I. Electromagnétisme en régime stationnaire.

Les notions d'électrostatique et de magnétostatique dans le vide ont été abordées précédemment. Se reporter à ces cours pour un contenu exhaustif, ne sont présentées ici que les notions utiles pour aborder le cours de licence.

I.1 Rappels d'Electrostatique.

I.1.a. Loi de Coulomb.

On se place dans un référentiel où l'on est en présence d'un ensemble de charges immobiles.

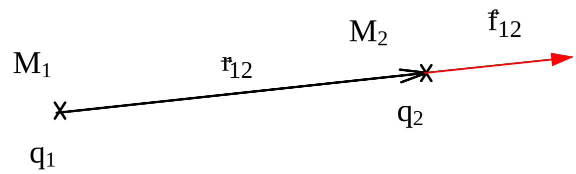

Figure 1

La loi de Coulomb, d'origine expérimentale, permet de rendre compte des interactions entre deux charges q_1 et q_2. Ces charges situées en M_1 et M_2 sont des nombres entiers de charges élémentaires ($q_i = z_i\, e$, où e=1,602 10^{-19} en [C] ou [A.s] suivante le système d'unités MKSA).

Dans le vide de permittivité diélectrique $\varepsilon_0 = 1/(36\pi\ 10^9) \sim 8{,}8542\ 10^{-12}$ en [F/m] soit $\varepsilon_0 C = 1/(120\pi)$, la force d'interaction est :

$$\vec{f}_{1\to2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\vec{u}_{12} \text{ en [N] avec } \vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{\|\vec{r}_{12}\|} \text{ le vecteur directionnel de norme 1.}$$

Équation I-1

Suivant le principe d'action-réaction, nous avons de même : $\vec{f}_{2\to1} = -\vec{f}_{1\to2}$. La force est répulsive si $q_1 q_2 > 0$ et attractive si $q_1 q_2 < 0$.

On écrit alors qu'une charge q au repos en un point M de l'espace subit une force qui peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{\vec{f}_{élec.} = q\,\vec{E}(M)}$$

Équation I-2

Cette force définit le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en M par la distribution de charges existant autour de P et occupant le volume Ω. Cette charge peut s'obtenir par intégration d'une densité de charge présente en P sur l'élément de volume $d\tau(P)$. Cette densité se note $\rho(P) = dq/d\tau$.

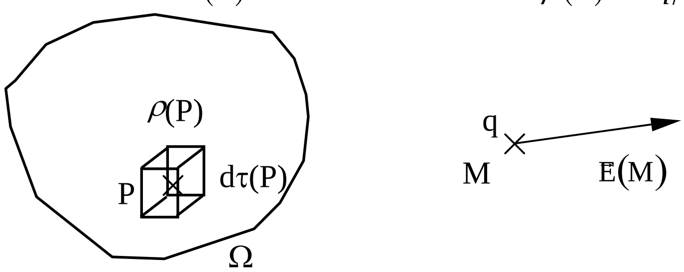

Figure 2

Il est aisé de montrer en utilisant le principe de superposition des champs électrostatiques que, dans ces conditions, le champ électrique total en M est donné par intégration :

$$\vec{E}(M) = \iiint_{\Omega} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \rho(P) d\tau(P)$$

Équation I-3

I.1.b. Circulation du champ électrostatique.

La circulation du champ $\vec{E}$ le long du déplacement élémentaire $\vec{dl}$ porté par la tangente en tout point M de la courbe Γ est le scalaire : $dC = \vec{E} \cdot \vec{dl}$. La circulation d'une force est égale à son travail. Ici nous considérons la circulation du champ électrostatique créé par la charge q placée en P qui définit aussi l'origine du repère. On note ainsi $\overrightarrow{PM} = \vec{r} = r\ \vec{u}$, où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire et on obtient pour le produit scalaire : $\vec{r} \cdot \vec{dl} = \vec{r} \cdot d\vec{r} = r\ dr$.

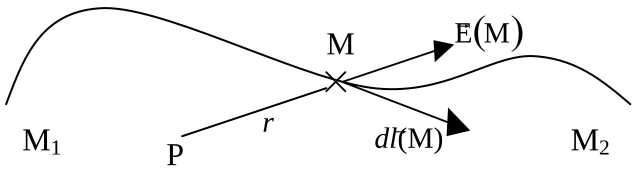

Figure 3

La circulation le long de l'arc de la courbe Γ délimité par le point M_1 et le point M_2 vaut :

$$\left(C_{M_1}^{M_2}\right)_\Gamma = \int_{\Gamma_{M_1\to M_2}} dC = \int_{\Gamma_{M_1\to M_2}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{q(P)}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Gamma_{M_1\to M_2}} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3} = \frac{q(P)}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Gamma_{M_1\to M_2}} \frac{dr}{r^2} = \frac{q(P)}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{-1}{r^2}\right]_{M_1}^{M_2}$$

$$= \frac{q(P)}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{PM_1^2} - \frac{1}{PM_2^2} \right)$$

Puisque la circulation du champ $\vec{E}$ ne dépend que des coordonnées de M_1 et M_2 et non du chemin pris (ici Γ), on dit que $\vec{E}$ est un champ à circulation conservative. On associe alors un potentiel scalaire dit électrostatique $V(M)$ à $\vec{E}$ par la relation :

$$\boxed{\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}(V(M)) \equiv -\vec{\nabla}(V(M))}$$

$\vec{E}$ dérive d'un potentiel scalaire.

Équation I-4

ou par la relation équivalente :

$$dV = -\vec{E}\, d\overrightarrow{M}$$

Équation I-5

On identifie dans l'Équation I-3 les valeurs du potentiel en M_1 et M_2. Retenons : $\left(C_{M_1}^{M_2}\right)_\Gamma = \int_{\Gamma_{M_1\to M_2}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = V(M_1) - V(M_2) = -\Delta V_{M_1 \to M_2}$. Bien entendu sur un contour (*i.e.* une courbe fermée : M_2 confondu avec M_1) on obtient :

$$\boxed{\oint_{\Gamma_{M_1\to M1}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0}$$

Circulation conservative de $\vec{E}$ sur contour fermé. Forme intégrale.

Équation I-6

On peut montrer que le champ $\vec{E}$ est un vecteur normal aux surfaces équipotentielles et que le potentiel scalaire *V* décroît le long d'une ligne de champ parcourue dans le sens du vecteur $\vec{E}$. Pour cette raison, les lignes du champ $\vec{E}$ ne peuvent pas être des courbes fermées.

Considérons maintenant une surface S quelconque s'appuyant sur le contour $\Gamma_{M_1 \to M1}$ et $d\vec{S}$ l'élément de surface normal en tout point à S et dont le sens se déduit de l'orientation du contour conformément à la règle du tire bouchon. La formule de Stokes : $\oint_{\Gamma_{M_1 \to M1}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right) \cdot d\vec{S}$ et l'Équation I-6 conduisent naturellement à la relation :

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \equiv \overrightarrow{rot}\left(\vec{E}(M)\right) = \vec{0}}$$

Circulation conservative de $\vec{E}$.
Forme locale.

Équation I-7

I.1.c. Flux du champ électrostatique.

Une autre relation fondamentale s'obtient en estimant le flux du champ $\vec{E}$ créé par une charge en *P* à travers l'élément de surface $d\vec{S}$: $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$. Le théorème de Gauss en forme intégrale montre que ce flux est nul au travers d'une surface fermée *S* contenant aucune charge et qu'il vaut le quotient par ε_0 de la somme des charges Q_{int} situées à l'intérieur de la surface. On le note :

$$\boxed{\Phi_S = \oiint_S d\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \left(\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}\right)}$$

Théorème de Gauss.
Forme intégrale.

Équation I-8

En rappelant la formule d'Ostrogradski : $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{volume\ \tau} div\left(\vec{E}\right) d\tau$ et en introduisant la densité volumique de charge en M : $\rho(M) = dq/d\tau$ liée à la charge totale par l'intégrale volumique $Q_{int} = \iiint_\tau dq = \iiint_\tau \rho(M)\, d\tau$, on montre que localement le champ électrique vérifie la relation :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \equiv div\left(\vec{E}(M)\right) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}}$$

Equation de Maxwell-Gauss (MG).
Forme locale.

Équation I-9

Pour la distribution de charge précédente le potentiel électrostatique peut se mettre sous la forme :

$$V(M) = \iiint_\Omega \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(M)}{PM} d\tau$$

Équation I-10

Remarquons que le potentiel obtenu par intégration est toujours définit à une constante près. Il est nécessairement continu, sinon à la discontinuité le champ électrique serait infini ce qui n'est pas envisageable.

Des Équation I-9 et Équation I-4 on déduit l'équation de Poisson :

$$\boxed{\Delta\left(V(M)\right) \equiv \nabla^2 V(M) = \frac{-\rho(M)}{\varepsilon_0}}$$

Equation de Poisson.
Forme locale.

Équation I-11

En un point de l'espace *M* où il n'y a pas de charges, celle ci devient l'équation de Laplace :

$$\Delta\left(V(M)\right) = 0$$

Équation I-12

I.2 Rappels de Magnétostatique.

Il s'agit d'étudier maintenant les phénomènes observables lorsqu'une partie au moins des charges présentes est en mouvement (existence de courants). Cependant on se limite à ce stade à l'existence de courants continus (*i.e.* stationnaires, indépendants du temps). Les champs ainsi créés sont donc eux aussi indépendants du temps. On s'intéresse toujours à une charge q placée en M, éventuellement en mouvement avec une vitesse $\vec{v}$.

A partir d'observations expérimentales, on a constaté que la force exercée sur la charge q se décompose en deux termes :

La première contribution est la force d'origine électrique indépendante de la vitesse $\vec{v}$ et s'écrit :

$$\vec{f}_{elec.}(M) = q\ \vec{E}(M)$$

Équation I-13

La seconde contribution est la force d'origine magnétique qui dépend linéairement de la vitesse :

$$\vec{f}_{magn.} = q\vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M)$$

Équation I-14

Cette relation définit le champ Magnétique $\vec{B}(M)$ dont le sens résulte de la convention du trièdre direct, contrairement à $\vec{v}(M)$ et $\vec{f}(M)$ dont le sens est définit intrinsèquement. Pour cette raison $\vec{B}(M)$ est souvent qualifié de pseudo-vecteur et noté $\breve{B}(M)$. Le produit vectoriel $\vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M)$ est assimilé à un champ électromoteur $\vec{E}_{mot.}$ par analogie avec l'Équation I-13.

La résultante $\vec{f}_{elec.} + \vec{f}_{magn.}$ est la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

Équation I-15

Remarques : l'Équation I-15 redéfinit le champs électrique et si toutes les charges sont au repos on retrouve les expressions de l'électrostatique. Notons que l'Équation I-3 a été obtenue lorsque toutes les charges sont immobiles, le champ électrique tel que nous venons de le définir est donc susceptible d'être différent du champ électrostatique dès lors que certaines charges sont en mouvement.

I.2.a. Distributions volumiques de courants.

Sous une forme locale on s'intéresse à un élément de charge mobile dq contenu dans l'élément de volume $d\tau$ autour de M. En présence d'un champ magnétique en M, les charges dq contenues dans $d\tau$ ressentent la force de Lorentz notée :

$$d\vec{f}_{magn.}(M) = dq\left(\vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M)\right)$$

Équation I-16

où on peut introduire la densité volumique de charges mobiles $\rho_m(M)$ telle que $dq(M) = \rho_m(M)\ d\tau(M)$. Si tous les porteurs de charge sont identiques (de charge q), $\rho_m(M)$ est le produit $q\ n(M)$, où $n(M)$ est le nombre de porteurs de charge mobile par unité de volume (soit une densité de particules chargées). On introduit souvent le vecteur densité de courant de conduction $\vec{j}(M)$ tel que :

$$\vec{j}(M) = q\ n(M)\ \vec{v}(M) = \rho_m(M)\ \vec{v}(M), \text{ en [A.m}^{-2}\text{]}$$

Équation I-17

En tenant compte de la présence en M du champ $\vec{E}(M)$, on exprime la densité volumique de la force résultante :

$$d\vec{f}(M)/d\tau(M) = dq(M)\left(\vec{E} + \vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M)\right) = \rho_m(M)\,\vec{E}(M) + \vec{j}(M) \wedge \vec{B}(M).$$

Le calcul du champ $\vec{B}$ dans le cadre de la magnétostatique s'effectue à partir de la loi de Biot et Savart d'origine expérimentale tout comme la loi de Coulomb. La contribution élémentaire au champ magnétique en M créée par la densité de courant $\vec{j}$ contenue dans le volume élémentaire $d\tau$, peut s'écrire :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\vec{j}(P)\,d\tau(P) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Équation I-18

où $\mu_0 = 1/(C^2\,\varepsilon_0) = 4\pi\,10^{-7}$ est la perméabilité magnétique absolue du vide. Il faut noter que l'élément de champ magnétisme $d\vec{B}$ n'a pas de signification propre mais est utile pour les calculs du champ magnétique $\vec{B}$.

I.2.b. Courants filiformes.

Les courants de densité $\vec{j}$ dits filiformes sont fréquents. Ils se définissent par exemple le long d'un fil métallique de petite section S parcouru par un courant d'intensité I. En général, l'intensité électrique traversant une surface S se définit par :

$$I = \iint_S \vec{j}(P)\,d\vec{S}(P)$$

Équation I-19

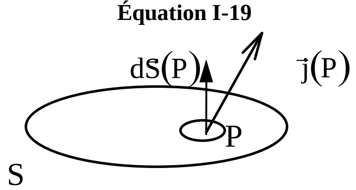

Figure 4

On a ainsi l'égalité des produit : $\vec{j}\;d\tau = I\;\vec{dl}$, où $\vec{dl}$ est un élément de longueur du fil en P.

Exprimons la conservation de la charge qui accompagne un flux de porteurs de charges (courant) pour établir une relation fondamentale que respecte le courant de densité $\vec{j}$. On peut définir autrement l'intensité électrique comme étant la variation de la charge totale intégrée sur un volume Ω qui passe par la section S par seconde (s'applique au régime variable) :

$$I(t) = \frac{-d}{dt}\iiint_\Omega \rho_m(t)\,d\tau = -\iiint_\Omega \frac{d\rho_m(t)}{dt}\,d\tau$$

En utilisant la formule d'Ostrogradski $\oiint_S \vec{j}\,d\vec{S} = \iiint_\Omega div(\vec{j})\,d\tau$ et suivant l'Équation I-19, on voit que $\vec{j}$ doit satisfaire l'équation locale de conservation de la charge :

$$\boxed{div(\vec{j}) = -\left(\frac{\partial \rho_m}{\partial t}\right)}$$

Equation de conservation de la charge.
Forme locale en régime variable.

Équation I-20

et en régime stationnaire : $div(\vec{j}) = 0$.

On montre aisément que cette expression, plus généralement utilisée pour la loi de Biot et Savart, se met sous la forme :

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\ I\ \vec{dl}(P) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}}$$

Équation I-21

et le champ magnétique total s'écrit alors :

$$\vec{B} = \iiint_{\Omega} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}\, d\tau(P)$$

Équation I-22

Comme le champ électrique, le champ magnétique satisfait deux équations locales. A partir de l'expression du champ infinitésimal (ci-dessus) on peut estimer la circulation du champ $\vec{B}$ sur un contour Γ (courbe fermée) autour d'un fil conducteur traversé par le courant *I*. Ceci conduit au second postulat de la magnétostatique :

$$\boxed{\oint_{\Gamma_{M_1 \to M1}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I}$$

Second postulat de la magnétosatique. Théorème d'Ampère. Forme intégrale.

Équation I-23

suivant l'expression de Stokes on obtient la forme locale correspondante :

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{B} \equiv \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}(M)\right) = \mu_0 \vec{j}(M)}$$

Équation I-24

Equation de Maxwell-Ampère (MA). Forme locale du théorème d'Ampère.

On peut aussi estimer le flux du champ magnétique $\vec{B}$ au travers d'une surface fermée quelconque *S* traversée par les lignes de champ. On en déduit simplement que le champ magnétique en régime stationnaire est à flux conservatif :

$$\boxed{\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

Premier postulat de la magnétosatique. Forme intégrale.

Équation I-25

La formule d'Ostrogradski permet d'obtenir la forme locale du héorème pour le champ total :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \equiv div\left(\vec{B}(M)\right) = 0}$$

Forme locale.

Équation I-26

De l'Équation I-26 on tire l'existence des potentiels vecteurs $\vec{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ définit par :

$$\vec{B}(M) = \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}(M)\right)$$

Équation I-27

<u>une</u> solution en est :

$$\boxed{\vec{A}(M) = \iiint_{\Omega} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P)}{PM}\, d\tau(P)}$$

Équation I-28

Il existe une infinité de solution à l'Équation I-27, en effet $\vec{A}'(M) = \vec{A}(M) + \overrightarrow{grad}\left(f(M)\right)$ est également solution (on dit que l'on effectue une transformation de jauge). La solution $\vec{A}(M)$ retenue dans l'Équation I-28 correspond à la jauge de Coulomb, elle est telle que :

- $\vec{A}(M) \xrightarrow[M \to \infty]{} \vec{0}$ si Ω est fini (ce qui est nécessairement le cas pour les systèmes usuels).
- $div\left(\vec{A}(M)\right) = 0$

L'Équation I-26 peut être réécrite pour le potentiel vecteur, et avec le choix de la jauge de Coulomb elle se simplifie en :

$$\Delta\vec{A}(M) = -\mu_0\,\vec{j}(M)$$

Equivalent de l'équation de Poisson pour le champ magnétique.

Équation I-29

Pour l'assemblée de circuits filiformes C_i, les expressions du champ magnétique et du potentiel vecteur pour le même choix de jauge sont :

$$\vec{B}(M) = \sum_i \oint_{C_i} \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I_i\,\overrightarrow{dl_i} \wedge \overrightarrow{P_iM}}{P_iM^{\,3}}$$

Équation I-30

et

$$\vec{A}(M) = \sum_i \oint_{C_i} \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I_i\,\overrightarrow{dl_i}}{P_iM}$$

Équation I-31

I.3 Equations de Maxwell en régime stationnaire.

Les équations de Maxwell de l'électrostatique et de la magnétostatique dans le vide peuvent se mette sous la forme :

Intrinsèques :
- Conservation du Flux de $\vec{B}$ au travers d'une surface fermée : $div(\vec{B}) = 0$
- Conservation de la Circulation de $\vec{E}$ sur contour. $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$
  Maxwell-Faraday (MF).

Dépendent du milieu : (ε_0, μ_0)
- Forme locale du théorème de Gauss : $div(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
  Maxwell-Gauss (MG).
- Forme locale du théorème d'Ampère : $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0\,\vec{j}$
  Maxwell-Ampère (MA) (circulation de $\vec{B}$ en régime stationnaire).

II. Equations de Maxwell pour les régimes variables.

Le problème est maintenant de déterminer les champs électrique et magnétique dans le cas plus général où les mouvements des charges dépendent du temps de façon quelconque. L'idée est d'adapter les équations de la magnétostatique et de l'électrostatique à des cas plus généraux non stationnaires. On cherche donc comment modifier les théorèmes de Gauss et Ampère en conservant des relations voisines de celles présentées ci dessus. La construction, qui fait l'objet du cours de seconde année de Licence, s'appuie sur les hypothèses et les observations expérimentales suivantes :

Les hypothèses :

Le champ magnétique demeure un champ à flux conservatif (le cas contraire reviendrait à admettre l'existence de monopoles magnétiques qui n'ont jamais été mis en évidence de façon irréfutable). Autrement dit l'Équation I-26 est conservée : $div\left(\vec{B}\right)=0$

L'expression locale correspondant au théorème de Gauss reste valable, *i.e.* on conserve l'Équation I-9 (car rien n'a justifié de remettre en cause ce théorème) : $div\left(\vec{E}\right)=\dfrac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$ équation de Maxwell-Gauss

Les observations :

D'une part la décomposition de la force subie par une particule chargée en un terme indépendant de la vitesse et un terme en dépendant linéairement reste valable, autrement dit on conserve l'expression de la force de Lorentz (Équation I-15) : $\vec{f}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}\right)$.

Les Équation I-13, Équation I-14 et Équation I-15 sont conservées.

Remarque : si une particule chargée est initialement au repos la présence du seul champ magnétique ne peut pas la mettre en mouvement.

D'autre part les études des phénomènes d'induction montrent que :

* Si un circuit filiforme est mobile dans un champ magnétostatique il apparaît dans le circuit un courant.

* Si un circuit immobile est placé dans un champ magnétique variable il apparaît encore un courant donc un champ électrique.

On rend compte des phénomènes d'induction au moyen de la loi de Faraday :

$$\boxed{e=\frac{-d\phi_B}{dt}}$$

Équation II-1

qui exprime la f.e.m. d'induction en fonction du flux du champ magnétique à travers le circuit. Celle ci est encore égale à la circulation du champ électrique. On en déduit :

$$e=\oint_C \vec{E}.\vec{dl}=\frac{-d}{dt}\iint_S \vec{B}(P,t).\vec{dS}(P)=-\iint_S \frac{\partial\vec{B}(P,t)}{\partial t}.\vec{dS}=\iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{E}(P,t)\right)d\vec{S}(P)$$

où S est une surface quelconque s'appuyant sur le circuit C.

On en déduit donc la relation locale entre le champ électrique et le champ magnétique :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)=\frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

Equation de Maxwell-Faraday (MF).
Forme locale en régime variable.

Équation II-2

Le champ magnétique étant à flux conservatif, l'Équation I-26 traduit l'existence du potentiel vecteur :

$$\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})}$$

Équation II-3

reste valable, il vient :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = -\overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right), \quad \text{soit encore :} \qquad \overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

le terme entre parenthèses dérive donc d'un potentiel scalaire V, ce qui conduit à écrire :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

Équation II-4

expression plus générale qui donne une formulation analogue au résultat obtenu en électrostatique quand le système est stationnaire.

Enfin il reste à établir l'équation locale qui doit redonner l'Équation I-24 (locale) correspondant au théorème d'Ampère dans le cas de la magnétostatique :
L'équation de continuité de la charge que doit satisfaire $\vec{j}$:

$$div(\vec{j}) = \frac{-\partial \rho_m}{\partial t}$$

combinée à l'équation de Maxwell-Gauss conduit à :

$$div(\vec{j}) = \frac{-\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 div(\vec{E})\right) = div\left(-\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right), \text{ soit à :} \qquad div\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$$

on en déduit que le terme entre parenthèses est un champ de rotationnel.
En posant :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{T}) = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \vec{T} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

on vérifie bien que l'Équation I-18 est satisfaite dans le cas des régimes stationnaires.

La dernière relation, l'équation de Maxwell-Ampère, s'écrit donc :

$$\boxed{\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)}$$

Equation de Maxwell-Ampère (MA). Forme locale en régime variable..

Équation II-5

Remarque sur le choix de jauge :

Comme nous l'avons déjà vu précédemment le choix du potentiel vecteur dans l'Équation II-3 n'est pas unique. Dans l'Équation II-4 qui définit le potentiel scalaire la solution *V(M)* retenue dépendra du choix de $\vec{A}(M)$. Si on considère pour un même champ électromagnétique la solution : $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{grad}\ f(M)$
alors

$$\vec{E} = -\vec{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{grad}(V') - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{grad}(V') - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{grad}(f(M))\right) = -\vec{grad}\left(V' + \frac{\partial f(M)}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

d'où

$$V' = V - \frac{\partial f(M)}{\partial t}$$

En conclusion la démarche exposée ci dessus conduit aux quatre équations de Maxwell que doit satisfaire le champ électromagnétique (pouvant être variable dans le temps) :

Intrinsèques :	Conservation du Flux :	$div(\vec{B}) = 0$
	Maxwell-Faraday (MF) :	$\vec{rot}(\vec{E}) = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$
Dépendent du milieu : (ε_0, μ_0, j)	Maxwell-Gauss (MG) :	$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
	Maxwell-Ampère (MA) :	$\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

associées aux équations reliant le couple de champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ au couple de potentiels $(V, \vec{A})$ à un choix de jauge près :

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B} = \vec{rot}(\vec{A})}$$

III. Equations de propagation des champs et des potentiels.

Nous venons de voir que le champ électromagnétique qui règne dans une région de l'espace est produit par les sources de champ que sont la distribution de charges (mobiles ou non) $\rho(M)$ et la distribution de courant $\vec{j}(M)$. Si l'on suppose connues ces sources de champs on peut alors chercher à déterminer le champ électromagnétique qu'elles génèrent. Cela pourra a priori se faire de deux façons différentes :

- En cherchant les solutions des équations différentielles satisfaites par les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$
- En cherchant les solutions des équations différentielles satisfaites par les potentiels $\vec{A}$ et V et en calculant ensuite $\vec{E}$ et $\vec{B}$ au moyen des Équation II-3 et Équation II-4.

La méthode d'obtention des équations différentielles est sensiblement toujours la même et consiste à calculer un double rotationnel :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{T})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{T})\right) - \Delta(\vec{T})$$

que l'on simplifie en utilisant les équations de Maxwell. Dans ces calculs posera $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ et on utilisera l'opérateur d'Alembertien : $\Delta(\vec{T}) = \frac{-1}{c^2} \frac{\partial^2(\vec{T})}{\partial t^2}$

III.1 Pour les champs électromagnétiques.

Recherchons donc les équations différentielles satisfaites par les champs.

III.1.a. pour le champ électrique

On développe les deux membres de l'égalité $\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)\right)=\overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{E}\right)\right)-\Delta\left(\vec{E}\right)}$ en utilisant les expressions de Maxwell. Pour le membre de gauche on part de l'équation de Maxwell-Faraday (MF) :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)=\frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}$$

d'où :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)\right)=-\overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=\frac{-\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right)=\frac{-\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Le second membre se développe en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{E}\right)\right)-\Delta\left(\vec{E}\right)=\overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)-\Delta\left(\vec{E}\right)$$

soit finalement en égalisant et en séparant les termes de champ de ceux des sources :

$$\boxed{\Delta\left(\vec{E}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\left(\vec{E}\right)}{\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon_0}\overrightarrow{grad}(\rho)}$$

Équation III-1

III.1.b. pour le champ magnétique

On procède de manière analogue en partant de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

soit en utilisant le'expression de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right)=\mu_0\overrightarrow{rot}\left(\vec{j}\right)+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)\right)=\mu_0\overrightarrow{rot}\left(\vec{j}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

et pour le second membre qui se simplifie en raison de la conservation du flux de $\vec{B}$:

$$\overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{B}\right)\right)-\Delta\left(\vec{B}\right)=-\Delta\left(\vec{B}\right)$$

donc en égalisant et en séparant les termes de champ et de source :

$$\boxed{\Delta\left(\vec{B}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\left(\vec{E}\right)}{\partial t^2}=-\mu_0\,\overrightarrow{rot}\left(\vec{j}\right)}$$

Équation III-2

III.2 Pour les potentiels.

III.2.a. Pour le potentiel vecteur :

On part de sa définition : $\vec{B}=\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)$, soit : $\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)=\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right)=-\Delta\left(\vec{A}\right)+\overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{A}\right)\right)$.
qui est aussi donné par l'expression de MA dans laquelle le champ $\vec{E}$ peut s'exprimer suivznt les potentiels avec : $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}(V)-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, soit :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\overrightarrow{grad}(V)+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\mu_0\vec{j}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

en égalisant et en séparant les termes de potentiel des termes de source :

$$\Delta\left(\vec{A}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\left(\vec{A}\right)}{\partial t^2}-\overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{A}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)=-\mu_0\vec{j}$$

Équation III-3

On définit alors la *jauge de Lorentz* par la condition :

$$\boxed{div\left(\vec{A}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}=0}$$

Équation III-4

En admettant que, parmi l'infinité de couples de potentiels qui décrivent le champ électromagnétique auquel on s'intéresse, il en existe un qui satisfasse cette condition de jauge, alors l'équation de propagation du potentiel vecteur s'écrit :

$$\boxed{\Delta\left(\vec{A}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j}}$$

Équation III-5

III.2.b. Pour le potentiel scalaire :

On part de l'équation de Maxwell-Gauss et on remplace le champ électrique par son expression en fonction des potentiels : $div\left(\vec{E}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$div\left(\vec{E}\right)=div\left(-\overrightarrow{grad}(V)-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=-\Delta(V)-\frac{\partial}{\partial t}div\left(\vec{A}\right)=-\Delta(V)-\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)=-\Delta(V)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

en utilisant la relation de la jauge de Lorentz ; d'où l'équation de propagation :

$$\boxed{\Delta(V)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$$

Équation III-6

On constate que les équations de propagation des potentiels s'expriment directement en fonction des sources alors que celles des champs font intervenir des seconds membres où des opérateurs vectoriels agissent sur ces sources. A ce titre les solutions des potentiels doivent être plus simple à déterminer.

IV. Les potentiels retardés.

En fait les Équation III-5 et Équation III-6 sont les généralisations des Équation I-11 (équation de poisson) et Équation I-24 dont les solutions nous sont connues :

$$V(M)=\iiint_{\Omega}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(P)}{PM}d\tau(P)\quad\text{solution de }\Delta(V(M))=-\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

et

$$\vec{A}(M)=\iiint_{\Omega}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}(P)}{PM}d\tau(P)\quad\text{solution de }\Delta\left(\vec{A}(M)\right)=-\mu_0\vec{j}(M)$$

On peut montrer que l'on peut alors construire les solutions des Équation III-5 et Équation III-6 en partant de ces expressions et en considérant les densités de charge et de courant prises à l'instant $\left(t-\frac{r}{c}\right)$. Les solutions s'écrivent donc :

$$\boxed{V(M,t)=\iiint_{\Omega}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\left(P,t-\frac{r}{c}\right)}{PM}d\tau(P)}$$

Équation IV-1

et

$$\boxed{\vec{A}(M,t)=\iiint_{\Omega}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}\left(P,t-\frac{r}{c}\right)}{PM}d\tau(P)}$$

Équation IV-2

Ce sont les "potentiels retardés". Ce qui détermine le potentiel à l'instant t au point d'observation M c'est la densité à l'instant retardé $\left(t-\frac{r}{c}\right)$ fonction de la distance r entre le point source considéré (P) et le point d'observation (M). Tout se passe comme si les potentiels, au point et à l'instant considéré, se construisaient à partir d'informations sur la présence de charges ou de courants aux points sources qui se propageraient à la vitesse finie c.