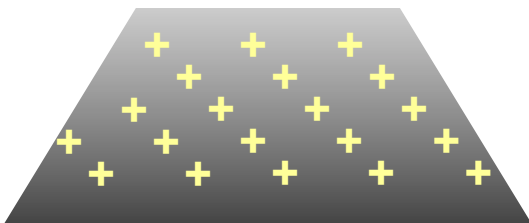
Les charges, indiscernables à l'échelle macroscopique, sont contenues dans un volume v .

Le petit volume Δv autour du point M contient la quantité de charges ΔQ .

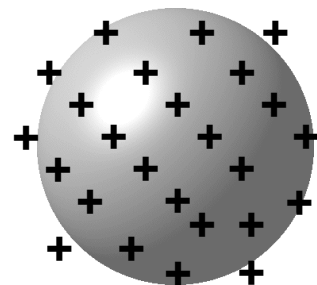
On définit la **densité volumique** de charges ρ par :

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} = \frac{dQ}{dv} \quad \text{en } \text{C} \cdot \text{m}^{-3}$$

- distribution surfacique:



sur un plan



sur une sphère

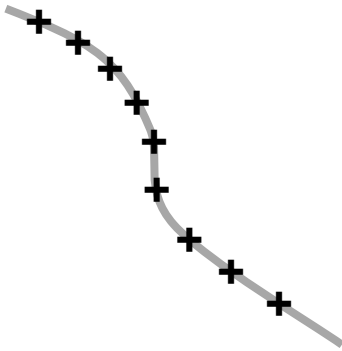
On définit la **densité surfacique** de charges σ par :

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} \quad \text{en } \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$$

exemple : pour la sphère chargée uniformément :

$$\sigma = \frac{Q_{\text{tot}}}{4 \pi R^2}$$

- distribution linéique:



On définit la **densité linéique** de charges λ par :

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \quad \text{en } \text{C} \cdot \text{m}^{-1}$$

Nous verrons ultérieurement l'importance des symétries que peuvent présenter les distributions de charges dans la détermination des champs électriques créés par celles-ci.

1.4 Interactions coulombiennes / électrostatiques

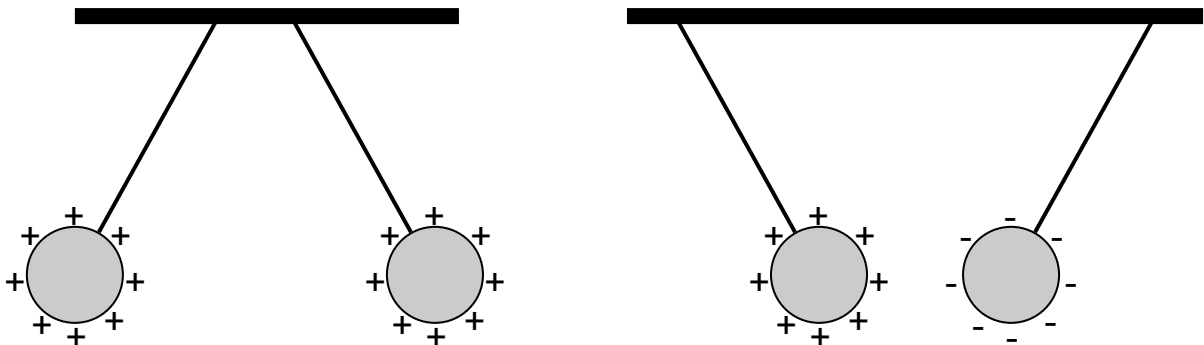
Ensemble de deux interactions réciproques qu'exercent l'un sur l'autre deux systèmes chargés électriquement.

Expérimentalement, on observe que :

- les charges de même signe (+) (+) ou (-) (-) se repoussent ;
- les charges de signes opposés (+) (-) ou (-) (+) s'attirent.

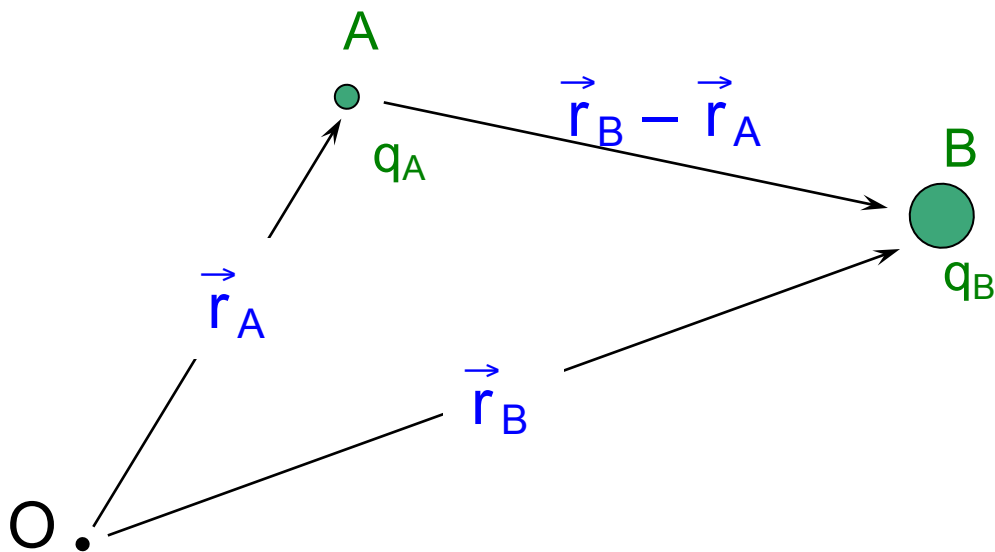
Exemples :

- sphères chargées électriquement



- nuage électronique et noyau des atomes.
- cheveux, ballons, cellophane, photocopieuse
- <http://www.edu.upmc.fr/uel/physique/elecstat/> observer

Cas de deux charges ponctuelles q_A et q_B



La **loi de Coulomb** (électrostatique) indique que la force exercée par A sur B s'exprime sous forme vectorielle par :

$$\vec{F}_{AB} = K \frac{q_A \cdot q_B}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|^2} \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|} = K q_A \cdot q_B \frac{\vec{AB}}{AB^3}$$

ou encore : $\vec{F}_{AB} = K \frac{q_A \cdot q_B}{d_{AB}^2} \vec{u}_{AB}$

avec $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|} = \frac{\vec{AB}}{AB}$ vecteur unitaire

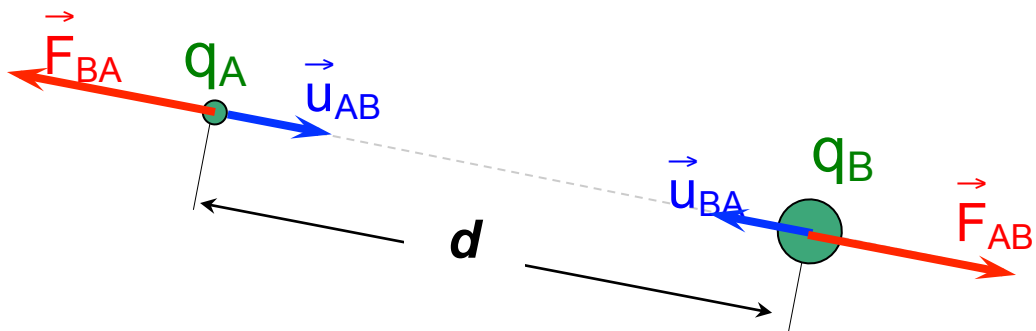
• Force exercée par B sur A :

$$\vec{F}_{BA} = K \frac{q_A \cdot q_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|^2} \cdot \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|}$$

ou encore : $\vec{F}_{BA} = K \frac{q_A \cdot q_B}{d_{AB}^2} \vec{u}_{BA}$

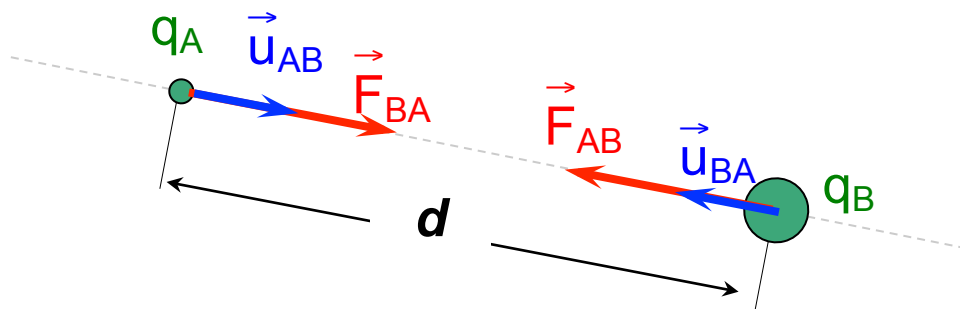
- F est : - proportionnelle à q_A et q_B
- dirigée suivant la droite (AB)
- en $1/r^2$
- dépend des signes de q_A et q_B

1^{er} cas : $q_A \cdot q_B > 0$, charges de même signe (+)(+) ou (-)(-)



interaction répulsive

2^{ème} cas : $q_A \cdot q_B < 0$, charges opposées (+)(-) ou (-)(+)



interaction attractive

- On a toujours $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

(principe des actions réciproques / 3^{ème} loi de Newton)

Valeur de la constante K

- K dépend du système d'unités choisi.

- Dans le système S.I. :
$$K = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0}$$

avec : ϵ_0 : permittivité diélectrique **du vide**

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$$

$$\Rightarrow K = 8.9877 \cdot 10^{+9} \text{ S.I.}$$

- Pour les autres milieux, la permittivité diélectrique change et est toujours supérieure à ϵ_0 .

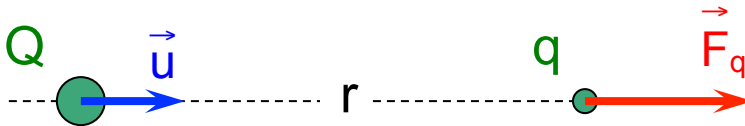
Dans l'air, $\epsilon \approx \epsilon_0$

- On trouve parfois l'approximation $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ (} 8.84 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}\text{)}$
- Dans certains ouvrages, le système d'unité C.G.S. est utilisé, dans ce cas $K = 1$.

1.5 Le champ électrique \vec{E}

1.5.1 Définition

On considère une charge Q fixe et on approche une charge q en un point M situé à une distance r de celle-ci.



La loi de Coulomb indique que q subit une force électrostatique :

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Si on remplace q par q' , la force devient :

The diagram shows two green circles representing charges. The left one is labeled 'Q' and the right one is labeled 'q''. A horizontal dashed line connects them, with a 'r' between the two circles. A blue arrow labeled 'u' points from the 'Q' circle to the 'q'' circle. A red arrow labeled 'F_q'' points from the 'q'' circle to the right, away from the 'Q' circle.

$$\vec{F}_{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot q'}{r^2} \vec{u}$$

La grandeur vectorielle \vec{F}/q est indépendante de q ou q' :

$$\frac{\vec{F}_q}{q} = \frac{\vec{F}_{q'}}{q'} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \vec{E} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{F}_q = q \cdot \vec{E} \\ \vec{F}_{q'} = q' \cdot \vec{E} \end{cases}$$

\vec{E} ne dépend que la charge source Q et de la distance par rapport à cette source. Cette grandeur est définie comme étant le champ électrostatique créé par la charge Q .

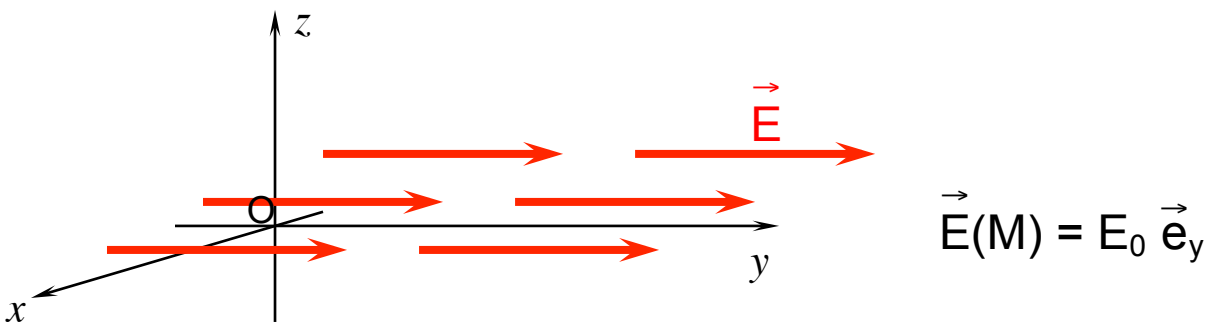
La présence d'une charge électrique modifie donc les propriétés locales de l'espace en faisant apparaître un champ électrostatique affectant chaque point de l'espace.

$\vec{E}(M)$ est un champ vectoriel défini en (presque) tous les points de l'espace :

- en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y,z) \vec{e}_x + E_y(x,y,z) \vec{e}_y + E_z(x,y,z) \vec{e}_z$$

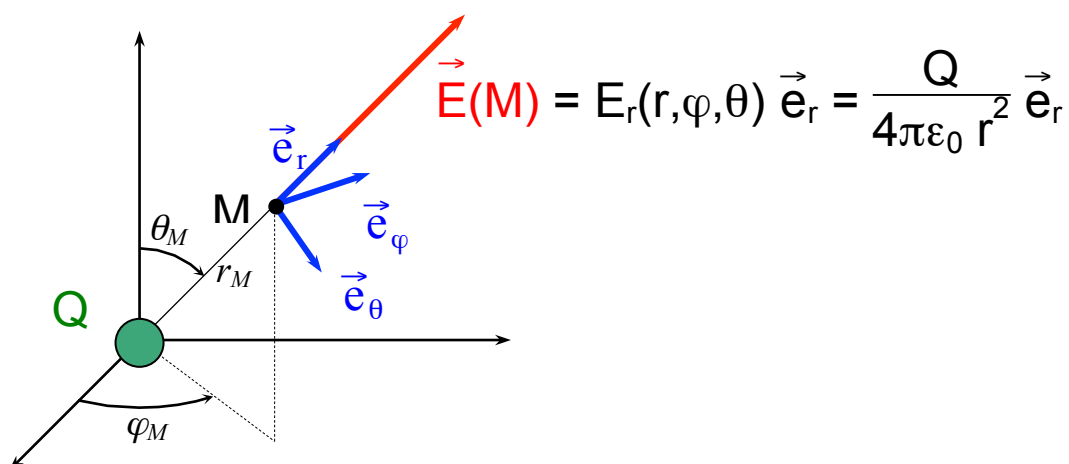
exemple : champ constant selon Oy :



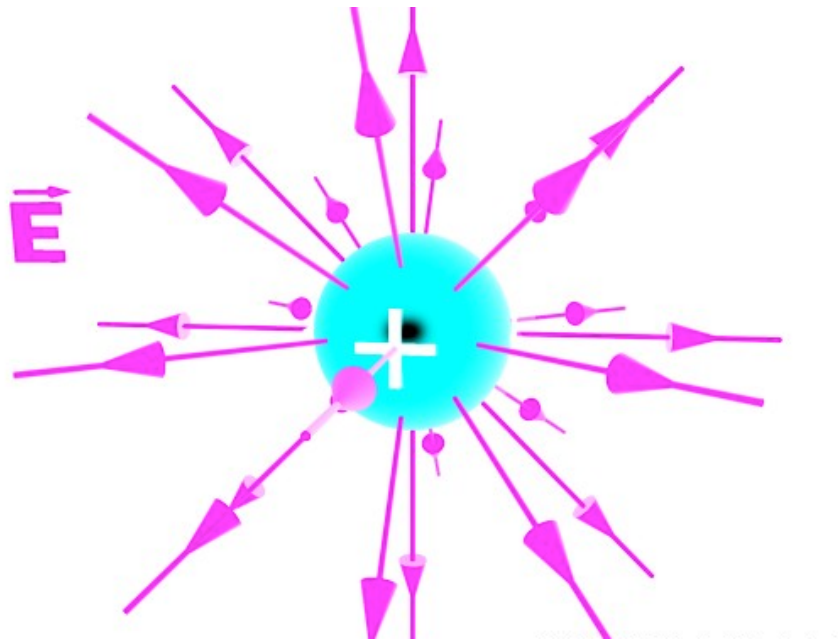
- en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(r,\varphi,\theta) = E_r(r,\varphi,\theta) \vec{e}_r + E_\varphi(r,\varphi,\theta) \vec{e}_\varphi + E_\theta(r,\varphi,\theta) \vec{e}_\theta$$

exemple : champ créé par une charge ponctuelle $Q (>0)$:



Le champ électrique rayonné par une charge ponctuelle est radial :



1.5.2 Dimensions, Unités, Ordres de grandeur

- Les dimensions du champ électrique sont :

$$[E] = M L T^{-3} I^{-1}$$

- Les unités usuelles du champ électrique sont :

- $V \cdot m^{-1}$ volt par mètre

- $N \cdot C^{-1}$ newton par coulomb

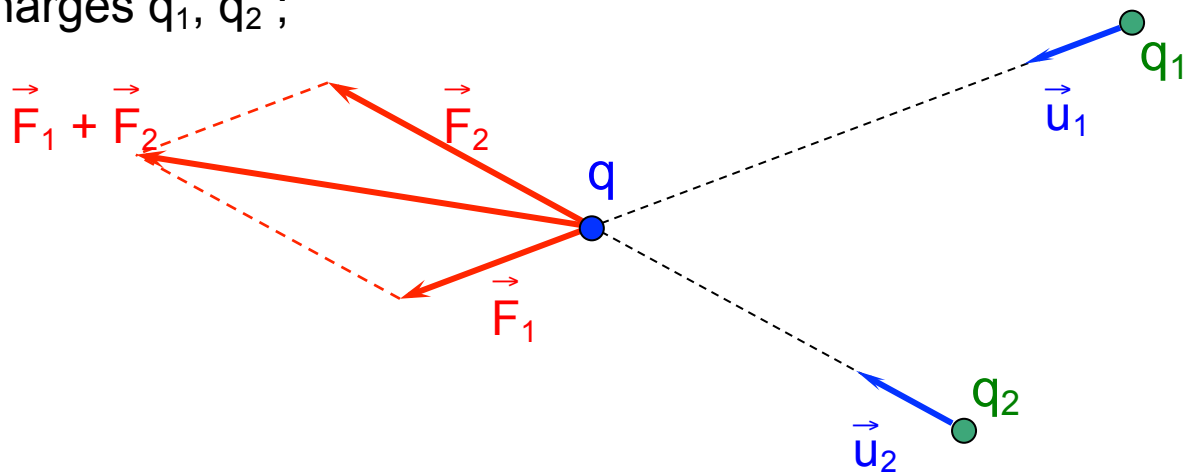
$$\begin{aligned} [N] &= M L T^{-2} \\ [C] &= I T \\ [V] &= M L^2 T^{-3} I^{-1} \end{aligned}$$

- Ordres de grandeur

- tube au néon : $10 V \cdot m^{-1}$
- photocopieur : $10^5 V \cdot m^{-1}$
- foudre : $3 \cdot 10^6 V \cdot m^{-1}$

1.5.3 Théorème de superposition

En vertu de l'additivité des forces électrostatiques auxquelles est soumise une charge Q en présence de deux charges q_1, q_2 ;



on montre que la force totale s'écrit :

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q \vec{E}_1 + q \vec{E}_2 = q (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = q \vec{E}_{\text{tot}}$$

Cela revient à considérer que la charge q est soumise à un champ électrostatique résultant $\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

• www.edu.upmc.fr/uel/physique/elecstat/simuler/champ/th1/th1.htm

On peut généraliser ce résultat à un ensemble de N charges discrètes q_1, q_2, \dots, q_n : le champ résultant sera la somme des N champs individuels \vec{E}_i créés par les charges q_i .

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i$$

Ceci représente le principe de superposition qui traduit la linéarité et l'additivité des champs électriques

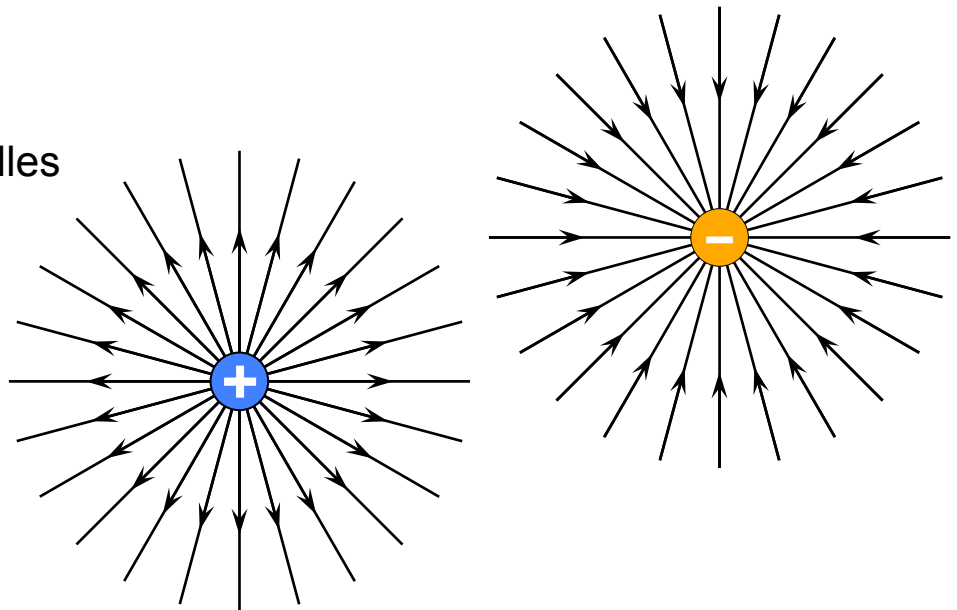
1.5.4 Lignes de champ

Les lignes de champ permettent de visualiser l'allure du champ électrique. Par construction :

- elles sont tangentes au vecteur $\vec{E}(\vec{r})$
- elles sont orientées dans le sens de $\vec{E}(\vec{r})$
- elles ne se croisent jamais.

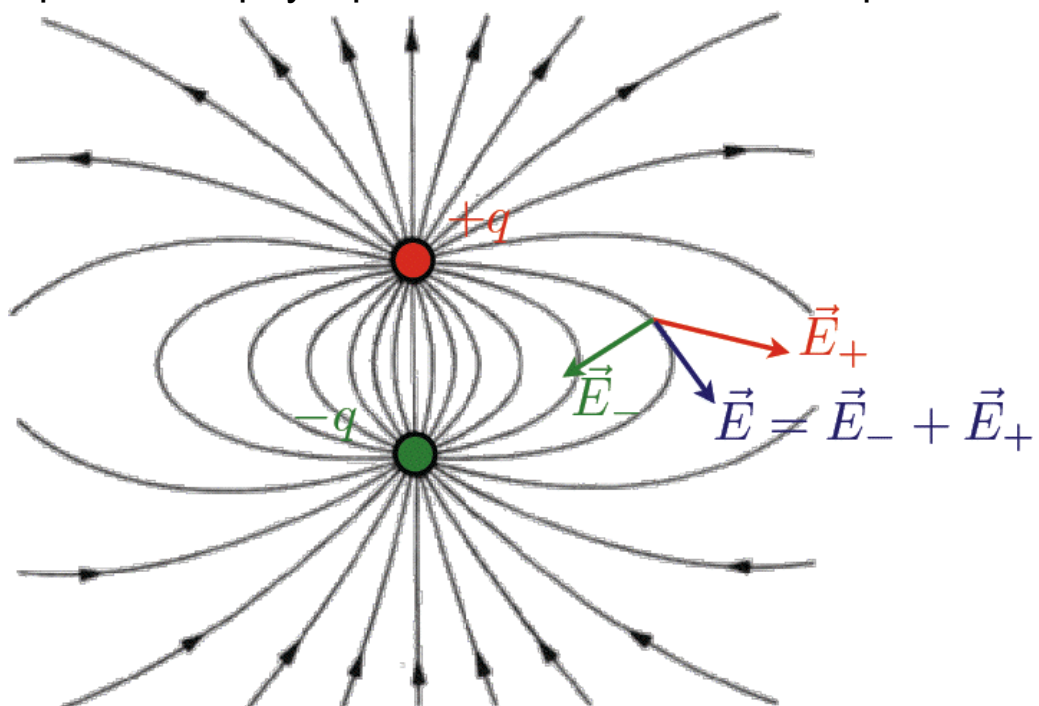
Exemples :

- Charges ponctuelles

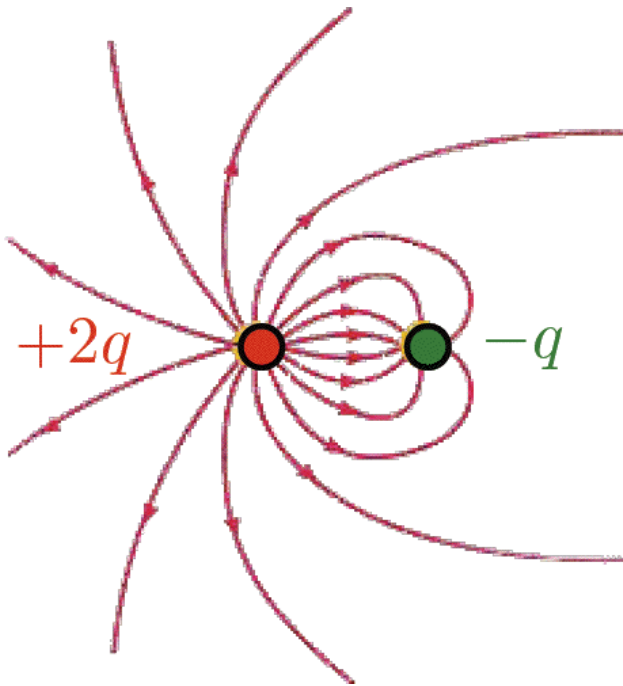


- www.edu.upmc.fr/uel/physique/elecstat/observer/champ/lc.htm

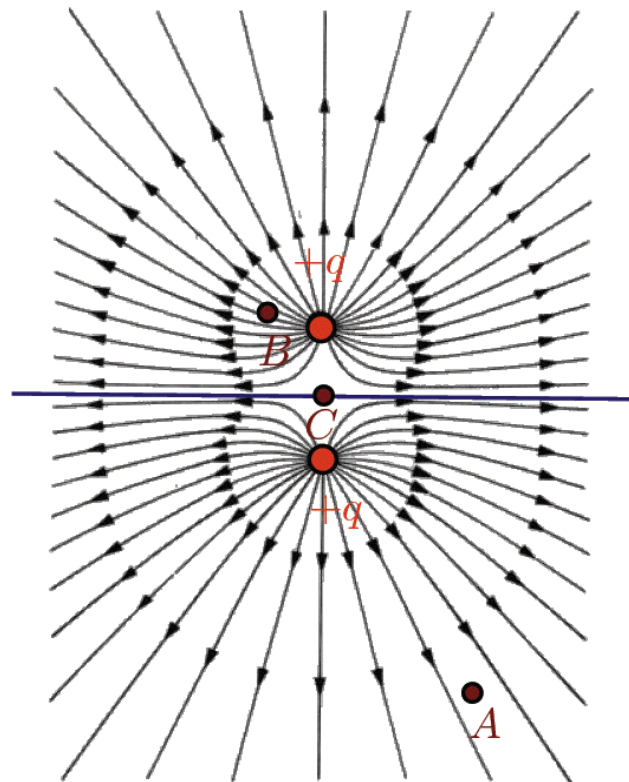
Dipôle :



2 charges opposées et différentes en valeur absolue

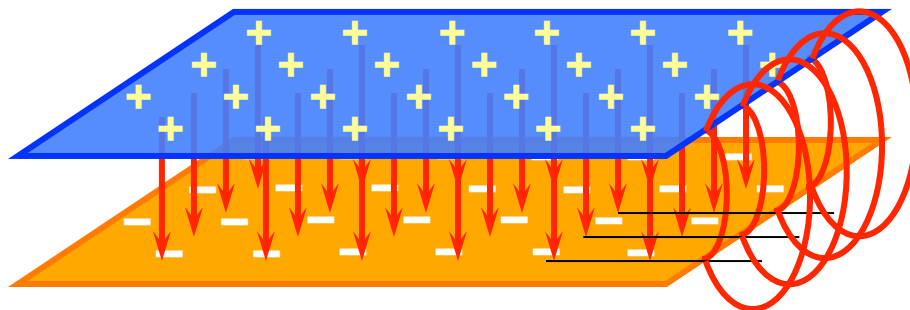


Ensemble de deux charges positives :



- $E_A < E_B$
- $E_C = 0$ (plan médian)

Deux plans chargés :



Le champ est uniforme entre les deux plaques.

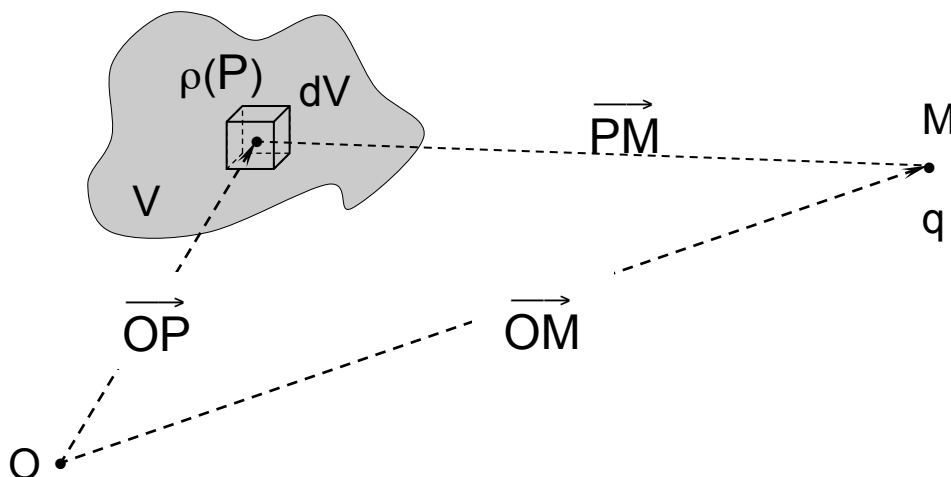
1.6 Distributions continues de charges

Jusqu'à présent, nous avons étudié la force et le champ électrostatiques dans le cas des distributions de charges discrètes.

Grâce au principe de superposition qui traduit la linéarité et l'additivité des interactions électrostatiques, il est possible de généraliser les différents résultats précédemment obtenus aux cas de distributions de charges quelconques

1.6.1 Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges

Dans le cas du champ créé en M par une distribution volumique de charges :



Le champ infinitésimal $d\vec{E}$ créé par l'élément de volume dV situé en P et contenant la charge élémentaire $dq = \rho(P) dV$ est :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \frac{\rho(P) dV}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

D'où l'expression du champ électrostatique créé en M par la distribution de charge volumique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P)}{PM^2} \frac{\vec{PM}}{PM} d\tau$$

ρ dv = dq

→ u_i

Pour une distribution surfacique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P)}{PM^2} \frac{\vec{PM}}{PM} dS$$

σ ds = dq

→ u_i

Pour une distribution linéique:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(P)}{PM^2} \frac{\vec{PM}}{PM} d\ell$$

Remarque

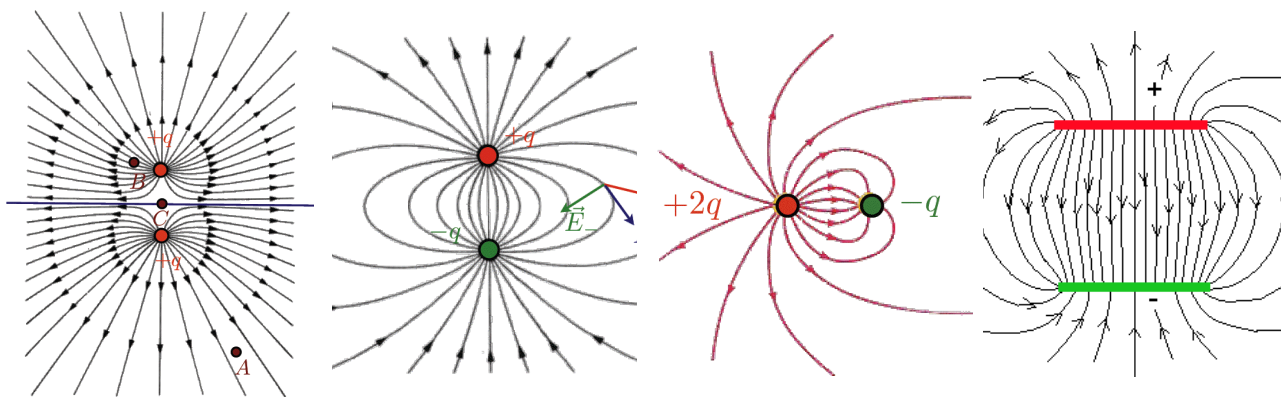
Ces relations sont très générales et ne sont pas utilisables directement. Il convient d'abord d'analyser les symétries de la distribution de charges pour simplifier les calculs.

1.7 Utilisation des symétries en Physique

La symétrie est un concept scientifique qui est très présent dans la nature (visage, fleurs, cristaux, étoiles de mer,...).

Elle permet de décrire avec concision les propriétés d'invariance et de prédire certaines propriétés physiques et de simplifier les calculs.

Les exemples présentés au § 1.5.4 mettent en évidence le lien entre symétries d'une distribution de charges et symétries du champ électrostatique créé par celle-ci.



1.7.1 Principe de Curie (Pierre)

« Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. » Journal de Physique, vol. 3, page 395 en 1894

Application à l'électrostatique :

Les propriétés de symétrie du champ électrique créé par une distribution de charge se déduisent de celles de cette distribution de charge.

→ simplification des problèmes !

La détermination des propriétés de symétrie d'une distribution de charges permet :

- de choisir le système de coordonnées le plus adapté (coord. cartésiennes, cylindriques, sphériques) à la description du problème,
- de déterminer les variables dont dépendent les grandeurs physiques décrivant le système,
- de prédire l'allure générale du champ électrique créé par la distribution de charges.

1.7.2 Grandeurs polaires, grandeurs axiales

La description de phénomènes physiques fait intervenir des conventions : orientation de l'espace, flèche du temps, choix de l'origine ...

Même si les phénomènes physiques ne dépendent pas des conventions d'orientation, les grandeurs physiques utilisées pour les décrire peuvent dépendre de ces conventions.

On distingue :

- les **grandeurs polaires** (vraies) indépendante de la convention d'espace,
- les **grandeurs axiales** (pseudo-) dont le signe résulte d'une convention d'orientation.

Exemples :

	Grandeur polaire	Grandeur axiale
scalaire	Masse m Longueur L Charge électrique q	Angle orienté θ
vecteur	Vecteur position \vec{OM} Vecteur vitesse \vec{v} Vecteur accélération $\vec{\gamma}$ Champ électrique \vec{E}	Moment cinétique \vec{L} Vecteur rotation $\vec{\omega}$ Couple $\vec{\Gamma}$ Produit vectoriel Induction magnétique \vec{B}

1.7.3 Symétries des distributions de charge et champ \vec{E}

1.7.3.1 Notion d'invariance

Soit un système physique S soumis à une transformation géométrique isométrique (translation, rotation, symétrie miroir, symétrie axiale, symétrie ponctuelle, ...).

Le système est qualifié d'**invariant** par la transformation T si $T(S) = S$.

1.7.3.2 Symétrie de $\rho(\vec{r})$ et champ électrostatique \vec{E}

Invariance par translation

Si $\rho(\vec{r})$ est invariante dans toute translation parallèle à un axe Oz , alors \vec{E} ne dépend pas de z

Invariance par rotation / symétrie axiale

Si $\rho(\vec{r})$ est invariante dans toute rotation autour d'un axe Oz, alors $\rho(\vec{r})$ présente une symétrie axiale.

Il convient alors d'utiliser les coordonnées cylindriques. Dans ce cas, $\vec{E}(r, \theta, z)$ ne dépend pas de θ .

Symétrie cylindrique

Si $\rho(\vec{r})$ est invariante par toute translation parallèle à un axe Oz et toute rotation autour d'un axe Oz, alors $\rho(\vec{r})$ présente une symétrie cylindrique.

Dans ce cas, $\vec{E}(r, \theta, z)$ ne dépend que de r .

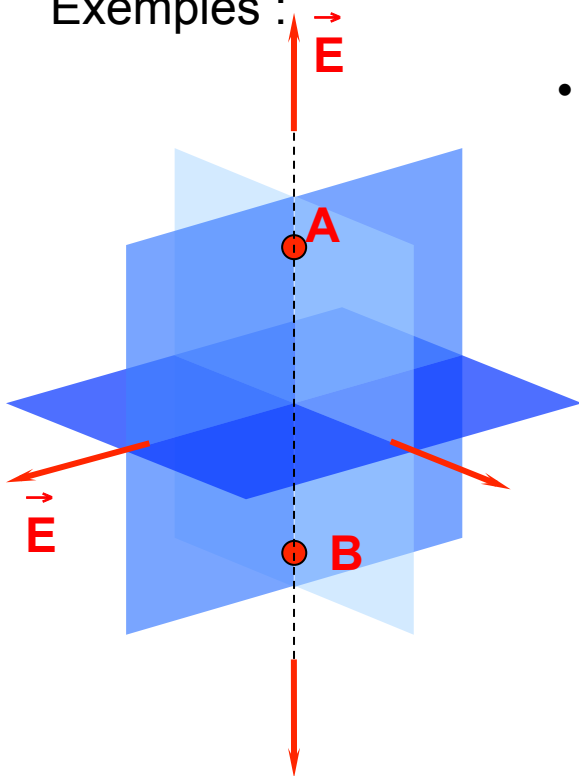
Plan de symétrie

Si $\rho(\vec{r})$ admet un plan de symétrie, alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique est contenu dans ce plan.

Plan de d'anti-symétrie

Si par symétrie par rapport à un plan, la distribution $\rho(\vec{r})$ est transformée en $-\rho(\vec{r})$, c.a.d. qu'à une distribution de charge (+) (resp. (-)) correspond une charge (-) (resp. (+)), alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique est perpendiculaire à ce plan

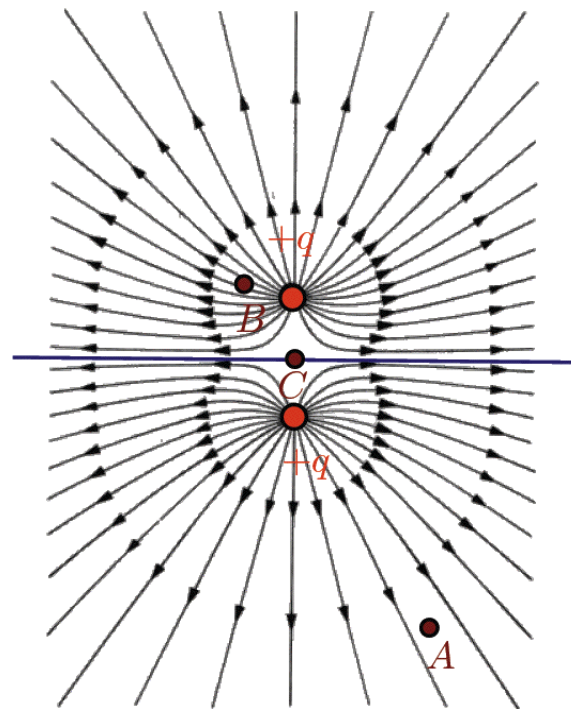
Exemples :

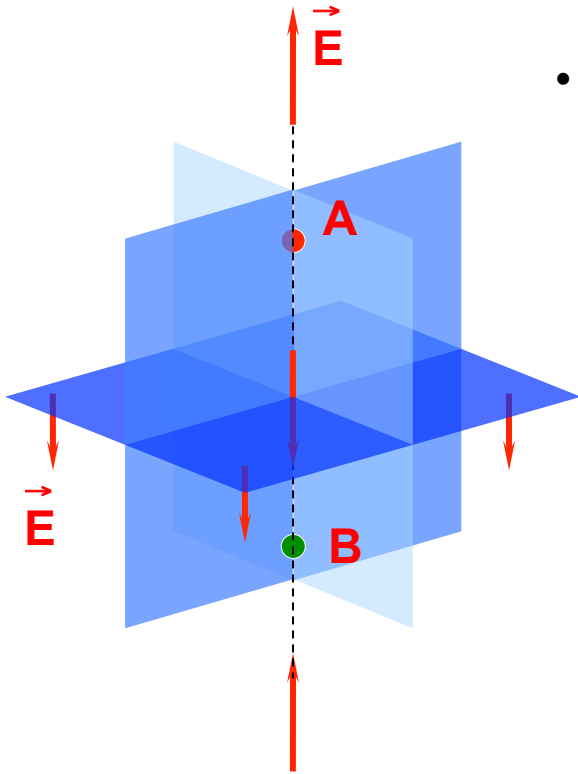


- 2 charges identiques :
- pas de symétrie de translation
- symétrie miroir par tout plan passant par la droite (AB)
- symétrie miroir par le plan médiateur au segment [AB]
- symétrie de rotation autour de (AB)

Allure du champ \vec{E} :

- le long de (AB)
 \vec{E} est contenu dans tout plan de symétrie et en particulier à l'intersection des différents plans de symétrie
 $\vec{E}(0,0,z) = E(z) \vec{e}_z$.
- dans le plan médiateur à [AB]
 \vec{E} est contenu dans ce plan
 \vec{E} ne dépend pas de θ ,
 $\vec{E}(r,\theta,0) = E(r) \vec{e}_r$.

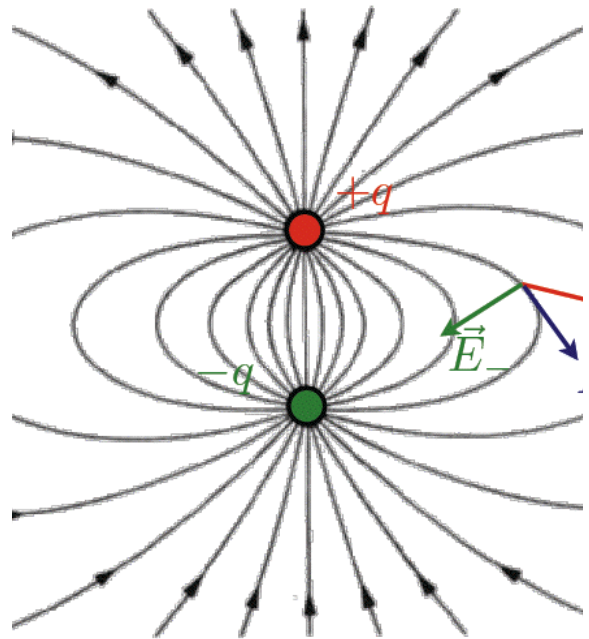


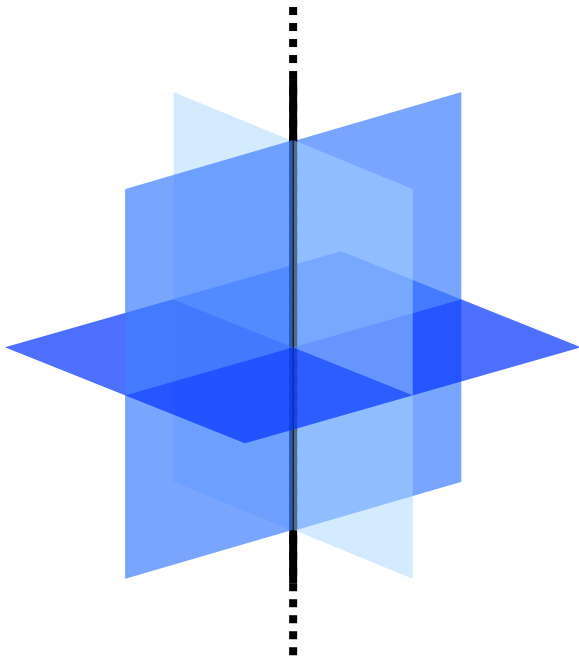


- dipôle :
 - pas de symétrie de translation
 - symétrie miroir par tout plan passant par la droite (AB)
 - antisymétrie par le plan médiateur au segment [AB]
 - symétrie de rotation autour de (AB)

Allure du champ \vec{E} :

- le long de (AB)
 - \vec{E} est contenu dans tout plan de symétrie et en particulier à l'intersection des différents plans de symétrie
 - $\vec{E}(0,0,z) = E(z) \vec{e}_z$.
- dans le plan médiateur à [AB]
 - \vec{E} est perpendiculaire à ce plan
 - \vec{E} ne dépend pas de θ ,
 - $\vec{E}(r,\theta,0) = E(r) \vec{e}_z$.





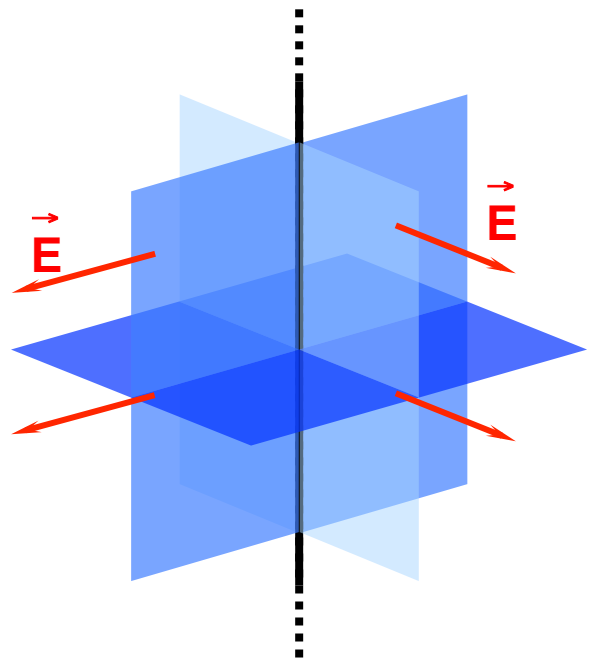
• fil infini chargé :

- symétrie de translation le long du fil
- symétrie miroir par tout plan passant par le fil
- symétrie miroir par tout plan perpendiculaire au fil
- symétrie de rotation autour de l'axe passant par le fil

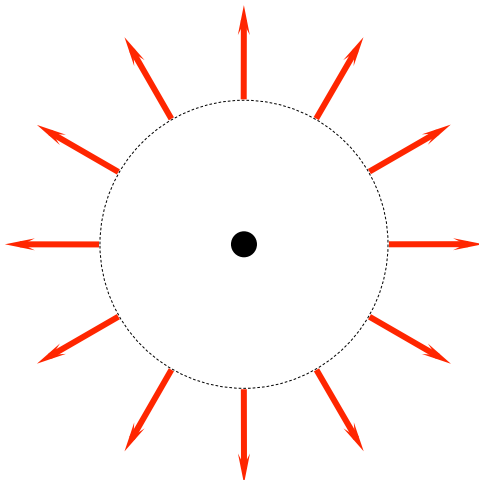
⇒ symétrie axiale

Allure du champ \vec{E} :

- \vec{E} est contenu dans tout plan de symétrie et en particulier à l'intersection des différents plans de symétrie
- $\vec{E}(r, \theta, z)$ ne dépend que de r



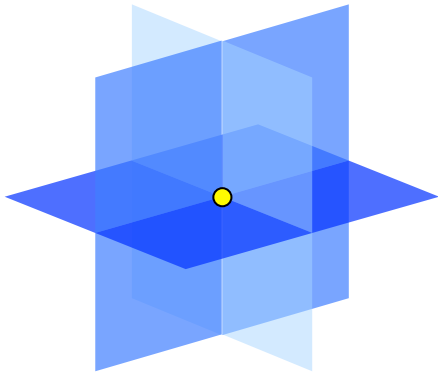
Vue de dessus :



Remarque

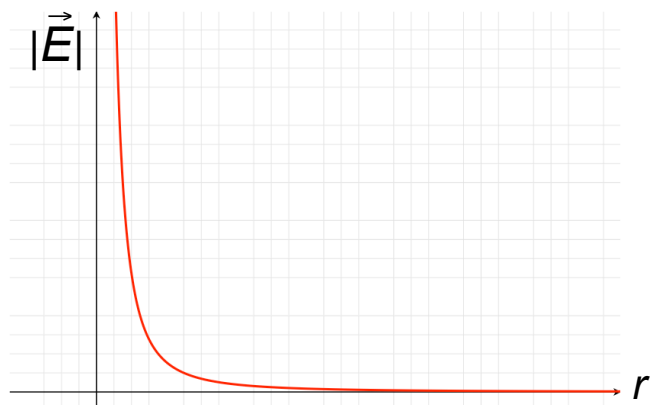
L'application du principe de Curie trouve ses limites dans le cas des distributions de charges présentant des singularités telles la charge ponctuelle, le fil ou le plan chargé.

Considérons le cas de la charge ponctuelle.



L'analyse des symétries révèle une symétrie sphérique. Tout plan passant par la charge est plan de symétrie. En vertu du principe de Curie, le champ électrostatique \vec{E} devrait être nul puisque appartenant à tous les plans de symétrie. Or il n'en est rien car la charge ponctuelle représente une singularité, l'expression \vec{E} de présente une divergence en $r = 0$:

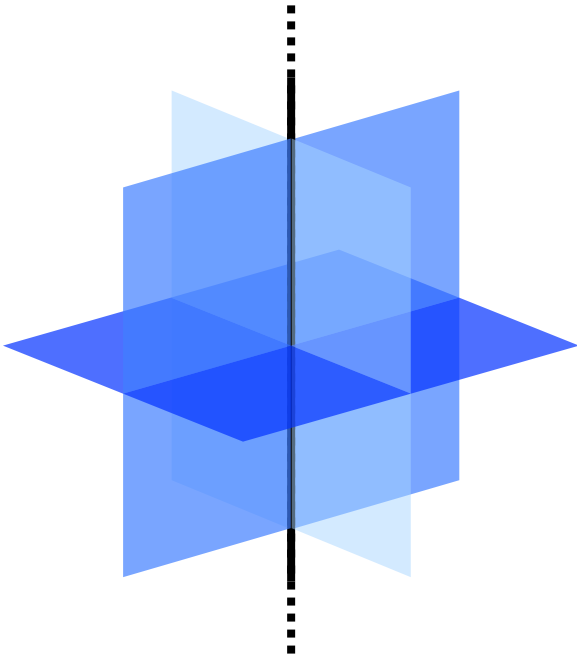
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$



le champ n'est pas défini à l'endroit où est la source.

Il en est de même pour toutes les distributions présentant des singularités :

Le fil infini chargé :

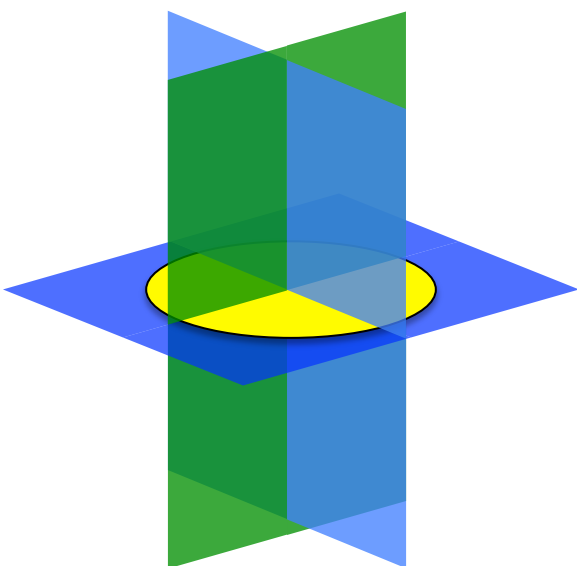


On peut montrer que l'expression du champ \vec{E} présente une divergence en $\rho = 0$:

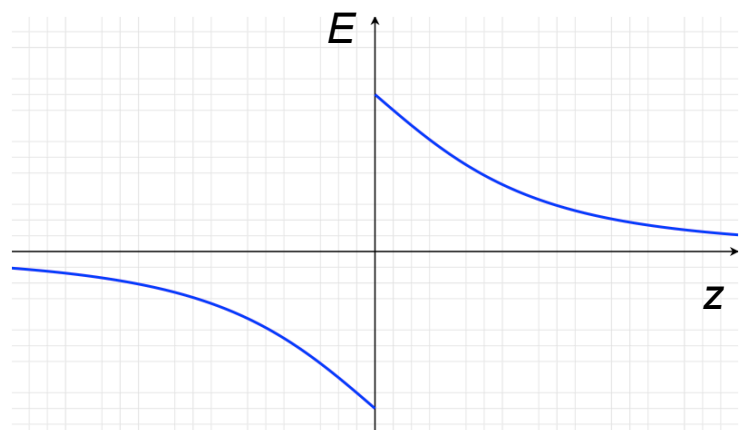
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \vec{e}_\rho$$

Le champ n'est pas défini sur le fil en $\rho = 0$.

Le disque chargé ou le plan chargé (cf TD#1 exercice 3) :



On peut montrer que l'expression du champ \vec{E} créé par le disque présente une divergence en $z = 0$:

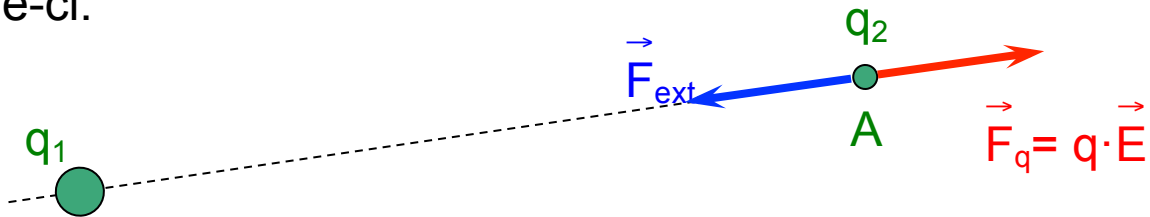


Le champ n'est pas défini sur le disque (le plan) en $z = 0$.

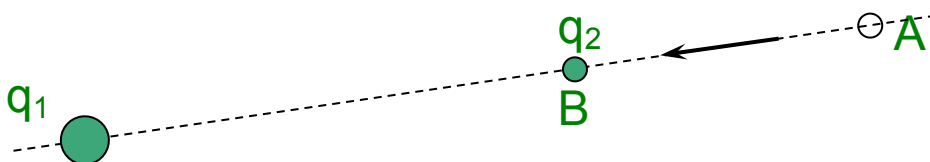
1.8 Champ et Potentiel électrostatique

1.8.1 Énergie potentielle électrostatique

On considère une charge q_1 fixe et une charge q_2 mobile située initialement en un point A situé à une distance r de celle-ci.



- La charge q_2 est soumise à la force électrostatique due au champ créé par la charge q_1 . Susceptible de se mouvoir, elle possède donc une **énergie potentielle** électrostatique.
- Pour maintenir la charge q_2 immobile, il faut exercer une force extérieure $\vec{F}_{ext} = -q_2 \vec{E}$ qui s'oppose soit :
 - au rapprochement spontané de q_2 vers q_1 ($q_1 \cdot q_2 < 0$)
 - à l'éloignement spontané de q_2 et q_1 ($q_1 \cdot q_2 > 0$)
- On déplace la charge q_2 de A vers B



Calculons le travail de la force extérieure :

$$W_{F_{ext}} = \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -q_2 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{avec } \vec{E}(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\text{d'où : } W_{\text{Fext}} = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$W_{\text{Fext}} = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

- Le travail ainsi fourni par la force est converti en énergie potentielle acquise par la charge q_2 :

$$W_{\text{Fext}} = \Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -W_{\text{Felectro}}$$

Vérifier pour les différents cas de figure

On définit l'énergie potentielle de la charge q_2 en présence de la charge q_1 située à la distance r par :

$$E_p(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + C^{\text{te}} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + C^{\text{te}}$$

Par convention, on prend généralement $E_p(\infty) = 0$

Remarque

Quel lien existe-t-il entre l'énergie potentielle électrostatique et la force électrostatique ?

On peut remarquer que : $F(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = - \frac{d E_p}{dr}$

Cette équation peut en fait s'exprimer sous une forme vectorielle plus générale :

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = - \overrightarrow{\text{grad}} E_p = - \overrightarrow{\nabla} E_p$$

où l'expression du gradient en coordonnées sphériques est :

$$\overrightarrow{\nabla} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = \frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{e}_r$$

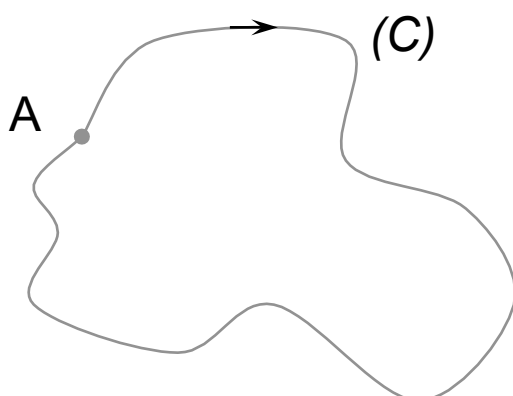
On dit que **la force électrostatique dérive de l'énergie potentielle électrostatique.**

→ analogie avec le champ gravitationnel !

Conséquences :

La force électrostatique est **conservative** :

- le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi mais dépend par contre du sens de parcours,
- le travail de cette force est nul sur un contour fermé.



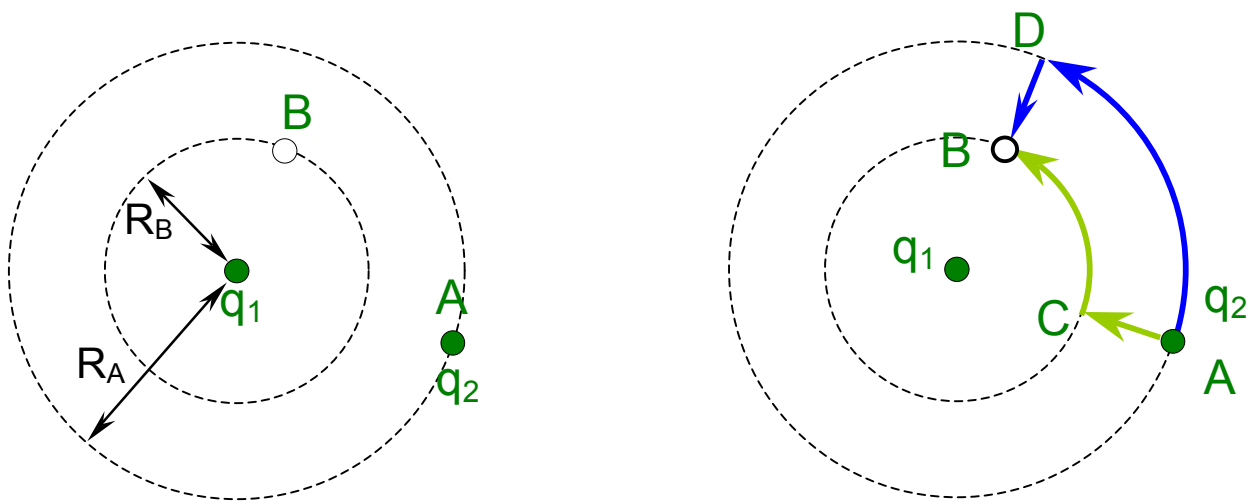
$$W_F = \int_{(C)} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \int_{(C)} q \cdot \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = 0$$

Caractère conservatif de la force coulombienne

Soit une particule q_1 immobile et une particule q_2 mobile.

On veut calculer le travail nécessaire au déplacement de la charge q_2 pour aller de $A \rightarrow B$.

On choisit d'effectuer le parcours selon deux trajets particuliers : $A \rightarrow C \rightarrow B$ et $A \rightarrow D \rightarrow B$:



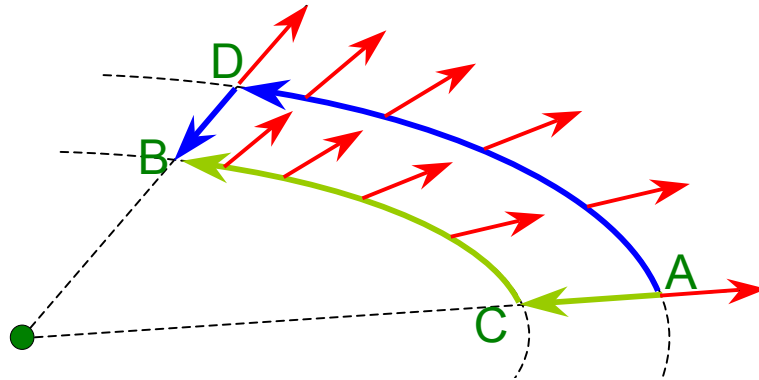
On choisit arbitrairement $q_1 \cdot q_2 > 0$. Dans ce cas, la force d'interaction électrostatique est répulsive.

Calculons le travail de la force électrostatique pour quand q_2 effectue le trajet $A \rightarrow C \rightarrow B$:

$$W_{ACB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = W_{AC} + W_{CB}$$

$$W_{ACB} = \int_{r_A}^{r_C} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} + 0 \quad \text{car } \vec{F} \perp d\vec{\ell} \text{ sur le trajet (CB)}$$

$$W_{ACB} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_C}$$



Calculons le travail de la force électrostatique pour quand q_2 effectue le trajet $A \rightarrow D \rightarrow B$:

$$W_{ADB} = \int_A^D \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_D^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 + \int_{r_D}^{r_B} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$W_{ADB} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_D} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_B} = W_{ACB} \quad \text{car } r_A = r_D \text{ et } r_C = r_B$$

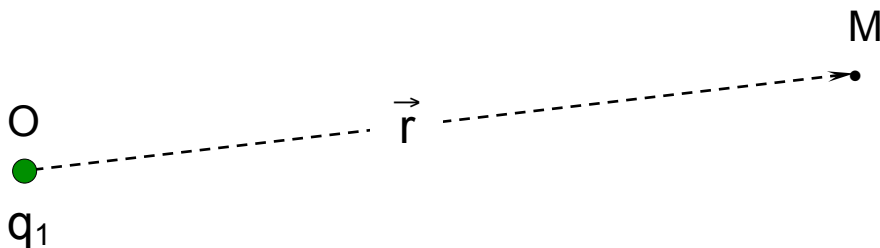
1.8.2 Potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique $V(M)$ est une grandeur scalaire définie en tout point de l'espace : c'est un **champ scalaire**.

Autres types de champ scalaire en physique : pression, température, pesanteur, densité, ...

Potentiel créé par une charge

Soit une particule de charge q_1 immobile placée en O.



Le potentiel électrostatique créé par q en un point M vaut :

$$V(M) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 OM} + C^{\text{te}}$$

ou encore :

$$V(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + C^{\text{te}}$$

Le potentiel est défini à une constante près ; celle-ci est en général choisie de telle sorte que $V(\infty) = 0$

Unités, dimensions :

le potentiel électrostatique est exprimé en volt (V).

$$[V] = M L^2 T^{-3} I^{-1}$$

1.8.3 Potentiel électrostatique créé par une distribution continue de charges

Pour une distribution de charge volumique :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P)}{PM} d\tau$$

Pour une distribution surfacique :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P)}{PM} dS$$

Pour une distribution linéique:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(P)}{PM} d\ell$$

ATTENTION !

Dans le cas d'une distribution de charge **infinie**, il n'est généralement pas possible de calculer directement le potentiel créé par celle-ci.

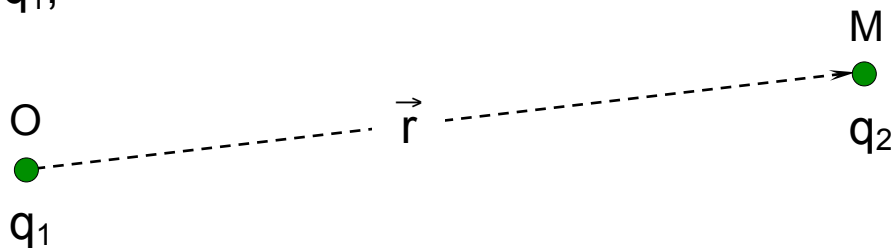
⇒ il faut dans un premier temps calculer le champ électrique puis on intègre l'expression obtenue pour obtenir le potentiel.

1.8.4 Relation entre le potentiel et l'énergie potentielle

L'énergie potentielle d'une charge q_2 placée en un point M où le potentiel électrostatique vaut $V(M)$ est :

$$E_p = q_2 V(M)$$

Pour une particule de charge q_2 placée à la distance r d'une charge q_1 ,



on retrouve le résultat du § 1.6.1 à savoir que son énergie potentielle est :

$$E_p(r) = q_2 V(M) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + C^{te}$$

- On peut aussi montrer que l'énergie potentielle de la charge q_2 électrostatique correspond au travail qu'il faut fournir à la particule pour l'amener de façon quasi-statique (sans apport d' E_c) depuis l'infini jusqu'à la distance r de q_1 .
- l'électron-volt (eV) est l'unité d'énergie utilisée en Physique des Particules et en Physique du Solide. Elle correspond à l'énergie acquise par un e^- soumis à un potentiel de 1 V.

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

1.8.5 Travail de la force électrostatique

On considère une région de l'espace où règne un potentiel électrostatique $V(M)$ due à la présence de charges électriques.

Une charge q , présente dans cette région de l'espace, est soumise à une force électrostatique (puisqu'il y a des charges !) et se déplace (Rel. Fond. de la Dynamique).

Le travail de la force électrostatique au cours du déplacement de la charge de $A \rightarrow B$ vaut :

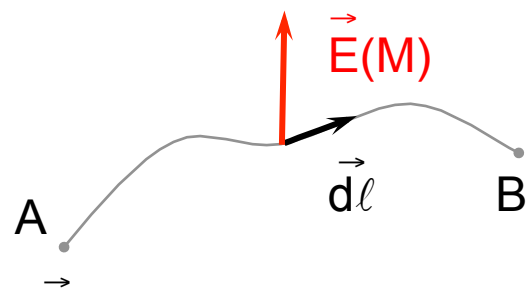
$$W_{\text{Felectro}, A \rightarrow B} = \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q [V(A) - V(B)]$$

On retrouve le résultat classique $W_{\text{Felectro}, A \rightarrow B} = - \Delta E_p$

1.8.6 Circulation du champ électrique

À partir des considérations précédentes, on définit la **circulation** du champ électrique le long d'un trajet $A \rightarrow B$ comme égale à la différence de potentiel entre A et B :

$$C = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V(A) - V(B)$$



On déduit aussi que la circulation de \vec{E} sur un contour fermé est nulle (caractère conservatif de la force électrostatique)

1.8.7 Lien entre potentiel et champ électrostatiques

Dans le cas de l'électrostatique (sans déplacement de charges), le champ électrostatique \vec{E} est lié au potentiel électrostatique par la relation :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad } V}$$

Interprétation physique

Par définition de l'opérateur gradient, le champ électrique traduit les variations de potentiel d'un point de l'espace à un autre :

- plus les variations de potentiel sont importantes, plus le champ électrique est intense,
- si le potentiel est constant, le champ électrique est nul,
- le champ électrique est orienté du potentiel le plus élevé vers le potentiel le plus faible (signe –)

1.8.8 Principe de superposition

Compte tenu de la linéarité de l'opérateur gradient, le principe de superposition reste valable en ce qui concerne le potentiel électrostatique.

Le potentiel créé par une ensemble de N charges discrètes q_i est :

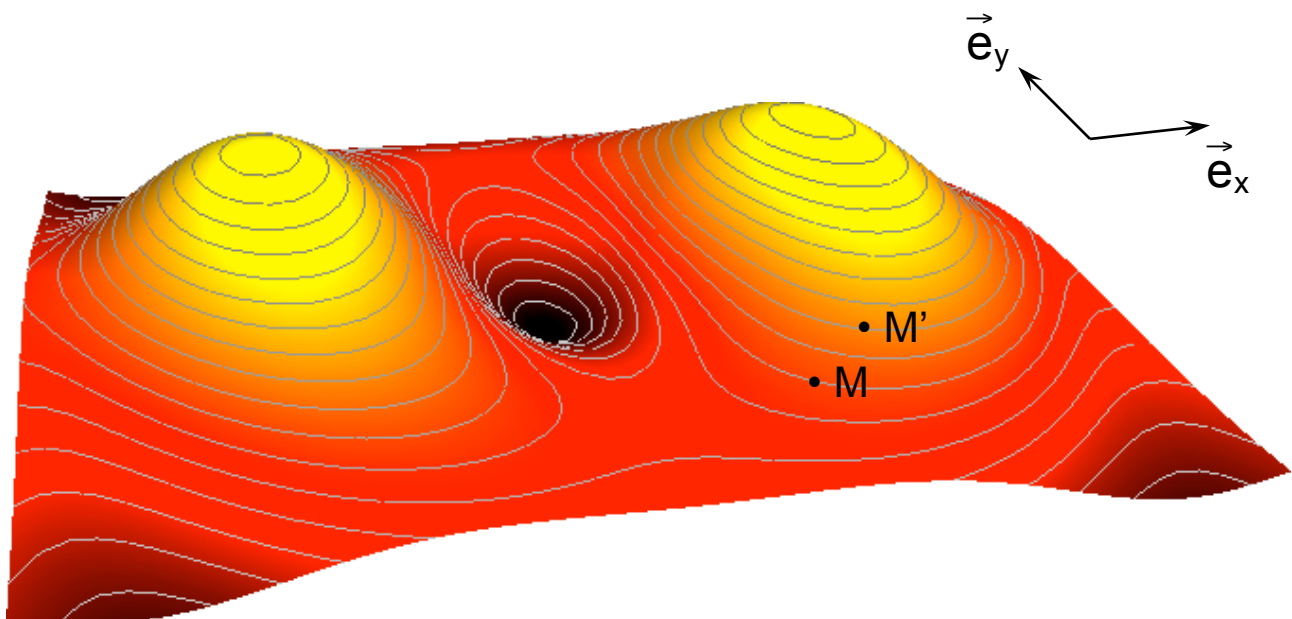
$$V(M) = \sum_{i=1}^N V_i + C^{\text{te}} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} + C^{\text{te}}$$

1.8.9 Surfaces, lignes équipotentiels, gradient

Les équipotentiels sont des lieux géométriques pour lesquelles le potentiel est constant :

- cas tridimensionnel (3-D) : surfaces équipotentiels
- cas bidimensionnel (2-D) : lignes équipotentiels

On considère un exemple bidimensionnel (2-D) où le potentiel est une fonction scalaire de deux variables $V(x ; y)$.



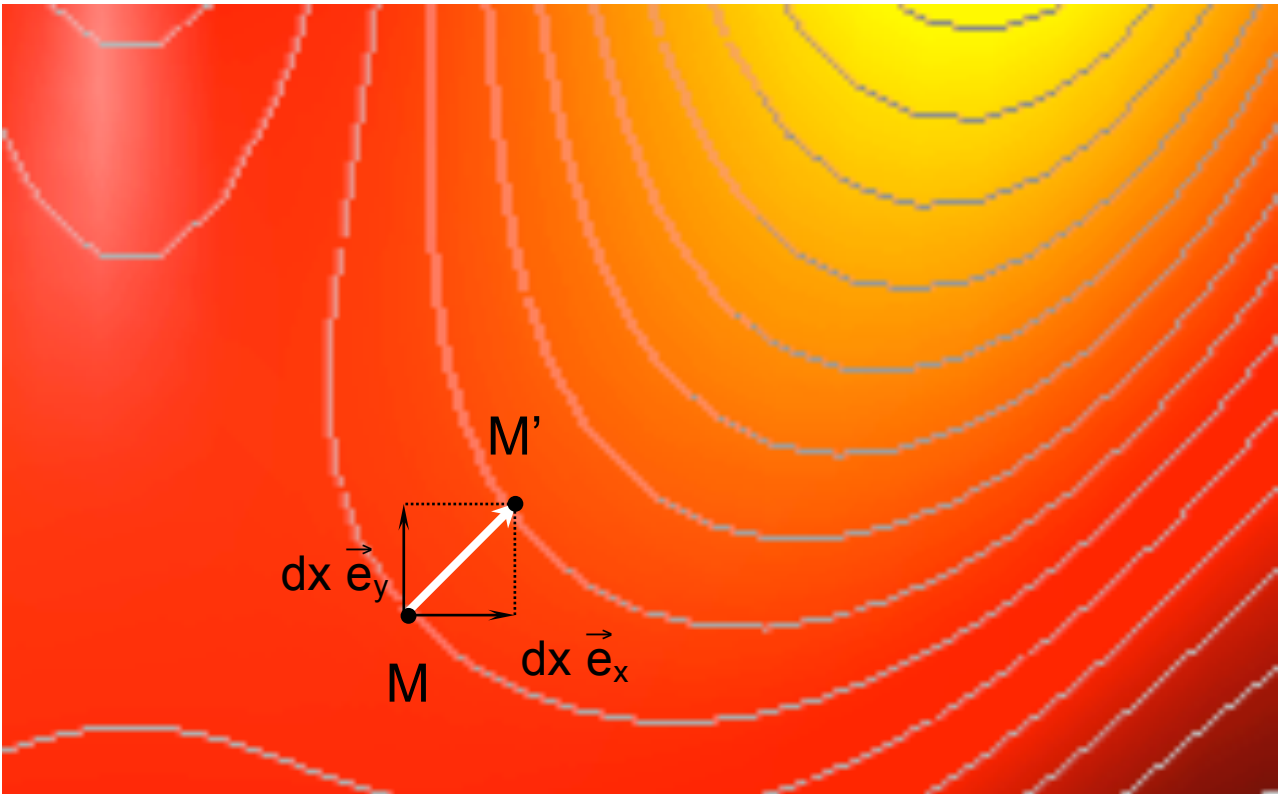
Vue en perspective de $V(x,y)$

Les zones en jaune/clair correspondent aux potentiels élevés

Les zones en rouge/sombre correspondent aux potentiels faibles.

On s'intéresse aux variations infinitésimales de V quand on se déplace de M en M' .

Vue perpendiculaire à (\vec{e}_x, \vec{e}_y)



Une variation dV du potentiel quand on passe de $M \rightarrow M'$ s'écrit :

$$dV(M) = V(M') - V(M) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy$$

ou, sous forme vectorielle :

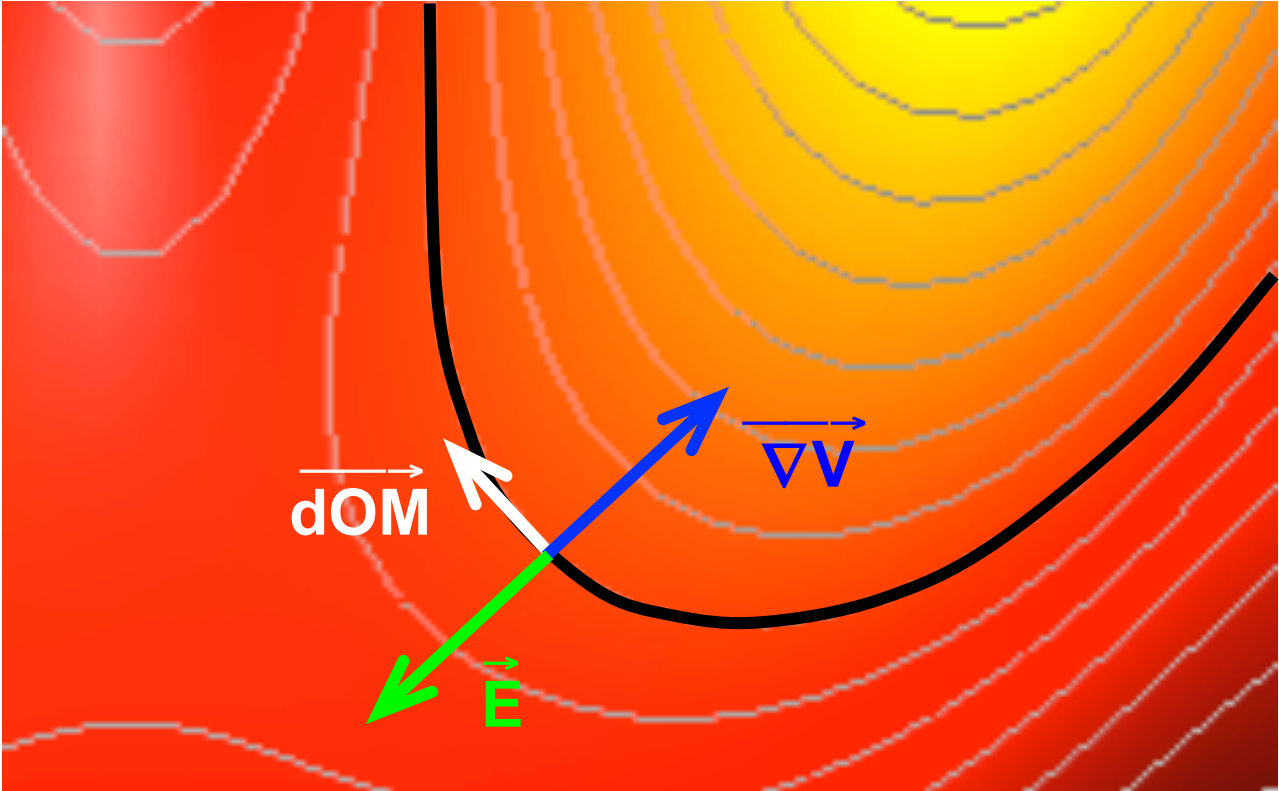
$$dV = \overrightarrow{\nabla V} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

avec :

- $\overrightarrow{\nabla V} = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y$: gradient de V

- $\overrightarrow{dOM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y = \overrightarrow{MM'}$: déplacement infinitésimal

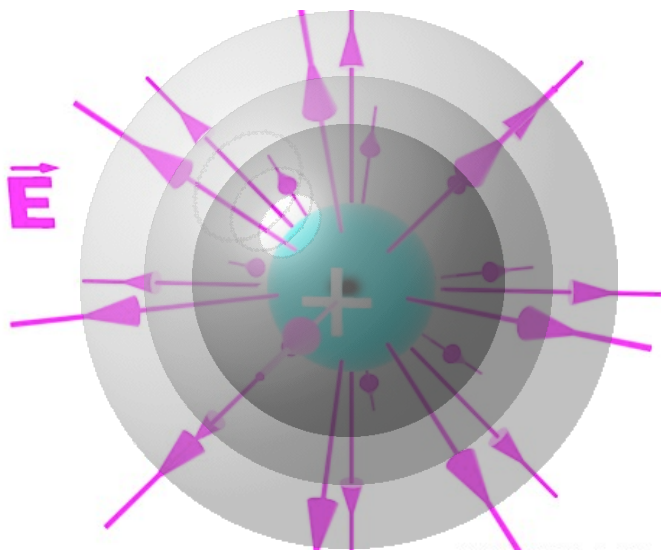
Les courbes représentent des **lignes** équipotentielles pour lesquelles le potentiel est constant.



- Quand on se déplace le long de ces lignes équipotentielles (c.a.d. que \vec{dOM} est tangent à la courbe), le potentiel V reste constant, on peut donc écrire : $dV = 0$
- Dans ce cas : $\vec{\nabla V} \cdot \vec{dOM} = 0$
- Ce qui implique que $\vec{\nabla V} \perp \vec{dOM}$ en tout point d'une ligne équipotentielle.
- Comme $\vec{E} = -\text{grad } V = -\vec{\nabla V}$, le champ électrique est perpendiculaire aux lignes équipotentielles en tout point de celles-ci.

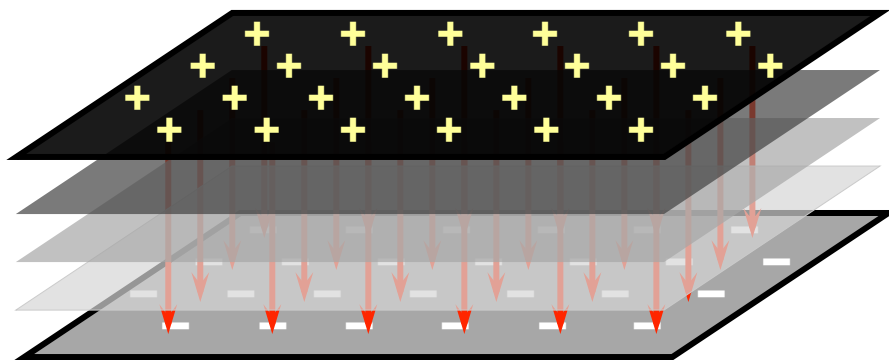
On peut généraliser ces considérations dans le cas tridimensionnel. Dans ce cas, les équipotentiels sont des **surfaces** sphériques et en chaque point de celles-ci, le champ \vec{E} est perpendiculaire.

Champ électrostatique et potentiels créés par une charge ponctuelle :



Équipotentiels :
sphères concentriques

Champ électrostatique et potentiels créés par un condensateur plan :

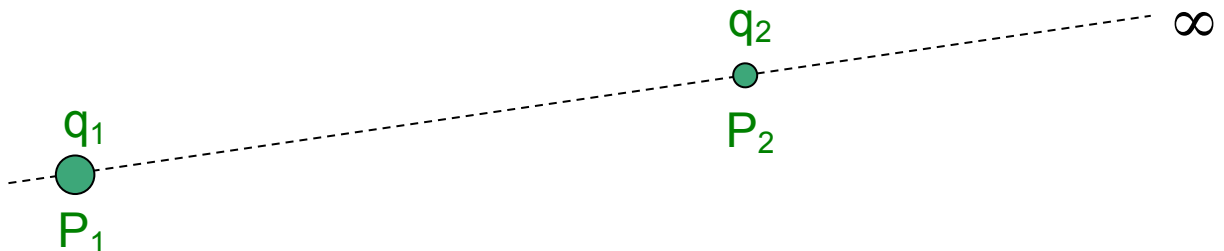


Les équipotentiels sont des plans parallèles

1.9 Énergie potentielle d'une distribution de charges

Nous allons calculer l'énergie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles.

- On considère une charge q_1 fixe située en P_1 et une charge q_2 mobile située initialement à l'infini. On rapproche q_2 de q_1 de manière quasi-statique jusqu'à l'amener en P_2 .



L'énergie potentielle acquise par q_2 est :

$$E_{p_2} = q_2 [V(P_2) - V(\infty)] = q_2 V(P_2)$$

où $V(P_2)$ est le potentiel créé par q_1 en P_2 .

En vertu de la relativité des mouvements, le travail nécessaire pour amener q_2 en P_2 depuis l' ∞ est identique à celui qu'aurait nécessité le fait d'amener q_1 en P_1 depuis l' ∞ avec q_2 fixe.

$$E_{p_1} = q_1 [V(P_1) - V(\infty)] = q_1 V(P_1) = E_{p_2}$$

- Les quantités E_{p_1} et E_{p_2} sont égales et représentent chacune l'énergie électrostatique de l'ensemble ($q_1 + q_2$) :

$$E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = \frac{q_1}{2} \underbrace{\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}}_{V(P_1) = V_1} + \frac{q_2}{2} \underbrace{\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}}_{V(P_2) = V_2}$$

$$E_p = \frac{1}{2} [q_1 V_1 + q_2 V_2]$$

- On amène une troisième particule depuis l'infini jusqu'en P_3 . L'énergie potentielle acquise par cette dernière est :

$$E_{p_3} = q_3 V(P_3)$$

où $V(P_3)$ est le potentiel "vu" par P_3 et créé par q_1 et q_2 .

$$E_{p_3} = \frac{q_3 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{31}} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{32}}$$

L'énergie électrostatique de l'ensemble ($q_1 + q_2 + q_3$) est :

$$E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

À chaque couple $q_i q_j$ correspond une énergie d'interaction.

On peut alors exprimer E_p sous la forme :

$$E_p = \frac{q_1}{2} \left[\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} \right] \leftarrow \text{potentiel en } P_1 : V_1$$

$$\dots + \frac{q_2}{2} \left[\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right] \leftarrow \text{potentiel en } P_2 : V_2$$

$$\dots + \frac{q_3}{2} \left[\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right] \leftarrow \text{potentiel en } P_3 : V_3$$

$$E_p = \frac{1}{2} [q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3]$$

Pour un ensemble de N charges q_i :

$$E_p = \sum_{\text{couples}}^N q_i V_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

Le terme 1/2 apparaît car dans les dernières sommations chaque couple est compté deux fois.

1.9.1 Énergie électrostatique d'une distribution continue de charges ponctuelles

Pour une distribution volumique continue de charges, la généralisation du résultat précédent est immédiate :

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_V \iiint_V \frac{\rho(M) \rho(M')}{4\pi\epsilon_0 MM'} d\tau d\tau'$$

ou encore :

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(M) V(M) d\tau$$

Pour une distribution surfacique :

$$E_p = \frac{1}{2} \iint_s \sigma(M) V(M) ds$$

Pour une distribution surfacique :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_L \lambda(M) V(M) d\ell$$

Les intégrales étant calculées sur tout le volume / surface / longueur de la distribution de charges.