Introduction à la modélisation financière en temps continue
&
Calcul Stochastique

Mireille Bossy
INRIA

pour le MASTER IMAFA à Polytech Nice Sophia Antipolis

(16 novembre 2013)

Sommaire

Chapitre 1

Processus Stochastiques

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Un processus stochastique est un modèle mathématique pour décrire l'état d'un phénomène aléatoire évoluant dans le temps.

Processus stochastique,

fonction aléatoire

ou *signal aléatoire*

en sont des synonymes.

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On désigne par $\mathbb{T}$ l'ensemble des temps.

On appelle **processus aléatoire** toute application de $\mathbb{T} \times \Omega$ dans E,

$$(t, \omega) \in \mathbb{T} \times \Omega \longrightarrow X_t(\omega) \in E.$$

En général, on note X ou $(X_t, t \in \mathbb{T})$ cette application.

Dans le cadre de ce cours, $\mathbb{T}$ sera $\mathbb{R}^+$ ou un intervalle borné $[0, T]$ ou $[t_1, t_2]$.

E est l'espace des états du processus, égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ et muni de la tribu $\mathcal{E}$, égale à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$.

On supposera toujours que la fonction $\omega \longrightarrow X_t(\omega)$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, de sorte que X_t soit une **variable aléatoire** à valeurs $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

Définition 1.1.1. *On appelle* **processus stochastique** *à temps continu, une collection de v.a.* $(X_t, t \in \mathbb{R}^+)$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

L'observation d'un processus stochastique revient à fixer un ω dans Ω. On appelle *trajectoire* la fonction de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{R}^d$, obtenue en fixant ω dans Ω,

$$t \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d.$$

La valeur à l'instant $t \in \mathbb{T}$ d'un processus X est la fonction de Ω dans $\mathbb{R}^d$, obtenue en fixant t dans $\mathbb{T}$,

$$\omega \in \Omega \longrightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d.$$

On notera X_t la "valeur" du processus à l'instant t, qui pour des raisons techniques évidentes sera toujours supposée être une v.a., c.à.d une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Toujours pour des raisons techniques, il est commode de supposer une mesurabilité jointe quand on considère un processus comme fonction des deux variables (t, ω) :

Définition 1.1.2. *Un processus* $(X_t, t \in \mathbb{R}^+)$ *est dit* **mesurable** *si l'application*[1]

$$(t,\omega) \in \left(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}\right) \to X_t(\omega) \in (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

est mesurable.

Lorsque l'on considère un processus particulier, il est naturel de s'intéresser à la *régularité* de ses trajectoires. Dans le cadre de ce cours, nous ne considérerons que des processus **à trajectoires continues**.

Proposition 1.1.3. *Si* $(X_t, t \in \mathbb{R}^+)$ *est un processus* **à trajectoires continues** *(on dit aussi processus continu), c.a.d. tel que la fonction* $t \to X_t(\omega)$ *pour tout* $\omega \in \Omega$ *est une fonction continue, il est* **mesurable**.

Définition 1.1.4. *La loi temporelle d'un processus aléatoire* X *est définie par la donnée de ses* **distributions fini–dimensionnelles**, *c'est à dire la donnée des lois de probabilités de tous les vecteurs aléatoires* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ *pour tout* $k \geq 1$ *et* $t_1 < \ldots < t_k$ *dans* $\mathbb{T}$.

1.2 Le mouvement brownien

Le mouvement brownien et les processus de diffusion que l'on en déduit, jouent un rôle central dans la théorie des processus stochastiques.

Ils fournissent des modèles simples pour de nombreuses applications sur lesquelles de nombreux calculs peuvent être faits.

Le mouvement brownien tire son nom du botaniste Robert Brown qui décrivit en 1827 le mouvement de fines particules (pollens) en suspension dans un fluide.

Entre la description de Brown et la définition actuelle du mouvement brownien, cet objet a retenu l'attention de physiciens comme Einstein et Smoluchowski et de mathématiciens comme Wiener, Levy et Itô.

Historiquement, le mouvement brownien est associé à l'observation d'un mouvement qui évolue au cours du temps de façon si désordonnée qu'il semble imprévisible mais qui présente une certaine homogénéité dans le temps : la date du début de l'observation n'est pas importante mais sa durée oui.

Définition 1.2.1. *Un* **mouvement brownien standard** *réel sur* $\mathbb{R}^+$ *est un processus* $(W_t, t \geq 0)$ *réel et à trajectoires continues, tel que*

- $W_0 = 0$.
- *Tout accroissement* $W_t - W_s$ *où* $0 \leq s < t$ *suit une loi gaussienne centrée, de variance* $t - s$.
- *Pour tout* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, *les accroissements* $\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}; 0 \leq i \leq n\right)$ *sont indépendants.*

Le mouvement brownien est un processus à accroissements indépendants, stationnaires et gaussiens.

- W_t est une v.a. de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,t)$ et

$$\mathbb{P}(W_t \in [x, x+dx]) = p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t})dx.$$

- En particulier, $W_t \in [-1.96\sqrt{t}, 1.96\sqrt{t}]$ avec une probabilité de 95% (car $\mathbb{P}(|Z| \leq 1.96) \simeq 0.95$ lorsque Z est de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$).

  On peut montrer que cette propriété est vérifiée pour toute la trajectoire brownien.

[1] Pour $(E_1, \mathcal{E}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{E}_n)$ n espaces mesurables, la tribu produit $\mathcal{E}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_n$ est la tribu de $E_1 \times \ldots \times E_n$ engendrée par les pavés $\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n$ pour $\Gamma_1 \in \mathcal{E}_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathcal{E}_n$. L'espace mesurable ainsi défini est le produit des n espaces mesurables.

L'existence d'un mouvement brownien, au sens de la définition précédente, n'est pas évidente. Voir par exemple la construction de Wiener dans [5], ou encore [**?**] et [8].

En général, les phénomènes observés ne sont pas aussi normalisés que le mouvement brownien **standard**.

Définition 1.2.2. *On appelle encore mouvement brownien, issu de x, de dérive b et de coefficient de diffusion σ, le processus*

$$X_t = x + \sigma W_t + bt.$$

X est encore un processus à accroissements indépendants, stationnaires et gaussiens mais non centré et tel que $X_0 = x$.

Dans la suite, en l'absence de précision, “mouvement brownien” désignera le mouvement brownien standard.

1.2.1 Quelques propriétés du mouvement brownien

Les propriétés suivantes sont classiques et très utiles pour les calculs.

Proposition 1.2.3.

i) Propriété de symétrie : Si $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard, il en est de même de $(-W_t, t \geq 0)$.

ii) Propriété d'échelle : Si $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard, alors pour tout $c > 0$, il en est de même du processus $(W_t^c, t \geq 0)$ défini pour tout $t \geq 0$ par

$$W_t^c = \frac{1}{c} W_{c^2 t}.$$

iii) Invariance par translation : Le mouvement brownien translaté de $h > 0$, $(\widetilde{W}_t^h = W_{t+h} - W_h; t \geq 0)$ est un mouvement brownien, indépendant du mouvement brownien arrêté en h $(W_s, 0 \leq s \leq h)$.

iv) Retournement du temps : Le processus retourné à l'instant T, $\widehat{W}_t^T = W_T - W_{T-t}$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$.

1.2.2 Quelques propriétés de la trajectoire brownienne

Proposition 1.2.4. *Le mouvement brownien oscille entre $-\infty$ et $+\infty$ quand le temps augmente indéfiniment. En effet, presque sûrement,*

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t \to +\infty} W_t = \lim_{t \to +\infty} \sup_{u \geq t} W_u = +\infty, \\
&\liminf_{t \to +\infty} W_t = -\infty.
\end{aligned}$$

Mais,

$$\frac{W_t}{t} \to 0, \quad p.s. \;\; t \to +\infty.$$

La vitesse de divergence du mouvement brownien est moins grande que celle de t.

Remarque :

I. Principe de symétrie des trajectoires du MVB :

a) Montrer que pour tout $\alpha \geq 0$, $\mathbb{P}(W_t \leq \alpha) = \mathbb{P}(W_t \geq -\alpha)$.

b) Calculer la loi du maximum courant du mouvement brownien : $(M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} W_s, t \geq 0)$.

Calcul de la loi jointe de (W_t, M_t) **:**

$$\mathbb{P}(W_t \in da, M_t \in db) = -\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial a}\mathbb{P}(W_t \leq a, M_t \geq b)dadb.$$

A l'aide d'un petit dessin et du principe de symétrie, il faut se convaincre que, pour $b \geq a$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_t \leq a, M_t \geq b) &= \mathbb{P}(W_t \geq 2b - a, M_t \geq b)\\ &= \mathbb{P}(W_t \geq 2b - a).\end{aligned}$$

D'où, par différentiation

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_t \in da, M_t \in db) &= \frac{\partial}{\partial a}\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(2b-a)^2}{2t}\right)dadb\\ &= \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left(-\frac{(2b-a)^2}{2t}\right)dadb.\end{aligned}$$

Calcul de la loi de M_t **:**

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(M_t \in db) = \mathbb{P}(W_t \leq b, M_t \in db)\\ &= \left(\int_{-\infty}^{b}\mathbb{P}(W_t \in da, M_t \in db)da\right)db\\ &= \left(\int_{-\infty}^{b}\frac{\partial}{\partial a}\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(2b-a)^2}{2t}\right)da\right)db\\ &= \left(\int_{-\infty}^{b}\frac{\partial}{\partial a}\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(2b-a)^2}{2t}\right)da\right)db\\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(2b-a)^2}{2t}\right)da\right]_{a=-\infty}^{a=b} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-\frac{b^2}{2t})db.\end{aligned}$$

Au passage, on remarque que $\mathbb{P}(M_t \in db) = \mathbb{P}(|W_t| \in db)$.

II. L'intervalle de confiance pour l'ensemble de la trajectoire brownienne :

On montre que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\sup_{s\leq t}|W_s| \leq 2\sqrt{t}) \simeq 90\%.$$

En effet, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\sup_{s\leq t}|W_s| \leq 2\sqrt{t}) = 1 - \mathbb{P}(\sup_{s\leq t}|W_s| \geq 2\sqrt{t}).$$

Or,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sup_{s\leq t}|W_s| \geq 2\sqrt{t}) &\leq \mathbb{P}(\inf_{s\leq t}W_s \leq -2\sqrt{t}) + \mathbb{P}(\sup_{s\leq t}W_s \geq 2\sqrt{t})\\ &= 2\mathbb{P}(\sup_{s\leq t}W_s \geq 2\sqrt{t})\\ &= 2\mathbb{P}(|W_t| \geq 2\sqrt{t}) \simeq 10\%,\end{aligned}$$

car $\mathbb{P}(|Z| \leq 1.96) \simeq 0.95$ lorsque Z est de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. Ce qui implique le résultat.

Proposition 1.2.5 (Sur l'irrégularité des trajectoires)**.**

a) Si $(W_t, t \geq 0)$ *est un mouvement brownien standard, le processus en temps inversé* $(B_t = tW_{\frac{1}{t}}, t > 0, B_0 = 0)$ *est un mouvement brownien.*

b) Le mouvement brownien n'est pas dérivable en zéro et donc par stationnarité des accroissements, n'est dérivable en aucun point.

1.2.3 Mouvement brownien vectoriel

Définition 1.2.6. *On appelle mouvement brownien vectoriel standard, un processus à trajectoires continues, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $(W_t = (W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^d), t \geq 0)$ tel que*

- $W_0 = 0$,
- *tout accroissement $W_t - W_s$ où $0 \leq s < t$, suit une loi gaussienne sur $\mathbb{R}^d$ centrée et de matrice de covariance $(t-s)$**Id**.*
- *Pour tout $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les accroissements $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$, avec $0 \leq i \leq n$, sont indépendants.*

Les processus des coordonnées $(W_t^i, t \geq 0)$,$i = 1, \dots, d$ sont des mouvements browniens réels standard indépendants. Réciproquement, des mouvements browniens standard indépendants engendrent un mouvement brownien vectoriel.

1.2.4 Mouvement brownien vectoriel corrélé

Définition 1.2.7. *Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est* **gaussien** *si toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{d} a_i X_i$ est de loi normale (éventuellement dégénérée).*

Si $X = (X_1, \dots, X_d)$ est un vecteur gaussien, la matrice carré $\Gamma := (\Gamma_{i,j})_{(1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d)}$ avec $\Gamma_{i,j} = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$, appelée **matrice de covariance** est une matrice symétrique et positive (à valeurs propres positives)[2].

Théorème 1.2.8. *X est une variable aléatoire gaussienne à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, d'espérance μ et de covariance Γ, si est seulement si sa fonction caractéristique est de la forme*

$$\phi_X(u) = \exp\{i < u, \mu > -\frac{1}{2} < u, \Gamma u >\},$$

où $\mu \in \mathbb{R}^d$ et Γ est une matrice non nulle, symétrique et positive. On notera $\mathcal{N}_d(\mu, \Gamma)$ la loi du vecteur aléatoire X.

Lorsque Γ est inversible, la loi $\mathcal{N}_d(\mu, \Gamma)$ a la densité

$$x \in \mathbb{R}^d \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{|\Gamma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^t \Gamma^{-1}(x-\mu)\right),$$

où $|\Gamma|$ désigne le déterminant de la matrice Γ.

Définition 1.2.9. *On appelle mouvement brownien vectoriel corrélé, un processus à trajectoires continues, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $(B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d), t \geq 0)$ tel que*

- $B_0 = 0$,
- *tout accroissement $B_t - B_s$ où $0 \leq s < t$, suit une loi gaussienne sur $\mathbb{R}^d$ centrée et de matrice de covariance $(t-s)K$, où K est la matrice de covariance du vecteur gaussien B_1 (et est donnée).*
- *Pour tout $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les accroissements $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$, avec $0 \leq i \leq n$, sont indépendants.*

La matrice K est toujours symétrique. Ses valeurs propres sont positives ou nulles, mais elle peut ne pas être inversible.

Lorsqu'il n'existe aucune relation affine presque sûre entre les composantes du vecteur aléatoire B_1, la matrice K est à valeurs propres strictement positives : elle est définie positive, est donc inversible.

[2]Une matrice symétrique M est positive si $\forall r \in \mathbb{R}^d$, $z^t M z \geq 0$ ou encore $(z.Mz) \geq 0$. Une matrice symétrique M est définie positive si $\forall r \in \mathbb{R}^d$, $z^t M z \geq 0$, et si toutes les valeurs propres de M sont strictement positives ; la matrice M est alors inversible.

Calcul de covariance. Soit (W_t^1, W_t^2) un mouvement brownien standard en dimension 2. Soit $\rho \in [-1, 1]$. On pose

$$B_t^1 = W_t^1$$
$$B_t^2 = \rho W_t^1 + (1-\rho) W_t^2$$

Calculer la matrice 2×2 de la covariance de B_1.

Décomposition de Cholesky. Toute matrice Γ non nulle, symétrique définie et positive admet une décomposition de Cholesky. Ainsi, il existe une unique matrice L triangulaire inférieure telle que

$$\Gamma = L^t L.$$

Cette propriété est très utile pour construire des variables gaussiennes de loi donnée. En effet, soit Γ une matrice carré $d \times d$ non nulle, symétrique définie positive et μ un vecteur de $\mathbb{R}^d$. Construisons une v.a de loi $\mathcal{N}_d(\mu, \Gamma)$. Soit L issu de la décomposition de Cholesky de Γ. Soit G une va gaussienne $\mathcal{N}_d(0, Id)$. Alors la v.a $X = \mu + LG$ est de loi $\mathcal{N}_d(\mu, \Gamma)$. En effet, calculons la matrice de covariance de X

$$\Gamma_G(i,j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^d L_{i,k} G_k \sum_{l=1}^d L_{j,l} G_l\right)$$
$$= \sum_{k=1}^d L_{i,k} L_{j,d} \mathbb{E}(G_k^2) = (L^t L)_{i,j} = \Gamma_{i,j}.$$

Cas fréquent en finance. On observe souvent que la matrice de corrélation d'un panier de d titres est à diagonale dominante.

$$\underline{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & & 5\% \\ & \diagdown & \\ 5\% & & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

On se donne un modèle de prix pour la couverture optionnelle de la forme

$$\ln(S_t) = \underline{\sigma} B_t$$

où $\underline{\sigma}$ est un vecteur de volatilité et où B est un mouvement brownien corrélé de corrélation $\underline{\rho}$.

Comment simuler B et S ?

On pose la matrice de covariance :

$$\underline{\Gamma} = (\rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j)_{i,j}$$

Cette matrice est symétrique, et si on a de la chance elle est aussi positive. Il existe des algorithmes[3] très efficace pour le calcul de la matrice L issu de la décomposition de Cholesky de Γ. Si W est un mouvement brownien standard,

$$B = LW_t \text{ est de loi } \mathcal{N}_d(0, t\Gamma).$$

[3]Notons que pour calculer L telle que $M = L^t L$, pour tout x on pose $y = Mx$ alors, connaissant (y, x) il faut trouver L et z tels que

$$L^t z = y \text{ et } Lx = z$$

Chapitre 2

Premiers éléments de Calcul Stochastique

2.1 Filtration et adaptation

Lorsque l'on s'intéresse à l'étude des processus stochastiques, il est naturel de vouloir rapprocher des événements présents (à une date courante $t \geq 0$) d'événements passés ou futurs. Les tribus (ensembles structurés d'évènements) vont jouer un grand rôle dans l'étude des processus.

On associe à un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une suite de tribus indicées par le temps appelé *filtration*. Le rôle de la filtration est de formaliser une chronologie des évènements de la tribu $\mathcal{F}$.

Définition 2.1.1. Un espace de probabilité filtré *est un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *auquel on associe une famille croissante (au sens de l'inclusion) de sous–tribus de* $\mathcal{F}$*, notée* $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *:*

$$0 \leq s < t, \qquad \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

On notera $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$*, l'espace de probabilité filtré, de filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Exemple : La filtration engendrée par un processus

On note $(\mathcal{F}_t^X, t \geq 0)$ la filtration engendrée par le processus $(X_t, t \geq 0)$. Elle est définie de la manière suivante :

• Pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t^X$ est la plus petite tribu qui rend mesurable toutes les applications $\omega \in \Omega \to X_\theta(\omega)$ quelque soit $\theta \leq t$:

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_\theta, 0 \leq \theta \leq t).$$

Ainsi, toute les valeurs passés du processus X sont des variables aléatoires sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t^X, \mathbb{P})$.

Les conditions habituelles

Dans la suite, pour des raisons techniques, on supposera toujours qu'une filtration possède les deux propriétés suivantes, appelées **"les conditions habituelles"** :

Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des événements négligeables de $\mathcal{F}$ pour $\mathbb{P}$: $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F};\ \mathbb{P}(A) = 0\}$.

On va supposer :

a) Si $A \in \mathcal{N}$, alors pour tout $t \geq 0,\ A \in \mathcal{F}_t$.

On exige ainsi que toutes les sous–tribus de la filtration contiennent tout les événements négligeable de $\mathcal{F}$ (ou encore que $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$).

b) $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ est continue à droite, c'est à dire

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}.$$

La filtration engendrée par un processus (X) ne vérifie pas en générale ces conditions. On corrige alors cette filtration pour obtenir ce qu'on appelle la filtration **naturelle** :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(\bigcap_{\varepsilon>0} \sigma(X_s, s \leq t+\varepsilon) \bigcup \mathcal{N}\right).$$

Définition 2.1.2. *Un processus $(X_t, t \geq 0)$ est dit* $\underline{\mathcal{F}_t\text{–}\textbf{adapté}}$ *si pour tout $t \geq 0$, X_t est une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$–mesurable.*

Exemples de processus adaptés

- X est naturellement $\mathcal{F}_t^X$–adapté.
- Soit maintenant $(\mathcal{F}_t)$ et X un processus $\mathcal{F}_t$–adapté. Alors $(f(t, X_t), t \geq 0)$ est lui aussi $\mathcal{F}_t$–adapté dès que f est mesurable.
- $(\int_0^t f(s, X_s)ds, t \geq 0)$ est $\mathcal{F}_t$–adapté (pourvu que l'intégrale soit bien définie).
- Si de plus X est continu, le processus $(M_t^X = \sup_{s \leq t} X_s, t \geq 0)$ est $\mathcal{F}_t$–adapté.

Les fonctions mesurables de ces processus sont aussi $\mathcal{F}_t$–adapté.
En modélisation, deux situations peuvent se rencontrer :

a) $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration naturelle d'un processus particulier, sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En général, il s'agira de la filtration naturelle d'un mouvement brownien.

b) La filtration $(\mathcal{F}_t)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est imposée. Dans ce cas, on doit définir un mouvement brownien adapté à cette filtration donnée :

Définition 2.1.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité filtré. Un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien standard (on dit aussi processus de Wiener), $(W_t, t \geq 0)$ est un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifie :*

$(W_t, t \geq 0)$ est un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté, càd $\forall t \geq 0$, W_t est $\mathcal{F}_t$–mesurable.

$\forall 0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$.

$\forall 0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ a même loi que W_{t-s} et est gaussien $\mathcal{N}(0, t-s)$.

$W_0 = 0$ $\mathbb{P}$ p.s. (pour le standard)

Si $(\mathcal{F}_t) = (\mathcal{F}_t^W)$, i.e si la filtration imposée est la filtration naturelle du mouvement brownien, alors les deux définitions 1.2.1 et 2.1.3 coïncident.

2.1.1 Martingales en temps continue

On se donne un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$.

Définition 2.1.4. *Un processus $(M_t, t \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_t$–martingale si*

(i) *(M_t) est un processus $\mathcal{F}_t$–adapté.*

(ii) *$\mathbb{E}|M_t| < +\infty$, pour tout $t \geq 0$, (i.e. le processus (M_t) est intégrable).*

(iii) *Pour tout* $s \leq t$*,* $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$*.*

- Si on remplace **(iii)** par :

  (iii') Pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s$, on dit que (M_t) est une *sur–martingale*.
- Si on remplace **(iii)** par :

  (iii") Pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s$, on dit que (M_t) est une *sous–martingale*.

  – Si un processus (M_t) est une $\mathcal{F}_t$–martingale, alors

  $$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0).$$

  L'espérance d'une martingale reste constante au cours du temps !

  – Le terme de martingale est emprunté au jeux de hasard. Le processus (sur–sous-)martingale est alors dans ce contexte le gain à chaque étape du jeux (cas de martingale à temps discret).

  – Un des grands intérêts de la propriété de martingale est qu'elle permet de "faire" des calculs sur le processus.

2.1.2 Des exemples de martingales

L'exemple le plus simple de martingale : soit X une v.a réelle, intégrable alors, le processus (M_t) défini pour tout $t \geq 0$ par

$$M_t = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$$

est une martingale.

Soit maintenant $(W_t, t \geq 0)$ un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien standard.

1. (W_t) est une $\mathcal{F}_t$–martingale.

2. $(W_t^2 - t, t \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_t$–martingale.

3. $(\exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t), t \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_t$–martingale.

2.1.3 L'inégalité maximale de Doob

Les martingales sont des objets qui jouent un grand rôle dans la théorie des processus stochastiques, notamment parce qu'on peut leur appliquer **l'inégalité maximale** suivante :

Théorème 2.1.5. (Inégalité de Doob). *Soit* (M_t) *une* $\mathcal{F}_t$*–martingale réelle et* **continue** *(ie à trajectoires continues). Pour tout* $p > 1$ *tel que* $M_T \in L^p(\Omega)$ *(i.e.* $\mathbb{E}|M_T^p| < +\infty$*), on a*

1) $M_T^* := \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|$ *est dans* $L^p(\Omega)$ *(ie* $\mathbb{E}|M_T^*|^p < +\infty$*).*

2) $\left\{\mathbb{E}\left(M_T^{*p}\right)\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \dfrac{p}{p-1} \left\{\mathbb{E}\left(|M_T|^p\right)\right\}^{\frac{1}{p}}$*.*

Ce résultat se démontre à l'aide du Théorème d'arrêt 4.2.8 au chapitre 4. La preuve est reportée à la section 4.2.5.

A l'aide de l'inegalité de Jensen, montrer que

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Considérons le cas où (M) est un brownien standard (W). Alors, en utilisant la loi explicite du maximum du mouvement brownien (voir la section 1.2.2), on peut montrer que

$$\begin{aligned}\left\{\mathbb{E}\left(M_T^{*p}\right)\right\}^{\frac{1}{p}} &= \left\{\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}|W_t|\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\mathbb{E}\left(\max\left(\sup_{0\le t\le T}(W_t), -\inf_{0\le t\le T}(W_t)\right)\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}}\\ &\le \left\{\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}(W_t) - \inf_{0\le t\le T}(W_t)\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}}\\ &\le \left\{2^p\mathbb{E}\left(|W_T|^p\right)\right\}^{\frac{1}{p}} \le 2\left\{\mathbb{E}\left(|W_T|^p\right)\right\}^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Pour $p = 2$, on retrouve ci-dessus l'inégalité de Doob, pour le mouvement brownien. Pour $p > 2$, le calcul ci-dessus, bien que exploitant une identité connue sur la loi du maximum du mouvement brownien, devient une estimation plus grossière que la l'inégalité de Doob (en effet, $2 > p/(p-1)$ dès que $p > 2$).

2.2 Sur la convergence des variables aléatoires

Suivant le contexte, $|x|$ désignera la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ ou la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.2.1. *Une suite de v.a.* $(X_n)_{n\ge1}$ **converge presque sûrement** *vers une v.a.* X *si l'ensemble*

$$N = \left\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\right\}$$

est $\mathbb{P}$*-négligeable (i.e.* $\mathbb{P}(N) = 0$*).*

$$\mathbb{P}\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = \mathbb{P}(N^c) = 1.$$

On utilisera la notation

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = X \text{ p.s.}$$

Définition 2.2.2. *Une suite de v.a.* $(X_n)_{n\ge1}$ **converge dans** L^p *vers une v.a.* X *si les variables* X_n *appartiennent à* $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *(i.e.* $\mathbb{E}|X_n|^p < +\infty$*),* X *appartient à* $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *(i.e.* $\mathbb{E}|X|^p < +\infty$*) et*

$$\lim_{n\to+\infty} \|X_n - X\|_{L^p} = \lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{E}(|X_n - X|^p)\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

On utilisera la notation $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Si $(X_n)_{n\ge1}$ est une suite de v.a. intégrables (i.e. dans $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$),

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = X \text{ p.s.} \quad \not\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^1} X.$$

En effet, il faut montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |X_n - X| d\mathbb{P} = 0$. Or pour cela on a besoin d'une hypothèse supplémentaire. Par exemple pour appliquer le théorème de convergence dominée, il faut supposer que les variables $|X_n - X|$ sont majorées par une v.a. intégrable.

Définition 2.2.3. *Une suite de v.a.* $(X_n)_{n\ge1}$ **converge en probabilité** *vers* X *si pour tout* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

On écrit simplement,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0$$

et on note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Théorème 2.2.4. *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a.*

a) Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, $p \geq 1$, *alors* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

b) Si $X_n \to X$ *presque sûrement, alors* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

b) Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, *alors on peut extraire de la suite* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une sous–suite* $(X_{\nu(n)})_{n\geq 1}$ *qui converge vers* X *presque sûrement.*

Les trois notions de convergence ci-dessus (p.s., dans L^p, en probabilité) sont des variantes de la convergence “point par point” de l'analyse classique, c'est à dire une convergence en valeur des fonctions considérées.

2.2.1 Variation quadratique du mouvement brownien

Sur un intervalle $[0,T]$, on considère une partition $\tau(\delta) = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$ de pas $\delta = \max(t_j - t_{j-1})$. On définit la p–variation ($p > 0$) d'un processus $(X_t, t \geq 0)$ sur l'intervalle $[0,T]$ par

$$V_T^p(\tau(\delta), X) = \sum_{k=1}^{n} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^p.$$

La 1-variation de pas δ, $V_T^1(\tau(\delta), X)$ est la **variation usuelle** de X.

La 2-variation de pas δ, $V_T^2(\tau(\delta), X)$ est appelée **variation quadratique** de X.

Considérons le cas particulier du mouvement brownien (qui est une martingale de carré intégrable) :

Proposition 2.2.5. *Soit* $T > 0$ *fixé et* $\tau(\delta)$ *une partition de l'intervalle* $[0,T]$ *de pas* δ.

a) *Pour tout* $t > 0$, *la variation quadratique sur* $[0,t]$ *du mouvement brownien* W *converge vers* t, *dans* $L^2(\Omega)$ *et presque sûrement, quand le pas* δ *tend vers 0 :*

$$\lim_{\delta \to 0} V_t^2(\tau(\delta), W) = t, \quad p.s.$$

c) *Presque toutes les trajectoires du mouvement brownien* W *sont à 1-variation infinies, sur tout compact.*

Lorsque X est une fonction continûment différentiable (i.e de classe C^1) de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, sa variation $V_T^1(\tau, X)$ est bornée et sa variation quadratique $V_T^2(\tau, X)$ tend vers 0.

2.3 Intégrale d'Itô (le cas unidimensionnel)

- Les trajectoires du mouvement brownien sont presque sûrement de 1-variations infinies sur tout compact (et nulle part différentiable). Ceci signifie qu'il n'est pas possible de définir une intégrale de la forme

$$\int_0^T X_s(\omega) dW_s(\omega)$$

  au sens de Lebesgue–Stieljes sur les trajectoires (ie ω par ω, presque sûrement).
- On montre que la p–variation du mouvement brownien sur tout compact tend vers 0 dès que $p > 2$. La variation quadratique est la bonne quantité à étudier pour la construction de intégrale stochastique pour une classe appropriée d'intégrants X.
- Cette construction a été introduite par Itô (1942) pour définir des intégrales contre le mouvement brownien et a ensuite été généralisée pour les intégrales contre des martingales continues et de carré intégrable par Kunita et Watanabe (1967).
- Dans le cadre de ce cours, nous ne parlerons que de l'intégrale d'Itô.

2.3.1 Différents espaces de processus

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ et W un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien réel.

Définition 2.3.1. *Pour $T > 0$ fixé, on définit l'espace $M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ par*

$$M^2_{\mathcal{F}}(0,T) = \Big\{(\phi_t, 0 \le t \le T) \text{ processus réel, mesurable et } \mathcal{F}_t\text{–adapté tel que } \mathbb{E}\left(\int_0^T \phi_\theta^2 d\theta\right) < +\infty\Big\},$$

quotienté par la relation : $\phi \simeq \psi \Leftrightarrow \mathbb{E}\displaystyle\int_0^T |\phi_\theta - \psi_\theta|^2 d\theta = 0$. On vérifie que $M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ est un espace de Hilbert [1] pour le produit scalaire

$$(\phi, \psi) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \phi_\theta \psi_\theta d\theta\right).$$

On définit de la même manière $M^2_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^+)$. $M^2_{\mathcal{F}}$ est un ensemble de processus pour lesquels on va définir l'intégrale d'Itô. Cette intégrale aura la particularité d'être une **martingale** de carré intégrable.

A l'espace $M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$, on va associer l'espace de **processus élémentaires** suivant

Définition 2.3.2. *On note $\mathcal{E}^b_{\mathcal{F}}(0,T)$), le sous–espace de $M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ des processus en escalier et borné qui s'écrivent sous la forme*

$$\phi_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(\omega) \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t),$$

où $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ et où les ϕ_i sont des v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables et bornées, (i.e. $\forall i,\ \exists C_i,\ \phi_i \le C_i\ \mathbb{P}\ p.s.$).

Proposition 2.3.3 (Densité de $\mathcal{E}^b_{\mathcal{F}}(0,T)$ dans $M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$.). *Tout processus (ϕ_t) de $M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ est limite d'une suite (ϕ^n_t) de processus de $\mathcal{E}^b_{\mathcal{F}}(0,T)$:*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T |\phi_s - \phi^n_s|^2 ds\right) = 0.$$

2.3.2 Intégration des processus élémentaires

– Soit $(\phi_t, t \in [0,T])$ un processus élémentaire de $\mathcal{E}^b_{\mathcal{F}}(0,T)$ de la forme $\phi_t = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i\ \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$ avec $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$.

$$\text{On pose} \quad I(\phi) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

et on note $I(\phi) = \displaystyle\int_0^T \phi_s dWs$.

[1] On appelle espace préHilbertien réel un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire euclidien. Un espace de Hilbert est un espace préHilbertien complet.

– De la même façon, pour tout $t \in [0, T]$, on pose

$$I_t(\phi) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(W_{t_{i+1} \wedge t} - W_{t_i \wedge t} \right)$$

et on note $I_t(\phi) = \int_0^t \phi_s dWs$.

– Enfin, on notera, pour tout $s \leq t$, $\int_s^t \phi_\theta dW_\theta$ pour $I_t(\phi) - I_s(\phi)$.

Remarque 2.3.4.

- *Par construction, le processus*

$$\left(I_t(\phi) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(W_{t_{i+1} \wedge t} - W_{t_i \wedge t} \right), t \in [0, T] \right)$$

est **à trajectoire continue en temps***.*

- *Il est facile de voir que* $(I_t(\phi), t \in [0, T])$ *est un processus* $\mathcal{F}_t$**-adapté***.*

- *Il est également facile de voir que pour tout* t*, l'application* $I_t : \phi \to I_t(\phi)$ *est linéaire pour* $\phi \in \mathcal{E}^b_{\mathcal{F}}(0, T)$*.*

Théorème 2.3.5. *Pour* ϕ, ψ *des processus élémentaires* **bornés** *(i.e. appartenant à* $\mathcal{E}^b_{\mathcal{F}}(0, T)$*) et pour tout* $0 \leq s \leq t \leq T$*,*

i) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \left(\int_s^t \phi_\theta dW_\theta \right) = 0.$

En particulier, $(I_t(\phi))$ *est une* $\mathcal{F}_t$**–martingale continue***.*

ii)

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \left(\int_s^t \phi_\theta dW_\theta \int_s^t \psi_\theta dW_\theta \right) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \left(\int_s^t \phi_\theta \psi_\theta d\theta \right).$$

En particulier :

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \left(\int_s^t \phi_\theta dW_\theta \right)^2 = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \left(\int_s^t \phi^2_\theta d\theta \right).$$

L'égalité ci-dessus est appelée **l'isométrie d'Itô***.*

Le processus $(I^2_t(\phi) - \int_0^t \phi^2_\theta d\theta, t \leq T)$ *est une* $\mathcal{F}_t$*–martingale continue.*

Preuve. Par la propriété de linéarité de I_t et de $\mathbb{E}$, il suffit de vérifier les points i) et ii) pour ϕ et ψ de la forme

$$\phi_t = \Phi \mathbb{1}_{]a,T]}(t) \text{ avec } \Phi \text{ une v.a. } \mathcal{F}_a\text{–mesurable}$$
$$\psi_t = \Psi \mathbb{1}_{]b,T]}(t) \text{ avec } \Psi \text{ une v.a. } \mathcal{F}_b\text{–mesurable.}$$

$$I_t(\phi) = \Phi(W_t - W_{t \wedge a})$$
$$I_t(\psi) = \Psi(W_t - W_{t \wedge b}).$$

On suppose que $a \leq b$, l'autre cas se déduira par symétrie.

Preuve de $i)$**.** Il faut calculer $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(I_t(\phi) - I_s(\phi)\right)$. On distingue les cas $s < a$ et $s \geq a$.
Si $s < a$, alors $I_s(\phi) = 0$ et

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} I_t(\phi) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\Phi(W_t - W_{t\wedge a})\right) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\Phi\,\underbrace{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_a}(W_t - W_{t\wedge a})}_{=0}\right) = 0.$$

Si $a < s < t$ **:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} I_t(\phi) &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\Phi(W_t - W_a)\right) = \Phi\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(W_t - W_a)\\
&= \Phi\,\underbrace{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(W_t - W_s)}_{=0} + \Phi\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(\underbrace{W_s - W_a}_{\mathcal{F}_s\text{-mesurable}})\\
&= \Phi(W_s - W_a) = I_s(\phi).
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(I_t(\phi)\right) = I_s(\phi)$ et $(I_t(\phi))_{t\in[0,T]}$ est bien une $\mathcal{F}_t$–martingale.

Preuve de $ii)$**.** On applique les mêmes arguments : on doit calculer

$$J = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\Big((I_t(\phi) - I_s(\phi))(I_t(\psi) - I_s(\psi))\Big).$$

Remarquons que par **i)**,

$$\begin{aligned}
J &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\Big(I_t(\phi)I_t(\psi)\Big) - I_s(\phi)I_s(\psi)\\
&= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\Big(\Phi\Psi(W_t - W_{t\wedge a})(W_t - W_{t\wedge b})\Big) - I_s(\phi)I_s(\psi).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on note également

$$\begin{aligned}
H &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\int_s^t \phi_\theta\psi_\theta d\theta\right) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\Phi\Psi\int_s^t \mathbb{1}_{]a,T]}(\theta)\mathbb{1}_{]b,T]}(\theta)d\theta\right)\\
&= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\Phi\Psi\int_s^t \mathbb{1}_{]b,T]}(\theta)d\theta\right) \quad \text{(car } a \leq b\text{)}\\
&= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\Phi\Psi\right)\Big(t\vee b - s\vee b\Big).
\end{aligned}$$

On doit montrer que $J = H$. Il faut examiner les différents cas :
si $b \geq t$, alors $b \geq s$ et $I_s(\psi) = 0$ ainsi que $J = H = 0$.
Si $b < t$, il n'y a deux sous–cas :

Cas $s \leq b < t$ **:** alors, $H = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\Phi\Psi\right)\Big(t - b\Big)$, $I_s(\psi) = 0$ et

$$\begin{aligned}
J &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\Phi\Psi(W_t - W_a)(W_t - W_b)\right)\\
&= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\Phi\Psi(W_t - W_b)^2)\right) + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\Phi\Psi(W_b - W_a)(W_t - W_b)\right).
\end{aligned}$$

Or, l'accroissement $W_t - W_b$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_b$, donc est indépendant de $\mathcal{F}_s$, Φ et Ψ. D'autre part $W_b - W_a$, Φ et ψ sont $\mathcal{F}_b$–mesurables. Donc

$$J = (t-b)\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}(\Phi\Psi) + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\Phi\Psi(W_b - W_a)\,\underbrace{\mathbb{E}^{\mathcal{F}_b}(W_t - W_b)}_{=0}\right).$$

Cas $b \leq s \leq t$ **:** se traite de la même façon.

Ainsi,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(I_t^2 + \int_0^t \phi_\theta^2 d\theta - I_s^2(\phi) - \int_0^s \phi_\theta^2 d\theta\right) = 0$$

ce qui prouve que $(I_t^2(\phi) - \int_0^t \phi_\theta^2 d\theta), 0 \leq t \leq T)$ est bien une $\mathcal{F}_t$–martingale. ∎

Corollaire 2.3.6. *Pour un processus élémentaire* **borné** $\phi \in \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^b(0,T)$*, on a l'inégalité maximale*

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \phi_s dW_s\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\int_0^T \phi_s^2 ds.$$

Preuve. On vient de voir que $(I_t(\phi))$ est une $\mathcal{F}_t$–martingale, il suffit donc d'appliquer l'inégalité de Doob 2.1.5 pour $p = 2$:

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \phi_s dW_s\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left(\left|\int_0^T \phi_s dW_s\right|^2\right)$$

et d'appliquer le point **ii)** (l'isométrie d'Itô). ∎

Pour tout $t \leq T$, l'application $I_t : \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^b(0,T) \longrightarrow L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $\phi \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i\wedge t}\right)$ est **linéaire** et **continue** pour la topologie induite sur $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^b(0,T)$ par la norme de $M_{\mathcal{F}}^2(0,T)$.

Nous sommes ramené à la situation suivante :
Soit E est un espace vectoriel normé, de norme $\|\ \|$, on notera E' l'ensemble des applications linéaires de $E \longrightarrow \mathbb{R}$. E' est appelé le dual topologique de E.

Corollaire 2.3.7 (du Théorème de Hahn–Banach (forme analytique) :). *Soit G un sous–espace vectoriel de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue de norme $\|g\|_{G'} = \sup_{x\in G, \|x\|\leq 1} |g(x)|$. Alors il existe $f \in E'$ qui prolonge g et tel que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.*

2.3.3 Intégration des processus de $M_{\mathcal{F}}^2(0,T)$

On a obtenu que pour tout $t \leq T$, l'application

$$\begin{aligned} I_t : \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^b(0,T) &\longrightarrow L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \\ \phi &\longrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i\wedge t}\right) \end{aligned}$$

est linéaire et (cf. Corollaire 2.3.6) **continue** pour la topologie induite sur $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^b(0,T)$ par la norme de $M_{\mathcal{F}}^2(0,T)$.

Donc (cf. Corollaire 2.3.7 du Th. de Hahn–Banach) l'application I_t peut être **prolongée** par une application linéaire continue notée encore $I_t : M_{\mathcal{F}}^2(0,T) \to L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

En particulier, par densité de $\mathcal{E}_{\mathcal{F}(0,T)}^b$ dans $M_{\mathcal{F}(0,T)}^2$, pour tout ϕ dans $M_{\mathcal{F}}^2(0,T)$, il existe une suite (ϕ^n, n) d'éléments de $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^b(0,T)$ telle que

$$I_t(\phi) = \lim_{n\to+\infty} I_t(\phi^n) \text{ dans } L^2(\Omega).$$

– Il suffit d'extraire une sous suite pour que la convergence soit presque sûre. On en déduit que $I_t(\phi)$ est $\mathcal{F}_t$**–mesurable** comme limite d'une suite de v.a $\mathcal{F}_t$–mesurable. $(I_t(\phi))_{t\in[0,T]}$ **est donc un processus** $\mathcal{F}_t$**-adapté**.

– De plus, il y a **unicité du prolongement** I_t au sens ou si I'_t est un autre prolongement

$$\forall \phi \in M^2_{\mathcal{F}}(0,T) \;\; I_t(\phi) = I'_t(\phi) \;\; \mathbb{P} \; p.s$$

par unicité de la limite presque sure.

Théorème 2.3.8. *Pour ϕ et ψ dans $M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$, il existe une modification adaptée et continue du processus $(I_t(\phi), t \leq T)$ notée $\left(\int_0^t \phi_\theta dW_\theta, t \leq T\right)$ telle que, $\forall s \leq t \leq T$,*

i) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s} \int_s^t \phi_\theta dW_\theta = 0$, *en particulier* $\left(\int_0^t \phi_\theta dW_\theta, 0 \leq t \leq T\right)$ *est une $(\mathcal{F}_t)$–martingale.*

ii) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\int_s^t \phi_\theta dW_\theta \int_s^t \psi_\theta dW_\theta\right) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\int_s^t \phi_\theta \psi_\theta d\theta\right)$.
En particulier, on a **l'isométrie d'Itô**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left[\left(\int_s^t \phi_\theta dW_\theta\right)^2\right] &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\int_s^t \phi_\theta^2 d\theta\right). \\ \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \phi_\theta dW_\theta\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left(\int_s^t \phi_\theta^2 d\theta\right). \end{aligned}$$

iii) *Si $(W^1_t, W^2_t, t \geq 0)$ est un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien en dimension 2, alors*

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\int_s^t \phi_\theta dW^1_\theta \int_s^t \psi_\theta dW^2_\theta\right) = 0.$$

Un processus $(Y_t, t \leq 0)$ est dit **modification de** $(X_t, t \geq 0)$ *si pour tout $t \geq 0$ $\mathbb{P}(Y_t = X_t) = 1$.*

Preuve. *Pour démontrer l'existence d'une modification continue, il faut montrer qu'une suite (ϕ^n_t) d'éléments de $\mathcal{E}^b_{\mathcal{F}}(0,T)$ qui converge vers (ϕ_t) dans $M^2_{\mathcal{F}(0,T)}$, converge uniformément en temps (On montre cela à l'aide du Lemme de Borel–Cantelli).*

Les points i), ii) et iii) sont démontrés pour des processus élémentaires bornés (cf. Théorème 2.3.5 et sa preuve). Par passage à la limite ils sont vrais pour le prolongement I_t. *Ils sont vrais aussi pour la modification continue car :*

$$X, Y \in L^2(\Omega) \text{ et } X = Y p.s. \;\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{G}} X = \mathbb{E}^{\mathcal{G}} Y$$

pour toute sous tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$. ■

2.3.4 Intégration de processus de $L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$

On aura besoin d'étendre la construction de l'intégrale à une classe plus vaste de processus $\mathcal{F}_t$–adaptés pour lesquels l'hypothèse d'intégrabilité est relaxée :

Définition 2.3.9. *On définit l'espace $L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ par*

$$\begin{aligned} L^2_{\mathcal{F}}(0,T) = \Big\{ &(\phi_t, 0 \leq t \leq T) \text{ processus réel, mesurable} \\ &\text{et } \mathcal{F}_t\text{–adapté tel que } \left(\int_0^T \phi_\theta^2 d\theta\right) < +\infty \; \mathbb{P} \; p.s. \Big\}. \end{aligned}$$

Proposition 2.3.10. (Densité de $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(0,T)$ dans $L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$).
$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(0,T)$ est le sous–espace de $L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ des processus en escalier (non forcement bornés)de la forme $\phi_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(\omega)\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$, où $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ et où les ϕ_i sont des v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables et dans $L^2(\Omega)$. Tout processus (ϕ_t) de $L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ est limite d'une suite (ϕ^n_t) de processus de $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(0,T)$ au sens suivant

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T |\phi_s(\omega) - \phi^n_s(\omega)|^2 ds = 0, \ \mathbb{P}\ p.s.$$

Définition et Proposition 2.3.11. *Soit ϕ un processus de $L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ et (ϕ^n) une suite de processus de $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(0,T)$ telle que*

$$\int_0^T |\phi_s - \phi^n_s|^2 ds \to 0 \ \text{ en probabilité, quand } n \to +\infty.$$

(L'existence d'une telle suite est assuré par le résultat de densité.) Alors, il existe une v.a limite en probabilité de $(\int_0^T \phi^n_s dW_s)$. Si $(\widetilde{\phi}^n)$ est une autre suite de processus vérifiant la même propriété que (ϕ^n) alors les limites en probabilité de $(\int_0^T \phi^n_s dW_s)$ et $(\int_0^T \widetilde{\phi}^n_s dW_s)$ sont égales presque sûrement.

On note $I(\phi)$ toute limite d'une suite de la forme $(\int_0^T \phi^n_s dW_s)$ avec (ϕ^n) comme ci-dessus.

2.3.5 L'intégrale stochastique comme processus

Pour $\phi \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$, on construit $I_t(\phi)$, pour chaque $t \in [0,T]$, (si les hypothèses sont vérifiées sur $[0,T]$, elles le sont sur $[0,t]$ pour tout $t \leq T$).

$I_t(\phi)$ est donc la limite **en probabilité** d'une suite de v.a. $\mathcal{F}_t$–mesurables de la forme $\left(\int_0^t \phi^n_\theta dW_\theta\right)_n$, donc $I_t(\phi)$ est la limite presque sûre d'une sous suite $\mathcal{F}_t$–mesurable. On peut donc en conclure que $(I_t(\phi), t \leq T)$ est un processus $\mathcal{F}_t$–adapté. De plus,

Théorème 2.3.12. *Pour tout $\phi \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$, $(I_t(\phi), t \leq T)$ admet une* **modification adaptée et continue** *qui sera notée $\left(\int_0^t \phi_\theta dW_\theta, t \leq T\right)$.*

Remarque 2.3.13.

1) De manière évidente, si $\phi \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ et $\phi \in M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$, les intégrales stochastiques de ϕ comme processus de $L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ et comme processus de $M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ sont modifications l'une de l'autre.

2) Contrairement à l'intégrale stochastique de processus de $M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$, celle de processus de $L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ **n'est pas une martingale** *et ne vérifie pas (a priori) l'isométrie d'Itô.*

Résumé :

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$–mvt brownien et $(\phi_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus $\mathcal{F}_t$–adapté.
On peut définir l'intégrale stochastique $\left(\int_0^t \phi_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$

• dès que $\int_0^T \phi_s^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}$ p.s., c'est à dire dès que $\phi \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$

• dès que $\mathbb{E}\left(\int_0^T \phi_s^2 ds\right) < +\infty$càd dès que $\phi \in M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$.

$\left(\int_0^t \phi_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale si $\mathbb{E}\left(\int_0^T \phi_s^2 ds\right) < +\infty$,
c'est à dire si $\phi \in M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ et l'isométrie d'Itô s'applique.
La condition $\mathbb{E}\left(\int_0^T \phi_s^2 ds\right) < +\infty$ est équivalente à
$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t \phi_s dW_s\right)^2\right) < +\infty$. Dans ce cas, l'isométrie d'Itô
implique que $\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T \phi_s dW_s\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \phi_s^2 ds\right)$.

2.4 Formule d'Itô (le cas unidimensionnel)

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et $(W_t, t\geq 0)$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard réel unidimensionnel.

Définition 2.4.1. *Un* **processus d'Itô** *réel, est un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}$, continu et adapté de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_\theta d\theta + \int_0^t \sigma_\theta dW_\theta,\ \mathbb{P}\ p.s.,$$

$$\text{ce qu'on note encore } \begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t \\ X(0) = X_0, \end{cases} \qquad \text{où}$$

1) X_0 est une v.a. $\mathcal{F}_0$ mesurable.

2) $(b_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus réel, $\mathcal{F}_t$–adapté, tel que $\int_0^T |b_s| ds < +\infty$, $\mathbb{P}$ p.s.

3) $(\sigma_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus réel appartenant à $L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ (ie, σ_t est $\mathcal{F}_t$–adapté et $\int_0^T |\sigma_s|^2 ds < +\infty$, $\mathbb{P}$ p.s.).

Des contraintes sur les coefficients b et σ, il résulte bien que le processus (X_t) est $\mathcal{F}_t$–adapté et continu.

Théorème 2.4.2 (Formule d'Itô (en dimension un)). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(\mathbb{R})$. Soit X un processus d'Itô réel. Presque sûrement, pour tout $t \in [0,T]$*

$$\begin{aligned} f(X_t) =& f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 f''(X_s) ds \\ =& f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) b_s ds + \int_0^t f'(X_s)\sigma_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 f''(X_s) ds \end{aligned}$$

Forme différentielle :

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2}\sigma_s^2 f''(X_t) dt.$$

Si f dépend aussi du temps,
$f : [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$,

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) ds.$$

Preuve.

- Il suffit de démontrer la formule pour la date $t = T$ seulement. En effet, T est arbitraire et si les hypothèses sont satisfaites sur $[0, T]$, elles le sont aussi bien sure $[0, \theta]$ pour $\theta \leq T$. Ainsi, montrer la formule d'Itô à l'instant T revient à montrer que pour tout $t \in [0, T]$

$$f(X_t) \quad = \quad f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 f''(X_s) ds$$

presque sûrement. La continuité en temps des termes de gauche et de droite de l'égalité permet de passer le "presque sûrement" avant le pour tout t (ie $\mathbb{P}(gauche_t = droite_t, \forall t \in [0, T]) = 1$).

- On montre qu'on peut se ramener à démontre la formule d'Itô dans le cas où les coefficients b et σ sont presque sûrement uniformément bornés sur $[0, T]$ (ceci en construisant des suites b^n et σ^n de tronquation de b et σ par des valeurs de plus en plus grandes et en utilisant les hypothèses d'intégrabilité de b et σ + le théorème de convergence de l'intégrale stochastique qui convergence en probabilité (et donc p.s. quitte à extraire une sous–suite)).

- On considère une subdivision de $[0, T]$ de la forme $0 = t_0^N < t_1^N = \frac{T}{N} < \ldots < t_N^N = T$, de pas $h = \frac{T}{N}$ où $N \in \mathbb{N}$. Alors,

$$A := f(X_T) - f(X_0) = \sum_{j=0}^{N-1} f(X_{(j+1)h}) - f(X_{jh}).$$

On rappelle que si $(X_n)_n$ est une suite de v.a. telle que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ alors $X = Y$ presque sûrement. Il suffit donc de montrer la convergence en probabilité du terme de droite de l'égalité ci-dessus vers le terme de droite de la formule d'Itô (comme $f(X_T) - f(X_0)$ "converge" vers lui-même en probabilité le rappel ci-dessus nous donne l'égalité presque sure des deux limites).

- On applique la formule de Taylor à l'ordre 2 en espace : il existe une suite $\beta_j(\omega) \in]0, 1[$ telle que

$$\begin{aligned} A \quad = \quad & \sum_{j=0}^{N-1} (X_{(j+1)h} - X_{jh}) f'(X_{jh}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (X_{(j+1)h} - X_{jh})^2 f''(X_{jh} + \beta_j (X_{(j+1)h} - X_{jh})) \\ & := A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Pour A_1). En remplaçant $(X_{(j+1)h} - X_{jh})$ par sa valeur :

$$\begin{aligned} A_1 \quad = \quad & \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{jh}^{(j+1)h} b_s f'(X_{jh}) ds \right) + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{jh}^{(j+1)h} \sigma_s f'(X_{jh}) dW_s \right) \\ & := A_{11} + A_{12}. \end{aligned}$$

$A_{11} \to \displaystyle\int_0^T b_s f'(X_s) ds$ par convergence dominée. Pour A_{12}, il faut utiliser un théorème de convergence en probabilité de l'intégrale stochastique : pour que $A_{12} \to \int_0^T \sigma_s f'(s, X_s) dW_s$, σ étant presque sûrement bornée, il suffit de montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} \int_{jh}^{(j+1)h} \left| f'(X_{jh}) - f'(X_s) \right|^2 ds \to 0$ en probabilité. Or, la convergence ci-dessus à lieu presque sûrement par la continuité des trajectoires de X.

Pour A_2)**.**

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\int_{jh}^{(j+1)h} b_s ds\right)^2 f''\left(X_{jh}+\beta_j(X_{(j+1)h}-X_{jh})\right) \\
&+ \sum_{i=0}^{N-1}\left(\int_{jh}^{(j+1)h} b_s ds\right)\left(\int_{jh}^{(j+1)h} \sigma_s dW_s\right) f''\left(X_{jh}+\beta_j(X_{(j+1)h}-X_{jh})\right) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\int_{jh}^{(j+1)h} \sigma_s dW_s\right)^2 f''\left(X_{jh}+\beta_j(X_{(j+1)h}-X_{jh})\right) \\
&= C_1 + C_2 + C_3.
\end{aligned}$$

b étant borné, $\left(\int_{jh}^{(j+1)h} b_s ds\right)^2 \leq Bh^2 \to 0$ et donc $C_1 \to 0 p.s.$.

$$C_2 \leq \sum_{i=0}^{N-1} Bh \sup_k \left|\int_{kh}^{(k+1)h} \sigma_s dW_s\right| \sup_k \left|f''\left(X_{kh}+\beta_j(X_{(k+1)h}-X_{kh})\right)\right|.$$

Comme $t \to \int_0^t \sigma_s dW_s$ est continue, $C_2 \to 0$.

Pour C_3)**.** Il faut maintenant montrer que

$$\left|C_3 - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_s^2 f''(X_s) ds\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Dans le cas où $\sigma = cte$ et où $f''(x) = cte$ la relation ci-dessus devient

$$\sum_{i=0}^{N-1}\left((t_{j+1}-t_j) - \left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right)^2\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$
$$t - \sum_{i=0}^{N-1}\left(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

ce qui est vrai par la convergence presque sure de la variation quadratique du mouvement brownien. ■

Exemple élémentaire :

Soit (W_t) un brownien réel. Montrer en utilisant la formule d'Itô que le processus $(W_t^2 - t)$ est une martingale.

2.5 Processus d'Itô et martingale

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et $(W_t, t \geq 0)$ un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien standard réel (dim 1).

Proposition 2.5.1. *(1) Si $(M_t, t \in [0,T])$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable (i.e $\mathbb{E}(M_t^2) < +\infty$) , alors*

$$\mathbb{E}\left((M_t - M_s)^2/\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2/\mathcal{F}_s).$$

(2) Si $(M_t, t \in [0,T])$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale, telle que

$$\text{pour tout } t \in [0,T], \quad M_t = \int_0^t b_s ds,$$

avec $\mathbb{P}$ p.s., $\int_0^T |b_s| ds < +\infty$, pour que (M_t) soit bien définie.

Alors, $\mathbb{P}$ p.s. tout $t \in [0,T]$, $M_t = 0$.

Preuve. Montrons (1). Notons que $\mathbb{E}(M_t M_s / \mathcal{F}_s) = M_s^2$. Ainsi

$$\mathbb{E}\left((M_t - M_s)^2 / \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(M_t^2 - 2M_t M_s + M_s^2 / \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 / \mathcal{F}_s).$$

Montrons (2). Pour montrer que $M_t = 0$ pour tout t, il suffit de montrer que $\mathbb{E}(M_T^2) = 0$.

Nous donnons ici une version simplifié de la preuve du point (2)[2]. On ajoute à la proposition l'hypothèse suivante : il existe une constante **déterministe** C telle que, $\mathbb{P}$ p.s., $\int_0^T |b_s| ds \leq C < +\infty$. M est alors une martingale de carré intégrable.

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons une partition $(t_i^n = i \times \dfrac{T}{n}, i = 0, \ldots, n)$ de $[0,T]$. Alors, par le point (1) et pour tout n,

$$\mathbb{E}(M_T^2) = \mathbb{E}\left(M_T^2 - M_0^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n (M_{t_i^n}^2 - M_{t_{i-1}^n}^2)\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2\right).$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \left(\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} |b_s| ds\right)^2\right) \leq C\mathbb{E}\int_0^T \max_{i=1,\ldots,n} \left(\mathbb{1}_{[t_{i-1}^n, t_i^n]}(s) b_s\right) ds.$$

La suite de la preuve utilise un outil classique sur la convergence des martingales :

Théorème 2.5.2 (- Convergence dominée ou théorème de Lebesgue). *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, à valeurs réelles telle que :*

(a) la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f ;

(b) il existe une fonction intégrable g telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq g(x)$.

Alors f est intégrable et $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\, \mathrm{d}x = 0$,

ce qui entraîne que $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{d}x$.

Théorème 2.5.3 (- Version probabiliste). *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs réelles telle que :*

(a) la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge X $\mathbb{P}$-presque surement ;

(b) il existe une v.a. Y intégrable telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |X_n| \leq |Y|$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}X$.

On pose alors $X_n = \int_0^T \max_{i=1,\ldots,n} \left(\mathbb{1}_{[t_{i-1}^n, t_i^n]}(s) b_s\right) ds$; Cette suite est dominée par la constante C. Montrons que $X_n \to 0$, $\mathbb{P}$-presque surement. Pour cela, on pose maintenant $f_n(s)(\omega) = \max_{i=1,\ldots,n} \left(\mathbb{1}_{[t_{i-1}^n, t_i^n]}(s) b_s(\omega)\right)$. On observe que $f_n(s)(\omega) \to 0$ simplement quand $n \to +\infty$, et $f_n(s)$ est dominée par la constante C.

[2]La preuve complète utilise la notion de temps d'arrêt qui sera introduite au Chapitre 4.

En appliquant successivement les deux versions du théorème de convergence dominée, on obtient $\mathbb{E}\int_0^T \max_{i=1,\ldots,n}\left(\mathbb{1}_{[t_{i-1}^n,t_i^n]}(s)b_s\right) \to 0$, et ainsi que $\mathbb{E}(M_T^2) = 0$.

Ceci entraine que $\mathbb{P}$ p.s., $M_T = 0$.

De l'inégalité maximale de Doob pour les martingales, on obtient encore que $\mathbb{P}$ p.s., $\forall t \in [0,T]$, $M_t = 0$. ■

Corollaire 2.5.4.
1) La décomposition d'un processus d'Itô (X) est unique.

$$\textit{Si } X_t = X_0 + \int_0^t k_s ds + \int_0^t h_s dW_s = X_0' + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

alors $X_0 = X_0'$ $\mathbb{P}$ p.s., $k_s = b_s$ et $h_s = \sigma_s$, $ds \times d\mathbb{P}$ p.p.
2) Si $(X_t, t \in [0,T])$ est une martingale de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

avec $\mathbb{P}$ p.s., $\int_0^T |b_s|ds < +\infty$ et $\int_0^T |\sigma_s|^2 ds < +\infty$, alors $b_s = 0$ $ds \times d\mathbb{P}$ p.p.

Preuve. A nouveau, nous donnons seulement une idée de la preuve, en ajoutant l'hypothèse que (h_t) et (σ_t) sont des processus appartenant à $M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$.

Montrons (1). On commence par remarquer immédiatement que $X_0 = X_0'$. on applique le point (2) de la proposition précédente, avec la martingale $M_t = \int_0^t (h_s - \sigma_s)dW_s$ et $b_t := (k_t - b_t)$.

On en déduit que $k_t = b_t$ $\mathbb{P}$-presque surement. D'après l'isométrie d'Itô,

$$0 = \mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}\int_0^t (k_s - b_s)^2 ds.$$

On en déduit finalement que $k_t = b_t$, $dt \times d\mathbb{P}$.

Pour montrer le point (2), il suffit d'appliquer la linéarité de la propriété de martingale au processus $(X_t - \int_0 \sigma_s dW_s, t \in [0,T])$, et conclure que $b_t = 0$, $dt \times d\mathbb{P}$. ■

2.6 Caractérisation de Lévy du mouvement brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et $(W_t, t \geq 0)$ un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien standard réel (dim 1).

La propriété que $W_t - W_s$ a une moyenne nulle, indépendamment de $\mathcal{F}_s$ signifie que le mouvement Brownien est une martingale. De plus, nous avons énoncé que la variation quadratique de W converge vers t, dans $L^2(\Omega)$ et presque sûrement, quand le pas δ tend vers 0 :

$$\lim_{\delta\to 0} V_t^2(\tau(\delta), W) = t, \quad p.s.$$

Le fait remarquable est que la contraposée de cet énoncé est vraie : le mouvement Brownien est la seule martingale qui a cette variation quadratique. Ce résultat est connu sous le nom de caractérisation de Lévy

Théorème 2.6.1 (-Caractérisation de Lévy du mouvement brownien). *Soit $(X_t, t \geq 0)$ une martingale (locale)[3] telle que $X_0 = 0$. On a alors les équivalences suivantes*
* $(X_t, t \geq 0)$ *est un mouvement brownien standard, dans l'espace de probabilité filtré de la martingale.*
* $(X_t, t \geq 0)$ *est continue et* $(X_t^2 - t, t \geq 0)$ *est une martingale (locale).*
* *La variation quadratique de* $(X_t, t \geq 0)$ *sur* $[0, t]$ *est égale à* t.

Ce résultat se généralise en dimension quelconque.

2.7 Changement de Probabilité

Pourquoi changer de probabilité ?
- Statistique : Théorie de l'estimation par maximum de vraisemblance.
- Etude des martingales : de nombreuses propriétés sur les solutions d'EDS découlent des techniques de changement de probabilité.
  Dans le cas de modèles discrets, les changement de probabilité sont fréquents. Les transformations sont très simples est on ne les références pas comme changement de probabilité.
- En finance : Harrison & Pliska (1987) introduisent la notion de probabilité risque neutre pour son lien avec la complétude des marchés financiers et l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Définition 2.7.1. Changement de Probabilité. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité de référence.*

Une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ définit un changement de probabilité par rapport à $\mathbb{P}$, s'il existe une v.a. Z positive, $\mathcal{F}$-mesurable, telle que

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z \mathbb{1}_A), \text{ pour tout } A \in \mathcal{F}.$$

$$\int_\Omega g(\omega)\mathbb{Q}(d\omega) = \int_\Omega g(\omega) Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \forall f \text{ mesurable bornée.}$$

La v.a. Z s'appelle la **vraisemblance** *(ou la densité) de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$.*

Remarquons que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) = 1$.

$$\text{On note souvent } \mathbb{Q} = Z\mathbb{P} \quad \text{ou } d\mathbb{Q} = Z d\mathbb{P} \quad \text{ou encore } \left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}} = Z.$$

Définition 2.7.2. Probabilités équivalentes. *On dit que des probabilités $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}$* **sont équivalentes** *si Z est strictement positive $\mathbb{P}$ p.s. ce qui entraîne que $\mathbb{P}$ est un changement de probabilité par rapport à $\mathbb{Q}$ de densité Z^{-1}.*

Lorsque les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes, on écrit souvent Z sous la forme $\exp(Y)$.

2.7.1 Exemple élémentaire

En finance : le modèle binomiale à une période.

Soit U une v.a. qui prend deux valeurs u et d avec les probabilités p et $1-p$. Pour $\mathcal{F}$, on prend la tribu engendrée par U.

S_0 est le prix connu aujourd'hui. $S = S_0\, U$, le prix demain. Soit r le taux d'intérêt sur la période.

[3]La notion de martingale locale est plus générale que la notion de martingale au sens où toute martingale est une martingale locale. Cette notion de martingale locale sera introduite avec la notion de temps d'arrêt

- Chercher une probabilité $\mathbb{Q}$ (si elle existe) telle que le rendement espéré de l'actif risqué soit identique au rendement de l'actif non risqué. En particulier

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} S = S_0(1+r).$$

- Trouver l'unique (si elle existe) densité Z correspondant à ce changement de probabilité. Les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont elles équivalentes ?

2.7.2 Le cas des variables gaussiennes

Soit U une v.a de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par U. On considère encore $S = S_0\, U$ (même si le choix de la loi gaussienne n'est pas réaliste dans ce contexte).

- Trouver $\mathbb{Q}$ une probabilité risque neutre, c'est à dire vérifiant

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} S = S_0(1+r).$$

Réponse : il y en a une infinité, mais une seule probabilité $\mathbb{Q}$ est telle que U soit encore de loi gaussienne, de variance σ^2, sous la nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$.

Proposition 2.7.3. *Soit X v.a. de loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ sous $\mathbb{P}$, $\sigma^2 > 0$. Soit*

$$Z = \exp\left[\lambda X - \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2\right].$$

Z est une v.a. positive, d'espérance 1 qui définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$, par $d\mathbb{Q} = Zd\mathbb{P}$, sous laquelle X est une v.a. de loi gaussienne $\mathcal{N}(m+\sigma\lambda,\sigma^2)$.

Preuve. Prenons tout d'abord, X de loi $N(0,1)$. Alors pour toute fonction f continue et bornée :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(X)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f(X)\exp(\lambda X - \frac{1}{2}\lambda^2)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f(X+\lambda)).$$

Maintenant, si G est de loi $N(m,\sigma^2)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(G)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(\sigma X + m)) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f'(X)\exp(\lambda X - \frac{1}{2}\lambda^2)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f'(X+\lambda)) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f(m+\sigma(X+\lambda))) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f(G+\sigma\lambda))
\end{aligned}$$

où on a posé $f'(x) = f(m+\sigma x)$. ■

Chapitre 3

Valorisation d'options européennes, dans le cadre du modèle de Black et Scholes unidimensionnel

3.1 Description du modèle de marché Black et Scholes

Soit T une date de fin de gestion (par exemple la date d'échéance d'une option).
On considère un marché ou un sous–marché composé de

- **un** titre risqué $(S_t, t \in [0,T])$
- **un** titre non risqué $(S_t^0, t \in [0,T])$

▶ On se place dans le cadre simplifié suivant :
– L'action sous-jacente ne distribue pas de dividende durant la durée de vie de l'option ;
– Les transactions sur l'action se font au comptant ;
– La courbe des taux est plate et invariante dans le temps.

L'actif risqué.

Le processus $(S_t, t \in [0,T])$ suit le modèle de Black et Scholes :

$$S_t = S_0 \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\right),$$

où S_0 est le prix observé aujourd'hui à la date 0, μ est la rentabilité instantané moyenne et σ la volatilité de l'actif. En appliquant la formule d'Itô pour différencier S, on obtient la forme différentielle suivante pour S :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t).$$

Le modèle est nécessairement posé dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, t \leq T), \mathbb{P})$, (W_t) est un mouvement brownien de dimension 1.

L'actif non risqué.

est décrit également par l'évolution de son prix $(S_t^0)_{0\leq t\leq T}$. Il s'agit de modéliser la capitalisation d'un placement sûr, comme un placement à la caisse d'épargne ou l'achat de bons du Trésor.

Dans le modèle de Black et Scholes, on suppose l'existence d'un unique taux de prêt et d'emprunt, connu à la date $t = 0$ et qui reste constant au cours du temps, du moins jusqu'à l'échéance du dérivé.

$(S_t^0)_{0\leq t\leq T}$ est défini par l'équation toute simple

$$\begin{cases} dS_t^0 = S_t^0 r dt \\ S_0^0 = 1 \end{cases}$$

de solution

$$S_t^0 = \exp(rt).$$

L'ensemble des prix du marché considéré (S_t^0, S_t) est un vecteur de dimension 2.

3.2 Les stratégies de financement

Sur le marché (ou sous–marché) considéré (S_t^0, S_t), on considère maintenant des stratégies d'investissement pour les agents.

- Une stratégie est un processus aléatoire de dimension 2, $\mathcal{F}_t$-adapté, notée $\phi = (\phi_t)_{t\leq T}$ avec $\phi_t = (H_t^0, H_t)$.
- La valeur d'une stratégie à l'instant t est

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t,$$

où

- $H_t^0 \in \mathbb{R}$ est la quantité d'actifs sans risque détenus par l'investisseur.
- $H_t \in \mathbb{R}^d$ est le vecteur des quantités d'actifs risqués détenus.

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

3.2.1 Les stratégies autofinancées

Une stratégie est dite autofinancée si, une fois la mise initiale fixée, on ne consomme, ni n'investit de liquidités supplémentaires jusqu'à T.

Définition 3.2.1. *Une stratégie autofinancée est un processus (ϕ_t), à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}_t$-adapté, vérifiant*

(i) $\int_0^T |H_t^0| dt < +\infty$ *et* $\int_0^T |H_t|^2 dt < +\infty$.

(ii) ϕ *vérifie la* *condition d'autofinancement :*

$$V_t(\phi) = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u dS_u. \tag{3.1}$$

Ou encore

$$dV_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t, \quad V_0(\phi) = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0. \tag{3.2}$$

On peut justifier l'équation d'autofinancement 5.4 ou 3.2 en revenant au cas discret : considérons $\phi_n = (H_n^0, H_n)$, de valeur

$$V_n(\phi) = S_n H^n + S_n^0 H_n^0.$$

A chaque temps n de la modélisation, on doit re-balancer le portefeuille sans ajouter ou retirer de cash. Cette règle impose la relation de re-balancement à valeur constante

$$V_n(\phi) = S_n H^{n+1} + S_n^0 H_{n+1}^0.$$

Ainsi,

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = H^{n+1}(S_{n+1} - S_n) + H_{n+1}^0(S_{n+1}^0 - S_n^0).$$

ou encore,

$$\Delta V_n(\phi) = H^n \Delta S_n + H_n^0 \Delta S_n^0.$$

La condition (i) permet de bien définir les intégrales $\int_0^t H_u^0 dS_u^0$ et $\int_0^t H_u dS_u$. Pour cela, il faut également utiliser le fait que S est un processus continu sur un intervalle $[0, T]$, admettant un maximum ω par ω.

3.2.2 Actualisation, changement de numéraire

La valeur du numéraire S_t^0 évolue à chaque instant.
On note (β_t) le processus de facteur d'actualisation : $\beta_t = 1/S_t^0 = \exp(-rt)$.
Quelque soit la valeur V d'un bien dans ce marché, on notera $\tilde{V}$ sa valeur actualisé.
Les prix actualisés des actifs du notre marché sont $(\widetilde{S}_t, \widetilde{S}_t^0)$ avec

$$\widetilde{S}_t = \beta_t S_t,$$
$$\text{et } \widetilde{S}_t^0 = \beta_t S_t^0 = 1, \ \forall t.$$

Lemme 3.2.2.

(i) La valeur actualisée du portefeuille de stratégie ϕ est

$$\widetilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t \widetilde{S}_t.$$

(ii) En termes de prix actualisés, l'équation d'autofinancement devient

$$\widetilde{V}_t(\phi) = H_0^0 + H_0 \widetilde{S}_0 + \int_0^t H_u d\widetilde{S}_u.$$

Ou encore

$$\boxed{d\widetilde{V}_t(\phi) = H_t d\widetilde{S}_t.}$$

Preuve. Le premier point (i) est immédiat.

Rappelons que l'autofinancement implique que $dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t$, ce qui signifie que V_t est un processus d'Itô.

Comme $\exp(-rt)$ est déterministe et dérivable, de la formule d'Itô, il est facile de déduire que

$$d\tilde{V}_t = d(V_t \exp(-rt)) = \exp(-rt) dV_t + V_t d(\exp(-rt)).$$

Ainsi

$$d\tilde{V}_t = \exp(-rt)\left(H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t\right) - r\exp(-rt)\left(H_t^0 S_t^0 + H_t S_t\right) dt.$$

Or rappelons encore que $S_t^0 = \exp(rt)$ et $dS_t^0 = r\exp(rt)$, ainsi l'expression ci-dessus se simplifie en

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= \exp(-rt)\left(H_t dS_t - r\exp(-rt)H_t S_t dt\right) \\ &= H_t\left(\exp(-rt)dS_t + S_t d(\exp(-rt))\right) \\ &= H_t d(\exp(-rt)S_t) = H_t d\tilde{S}_t \end{aligned}$$

■

3.3 Opportunité d'arbitrage et probabilité risque neutre

Définition 3.3.1. *On note $\mathcal{Q}$, l'ensemble des mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ équivalentes à $\mathbb{P}$ et telles que si $\mathbb{P}^* \in \mathcal{Q}$, alors sous $\mathbb{P}^*$, les prix actualisés $(\widetilde{S}_t)$ sont des $\mathcal{F}_t$-martingales :*

$$\forall 0 \leq s \leq t \leq T, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\widetilde{S}_t \Big/ \mathcal{F}_s\right) = \widetilde{S}_s$$

Définition 3.3.2. *Une opportunité d'arbitrage est une stratégie autofinancée ϕ, d'investissement initial nul, de valeur à l'instant T positive ou nulle et cette valeur est strictement positive avec une probabilité strictement positive.*

1) $\mathbb{P}\left(V_0(\phi) = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 = 0\right) = 1$,

2) $\mathbb{P}\left(V_T(\phi) \geq 0\right) = 1$,

3) $\mathbb{P}\left(V_T(\phi) > 0\right) > 0$.

On peut remplacer **3)** *par* $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(V_T(\phi)\right) > 0$.

- Pour qu'un système de prix soit consistant, le marché considéré ne doit pas offrir d'opportunité d'arbitrage.
- On parle d'absence d'opportunité d'arbitrage (A.O.A)

Sous quelles conditions peut–on affirmer qu'un modèle de marché n'offre pas d'opportunité d'arbitrage ?

3.3.1 Lien entre A.O.A et probabilité risque neutre

Le lien intuitif . Il y a équivalence entre A.O.A et l'existence d'une probabilité risque neutre (ou au moins une implication).

Plaçons nous à une date $t \in [0, T]$. Connaissant tout le passé $\mathcal{F}_t$, un incrément futur du prix

$$\tilde{S}_{t+s} - \tilde{S}_t$$

de l'actif risqué ne peux être signé avec une probabilité égale à 1 ! Sinon, on peut construire un arbitrage simple en achetant/vendant l'actif en prévision de la hausse/baisse certaine future et en se finançant/plaçant au taux r. Notons ici qu'il est absolument nécessaire de travailler en unité monétaire actualisé pour que la comparaison entre les deux prix ait un sens.

Ainsi, pour certifier qu'un (modèle de) marché est sans arbitrage possible, il suffit de montrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à la probabilité de référence $\mathbb{P}$ telle que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\widetilde{S}_{t+s} - \widetilde{S}_t / \mathcal{F}_t\right) = 0.$$

En effet, si la moyenne est nulle sous $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$, alors nécessairement

$$\mathbb{P}\left(\widetilde{S}_{t+s} - \widetilde{S}_t > 0/\mathcal{F}_t\right) = 0$$
$$\mathbb{P}\left(\widetilde{S}_{t+s} - \widetilde{S}_t > 0/\mathcal{F}_t\right) = 0$$

$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\widetilde{S}_{t+s} - \widetilde{S}_t/\mathcal{F}_t\right) = 0$ est caractéristique de la propriété de martingale.
Ce constat peut varier suivant le modèle de marché considéré :

Cas d'un modèle à temps discret, horizon de gestion fini

Soit N fixé dans $\mathbb{N}^*$. Soit $(S_n^0, S_n)_{n\in\{0,1,\ldots,N\}}$ un processus de prix à temps discret sur N dates. $\forall n$, S_n est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\text{Le marché } (S_n^0, S_n)_{n\in\{0,1,\ldots,N\}} \text{ est sans arbitrage.}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\text{Il existe } \mathbb{P}^* \text{ équivalente à } \mathbb{P} \text{ telle que } (\widetilde{S}_n) \text{ soit une } \mathbb{P}^*\text{- martingale.}$$

Modélisation à temps discret, mais à horizon de gestion infini

Un exemple de marché :

Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de Bernoulli (i.e. les v.a. Y_n sont i.i.d et $\mathbb{P}(Y_0 = 1) = \mathbb{P}(Y_0 = -1) = 1/2$.

Soit le marché $(S_n^0, S_n)_{n\geq 0}$:

$$S_n^0 = 1, \text{ (taux d'intérêt } r = 0)$$
$$S_{n+1} = S_n \exp(Y_{n+1}), \quad S_0 = 1.$$

1) Calculer une probabilité qui rend $(S_n)_n$ martingale.

2) Montrer qu'il existe une stratégie autofinancée ϕ et un temps d'arrêt τ tel que

a) τ est $\mathbb{P}$-p.s. fini.

b) $V_0(\phi) = 0$ et $V_\tau(\phi) = 1$.

Dans ce marché : $\exists\ \mathbb{P}^* \not\Rightarrow$ A.O.A.

(Cette stratégie d'arbitrage est la stratégie du " quitte ou double".)

Marché en temps continu

Un exemple de marché :

Soit le marché $(S_t^0, S_t)_{0\leq t\leq T}$

$$S_t^0 = 1 \text{ (taux d'intérêt } r = 0)$$
$$S_t = B_t \text{ (un mouvement brownien).}$$

1) Calculer une probabilité qui rend (S_t) martingale.

2) [Dudley 77] Soit Z une v.a $\mathcal{F}_T$-mesurable, il existe un processus (H_t) adapté tel que $\displaystyle\int_0^T H_s dB_s = Z$. Ainsi,

$\left(\int_0^t H_s dB_s - H_t B_t, H_t\right)$ est un arbitrage, dès que Z est une v.a. positive.

Ainsi, la stratégie $\left(\int_0^t H_s dB_s - H_t B_t, H_t\right)$ est un arbitrage, dès que Z est une v.a. positive.

Conclusion. Identifier une probabilité risque-neutre dans le marché ne suffit pas à éliminer tout les arbitrages.

Mais pour éliminer toutes les opportunités d'arbitrage, il suffit de contraindre les processus du type $\left(\int_0^t H_s d\widetilde{S}_s, t \leq T\right)$ à être des $\mathbb{P}^*$– martingales.

3.4 Stratégies admissibles

On suppose l'existence d'une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ appartenant à $\mathcal{Q}$.

Définition 3.4.1. *Une stratégie $\phi = (H_t^0, H_t)_{t \leq T}$ est dite admissible si*

a) ϕ est autofinancée ;

b) $\sup_{0 \leq t \leq T} \widetilde{V}_t(\phi)$ est une v.a de carré intégrable sous $\mathbb{P}^*$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \widetilde{V}_t(\phi)^2\right) < +\infty.$$

3.5 Options européennes

- Une option européenne est un contrat transférable qui dégage un flux positif ou nul, à une échéance T fixée à l'avance.
- L' option européenne est entièrement déterminée par la donnée de T et de ce flux $h \geq 0$, variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Deux situations :

(a) h est de la forme $f(S_T)$.

(b) h est de la forme $f(\{S_t, t \leq T\})$.

Définition 3.5.1. *Une option européenne est simulable si il existe une stratégie admissible ϕ, dont la valeur à l'échéance T est égale au flux h dégagé par l'option :*

$$V_T(\phi) = h.$$

Définition 3.5.2. *Sous la condition d'A.O.A.,*
si ϕ est une stratégie simulant l'option européenne de flux h à T, on appelle

(i) $V_0(\phi)$, le prix d'arbitrage de h,

(ii) $V_t(\phi)$, le prix implicite de l'option à la date t.

(iii) La valeur d'exercice à la date θ, $f(S_\theta)$ ou $f(\{S_t, t \leq \theta\})$ est le prix intrinsèque de l'option à cette date.

Proposition 3.5.3. *Sous la condition d'A.O.A.,*
le prix d'arbitrage est bien défini (il est unique).

3.5.1 Le pricing d'option européenne dans le modèle de Black et Scholes

Théorème 3.5.4. *Pour le modèle de Black et Scholes unidimensionnel, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}^*$, équivalente à $\mathbb{P}$ telle que sous $\mathbb{P}^*$, le prix actualisé de l'actif soit une $\mathbb{P}^*$-martingale.*

Preuve. Nous cherchons donc une probabilité sous laquelle $\widetilde{S}_t$ soit une martingale. Nous allons utiliser la forme explicite de

$$\widetilde{S}_t = S_0 \exp\left((\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\right).$$

Notons que si $\mu = r$ la probabilité de référence est une probabilité qui rend $\widetilde{S}$ martingale.

Rappelons la forme de la martingale de l'exponentielle du brownien :

$$M_t = M_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t\right)$$

est une martingale relativement à la probabilité sous laquelle W est un mouvement brownien.

Ainsi, posons

$$W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

de sorte que

$$\widetilde{S}_t = S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t^*\right).$$

W^* est un processus à trajectoire continue, à accroissement indépendant. A chaque instant t, le changement de probabilité doit ainsi recentrer la variable gaussienne W_t^*.

Ainsi sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ considérons pour tout $t \in [0, T]$

$$Z_t = \exp\left[-\frac{\mu - r}{\sigma} W_t - \frac{1}{2}\frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} t\right].$$

Notons que $(Z_t, t \in [0, T])$ est une martingale. Alors, sous la nouvelle probabilité $\mathbb{P}^*$ définie par $d\mathbb{P}^* = Z_T d\mathbb{P}$, calculons la loi de W^* : considérons une fonction test continue et bornée f.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[f(W_t^*)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(W_t^*)Z_T] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(W_t^*)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T/\mathcal{F}_t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(W_t^*)Z_t]\\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y + \frac{\mu - r}{\sigma} t)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{1}{2t}y^2) \exp\left[\frac{\mu - r}{\sigma} y - \frac{1}{2}\frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} t\right] dy\\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{1}{2t}y^2) dy\\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(W_t)]
\end{aligned}$$

Ainsi, W^* est bien un mouvement brownien sous la nouvelle probabilité, de sorte que le prix de l'actif actualisé

$$\widetilde{S}_t = S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t^*\right),$$

est bien une martingale de type brownien géométrique sous la nouvelle probabilité $\mathbb{P}^*$.

Notons pour finir que $Z_T > 0$ et $1/Z_T > 0$, ce qui veut dire que $\mathbb{P}^*$ est bien équivalente à $\mathbb{P}$.

Notons enfin que dans ce cas Z_t est unique. ■

3.5.2 Premier énoncé pour le pricing d'une option européenne

A l'aide de la formule d'Itô, on calcule facilement les différentielles :

$$\begin{aligned}
dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \\
dS_t &= S_t(rdt + \sigma dW_t^*) \\
d\widetilde{S}_t &= \widetilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dW_t^*) \\
d\widetilde{S}_t &= \widetilde{S}_t \sigma dW_t^*.
\end{aligned}$$

On déduit des deux formes des equations d'autofinancement que

$$d\widetilde{V}_t = H_t d\widetilde{S}_t = H_t \widetilde{S}_t \sigma dW_t^*.$$

Ainsi $\widetilde{V}$ serait une martingale si on arrive à montrer que $H_t\widetilde{S}_t$ est un processus de $\mathcal{M}_2^{\mathcal{F}}(0, T)$.

A ce stade, il est essentiel de lier la notion de stratégie admissible à la caractérisation suivante des processus de $\mathcal{M}^2_{\mathcal{F}}(0, T)$:

Proposition 3.5.5. *Soit (ϕ_t) un processus adapté, tel que $\int_0^T \phi_s^2 ds < +\infty$, $\mathbb{P}$ p.s. Alors,*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \phi_s^2 ds\right) < +\infty \Longleftrightarrow \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t \phi_s dWs\right)^2\right] < +\infty.$$

Lemme 3.5.6. *Si ϕ est un portefeuille admissible, alors $V(\phi)$ est une martingale.*

Preuve. Il suffit donc de montrer que $H_t\widetilde{S}_t$ est dans $\mathcal{M}^2_{\mathcal{F}}(0, T)$. Nous utilisons la caractérisation de la proposition 3.5.5 :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t \phi_s dWs\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}(V_t - V_0)^2\right] \\
&\leq 4\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}(V_t)^2\right] < +\infty.
\end{aligned}$$

■

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un mvt brownien $(W_t)_{t\geq 0}$ sous $\mathbb{P}$, de dimension 1. $(\mathcal{F}_t)_{t\leq T}$ est la filtration naturelle de $(W_t)_{t\geq 0}$.

Théorème 3.5.7. *Pour le modèle de Black et Scholes,*

(1) toute option européenne définie par une v.a h, $\mathcal{F}_T$ mesurable et de carré intégrable sous $\mathbb{P}^*$, est <u>simulable</u>.

(2) La valeur à l'instant t de toute stratégie simulante ϕ est donnée par

$$V_t(\phi) \quad = \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(-r(T-t)h/\mathcal{F}_t\right).$$

Preuve du théorème 3.5.7. Montrons (2) : Soit ϕ un portefeuille simulant. ϕ etant admissible, $\widetilde{V}$ est une $\mathbb{P}^*$ - martingale. Ainsi pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_t(\phi) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\widetilde{V}_T/\mathcal{F}_t\right) \\
V_t(\phi)\exp(-rt) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(-rT)V_T(\phi)/\mathcal{F}_t\right)
\end{aligned}$$

et enfin

$$V_t(\phi) \quad = \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(-r(T-t)h/\,\mathcal{F}_t\right).$$

Montrons (1) : C'est à cette étape qu'intervient l'hypothèse que $\widetilde{V_T}$ est une va de carrée intégrable.

Théorème 3.5.8 (Représentation des martingales browniennes). *Soit $(M_t, 0 \leq t \leq T)$, une martingale par rapport à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ d'un mouvement brownien (B_t) sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, de carré intégrable. On suppose que cette martingale est de carré intégrable. Alors, il existe un processus $\mathcal{F}_t$-adapté $(K_t, 0 \leq t \leq T)$ dans $\mathcal{M}^2_{\mathcal{F}}(0,T)$, c'est à dire tel que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^T K_s^2 ds\right) < +\infty$ et*

$$\forall t \in [0,T], \quad M_t = M_0 + \int_0^t K_s dB_s, \ \mathbb{Q}\ p.s.$$

Appliquons ce théorème à la martingale $(\widetilde{V}_t, t \in [0,T])$ dans l'espace $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}^*)$ avec le mouvement brownien W^* de filtration $(\mathcal{F}_t, t \in [0,T])$. Soit donc $K \in \mathcal{M}^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ tel que $\widetilde{V}_t = V_0 + \int_0^t K_s dW_s^*$. De l'unicité de la décomposition d'un processus d'Itô, on déduite que $K_t = \sigma H_t \widetilde{S}_t \ dt \times \mathbb{P}^*$ presque partout, ou encore

$$H_t = \frac{K_t}{\sigma \widetilde{S}_t}$$
$$H_t^0 = \widetilde{V}_t - H_t \widetilde{S}_t = \widetilde{V}_t - \frac{K_t}{\sigma}$$

■

3.5.3 Second énoncé pour la valorisation d'une option européenne

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \leq T}, \mathbb{P})$ et un $\mathcal{F}_t$-mvt brownien $(W_t)_{t \geq 0}$ sous $\mathbb{P}$ de dimension 1. Notons tout d'abord que pour tout $s \leq t$

$$S_t = S_s \exp\left(\mu(t-s) - \frac{\sigma^2(t-s)}{2} + \sigma(W_t - W_s)\right)$$
$$\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_s \exp((\mu - r)(t-s) - \frac{\sigma^2(t-s)}{2} + \sigma(W_t - W_s))$$

En particulier, on peut poser

$$S_t^{x,s} = x \exp(\mu(t-s) - \frac{\sigma^2(t-s)}{2} + \sigma(W_t - W_s))$$

pour avoir $S_t = S_t^{S_s,s}$. Écrit avec le brownien W^* de la probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$, on obtient aussi

$$S_t = S_s \exp(r(t-s) - \frac{\sigma^2(t-s)}{2} + \sigma(W_t^* - W_s^*))$$
$$\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_s \exp\left(-\frac{\sigma^2(t-s)}{2} + \sigma(W_t^* - W_s^*)\right)$$
$$\widetilde{S}_t^{x,s} = x \exp\left(-\frac{\sigma^2(t-s)}{2} + \sigma(W_t^* - W_s^*)\right)$$

Le résultat de valorisation suivant concerne les option européenne de flux h de la forme $f(S_T)$.

Théorème 3.5.9 (Princing pour une option de flux h de la forme $f(S_T)$). *Pour le modèle de Black et Scholes,*

1) *toute option européenne définie par une v.a h, $\mathcal{F}_T$ mesurable et de la forme $f(S_T)$, est simulable pour f continue, bornée ou au plus linéaire à l'infini (i.e. $f(x) \leq A + B|x|$) et telle que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(f^2(S_T)\right) < +\infty$.*
2) *La valeur à l'instant t de toute stratégie simulante ϕ est donnée par*

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(-r(T-t)f(S_T^{x,t})\right)\Big|_{x=S_t} := F(t, S_t).$$

où on a posé

$$F(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(-r(T-t)f(S_T^{x,t})\right).$$

3) *La stratégie simulante est explicite : $\phi = (H_t^0, H_t)_{t\leq T}$ avec*

$$\begin{aligned} H_t &= \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t), \\ H_t^0 &= \exp(-rt)\left(F(t,S_t) - S_t\frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t)\right). \end{aligned}$$

Preuve. Notons d'abord que $S_t^{x,s}$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$, ainsi

$$F(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(-r(T-t)f(S_T^{x,t})/\mathcal{F}_t\right).$$

et

$$\begin{aligned} F(t,S_t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(-r(T-t)f(S_T^{x,t})/\mathcal{F}_t\right)\big|_{x=S_t} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(-r(T-t)f(S_T^{x,t})\big|_{x=S_t}/\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(-r(T-t)f(S_T)/\mathcal{F}_t\right) \end{aligned}$$

Du théorème précédent qui s'applique encore ici, on déduit immédiatement 1) et 2). Montrons 3). Nous avons donc $\widetilde{V}_t = \exp(-rt)F(t,S_t)$ et

$$F(t,x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-r(T-t)} f(xe^{\sigma y - (\frac{1}{2}\sigma^2 - r)(T-t)}) \exp(-\frac{y^2}{2(T-t)}) \frac{dy}{\sqrt{2\pi(T-t)}}.$$

Nous verrons section **??** que F est une fonction C^∞. On peut donc appliquer Ito pour calculer

$$\begin{aligned} d\widetilde{V}_t &= d\left(\exp(-rt)F(t,S_t)\right) \\ &= -r\exp(-rt)F(t,S_t)dt + \exp(-rt)\left[\frac{\partial F}{\partial t}(t,S_t)dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t)dS_t + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,S_t)dt\right]. \end{aligned}$$

Mais $dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t^*)$. Ainsi

$$\begin{aligned} d\widetilde{V}_t &= \sigma\exp(-rt)S_t\frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t)dW_t^* \\ &\quad + \exp(-rt)\left[\frac{\partial F}{\partial t}(t,S_t) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t)S_t r + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,S_t) - rF(t,S_t)\right]dt \\ &= \sigma\widetilde{S}_t\frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t)dW_t^* + \exp(-rt)\left[\frac{\partial F}{\partial t}(t,S_t) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t)S_t r + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,S_t) - rF(t,S_t)\right]dt. \end{aligned}$$

Or $(\widetilde{V})$ est une martingale, et l'équation d'autofinancement donne $d\widetilde{V}_t = H_t\widetilde{S}_t\sigma dW_t^*$. par l'unicité de la décomposition d'un processus d'Itô, on déduit des expressions ci-dessus que

$$H_t\widetilde{S}_t\sigma = \sigma\widetilde{S}_t\frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t),\ dt\times\mathbb{P}p.p.$$

et ainsi $H_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t)$. Le terme en dt permet d'introduire l'EDP de Black et Scholes :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x)xr + \dfrac{\sigma^2 x^2}{2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) - rF(t,x) = 0 \\ F(T,x) = f(x) \end{cases}$$

■

3.5.4 La formule de Black et Scholes

Désigne la formule explicite : $V_t = F(t, S_t)$, où

$$F(t,x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-r(T-t)} f(xe^{\sigma y - (\frac{1}{2}\sigma^2 - r)(T-t)}) \exp(-\frac{y^2}{2(T-t)}) \frac{dy}{\sqrt{2\pi(T-t)}}.$$

On accompagne la formule d'une série d'indicateurs de sensibilité :

Le delta : $\Delta(t) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) = H_t$.

Le gamma : $\Gamma(t) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, S_t)$.

Le thêta : $\Theta(t) = \dfrac{\partial F}{\partial t}(t, S_t)$ ou $\Theta(t) = -\dfrac{\partial F}{\partial T}(t, S_t)$

Le vega : $Vega(t) = \dfrac{\partial F}{\partial \sigma}(t, S_t, \sigma)$. (noté ν ? ?)

Le rho : $\rho(t) = \dfrac{\partial F}{\partial r}(t, S_t, \sigma)$.

Le vega gamma : volga $= \dfrac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2}(t, S_t)$.

Le vanna $= \dfrac{\partial^2 F}{\partial \sigma 2 \partial x}(t, S_t)$.

Le delta decay = charm $= \dfrac{\partial \Delta}{\partial T}(t, S_t)$.

Le gamma decay = color $= \dfrac{\partial \Gamma}{\partial T}(t, S_t)$.

Le speed $= \dfrac{\partial^3 F}{\partial x^3}(t, S_t)$.

Chapitre 4

Un peu plus de calcul stochastique

4.1 Caractérisation de Lévy du mouvement brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et $(W_t, t \geq 0)$ un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien standard réel (dim 1).

La propriété que $W_t - W_s$ a une moyenne nulle, indépendamment de $\mathcal{F}_s$ signifie que le mouvement Brownien est une martingale. De plus, nous avons énoncé que la variation quadratique de W converge vers t, dans $L^2(\Omega)$ et presque sûrement, quand le pas δ tend vers 0 :

$$\lim_{\delta \to 0} V_t^2(\tau(\delta), W) = t, \quad p.s.$$

Le fait remarquable est que la contraposée de cet énoncé est vraie : le mouvement Brownien est la seule martingale qui a cette variation quadratique. Ce résultat est connu sous le nom de caractérisation de Lévy

Théorème 4.1.1 (-Caractérisation de Lévy du mouvement brownien)**.** *Soit $(X_t, t \geq 0)$ une martingale (locale)*[1] *telle que $X_0 = 0$. On a alors les équivalences suivantes*

* $(X_t, t \geq 0)$ *est un mouvement brownien standard, dans l'espace de probabilité filtré de la martingale.*
* $(X_t, t \geq 0)$ *est continue et $(X_t^2 - t, t \geq 0)$ est une martingale (locale).*
* *La variation quadratique de $(X_t, t \geq 0)$ sur $[0, t]$ est égale à t.*

Ce résultat se généralise en dimension quelconque.

4.2 Temps d'arrêt

Définition 4.2.1. *Un* **temps d'arrêt** *(abréviation t.a.) est une variable aléatoire réelle $\tau \geq 0$, à valeurs éventuellement infinies, telle que pour tout $t \geq 0$ l'événement*

$$\{\omega; \tau(\omega) \leq t\} = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Si la filtration est continue à droite, ce qu'on suppose toujours dans le cadre de ce cours, on peut remplacer $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ dans la définition précédente par $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$.

En effet,

[1] La notion de martingale locale est plus générale que la notion de martingale au sens où toute martingale est une martingale locale. Cette notion de martingale locale sera introduite avec la notion de temps d'arrêt

(⇒) $\{\tau < t\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{\tau \leq t - \frac{1}{n}\}$. Or, $\{\tau \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t-\frac{1}{n}} \subset \mathcal{F}_t$. Donc la réunion dénombrable est dans $\mathcal{F}_t$.

(⇐)

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \{\tau < t + \frac{1}{n}\} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}} = \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t.$$

4.2.1 Temps d'arrêt et intervalle aléatoire

Si τ est un t.a., la définition précédente implique que les intervalles aléatoires

$$]\tau, +\infty[, \quad [\tau, +\infty[, \quad [0, \tau], \quad [0, \tau[\ \text{ et } \{\tau\}$$

sont $\mathcal{F}_t$–adaptés au sens où leur indicatrice (par exemple $\left(\mathbb{1}_{[\tau,+\infty[}(t), t \geq 0\right)$) sont des processus adaptés.

4.2.2 Exemples de temps d'arrêt et propriétés

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus $\mathcal{F}_t$–adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout **ouvert** A de $\mathbb{R}^d$, l'instant aléatoire τ_A, défini par

$$\tau_A(\omega) = \inf\{t \geq 0; X_t(\omega) \in A\},$$

est appelé **le premier temps d'atteinte de** A**, ou d'entrée dans** A, avec la convention $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

Proposition 4.2.2. *Si X est un processus continu (i.e. à trajectoire continue), le temps d'atteinte τ_A est un temps d'arrêt.*

Preuve. Par la continuité des trajectoires du processus X :

$$\{\tau_A < t\} = \bigcup_{\theta<t}\{X_\theta \in A\} = \bigcup_{\theta<t;\theta\in\mathbb{Q}^+} \{X_\theta \in A\} \in \mathcal{F}_t$$

■

Si A est un fermé de $\mathbb{R}^d$, avec les mêmes hypothèses sur (X) on montre également que τ_A est un t.a. (ceci grâce aux “conditions habituelles” sur $(\mathcal{F}_t)$).

4.2.3 Quelques propriétés des temps d'arrêt

Proposition 4.2.3. *Soit τ un t.a.*

a) *Si $C > 0$ est une constante, C est un t.a et $C + \tau$ est un t.a.*

b) *Si τ' est un autre t.a alors, $\tau \wedge \tau' = inf(\tau, \tau')$ et $\tau \vee \tau' = \sup(\tau, \tau')$ sont des t.a.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
&a) \quad && \{\tau + C \leq t\} = \{\tau \leq 0 \vee (t - C)\} \in \mathcal{F}_{0\wedge(t-C)} \subset \mathcal{F}_t \\
&b) \quad && \{\tau \wedge \tau' \leq t\} = \{\inf(\tau, \tau') \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cup \{\tau' \leq t\} \\
& && \{\tau \vee \tau' \leq t\} = \{\sup(\tau, \tau') \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap \{\tau' \leq t\}
\end{aligned}$$

■

4.2.4 Temps d'arrêt et filtration

Définition 4.2.4. *Soit τ un t.a. On note $\mathcal{F}_\tau$ la tribu des événements A de $\mathcal{F}$ tels que pour tout $t \geq 0$, $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, soit*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}; A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}.$$

- On peut vérifier que $\mathcal{F}_\tau$ est bien une tribu :
  il est claire que Ω et $\emptyset$ sont dans $\mathcal{F}_\tau$. Si maintenant A est dans $\mathcal{F}_\tau$ alors, par définition pour tout $t \geq 0$, $(A \cap \{\tau \leq t\})^c = A^c \cup \{\tau > t\} \in \mathcal{F}_t$. Donc $(A^c \cup \{\tau > t\}) \cap \{\tau \leq t\} = A^c \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et ainsi $A^c \in \mathcal{F}_\tau$. La stabilité par réunion et intersection dénombrable est triviale.
- τ **est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable** et on peut également montrer que si pour tout ω, $\tau(\omega) = t_0$ alors la définition ci-dessus est compatible avec la filtration, càd que $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{t_0}$.

Lemme 4.2.5. *toto*

a) Soit A dans $\mathcal{F}_S$, alors $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$. En particulier, si $S \leq T$, $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

b) $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$ et les événements

$$\{T < S\}, \{S < T\}, \{T \leq S\}, \{S \leq T\}, \{T = S\}$$

sont dans $\mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$.

Les inégalités entre t.a. ci-dessus (par exemple $S \leq T$) peuvent être prises au sens presque sure car les “conditions habituelles” imposée sur la filtration assurent que tous les négligeables sont dans les $\mathcal{F}_t$.

Proposition 4.2.6. *Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus continu et $\mathcal{F}_t$–adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Soit τ un t.a.* **fini**. *Alors, la v.a. $\omega \to X(\omega)_{\tau(\omega)}$ est $\mathcal{F}_\tau$–mesurable.*

Preuve. Il suffit de vérifier que

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad \{\omega; X(\omega)_{\tau(\omega)} \in A\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Cet événement se réécrit $\{\omega; X(\omega)_{\tau(\omega)\wedge t} \in A\} \cap \{\tau \leq t\}$.
Donc il suffit de vérifier que la variable aléatoire $\omega \to X(\omega)_{\tau(\omega)\wedge t}$ est $\mathcal{F}_t$–mesurable. Or, cette variable aléatoire est la composition des deux fonctions mesurables suivantes :

$$(\theta, \omega) \in ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) \to \tau(\omega) \wedge \theta \in (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$$
$$(\theta, \omega) \in ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) \to X_\theta(\omega) \in (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)).$$

■

4.2.5 Théorème d'arrêt et inégalité martingale

La relation de martingale, $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$, peut être étendue à des temps aléatoires si ces temps sont des temps d'arrêt bornés :

Théorème 4.2.7. (Théorème d'arrêt). *Si (M_t) est une $\mathcal{F}_t$–martingale continues (à trajectoires continues) et si T et S sont deux t.a. tels que $S \leq T \leq K$, K étant une constante positive finie, alors M_T est intégrable et*

$$\mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_S) = M_S, \;\; \mathbb{P}\ p.s..$$

Si (M_t) est une sous–martingale, alors,

$$\mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_S) \geq M_S, \;\; \mathbb{P}\ p.s..$$

Ce résultat entraîne que si τ est un t.a. borné et (M_t) une martingale, alors $\mathbb{E}(M_\tau) = \mathbb{E}(M_0)$.

Le théorème d'arrêt permet de démontrer l'inégalité de Dood, précédemment énoncé à la section 2.1.3 et que nous rappelons ici.

Les martingales sont des objets qui jouent un grand rôle dans la théorie des processus stochastiques, notamment parce qu'on peut leur appliquer **l'inégalité maximale** suivante :

Théorème 4.2.8. (Inégalité de Doob). *Soit (M_t) une $\mathcal{F}_t$–martingale réelle et* **continue** *(ie à trajectoires continues). Pour tout $p > 1$ tel que $M_T \in L^p(\Omega)$ (i.e. $\mathbb{E}|M_T^p| < +\infty$), on a*

1) $M_T^* := \sup_{0 \le t \le T} |M_t|$ est dans $L^p(\Omega)$ (ie $\mathbb{E}|M_T^*|^p < +\infty$).

2)

$$\left\{\mathbb{E}\left(M_T^{*p}\right)\right\}^{\frac{1}{p}} \le \frac{p}{p-1}\left\{\mathbb{E}\left(|M_T|^p\right)\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Ce théorème se démontre en 3 étapes :

Première étape

Lemme 4.2.9. *Si (M_t) est une $\mathcal{F}_t$–martingale, alors $(|M_t|)$ est une $\mathcal{F}_t$–sous–martingale.*

Preuve. Soit $s \le t$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|M_t||\mathcal{F}_s) &= \mathbb{1}_{\{M_s \ge 0\}}\mathbb{E}(|M_t||\mathcal{F}_s) + \mathbb{1}_{\{M_s < 0\}}\mathbb{E}(|M_t||\mathcal{F}_s) \\
&\ge \mathbb{1}_{\{M_s \ge 0\}}\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) - \mathbb{1}_{\{M_s < 0\}}\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \\
&\quad = \mathbb{1}_{\{M_s \ge 0\}}M_s - \mathbb{1}_{\{M_s < 0\}}M_s = |M_s|.
\end{aligned}$$

■

Deuxième étape

Lemme 4.2.10. *Si (M_t) est une $\mathcal{F}_t$–martingale continue, alors pour toute constante $\alpha > 0$*

$$\alpha\mathbb{P}(M_T^* \ge \alpha) \le \mathbb{E}\left(|M_T|\mathbb{1}_{\{M_T^* \ge \alpha\}}\right).$$

Preuve. On définit $\tau = \inf\{0 \le t \le T; |M_t| \ge \alpha\}$. τ est un temps d'atteinte et $(|M_t|)$ est continue donc τ est un t.a., de même que $\tau \wedge T$.

$$\text{Donc } \mathbb{E}\left(|M_T|\mathbb{1}_{\{M_T^* \ge \alpha\}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(|M_T|\mathbb{1}_{\{M_T^* \ge \alpha\}}|\mathcal{F}_{\tau\wedge T}\right)\right).$$

On remarque que $\{M_T^* \ge \alpha\} = \{\tau \le T\}$ est un événement de la tribu $\mathcal{F}_{\tau\wedge T}$. $(|M_t|)$ étant une sous martingale, par le Théorème d'arrêt 4.2.7 on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|M_T|\mathbb{1}_{\{M_T^* \ge \alpha\}}\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{M_T^* \ge \alpha\}}\mathbb{E}\left(|M_T||\mathcal{F}_{\tau\wedge T}\right)\right) \\
&\ge \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{M_T^* \ge \alpha\}}|M_{\tau\wedge T}|\right).
\end{aligned}$$

Or sur l'événement $\{M_T^* \ge \alpha\}$, $|M_{\tau\wedge T}| \ge \alpha$.
D'où, $\mathbb{E}\left(|M_T|\mathbb{1}_{\{M_T^* \ge \alpha\}}\right) \ge \alpha\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{M_T^* \ge \alpha\}}\right) = \alpha\mathbb{P}(M_T^* \ge \alpha)$. ■

Troisième étape

On ne sait pas a priori que $\mathbb{E}((M_T^*)^p)$ est fini, mais pour $k > 0$ fixé,

$$\mathbb{E}((M_T^* \wedge k)^p) \leq k^p < +\infty.$$

On remarque ensuite que $y^p = \int_0^y px^{p-1}dx$. Donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((M_T^* \wedge k)^p) &= \mathbb{E}\left(\int_0^{M_T^* \wedge k} px^{p-1}dx\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^k p\, \mathbb{1}_{\{x \leq M_T^*\}} x^{p-1}dx\right) \\
&= \int_0^k px^{p-1}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{x \leq M_T^*\}})dx.
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient par le théorème de Fubini, la double intégrable étant finie. Or d'après le lemme précèdent,

$$x\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{x \leq M_T^*\}}) = x\mathbb{P}(M_T^* \geq x) \leq \mathbb{E}(|M_T|\mathbb{1}_{\{M_T^* \geq x\}}).$$

D'où, $\mathbb{E}((M_T^* \wedge k)^p) \leq \int_0^k px^{p-2}\mathbb{E}(|M_T|\mathbb{1}_{\{M_T^* \geq x\}})dx$

cette double intégrale est finie car $\mathbb{E}|M_T| < +\infty$,

(M_t) étant une martingale.

$$\begin{aligned}
&= p\mathbb{E}\left(|M_T| \int_0^k x^{p-2}\mathbb{1}_{\{M_T^* \geq x\}}dx\right) \\
&= p\mathbb{E}\left(|M_T| \int_0^{M_T^* \wedge k} x^{p-2}dx\right) \\
&= \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left(|M_T|(M_T^* \wedge k)^{p-1}\right).
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Hölder à $\mathbb{E}\left(|M_T|(M_T^* \wedge k)^{p-1}\right)$: pour q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$,

$$\mathbb{E}((M_T^* \wedge k)^p) \leq \frac{p}{p-1}\left(\mathbb{E}(|M_T|^p)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}((M_T^* \wedge k)^{(p-1)q})\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Il faut maintenant remarquer que $(p-1)q = p$ et que $1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$.

Par simplification, on obtient

$$\left(\mathbb{E}((M_T^* \wedge k)^p)\right)^{1-\frac{1}{q}\ (=\frac{1}{p})} \leq \frac{p}{p-1}\left(\mathbb{E}(|M_T|^p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme le terme de droite ne dépend pas de k, la limite $k \to +\infty$ donne les points 1) et 2).

4.2.6 Intégrale d'Itô et temps d'arrêt

Théorème 4.2.11. (Intégrale stochastique et temps d'arrêt). *Soient ϕ dans $M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ et τ un t.a.* **borné par** *T. Alors,*

1) *Le processus* $(M_t, t \in [0,T])$ *défini par* $M_t = \displaystyle\int_0^{t\wedge\tau} \phi_s dW_s$ *est une* $\mathcal{F}_t$*–martingale.*

2) *Si* σ *est un autre t.a. tel que* $\sigma < \tau$, *alors*

$$\mathbb{E}\left[\int_\sigma^\tau \phi_s dW_s\right] = 0$$

$$\textit{et} \quad \mathbb{E}\left[\left(\int_\sigma^\tau \phi_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_\sigma^\tau \phi_s^2 ds\right].$$

Proposition 4.2.12. *Soit* ϕ *un processus de* $L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ *et* τ *un temps d'arrêt* **borné** *par* T. *Alors,*

$$\int_0^\tau \phi_\theta dW_\theta = \int_0^T \mathbb{1}_{\{\theta\le\tau\}} \phi_\theta dW_\theta \;\; \mathbb{P}\; p.s.$$

4.3 Intégrale d'Itô multidimensionnelle

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^r$ dans $\mathbb{R}^d$ (matrices d lignes et r colonnes).

$(U \cdot V)$ désigne le produit scalaire entre les vecteurs U et V.

Soit $(W_t, t \ge 0)$ un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien de dimension r. Soit ϕ un processus à valeurs matricielles : pour tout $t \le T$, ϕ_t est une v.a à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)$. On dit encore que ϕ est dans $M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ si

$$\forall i \in \{1,\dots,d\},\ j \in \{1,\dots,r\}, \quad (\phi_t^{i,j})_{t\le T} \in M^2_{\mathcal{F}}(0,T).$$

On définit $\left(\displaystyle\int_0^t \phi_s dW_s\right)$ comme le vecteur de dimension d dont la i–ème coordonnée est $\left(\displaystyle\int_0^t \phi_s dW_s\right)^{(i)} = \displaystyle\sum_{j=1}^r \int_0^t \phi_s^{i,j} dW_s^j.$

On vérifie alors à l'aide de l'isometrie d'Iô (Théorème 2.3.8) que

Proposition 4.3.1.

1) $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left(\displaystyle\int_s^t \phi_\theta dW_\theta\right) = (0,\dots,0)$.

2) Si ψ *vérifie les mêmes hypothèses que* ϕ

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left[\left(\int_s^t \phi_\theta dW_\theta \cdot \int_s^t \psi_\theta dW_\theta\right)\right] = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left[\int_s^t \textit{trace}\left(\phi_\theta \psi_\theta^t\right) d\theta\right] = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_s}\left[\int_s^t (\phi_\theta \cdot \psi_\theta)\, d\theta\right]$$

4.4 Formule d'Itô multidimensionnelle

Soit $(W_t, t \ge 0)$ un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien standard vectoriel, de dimension r, sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}, \mathbb{P})$.

Définition 4.4.1. *Un* **processus d'Itô**, *est un processus* X *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$, *continu et adapté de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_\theta d\theta + \int_0^t \sigma_\theta dW_\theta \;\; \mathbb{P}\; p.s.$$

noté encore

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

où

1) X_0 est une v.a. $\mathcal{F}_0$ mesurable.
2) $(b_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}_t$–adapté et tel que $\int_0^T |b_s|ds < +\infty$ $\mathbb{P}$ p.s.
3) $(\sigma_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus à valeurs matricielles tel que pour tout $t \in [0,T]$, $\sigma_t \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)$
et pour tout $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, r$ $(\sigma_t^{i,j})_{0\leq t\leq T}$ appartient à $L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ (ie, $\sigma^{i,j}$ est $\mathcal{F}_t$–adapté et $\displaystyle\int_0^T |\sigma_s^{i,j}|^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}$ p.s.).

Ainsi, pour tout $t \in [0,T]$, $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ avec pour chaque $i = 1, \dots d$,

$$\mathbb{P}\ p.s., \qquad X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_s^i ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t \sigma_s^{i,j} dW_s^j.$$

Comme à la section 2.5, on a que si $(\sigma^{i,j} \in M^2_{\mathcal{F}}(0,T))$ pour tout $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, r$, (X_t) est une martingale si et seulement si pour Lebesgue presque tout $t \in [0,T]$, $\mathbb{P} - ps$, $b_t^i = 0$, pour tout $i = 1, \dots, d$.

Soit $u(t,x)$ une fonction de $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$. On note

$$\begin{aligned} \text{le gradient}u \qquad & \\ \nabla u(t,x) \quad &= \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x), 1 \leq i \leq d\right) \in \mathbb{R}^d \\ \text{la matrice hessienne} \qquad & \\ u_{xx}(t,x) \quad &= \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x), 1 \leq i,j \leq d\right) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Proposition 4.4.2. *Formule d'Itô, le cas multidimensionnel*
Soit une fonction $u(t,x) \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.
Presque sûrement, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} u(t,X_t) =& u(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial s}(s,X_s)ds + \int_0^t \nabla u(s,X_s) \cdot dX_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \textit{trace}\left(\sigma_s \sigma_s^t u_{xx}(s,X_s)\right) ds \\ =& u(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial s}(s,X_s)ds + \int_0^t \nabla u(s,X_s) \cdot dX_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^r \sigma_s^{ik}\sigma_s^{jk} ds \end{aligned}$$

Sous forme différentielle

$$\begin{aligned} du(t,X_t) = &\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,X_t) + \nabla u(t,X_t) \cdot b_t\right) dt + \left(\frac{1}{2} trace(\sigma_t \sigma_t^t u_{xx}(t,X_t)\right) dt \\ &+ \nabla u(t,X_t) \cdot \sigma_t dW_t. \end{aligned}$$

Proposition 4.4.3. (Formule d'intégration par parties (IPP) pour des fonctions déterministes du temps.)
Soit $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et W un mouvement brownien réel standard. Alors,

$$\int_0^t f(s)dW_s = f(t)W_t - \int_0^t f'(s)W_s ds.$$

Preuve. On applique la formule d'Itô au produit $f(t)W_t$:

$$f(t)W_t = f(0)0 + \int_0^t f'(s)W_s ds + \int_0^t f(s)dW_s.$$

■

La formule précédente est sans surprise par rapport à la formule d'IPP standard. Que se passe t'il quand on remplace $f(t)$ par un processus d'Itô ?

Proposition 4.4.4. (Formule d'intégration par partie stochastique (IPPS)). *Soit W un mouvement brownien réel standard.*
On considère deux processus d'Itô réels X et Y définis par

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t, \\ dY_t = \beta_t dt + \gamma_t dW_t. \end{cases}$$

Alors,

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_t\gamma_t dt,$$

ou encore

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t \sigma_s\gamma_s ds.$$

En multiD on a toujours que :

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$–mvt brownien et $(\phi_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus $\mathcal{F}_t$–adapté. On peut définir l'intégrale stochastique $\left(\int_0^t \phi_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ dès que $\int_0^T \phi_s^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}$ p.s., c'est à dire dès que $\phi \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$. ou dès que $\mathbb{E}\left(\int_0^T \phi_s^2 ds\right) < +\infty$ $\mathbb{P}$ p.s., càd dès que $\phi \in M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$.
$\left(\int_0^t \phi_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale si $\mathbb{E}\left(\int_0^T \phi_s^2 ds\right) < +\infty$, c'est à dire si $\phi \in M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$ et l'isométrie d'Itô s'applique. La condition $\mathbb{E}\left(\int_0^T \phi_s^2 ds\right) < +\infty$ est équivalente à $\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t \phi_s dW_s\right)^2\right) < +\infty$. Dans ce cas, l'isométrie d'Itô implique que $\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T \phi_s dW_s\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \phi_s^2 ds\right)$.

4.5 Équations différentielles stochastiques

Position du problème : Il s'agit de résoudre des équations différentielles stochastique **vectorielles** de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \tag{4.1}$$

s'écrivant aussi sous forme différentielle

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t. \\ X_0. \end{cases}$$

Précisons tout d'abord ce qu'on entend par solution. On se donne

- un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\leq T})$ et (W_t) un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien standard vectoriel de dimension r.
- une v.a X_0 $\mathcal{F}_0$-mesurable, la condition initiale de l'équation ;
- une fonction mesurable $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Le vecteur $b(t,x)$ est appelé **coefficient de dérive** ou **"drift"** de l'équation ;
- une fonction mesurable $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^r; \mathbb{R}^d)$ (espace des matrices $d \times r$). $\sigma(t,x)$ est une matrice $d \times r$ appelée **coefficient de diffusion** de l'équation.

Définition 4.5.1. *Trouver une solution à l'EDS (4.4) sur un intervalle de temps* $[0,T]$ *signifie trouver un processus stochastique* $(X_t, t \geq 0)$*, continu,* $\mathcal{F}_t$*–adapté, qui vérifie,*

- *Pour tout* $t \in [0,T]$*, les intégrales* $\int_0^t b(s,X_s)ds$ *et* $\int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s$ *ont un sens, ie*

$$\int_0^T |b(s,X_s)|ds < +\infty \quad \textit{et} \quad \int_0^T \|\sigma(s,X_s)\|^2 ds < +\infty, \ \mathbb{P}\ p.s.$$

  En particulier, $(X_t, t \in [0,T])$ *est un* **processus d'Itô***.*
- $(X_t, t \in [0,T])$ *vérifie l'équation (4.4) càd :* $\mathbb{P}\ p.s. \quad \forall t \in [0,T]$*,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s.$$

4.5.1 Les hypothèses sous lesquelles on démontre l'existence

On suppose que

(H) : (i) $X_0 \in L^2(\Omega)$ (ie $\mathbb{E}|X_0|^2 < +\infty$) est $\mathcal{F}_0$-mesurable.
(ii) Il existe deux constantes $L > 0$ et $K > 0$ telles que pour tout $t \in [0,T]$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|b(t,x)|^2 + \|\sigma(t,x)\|^2 \leq K(1 + |x|^2)$$

(On dit des coefficients qu'ils sont à croissance au plus linéaire.)

$$|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq L|x-y|.$$

(On dit des coefficients qu'ils sont Lipschitziens)

Ci-dessus, on a utilisé la norme euclidienne sur $\mathbb{R}$ (avec pour tout $z \in \mathbb{R}^d$, $|z|^2 = \sum_{i=1}^d z_i^2$) et la norme classique sur l'espace des matrices (pour toutes matrices $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^r)$, $\|A\|^2 = trace(AA^t)$).

Théorème 4.5.2 (de Cauchy–Lipschitz pour les EDS). *Sous les hypothèses* **(H)** *précédentes, pour toutes dates finales* $T \geq 0$*, l'équation (4.4) admet une unique solution dans l'intervalle* $[0,T]$*. De plus cette solution* $(X_t, 0 \leq t \leq T)$ *vérifie*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T} |X_s|^2\right) < +\infty,$$

en particulier, $(X_t, 0 \leq t \leq T)$ *est dans* $M^2_{\mathcal{F}(0,T)}$*.*
L'unicité est au sens suivant : si $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *et* $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ *sont deux solutions de (4.4), alors*

$$\mathbb{P}\ p.s. \ \ \forall t \in [0,T], \ X_t = Y_t.$$

Preuve. La preuve n'est pas très différente du cas des EDO et s'appuie essentiellement sur le caractère lipschitziens des coefficients. On utilise le théorème du point fixe pour une application contractante :

Théorème 4.5.3. *Soient E un espace de Hilbert et Φ une application contractante de E dans E, càd*

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_E < \|x - y\|_E.$$

Alors, il existe un unique point x^* dans E tel que $\Phi(x^*) = x^*$.

L'application Φ à considérer est l'application qui à un processus (x_t) associe le processus $(\Phi(x)_t)$ défini par

$$\Phi(x)_t = x_0 + \int_0^t b(s, x_s)ds + \int_0^t \sigma(s, x_s)dW_s.$$

L'espace de Hilbert naturel est l'espace de processus $M^2_{\mathcal{F}(0,T)}$ muni du produit scalaire naturel $(\phi, \psi) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \phi_t\psi_t dt\right)$ et de la norme noté $\|\psi\|_0 = \mathbb{E}(\int_0^T \psi_s^2 ds)$. Pour mettre en évidence plus facilement la contraction, on va travailler avec la norme équivalente $\|\|_c$,

$$\|x\|_c^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-ct}|x_t|^2 dt\right),$$

où $c > 0$ est une constante qui reste à choisir. On a bien que $\|x\|_c^2 \leq \|x\|_0^2 \leq e^{cT}\|x\|_c^2$ et $M^2_{\mathcal{F}(0,T)}$ muni de $\|\ \|_c$ est encore un espace de Hilbert.

Supposons pour simplifier les notations que $r = 1$. Remarquons que si $x \in M^{2,c}_{\mathcal{F}(0,T)}$, alors par (H)

$$|b(t, x_t)|^2 + |\sigma(t, x_t)|^2 \leq K(1 + |x_t|^2).$$

On en déduit facilement que $\Phi(x) \in M^2_{\mathcal{F}(0,T)}$. Il reste à montrer que Φ est une contraction : soient (x_t) et (y_t) deux processus de $M^2_{\mathcal{F}(0,T)}$ tels que $x_0 = y_0 = X_0$

$$\Phi(x)_t - \Phi(y)_t = \int_0^t (b(s, x_s) - b(s, y_s))ds + \int_0^t (\sigma(s, x_s) - \sigma(s, y_s))dW_s.$$

Par $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$,

$$\mathbb{E}\left(|\Phi(x)_t - \Phi(y)_t|^2\right) \leq 2\left(\mathbb{E}\int_0^t |b(s, x_s) - b(s, y_s)|^2 ds + \mathbb{E}\int_0^t |\sigma(s, x_s) - \sigma(s, y_s)\|^2 ds\right).$$

(On a utilisé l'isométrie d'Itô, pour écrire les carrés des intégrales stochastiques comme les intégrales des carrés.) Par la propriété de Lipschitz des coefficients, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|\Phi(x)_t - \Phi(y)_t|^2\right) &\leq 2\left(2L^2\mathbb{E}\int_0^t |x_s - y_s|^2 ds\right) \\
&\leq C\left(\mathbb{E}\int_0^t |x_s - y_s|^2 ds\right).
\end{aligned}$$

Calculons maintenant

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_c^2 &= \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-ct}|\Phi(x)_t - \Phi(y)_t|^2 dt\right) = \left(\int_0^T e^{-ct}\mathbb{E}|\Phi(x)_t - \Phi(y)_t|^2 dt\right) \\
&\leq C\left(\mathbb{E}\int_0^T e^{-ct}\left(\int_0^t |x_s - y_s|^2 ds\right)dt\right).
\end{aligned}$$

Or par la formule la formule d'intégration par parties usuelle, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{-ct}\left(\int_0^t |x_s - y_s|^2 ds\right)dt &= \underbrace{\left[\left(-\int_t^T e^{-cs}ds\right)\left(\int_0^t |x_s - y_s|^2 ds\right)\right]_0^T}_{=0} + \int_0^T \left(\int_t^T e^{-cs}ds\right)|x_t - y_t|^2 dt \\
&= \int_0^T \frac{1}{c}\left(e^{-ct} - e^{-cT}\right)|x_t - y_t|^2 dt \\
&\leq \int_0^T \frac{1}{c}e^{-ct}|x_t - y_t|^2 dt.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|\Phi(x)-\Phi(y)\|_c^2 \quad \leq \quad C\left(\mathbb{E}\int_0^T \frac{1}{c}e^{-ct}|x_t-y_t|^2dt\right) \leq \frac{C}{c}\|x-y\|_c^2$$

Il suffit de choisir $c \geq C$ pour avoir une contraction. Par application du théorème du point fixe, on obtient l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation (4.4) dans l'ensemble des processus de $M^2_{\mathcal{F}(0,T)}$.

Pour montrer l'unicité dans la classe de tout les processus d'Itô, il suffit de prouver qu'une solution de (4.4) est forcement dans $M^2_{\mathcal{F}(0,T)}$. Soit donc (X_t) une solution de (4.4). Nous allons montrer que $\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_s|^2\right)^2 < +\infty$, ce qui impliquera que $(X_t)\in M^2_{\mathcal{F}(0,T)}$.

On pose

$$T_n = \inf\{s\leq 0, |X_s|>n\} \quad \text{et} \quad f^n(t) = \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t\wedge T_n}|X_s|^2\right).$$

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de t.a.. Il est facile de vérifier que $f^n(t)$ est une fonction finie et continue. En utilisant le même type d'arguments que précédemment, on obtient que

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq s\leq t\wedge T_n}|X_s|^2 \quad &\leq \quad 3\left(|X_0|^2 + \sup_{0\leq s\leq t\wedge T_n}\left(\int_0^s b(u,X_u)du\right)^2 + \sup_{0\leq s\leq t\wedge T_n}\left(\int_0^s \sigma(u,X_u)dW_u\right)^2\right)\\
&\leq \quad \left(|X_0|^2 + \left(\int_0^{t\wedge T_n} K(1+|X_u|)du\right)^2 + \sup_{0\leq s\leq t}\left(\int_0^s \mathbb{1}_{[0,T_n]}(u)\sigma(u,X_u)dW_u\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Le processus $(\mathbb{1}_{[0,T_n]}(u)\sigma(u,X_u))$ est dans $M^2_{\mathcal{F}(0,T)}$ (il est borné par $K(1+n)$) ; son intégrale stochastique est donc une martingale et l'inégalité de Doob nous donne

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left(\int_0^s \mathbb{1}_{[0,T_n]}(u)\sigma(u,X_u)dW_u\right)^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,T_n]}(u)\sigma(u,X_u)dW_u\right)^2 = 4\mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,T_n]}(u)\sigma(u,X_u)^2du\right).$$

La dernière égalité est due à l'isométrie d'Itô. Ainsi,

$$\begin{aligned}
f^n(t) \quad &= \quad \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t\wedge T_n}|X_s|^2\right) \leq 3\left(\mathbb{E}|X_0|^2 + \mathbb{E}\left(T\int_0^{t\wedge T_n} K^2(1+|X_u|)^2du\right) + 4\mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,T_n]}(u)K^2(1+|X_u|)^2du\right)\right)\\
&\leq \quad 3\left(\mathbb{E}|X_0|^2 + \mathbb{E}\left(T\int_0^{t\wedge T_n} K(1+|X_u|^2)du\right) + 4\mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,T_n]}(u)K^2(1+|X_u|)^2du\right)\right)\\
&\leq \quad 3\left(\mathbb{E}|X_0|^2 + K^2(T+4)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_n}(1+|X_u|^2)du\right)\right)\\
&\leq \quad 3\left(\mathbb{E}|X_0|^2 + 2K^2(T+4)\left(\int_0^t(1+\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq u\wedge T_n}|X_s|^2)du\right)\right).
\end{aligned}$$

Cela donne une estimation de la forme suivante :

$$f^n(t) \leq a + b\int_0^t f^n(u)du$$

qui se résout en utilisant le

Lemme 4.5.4 (de Grönwall). *Soit $g(t)$ une fonction continu telle que*

$$0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta\int_0^t g(s)ds$$

avec $\beta \geq 0$ et $t \longrightarrow \alpha(t)$ intégrable sur $[0,T]$. Alors, pour tout $t\in[0,T]$

$$g(t) \leq \alpha(t) + \beta\int_0^t \alpha(s)\exp((t-s)\beta)ds.$$

On en déduit que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^n(T)\leq C < +\infty$. Le lemme de Fatou nous donne alors que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T}|X_s|^2\right) = \mathbb{E}\left(\liminf_n \sup_{0\leq s\leq T\wedge T_n}|X_s|^2\right) \leq \liminf_n \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T\wedge T_n}|X_s|^2\right) = \liminf_n f^n(T) \leq C.$$

Ainsi, maintenant si deux processus d'Itô (X_t) et (Y_t) sont deux solutions, ils sont dans $M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$. Montrons qu'ils sont indistinguables càd : $\mathbb{P}\left(\forall t\in[0,T],\ X_t\neq Y_t\right) = 0$. X et Y étant des processus continus, il suffit de montrer que $\forall t\in[0,T]$, $\mathbb{P}(X_t\neq Y_t) = 0$ ou encore que $\mathbb{P}(|X_t-Y_t|>0) = 0$. En utilisant les argument précédents et le lemme de Grönwall, on montre que $\mathbb{E}|X_t-Y_t|^2 = 0$ ce qui implique le résultat. ∎

4.5.2 Exemples d'EDS

Comme dans le cas déterministe (équation différentielle ordinaire EDO), **les équations différentielles stochastiques affines**, à coefficients éventuellement aléatoires, mais bornés, admettent des solutions explicites obtenues par la méthode de variation des constantes.

Équation linéaire : premier cas

$b(t,x) = ax$, $\sigma(t,x) = \sigma$ et $X_0 \in L^2(\Omega)$.
L'équation

$$\begin{cases} dX_t = aX_t dt + \sigma dW_t, \\ X_0, \end{cases} \tag{4.2}$$

est de solution (unique)

$$X_t = X_0 e^{at} + \sigma \int_0^t e^{a(t-s)} dW_s.$$

Équation linéaire : second cas

$b(t,x) = \mu x$, $\sigma(t,x) = \sigma x$ et $X_0 \in L^2(\Omega)$.
L'équation

$$\begin{cases} dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dW_t) \\ X_0 \end{cases} \tag{4.3}$$

est de solution (unique)

$$X_t = X_0 \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\right).$$

On démontre de la même façon que l'EDS

$$dX_t = X_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t), \;\; X_0 \in L^2(\Omega)$$

admet comme unique solution

$$X_t = x_0 \exp\left(\int_0^t (\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s\right).$$

lorsque (μ_t) et (σ_t) sont des processus uniformément bornés par une constante K (ceux ne sont pas les seules conditions sur μ et σ qui permettent cette conclusion).

4.5.3 Propriété de Markov et propriété de flot des EDS

Sur la propriété de Markov

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est *Markovien* si son comportement futur ne dépend du passé que par l'intermédiaire de son état présent.

Définition 4.5.5. *Les processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est Markovien par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ pour laquelle il est adapté, si*

pour toute fonction f mesurable et bornée, pour tout , $s \leq t$,
$$\mathbb{E}\left(f(X_t)/\,\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(f(X_t)/\,\sigma(X_s)\right) := \mathbb{E}\left(f(X_t)/\,X_s\right).$$

Examinons le cas du mouvement Brownien. Comme toutes les fonctions mesurables bornées peuvent être approchées par une suite de fonctions régulières dans C_b^∞, supposons un moment que la fonction générique f dans la définition ci-dessus est de classe C_b^∞. Alors par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned}
f(W_t) &= f(W_s) + \int_s^t f'(W_u)dW_u + \frac{1}{2}\int_s^t f''(W_u)du \\
\mathbb{E}\left[f(W_t)/\mathcal{F}_s\right] &= f(W_s) + \frac{1}{2}\int_s^t \mathbb{E}\left[f''(W_u)/\mathcal{F}_s\right]du \\
&= f(W_s) + \frac{1}{2}(t-s)f''(W_s) + \frac{1}{4}\int_s^t \mathbb{E}\left[f''''(W_u)/\mathcal{F}_s\right]du \\
&= \ldots \text{d'où on peut justifier l'existence d'une fonction } \Psi(f)(\cdot) \text{ mesurable et telle que} \\
&= \Psi(f)(W_s),
\end{aligned}$$

d'où $\mathbb{E}\left[f(W_t)/\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[f(W_t)/W_s\right]$.

Flot d'une EDS

Soit l'EDS de forme différentielle

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \tag{4.4}$$

sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\leq T})$ et (W_t) un $\mathcal{F}_t$–mvt brownien standard.
On note $(X_\theta^{t,x})_{t\leq\theta\leq T}$ la solution de (4.4) qui part du point x à l'instant t :

$$X_\theta^{x,t} = x + \int_t^\theta b(s, X_s^{x,t})ds + \int_t^\theta \sigma(s, X_s^{x,t})dW_s,\ \theta \in [t, T]. \tag{4.5}$$

On suppose que

(H') :

(i') Il existe deux constantes $L > 0$, $K > 0$ t.q. $\forall t \in [0, T]$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
&|b(t, x)|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 \leq K(1 + |x|^2), \\
&|b(t, x) - b(t, y)| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq L|x - y|.
\end{aligned}$$

(ii') Les coefficients $b(t, x)$, $\sigma(t, x)$: $[0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^r)$ sont des **fonctions continues**.

En plus de l'hypothèse (H) du Théorème de Cauchy–Lipschitz qui assure l'existence et l'unicité d'une solution à l'EDS (4.4), (H') impose la continuité en temps des coefficients.

Sous ces hypothèses, pour tout couple (t, x) dans $[0, T] \times \mathbb{R}^d$, l'équation (4.5) admet une unique solution $(X_\theta^{x,t})_{\theta\in[t,T]}$ dans l'espace $M^2_{\mathcal{F}(0,T)}$ telle que $\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq\theta\leq T} |X_\theta^{x,t}|^2\right) < +\infty$ (cf Théorème 12.2 du polycopié de Calcul Stochastique).

On parle de flot de solutions.

Exemple : l'équation $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ a pour flot de solutions

$$\begin{aligned}
&\forall \theta \geq t, \forall x > 0, \\
(x, t, \theta) \longrightarrow S_\theta^{x,t} &= x \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})(\theta - t) + \sigma(W_\theta - W_t)\right).
\end{aligned}$$

Lemme 4.5.6. *Propriété de flot de solution d'EDS. Sous les hypothèses (H'),*

$$\forall\ 0 \leq s \leq t \leq T,\ \ X_t^{x,0} = X_t^{X_s^{x,0},\, s}.$$

Cette propriété est une conséquence de l'unicité de la solution $(X_\theta^{x,t})_{\theta\in[t,T]}$ de (4.5) sous (H').

Proposition 4.5.7. *Propriété de Markov de solution d'EDS.*
On suppose (H'). Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ une solution de (4.4), de condition initiale X_0. Alors, $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus de Markov par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(f(X_t)/\,\mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(f(X_t)/\,X_s\right) \\ &= \mathbb{E}\left(f(X_t^{x,s})\right)\Big|_{x=X_s}. \end{aligned}$$

Les solutions d'EDS héritent de la propriété de Markov du mouvement brownien.

4.6 Le théorème de Girsanov

Rappelons les caractérisations martingales de processus d'Itô de la propositions 2.5.1 et son corollaire 2.5.4 :

Proposition 4.6.1.
1) Si $(M_t, t\in[0,T])$ est une martingale, alors

$$\mathbb{E}\left((M_t - M - s)^2/\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2/\mathcal{F}_s).$$

2) Si $(M_t, t\in[0,T])$ est une martingale, telle que pour tout $t\in[0,T]$, $M_t = \displaystyle\int_0^t b_s ds$ (avec $\mathbb{P}$ p.s., $\int_0^T |b_s|ds < +\infty$, pour que la martingale soit bien définie). Alors, $\mathbb{P}$ p.s. tout $t\in[0,T]$, $M_t = 0$.

Corollaire 4.6.2.
1) La décomposition d'un processus d'Itô (X) est unique.

$$\text{Si } X_t = X_0 + \int_0^t k_s ds + \int_0^t h_s dW_s = X_0' + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

alors $X_0 = X_0'$ $\mathbb{P}$ p.s., $k_s = b_s$ et $h_s = \sigma_s$, $ds\times d\mathbb{P}$ p.p.
2) Si $(X_t, t\in[0,T])$ est une martingale de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

alors $b_s = 0$ $ds\times d\mathbb{P}$ p.p.

Le problème du changement de probabilité : Sous la probabilité $\mathbb{P}$ de la modélisation, on considère un processus d'Itô $(Y_t, t\in[0,T])$ de la forme

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad \text{avec } \forall s\geq 0, \sigma_s > 0.$$

Peut–on modifier la probabilité $\mathbb{P}$ pour que, sous une nouvelle probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$, $(Y_t, t\in[0,T])$ puisse s'écrire sous la forme

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma_s d\widetilde{W}_s,$$

où le processus $(\widetilde{W}_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien sous $\widetilde{\mathbb{P}}$?

Autrement dit, peut–on trouver une probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ pour laquelle le processus $\widetilde{W}_t = \int_0^t \frac{b_s}{\sigma_s} ds + W_t$ soit un mouvement brownien ?

La réponse est donnée par le Théorème de Girsanov.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré (avec une filtration vérifiant les conditions habituelles). Soit $(W_t, t \geq 0)$ un $\mathcal{F}_t$–mvt brownien réel. Soit $(X_t, t \in [0,T])$ un processus de $M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$.

A partir de (X), on construit le processus $(Z_t(X), t \in [0,T])$ défini par

$$\forall t \in [0,T], \quad Z_t(X) = \exp\left(-\int_0^t X_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |X_s|^2 ds\right).$$

L'hypothèse : On suppose que $(Z_t(X), t \in [0,T])$ est une martingale. En particulier $\forall t,\ \mathbb{E}(Z_t(X)) = 1$.

Sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, on définit la mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ par

$$\forall A \in \mathcal{F}_T, \quad \widetilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_A Z_T(X)\right).$$

soit $(\widetilde{W}_t, t \in [0,t])$ le processus défini par

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t X_s ds.$$

Théorème 4.6.3 (de Girsanov.). *On suppose que $(Z_t(X), t \in [0,T])$ est une $\mathbb{P}$–martingale.*

Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}_T, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t \leq T}, \widetilde{\mathbb{P}})$, le processus $(\widetilde{W}_t, t \in [0,t])$ est un mouvement brownien standard.

Si $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$, $\widetilde{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{P}$ sont des probabilités sur le même espace mesurable. On peut alors montrer que $\widetilde{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{P}$ sont des probabilités équivalentes et on écrit $\left.\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}} = Z_T(X)$.

Remarque 4.6.4. Le critère de Novikov. *Un exemple de condition suffisante pour que $(Z_t(X), t \in [0,T])$ soit une martingale est donné par le critère suivant (dû à Novikov) :*

$$\textit{Si } \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T |X_s|^2 ds\right)\right] < +\infty,$$

alors $(Z_t(X), t \in [0,T])$ est une $\mathcal{F}_t$–martingale continue.

Retour sur la question précédente :

Sous la probabilité $\mathbb{P}$ de la modélisation, on considère à nouveau le processus d'Itô $(Y_t, t \in [0,T])$ de la forme

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s = Y_0 + \int_0^t \sigma_s \left(dW_s + \frac{b_s}{\sigma_s} ds\right).$$

A l'aide du théorème de Girsanov on peut changer la probabilité $\mathbb{P}$ pour que, sous une nouvelle probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$, $(Y_t, t \in [0,T])$ puisse s'écrire sous la forme

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma_s d\widetilde{W}_s,$$

où $(\widetilde{W}_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard sous $\widetilde{\mathbb{P}}$.

On suppose que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$, et que pour tout $t \in [0,T]$, $b(t) \leq B$ et $s_\star \leq \sigma_t \leq S^\star$ où B, $s_\star$ et $S^\star$ sont des constantes strictement positive.

1) Identifier les processus $(X_t, t \in [0,T])$ et $(Z(X)_t, t \in [0,T])$ tels que $\left.\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}} = Z_T(X)$.

2) Vérifier que l'on peut appliquer le théorème de Girsanov et conclure.

Théorème 4.6.5 (Girsanov, Cameron & Martin)**.** *Soit $(h_t, t \in [0,T])$ un processus progressivement mesurable tel que $h \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0,T)$. Posons, pour $t \in [0,T]$,*

$$D_t = \exp\left(\int_0 h_s \cdot dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |h_s|^2 ds\right).$$

Si $\mathbb{E}[D_T] = 1$, alors D est une $\mathcal{F}_t$-martingale et le processus $W^*_t = W_t + \int_0^t h_s ds$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale sous la probabilité $\mathbb{P}^*$, de densité D_T sur $\mathcal{F}_T$ (i.e $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = D_T$).

Une condition suffisante pour que $\mathbb{E}[D_T] = 1$ est donnée à nouveau par la condition de Novikov : il suffit que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T |h_s|^2 ds\right)\right] < +\infty.$$

4.7 Mouvement brownien et équation de la chaleur

Considérons la densité gaussienne comme un noyau

$$g(t,x,y) := g(t, y-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right).$$

L'une des propriétés fondamentales de ce noyau est la **propriété de convolution** :

$$g(t,\cdot) * g(s,\cdot)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t, x-z) g(s,z) dz = g(t+s, x)$$

ce qu'on peut encore écrire en utilisant la notation précédente

$$g(t+s,x,y) = \int_{\mathbb{R}} g(t,x,z) g(s,z,y) dz.$$

En effet, $x + W_{t+s}$ est une v.a. de densité gaussienne $g(t+s,x,y)$. D'autre part, $x + W_{t+s} = x + W_t + (W_{t+s} - W_t)$. Par indépendance des accroissements browniens, la densité de $x + W_{t+s}$ est la convolution des densités de $x + W_t$ et de $(W_{t+s} - W_t)$ qui sont $g(t,x,y)$ et $g(s,0,y)$.

Une deuxième propriété importante du noyau gaussien est :

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t,x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(t,x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} g(t,x,y).$$

On dit que le noyau g est **la solution fondamentale** de l'équation de la chaleur.

Proposition 4.7.1.

a) Soit f une fonction mesurable bornée. La fonction $u^f(t,x)$ définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ par

$$(t,x) \to u^f(t,x) = \mathbb{E}\left(f(x + W_t)\right)$$

est de classe C^∞ en espace et en temps pour tout $t > 0$ et vérifie l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u^f(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^f(t,x) & \textit{pour tout } t > 0 \textit{ et } x \in \mathbb{R}, \\ u^f(0,x) = f(x), \ \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

b) Soit une v.a. réelle X_0 de densité $\pi(x)$, indépendante du mouvement brownien $(W_t, t \geq 0)$.

La densité de la loi de $X_0 + W_t$ égale à $q(t,y) = \int_{\mathbb{R}} g(t,x,y)\pi(x)dx$ vérifie aussi une équation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} q(t,y) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} q(t,y) & \text{pour tout } t > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}, \\ q(0,y) = \pi(y), \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Les résultats précédents s'étendent sans difficulté au cas du mouvement brownien avec dérive $(X_t^x = x + bt + \sigma W_t, t \geq 0)$.

X_t^x est de loi gaussienne décentrée $\mathcal{N}(x + bt, \sigma^2 t)$ de densité

$$g_{b,\sigma^2}(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(y - x - bt)^2}{2\sigma^2 t}\right).$$

Il est facile de vérifier que la fonction $(t,x) \to p(t,x) = g_{b,\sigma^2}(t,x,y)$ satisfait

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t,x) = L_{b,\sigma^2} p(t,x).$$

où L_{b,σ^2} est l'opérateur différentiel du second ordre (ou **générateur**) associé au processus $(X_t^x, t \geq 0)$ est défini par

$$L_{b,\sigma^2}\phi(x) = \frac{1}{2}\sigma^2\phi''(x) + b\phi'(x)$$

En effet, on a toujours $\partial_t g(t,x,y) = \partial^2_{xx} g(t,x,y)$ donc

$$\partial_t g_{b,\sigma^2}(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial t}\left[g(\sigma^2 t, x + bt, y)\right] = \sigma^2 \partial_t g(\sigma^2 t, x + bt, y) + b\partial_x g(\sigma^2 t, x + bt, y)$$

ou encore

$$\partial_t g_{b,\sigma^2}(t,x,y) = \frac{1}{2}\sigma^2\partial^2_{xx} g_{b,\sigma^2}(t,x,y) + b\partial_x g_{b,\sigma^2}(t,x,y) = L_{b,\sigma^2} g_{b,\sigma^2} g(t,x,y)$$

Proposition 4.7.2. *Pour toute fonction f mesurable et bornée,*
$u^f(t,x) = \mathbb{E}\left[f(x + bt + \sigma W_t)\right] = \mathbb{E} f(X_t^x)$ *vérifie l'équation*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = L_{b,\sigma^2} u(t,x) & \text{pour tout } t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De plus, si f est de classe $C_b^{1,2}$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} f(t, X_t^x) = f(0,x) + \int_0^t \mathbb{E}\left(L_{b,\sigma^2} f(s, X_s^x) + \frac{\partial}{\partial t} f(s, X_s^x)\right) ds.$$

Un autre exemple de lien processus–EDP (qui ne nécessite par de calcul stochastique) est le cas du **brownien géométrique** : pour $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien standard, on défini le processus $(S_t^x, t \geq 0)$ $(x > 0)$ par

$$S_t^x = x \exp\left(\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right).$$

S^x est un brownien géométrique de valeur initiale x.

Pour tout $t > 0$, S_t^x suit une loi **log–normale** de densité

$$l(t,x,y) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left[\log(\frac{y}{x}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right]^2\right)$$

qui se déduit de la densité gaussienne par la formule de changement de variable pour les densités.

D'autre part, pour toute fonction f mesurable et bornée sur $\mathbb{R}^+$, $v^f(t,x) = \mathbb{E}\left[f(S_t^x)\right]$ est solution de l'EDP à coefficients variables

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}v(t,x) = \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial^2_{xx} v(t,x) + \mu x \partial_x v(t,x), \\ \qquad\qquad\qquad \text{pour tout } t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^+, \\ v(0,x) = f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{4.6}$$

En effet,

$$\begin{aligned} v^f(t,x) &= \mathbb{E}\left[f\left(\exp\left(\log x + \sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right)\right)\right] \\ &= u^{f\circ \exp}(t, \log x) \end{aligned}$$

où l'EDP satisfaite par $u(t,y)$ est associée au générateur du mouvement brownien avec dérive $X_t = y + \sigma W_t + t(\mu - \sigma^2/2)$. En particulier, d'après la Proposition 4.7.2,

$$\partial_t u(t,y) = \frac{1}{2}\sigma^2 \partial^2_{yy} u(t,y) + (\mu - \sigma^2/2)\partial_y u(t,y).$$

Pour $x = e^y$, comme $v(t,x) = u(t,y) = v(t,e^y)$,

$$\begin{gathered} \partial_t u(t,y) = \partial_t v(t,x), \qquad \partial_y u(t,y) = x\partial_x v(t,x), \\ \partial^2_{yy} u(t,y) = x^2 \partial^2_{xx} v(t,x) + x \partial_x v(t,x), \end{gathered}$$

Ce qui permet de vérifier (4.6).

• Les liens avec l'équation de la chaleur, énoncé précédemment, s'étendent au cas vectoriel sans restriction.

4.8 Lien entre EDS et EDP : la formule de Feynman–Kac

4.8.1 Le cas unidimensionnel

soit l'EDS de forme différentielle

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t, \tag{4.7}$$

sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\leq T})$ et (W_t) un $\mathcal{F}_t$–mvt brownien standard de dimension 1.

On note $(X_\theta^{t,x})_{t\leq\theta\leq T}$ la solution de (4.7), partant de x à l'instant t :

$$X_\theta^{x,t} = x + \int_t^\theta b(s, X_s^{x,t})ds + \int_t^\theta \sigma(s, X_s^{x,t})dW_s, \ \theta \in [t,T] \tag{4.8}$$

(H') : cas $d = 1$

(i') Il existe deux constantes $L > 0$, $K > 0$ t.q. $\forall t \in [0,T]$ et $\forall x,y \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} &|b(t,x)|^2 + \|\sigma(t,x)\|^2 \leq K(1 + |x|^2), \\ &|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq L|x - y|. \end{aligned}$$

(ii') Les coefficients $b(t,x)$, $\sigma(t,x) : [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des **fonctions continues**.

• Sous **(H')**, $\forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}$, l'équation (4.8) a une unique solution $(X_\theta^{x,t})_{\theta\in[t,T]}$ dans l'espace $M^2_{\mathcal{F}(0,T)}$ et $\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq\theta\leq T}|X_\theta^{x,t}|^2\right) < +\infty$.

• Pour tout $t \in [0,T]$, on définit l'opérateur différentiel

$$\mathcal{L}_t : g \in C^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}_t g \in C(\mathbb{R})$$

par

$$\mathcal{L}_t g\ (x) = \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)g''(x) + b(t,x)g'(x).$$

• Soit f une fonction dans $C_b^2(\mathbb{R})$ ($2\times$ continûment dérivable, bornée et à dérivées f' et f'' bornées).

Par la formule d'Itô, pour tout $\theta \in [t,T]$,

$$\mathbb{E}f(X_\theta^{x,t}) = f(x) + \int_t^\theta \mathbb{E}\left(\mathcal{L}_u f(X_u^{x,t})\right) du.$$

$\mathcal{L}_t$ est appelé *le générateur infinitésimal du processus d'Itô* (X_t).

Théorème 4.8.1. (Formule de Feynman-Kac dans $\mathbb{R}$). *Soient*

- *une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- *une fonction* $g : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- *une fonction* $k : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *(càd à valeurs positives).*

En plus de **(H')**, *on suppose*

(a) Il existe deux constantes $C > 0$ *et* $\lambda \geq 1$, *t.q.* $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$
(i) $|f(x)| \leq C(1 + |x|^{2\lambda})$
(ii) $|g(t,x)| \leq C(1 + |x|^{2\lambda})$.

(b) Il existe une solution $v(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R})$ *au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \mathcal{L}_t v(t,x) - k(t,x)v(t,x) = g(t,x) \text{ dans } [0,T[\times\mathbb{R}, \\ v(T,x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

telle que

$$\max_{0\leq t\leq T} |v(t,x)| \leq M(1 + |x|^{2\mu}), \text{pour un } M > 0 \text{ et } \mu \geq 1.$$

Alors, on a que pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \mathbb{E}\left[f(X_T^{x,t}) \exp\left(-\int_t^T k(s, X^{x,t})ds\right)\right] \\ &\quad -\mathbb{E}\left[\int_t^T g(s, X_s^{x,t}) \exp\left(-\int_t^s k(r, X_r^{x,t})dr\right) ds\right], \end{aligned}$$

avec

$$X_\theta^{x,t} = x + \int_t^\theta b(s, X_s^{x,t})ds + \int_t^\theta \sigma(s, X_s^{x,t})dW_s,\ \ \theta \in [t,T].$$

4.8.2 Ce qui change en dimension > 1

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,$$

sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\leq T})$ et (W_t) un $\mathcal{F}_t$–mvt brownien standard de dimension r.

(H') :

(i') Il existe deux constantes $L > 0$, $K > 0$ t.q. $\forall t \in [0, T]$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|b(t, x)|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 \leq K(1 + |x|^2),$$
$$|b(t, x) - b(t, y)| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq L|x - y|.$$

(ii') Les coefficients $b(t, x)$, $\sigma(t, x)$: $[0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^r)$ sont des **fonctions continues**.

• Sous **(H')**, $\forall(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, l'équation (4.8) a une unique solution $(X_\theta^{x,t})_{\theta\in[t,T]}$ dans l'espace $M^2_{\mathcal{F}(0,T)}$ et $\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq\theta\leq T} |X_\theta^{x,t}|^2\right) < +\infty$.

Théorème 4.8.2 (Formule de Feynman-Kac dans $\mathbb{R}^d$.). *Soient*

- *une fonction* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,
- *une fonction* $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,
- *une fonction* $k : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ *(à valeurs positives).*

En plus de **(H')**, *on suppose*

a) Il existe deux constantes $C > 0$ *et* $\lambda \geq 1$, *telles que pour tout* $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$
(i) $|f(x)| \leq C(1 + |x|^{2\lambda})$
(ii) $|g(t, x)| \leq C(1 + |x|^{2\lambda})$ *Soit* L_t *l'opérateur différentiel*

$$L_t\phi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t, x)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_i}(x) + \sum_{i=1}^{d} b^i(t, x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)$$

où la matrice $a = \sigma\sigma^t = \left(\sum_{k=1}^{r} \sigma_{i,k}\sigma_{j,k}\right)_{1\leq i,j\leq d}$.

b) *Il existe une solution* $v(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^{1,2}([0, T[\times\mathbb{R}^d)$ *au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t, x) + L_t v(t, x) - k(t, x)v(t, x) = g(t, x) \text{ dans } [0, T[\times\mathbb{R}^d, \\ v(T, x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

vérifiant : $\exists M > 0$ *et* $\mu \geq 1$ *tels que* $\max_{0\leq t\leq T} |v(t, x)| \leq M(1 + |x|^{2\mu})$.

Alors,

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \mathbb{E}\left[f(X_T^{x,t}) \exp\left(-\int_t^T k(s, X^{x,t})ds\right)\right] \\ &\quad -\mathbb{E}\left[\int_t^T g(s, X_s^{x,t}) \exp\left(-\int_t^s k(r, X_r^{x,t})dr\right) ds\right]. \end{aligned}$$

Remarque 4.8.3.

on sait écrire des conditions sur b, σ, f, g et k assurant l'existence d'une solution v au problème de Cauchy et satisfaisant les hypothèses du théorème.

Par exemple les conditions suivantes :

1. *Condition d'ellipticité forte :* $\exists \alpha > 0$;

$$\sum_{1\leq i,j\leq d} a_{i,j}(t,x) y_i y_j \geq \alpha |y|^2, \;\; \forall y \in \mathbb{R}^d. \;\; \big(\text{en dim 1, } \sigma^2(t,x) \geq \alpha > 0.\big)$$

2. *Coefficients* $(a_{i,j}), b, k$ *bornés dans* $[0,T] \times \mathbb{R}^d$.

3. $(a_{i,j}),\ b,\ k$ *et* g *uniformément hölderiens dans* $[0,t] \times \mathbb{R}^d$.

4. f *et* g *tq* $|f(x)| + |g(x)| \leq C(1 + |x|^{2\lambda})$.

Ou encore

a. *Coefficients de l'EDS* $\sigma(t,x),\ b(t,x)$ *de classe* $C^2_b(\mathbb{R}^d)$.

b. f *de classe* $C^2(\mathbb{R}^d)$ *et tq* $\exists n \in \mathbb{N}$, $|f(x)| + |\nabla f(x)| + \|f_{xx}(x)\| \leq C(1 + |x|^n)$.

c. k *et* g *de classe* $C^2(\mathbb{R}^d)$ *et bornées.*

- Exemple : on considère

$$\begin{cases} X_0 = x \\ dX_t = b(X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad t \in [0,T] \end{cases}$$

où (W_t) mvt brownien standard en dimension 2.

$$b(x^1,x^2) = \begin{pmatrix} b^1(x^1,x^2) \\ b^2(x^1,x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

et

$$\sigma(t,x^1,x^2) = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} \end{pmatrix}(t,x^1,x^2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin(x^1+x^2)}{\sqrt{t+1}} \\ \frac{\cos(x^1+x^2)}{\sqrt{t+1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecrire l'EDP satisfaite par $v(t,x) = \mathbb{E}|X_T^{x,t}|^2$.

4.8.3 Application de la formule de Feynman–Kac aux O.E.

- dans le cadre du modèle de Black et Scholes,
- pour de O.E. de flux $h = f(S_T)$,
- avec f continue et tq $|f(x)| \leq A + B|x|$.

D'après le Théorème de valorisation 3.5.9 (seconde version), le prix d'arbitrage de l'option, pour un sous-jacent de prix S_t à la date t est

$$v(t,S_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(-r(T-t)) f(S_T^{x,t})\right)\Big|_{x=S_t}.$$

Problème : Ecrire l'EDP satisfaite par la fonction

$$v(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(-r(T-t)) f(S_T^{x,t})\right).$$

- A l'instant T, $v(T,x) = f(x)$.
  $\Longrightarrow f$ est la condition finale de l'EDP.
- Le terme source $g(t,x) \equiv 0$ et le terme de degré zéro $k(t,x) \equiv r$.

- Le générateur infinitésimal $\mathcal{L}_t$ de l'EDS $(S_\theta^{x,t})_\theta$:

$$\text{on a} \qquad dS_\theta = S_\theta(rd\theta + \sigma dW_\theta^*)$$

  où $(W_t^*)_t$ est un mvt brownien standard de dimension 1 sous la probabilité risque–neutre $\mathbb{P}^*$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad & b(t,x) = xr \text{ et } \sigma(t,x) = x\sigma \\ \text{et} \qquad & \mathcal{L}_t\phi(x) = \frac{\sigma^2}{2}x^2\phi''(x) + xr\phi'(x). \end{aligned}$$

  $v(t,x)$ doit donc satisfaire le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\sigma^2}{2}x^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) + xr\dfrac{\partial v}{\partial x}(t,x) - rv(t,x) = 0 \text{ dans } [0,T[\times\mathbb{R}, \\ v(T,x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Il reste à vérifier que les conditions $(1,2,3,4)$ ou (a,b,c) sont vérifiées.

Chapitre 5

Valorisation d'options européennes, cadre génériques des EDS

5.1 Description du modèle de marché

On considère un marché ou un sous–marché composé de
- d'un panier de titres risqués $S_t = (S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(d)})$
- d'un titre non risqué S_t^0

Soit T une date de fin de gestion, par exemple la date d'échéance d'une option de sous-jacent S_t.

Les actifs risqués.

On supposera que le vecteur de processus de prix est décrit par un système d'EDS de la forme

$$dS_t = S_t\Big(b(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t\Big) \tag{5.1}$$

ou encore de la forme plus complète

$$dS_t = S_t\Big(b(t, S_t, \rho_t)dt + \sigma(t, S_t, \sigma_t)dW_t\Big) \tag{5.2}$$

où $(\rho_t, t \in [0, T])$ et $(\sigma_t, t \in [0, T])$ sont aussi des états du modèle (des processus de rentabilité espérée, de volatilité stochastique) décrits par des EDS (couplées ou non avec le processus S).

S_0 est le vecteur de prix observé aujourd'hui à la date 0.

1. On s'est fixé un horizon de gestion T.
2. Sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, t \leq T), \mathbb{P})$, (W_t) est un mouvement brownien de dimension r.

Dans ce qui suit, on travaillera avec le modèle générique (5.1), le modèle (5.2) étant un raffinement du cas générique, une fois qu'on s'est fixé les ESD (et les browniens) pour les facteurs supplémentaires (ρ_t) et (σ_t).

Pour l'existence des flots de solution à l'EDS (5.1), on travaillera avec le même type d'hypothèses **(H')** que pour la formule de Feynman-Kac, mais il faut prendre ne compte la multiplication par S_t dans les coefficients de l'EDS (5.1).

(H') :

(i) Il existe deux constantes $L > 0$, $K > 0$ telles que $\forall t \in [0,T]$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|x \cdot b(t,x)|^2 + \|(x_i\sigma_{(i,j)})_{1\leq i\leq d, 1\leq j\leq r})(t,x)\|^2 \leq K(1+|x|^2),$$
$$|x \cdot b(t,x) - y \cdot b(t,y)| + \left\|(x_i\sigma_{(i,j)})_{1\leq i\leq d,1\leq j\leq r})(t,x) - (y_i\sigma_{(i,j)})_{1\leq i\leq d,1\leq j\leq r})(t,y)\right\| \leq L|x-y|.$$

(ii) Les coefficients $b(t,x)$, $\sigma(t,x) : [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^r)$ sont des **fonctions continues**.

Rappelons que sous **(H')**, $\forall(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$, l'équation (5.1) a une unique solution $(x,t) \mapsto (S_\theta^{x,t})_{\theta\in[t,T]}$ dans l'espace $M^2_{\mathcal{F}(0,T)}$ et $\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq\theta\leq T}|S_\theta^{x,t}|^2\right) < +\infty$, pour tout $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}$.

L'actif non risqué

est décrit également par l'évolution de son prix $(S_t^0)_{0\leq t\leq T}$ vérifiant l'équation générique

$$\begin{cases} dS_t^0 = S_t^0 r(t)dt \\ S_0^0 = 1 \end{cases}$$

de solution

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right).$$

Pour simplifier les calculs qui vont suivre, on supposera que $t \mapsto r(t)$ est une fonction continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^+$, dont l'évolution future est connue (càd déterministe, voir le chapitre **??** pour des exemples de modèles de taux $r(t)$ stochastiques)

L'ensemble des prix du marché considéré (S_t^0, S_t) est un vecteur de dimension 2.

L'actualisation

On note encore (β_t) le processus de <u>d'actualisation</u> : $\beta_t = 1/S_t^0 = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$ et

$$d\beta_t = -r(t)\beta_t dt$$

Quelque soit la valeur V d'un bien dans ce marché, on notera $\widetilde{V}$ sa valeur actualisé. Les prix actualisés des actifs de notre marché sont $(\widetilde{S}_t, \widetilde{S}_t^0)$ avec

$$\widetilde{S}_t = \beta_t S_t,$$
$$\text{et } \widetilde{S}_t^0 = \beta_t S_t^0 = 1, \quad \text{pour tout } t.$$

Par la formule d'intégration par parties stochastique (IPPS) (voir la proposition 4.4.4)

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t = d(\beta_t S_t) &= \beta_t dS_t + S_t d\beta_t \\ &= \widetilde{S}_t\Big(b(t,S_t)dt + \sigma(t,S_t)dW_t\Big) - r(t)\widetilde{S}_t dt \end{aligned}$$

d'où

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t\Big(\left(b(t,S_t) - r(t)\mathbf{1}\right)dt + \sigma(t,S_t)dW_t\Big). \tag{5.3}$$

Les stratégies

- Une stratégie est un processus aléatoire de dimension $d+1$, $\mathcal{F}_t$-adapté, notée $\phi = (\phi_t)_{t\leq T}$ avec $\phi_t = (\phi_t^0, \phi_t^1, \ldots, \phi_t^d)$.
- La valeur de la stratégie ϕ à l'instant t est

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \sum_{i=1}^{d} \phi_t^i S_t^i.$$

On notera encore $\phi_t = \left(H_t^0, H_t\right)$, où

- $H_t^0 \in \mathbb{R}$ est la quantité d'actifs sans risque détenus dans le portefeuille de l'investisseur.
- $H_t \in \mathbb{R}^d$ est le vecteur des quantités d'actifs risqués détenus, et

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t \cdot S_t.$$

Les stratégies autofinancées et admissibles

Une stratégie est dite autofinancée si, une fois la mise initiale fixée, on ne consomme, ni n'investit de liquidités supplémentaires jusqu'à T.

Une stratégie autofinancée est un processus (ϕ_t), à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$, $\mathcal{F}_t$-adapté, vérifiant

(i) $\int_0^T |H_t^0| dt < +\infty$ et $\int_0^T |H_t|^2 dt < +\infty$.

(ii) ϕ vérifie la <u>condition d'autofinancement</u> :

$$V_t(\phi) = H_0^0 S_0^0 + H_0 \cdot S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u \cdot dS_u. \tag{5.4}$$

On a donc l'équation d'autofinancement suivante

$$\boxed{dV_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t \cdot dS_t, \quad \text{avec} \;\; V_0(\phi) = H_0^0 S_0^0 + H_0 \cdot S_0.} \tag{5.5}$$

La condition (i) permet de bien définir les intégrales $\int_0^t H_u^0 dS_u^0$ et $\int_0^t H_u \cdot dS_u$. Pour cela, il faut également utiliser le fait que S est un processus continu sur un intervalle $[0,T]$, admettant un maximum ω par ω.

Lemme 5.1.1.

(i) La valeur actualisée du portefeuille de stratégie ϕ est

$$\widetilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t \widetilde{S}_t.$$

(ii) En termes de prix actualisés, <u>l'équation d'autofinancement</u> devient

$$\widetilde{V}_t(\phi) = H_0^0 + H_0 \widetilde{S}_0 + \int_0^t H_u d\widetilde{S}_u.$$

Ou encore

$$\boxed{d\widetilde{V}_t(\phi) = H_t d\widetilde{S}_t.}$$

Preuve. Le premier point (i) est immédiat. Pour la preuve du point (ii), rappelons que l'autofinancement implique que $dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t$, ce qui signifie que V_t est un processus d'Itô qui se décompose de manière unique : d'après (5.5),

$$dV_t = H_t^0 r(t) S_t^0 dt + H_t \cdot S_t \left(b(t, S_t) dt + \sigma(t, S_t) dW_t\right).$$

On peut donc appliquer la formule d'IPPS au produit $V_t\beta_t$ et on obtient que

$$\begin{aligned}d\widetilde{V}_t =&\beta_t dV_t + V_t d\beta_t\\ =&\beta_t\left(H_t^0 r(t)S_t^0 dt + H_t\cdot dS_t\right) + \left(H_t^0 S_t^0 + H_t\cdot S_t\right)d\beta_t\\ =&\beta_t H_t^0 r(t) S_t^0 dt + H_t^0 S_t^0 d\beta_t + H_t\cdot(\beta dS_t + S_t d\beta_t)\end{aligned}$$

Il reste

$$d\widetilde{V}_t = H_t\cdot d\widetilde{S}_t$$

■

Opportunité d'arbitrage et probabilité risque neutre

Définition 5.1.2. *On note $\mathcal{Q}$, l'ensemble des mesures de probabilités sur $(\Omega,\mathcal{F}_T)$ équivalentes à $\mathbb{P}$ et telles que si $\mathbb{P}^*\in\mathcal{Q}$, alors sous $\mathbb{P}^*$, les prix actualisés $(\widetilde{S}_t)$ sont des $\mathcal{F}_t$-martingales :*

$$\forall 0\le s\le t\le T,\quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\widetilde{S}_t\Big/\mathcal{F}_s\right) = \widetilde{S}_s$$

Stratégies admissibles On suppose l'existence d'une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ appartenant à $\mathcal{Q}$.

Définition 5.1.3. *Une stratégie $\phi = (H_t^0, H_t)_{t\le T}$ est dite admissible si*

a) ϕ est autofinancée ;

b) $\sup\limits_{0\le t\le T}\widetilde{V}_t(\phi)$ est une v.a de carré intégrable sous $\mathbb{P}^*$: càd

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\sup_{0\le t\le T}\widetilde{V}_t(\phi)^2\right) < +\infty.$$

5.2 Le pricing d'option européenne

Il faut commencer par résoudre le problème de l'identification d'une probabilité risque-neutre pour caractériser le marché comme étant sans arbitrage possible. considérons la dynamique du prix de l'actif risqué actualisé :

Pouvons nous trouver un processus $(\theta_t^1,\theta_t^2,\ldots,\theta_t^r)$ tel que pour le processus (S_t),

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t\Big(\left(b(t,S_t) - r(t)\mathbf{1}\right)dt + \sigma(t,S_t)dW_t\Big)$$

on ait aussi, pour chaque composante i du vecteur de prix

$$d\widetilde{S}_t^i = = \widetilde{S}_t^i\sum_{j=1}^r \sigma_{i,j}(t,S_t)\Big(\theta_t^j dt + dW_t^j\Big)$$

Le processus θ_t doit donc satisfaire l'équation

$$\sum_{j=1}^r \sigma_{i,j}(t,S_t)\theta_t^j = b^i(t,S_t) - r(t),\qquad \text{pour } i=1,\ldots,d \tag{5.6}$$

Cas A : l'équation (5.6) **a une unique solution** alors le marché est bien arbitré et admet une unique probabilité risque-neutre. Tout les flux financiers h (de carré intégrable) sont duplicable par une stratégie de couverture. **On dit que le marché est complet**.

Cas B : l'équation (5.6) **n'a aucune solution** , il n'y a aucune probabilité risque neutre sur ce marché. Le marché a des défaut d'arbitrage.

Cas C : l'équation (5.6) **a de multiples solutions** le marché reste bien arbitré, mais tout les flux financiers ne peuvent pas être couverts. **On dit que le marché est incomplet.**

Théorème 5.2.1. *En plus de l'hypothèse* **(H')** *on ajoute l'hypothèse* **($\mathbf{H}_\sigma$)** *suivante :*

($\mathbf{H}_\sigma$) *: la matrice σ est une matrice carré, $r = d$. De plus σ est définie positive, et il existe une constante $\lambda > 0$, telle que $\lambda \leq \|\sigma^{-1}\|$ et une constante λ' telle que $\|\sigma\| \leq \lambda'$.*

Alors on est dans le cas A, et on identifie l'unique probabilité risque-neutre à l'aide du théorème de Girsanov.

Preuve. Sous les hypothèses **($\mathbf{H}_\sigma$)**, il est facile de résoudre l'équation (5.6), en remarquant que

$$\begin{aligned} \sigma(t,S_t)\theta_t &= b(t,S_t) - r(t)\mathbf{1} \\ \text{et ainsi} \quad \theta_t &= \sigma^{-1}(t,S_t)\left(b(t,S_t) - r(t)\mathbf{1}\right). \end{aligned}$$

Le processus (θ_t) est donc bien déterminé de façon unique, en particulier c'est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté (par composition de fonctions mesurables avec le processus adapté (S_t)). On considère le processus de dimension d, $\mathcal{F}_t$-adapté (W^*_t), défini par

$$W^*_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds$$

On pose

$$Z_t(\theta) = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\theta_s|^2 ds\right).$$

Les hypothèses **(H')** imposent que (θ_t) est un processus borné, $(Z_t(\theta))$ satisfait donc au critère de Novikov. Ainsi $(Z_t(\theta), t \in [0,T])$ est une $\mathbb{P}$- martingale. On défini maintenant le changement de probabilité

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = Z_T(\theta).$$

Le théorème de Girsanov s'applique ici, et permet d'affirmer que sous la nouvelle probabilité $\mathbb{P}^*$, le processus (W^*_t) est un mouvement Brownien sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}^*)$. L'équation du prix actualisé des actifs risqué s'écrit

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= \widetilde{S}_t\Big(\left(b(t,S_t) - r(t)\mathbf{1}\right)dt + \sigma(t,S_t)dW_t\Big) \\ &= \widetilde{S}_t\Big(\sigma(t,S_t)\theta_t dt + \sigma(t,S_t)dW_t\Big) \\ &= \widetilde{S}_t\sigma(t,S_t)\Big(\theta_t dt + dW_t\Big) \\ &= \widetilde{S}_t\sigma(t,S_t)\Big(\theta_t dt + dW_t\Big) \\ &= \widetilde{S}_t\sigma(t,S_t)dW^* \end{aligned}$$

Comme $\sigma(t,S_t)$ est borné et $\widetilde{S} \in M^2_{\mathcal{F}}(0,T)$, on en déduit bien que $(\widetilde{S}_t)$ est une $\mathbb{P}^*$- martingale et $\mathbb{P}^*$ est une probabilité risque-neutre. ■

Théorème 5.2.2. *Pour le modèle de prix d'actif risqué* (5.1)*, et sous les hypothèses* **(H')** *et* **($\mathbf{H}_\sigma$)** *,*
on considère $\mathbb{P}^*$, l'unique probabilité risque neutre du modèle,
on considère une v.a h, $\mathcal{F}_T$ mesurable et de carré intégrable sous $\mathbb{P}^*$,

(1) Si une stratégie $\phi = (H_t^0, H_t)_{t\leq T}$ admissible duplique l'option de flux h, alors $(\widetilde{V}(\phi)_t)$ est une $\mathbb{P}^*$ martingale.

(2) Si une stratégie $\phi = (H_t^0, H_t)_{t\leq T}$ admissible duplique l'option de flux $h = f(S_T)$, pour f continue, bornée ou au plus linéaire à l'infini (i.e. $f(x) \leq A+B|x|$). Alors $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(f^2(S_T)\right) < +\infty$, et

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_t(\phi) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(\int_0^T r(s)ds)f(S_T^{x,t})\right)\Big|_{x=S_t}\\ V_t(\phi) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(\int_t^T r(s)ds)f(S_T^{x,t})\right)\Big|_{x=S_t} := F(t,S_t).\end{aligned}$$

où on a posé

$$F(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(\int_t^T r(s)ds)f(S_T^{x,t})\right).$$

(3) La stratégie de couverture ϕ est explicite : $\phi = (H_t^0, H_t)_{t\leq T}$ avec

$$\begin{aligned}&H_t = \nabla_x F(t,S_t),\\ &H_t^0 = \exp(\int_0^t r(s)ds)\left(F(t,S_t) - S_t\cdot\nabla_x F(t,S_t)\right).\end{aligned}$$

Preuve. Montrons (1) : ϕ étant autofinancé, on a vu que

$$d\widetilde{V}_t(\phi) = H_t d\widetilde{S}_t = H_t\widetilde{S}_t\sigma(t,S_t)dW_t.$$

Pour montrer que le processus $K_t = H_t\widetilde{S}_t\sigma(t,S_t)$ est dans $\mathcal{M}^2_{\mathcal{F}}(0,T)$, nous utilisons la proposition suivante

Proposition 5.2.3. *Soit (K_t) un processus adapté, tel que $\int_0^T |K_t|_s^2 ds < +\infty$, $\mathbb{P}$ p.s. Alors,*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T |K_s|^2 ds\right) < +\infty \Longleftrightarrow \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t K_s dWs\right|^2\right] < +\infty.$$

Dans notre cas, comme ϕ est admissible

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t K_s dWs\right|^2\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(\widetilde{V}_t(\phi) - V_0(\phi)\right)^2\right] \leq 4\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(\widetilde{V}_t(\phi)\right)^2\right] < +\infty.$$

Ainsi (K_t) est dans $\mathcal{M}^2_{\mathcal{F}}(0,T)$, et $(\widetilde{V}(\phi)_t)$ est une $\mathbb{P}^*$ martingale.

Montrons (2) : par (1), $\widetilde{V}$ est une $\mathbb{P}^*$ - martingale. Ainsi pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}&\widetilde{V}_t(\phi) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\widetilde{V}_T/\mathcal{F}_t\right)\\ &V_t(\phi) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left((\beta_T/\beta_t)V_T(\phi)/\mathcal{F}_t\right).\end{aligned}$$

On remarque ensuite que

$$(\beta_T/\beta_t) = \exp(\int_t^T r(s)ds).$$

Ainsi

$$V_t(\phi) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(\int_t^T r(s)ds) f(S_T)/\mathcal{F}_t\right).$$

(S) étant une solution d'EDS, c'est un processus de Markov qui a la propriété de flot

$$\forall\ 0 \leq s \leq t \leq T,\ \ S_t^{x,0} = S_t^{S_s^{x,0},\, s}.$$

On en déduit la forme

$$V_t(\phi) \quad = \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(\int_t^T r(s)ds) f(S_T^{x,t})\right)\Big|_{x=S_t} := F(t, S_t).$$

Montrons (3) : D'après (1) et (2), $\widetilde{V}_t(\phi) = \beta_t F(t, S_t)$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale de dynamique

$$d\widetilde{V}_t(\phi) = H_t \cdot \widetilde{S}_t \sigma(t, S_t) dW_t^*.$$

En appliquant la formule d'Itô à l'expression $\beta_t F(t, S_t)$, on pourra identifier la composante H_t de la stratégie de couverture.

On souhaite donc, en particulier, appliquer la formule d'Itô à l'expression $F(t, S_t)$. Pour cela on commence par identifier la fonction $F(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp(\int_t^T r(s)ds) f(S_T^{x,t})\right)$ à l'aide de la formule de Feynman-Kac. On commence par calculer la forme de l'EDS du prix non actualisé S à partir de celle de $\widetilde{S}$,

$$\text{on a}\quad d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t \sigma(t, S_t) dW_t^* \quad \text{et } S_t = \widetilde{S}_t S_t^0.$$

Par la formule d'IPPS, on obtient

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t^0 \widetilde{S}_t \sigma(t, S_t) dW_t^* + S_t^0 r(t) \widetilde{S}_t dt \\ &= S_t (r(t)dt + \sigma(t, S_t) dW_t^*). \end{aligned}$$

L'opérateur différentiel L_t associé à S_t est donc

$$L_t \phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d x_i x_j a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i}(x) + \sum_{i=1}^d x_i r(t) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)$$

où la matrice $a = \sigma(t, x)\sigma^t(t, x)) = \left(\sum_{k=1}^r \sigma_{i,k}\sigma_{j,k}\right)_{1 \leq i,j \leq d} (t, x)$.

D'après la formule d'Itô multidimensionnelle,

$$\begin{aligned} F(t, S_t) =& F(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}(s, S_s) ds + \int_0^t \nabla F(s, S_s) \cdot dS_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \text{trace}\left(S_s \sigma(s, S_s)(S_s \sigma(s, S_s))^t F_{xx}(s, S_s)\right) ds \\ =& F(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}(s, S_s) ds + \int_0^t r(s) \nabla F(s, S_s) S_s ds + \int_0^t \nabla F(s, S_s) S_s \sigma(s, S_s) dW_s^* \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \text{trace}\left(S_s \sigma(s, S_s)(S_s \sigma(s, S_s))^t F_{xx}(s, S_s)\right) ds \\ =& F(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}(s, S_s) ds + \int_0^t L_s F(s, S_s) ds + \int_0^t \nabla F(s, S_s) S_s \sigma(s, S_s) dW_s^* \\ =& F(0, S_0) + \int_0^t r(s) F(s, S_s) ds \int_0^t \nabla F(s, S_s) S_s \sigma(s, S_s) dW_s^* \end{aligned}$$

On calcule maintenant $d(\beta_t F(t, S_t))$,

$$\begin{aligned}
d(\beta_t F(t, S_t)) &= \beta_t dF(t, S_t) + F(t, S_t) d\beta_t \\
&= \beta_t r(t) F(t, S_t) dt + \beta_t \nabla F(t, S_t) S_t \sigma(t, S_t) dW_t^* - r(t) \beta_t F(t, S_t) dt \\
&= \beta_t \nabla F(t, S_t) S_t \sigma(t, S_t) dW_t^*
\end{aligned}$$

Par identification avec $d\widetilde{V}_t(\phi) = H_t \cdot \widetilde{S}_t \sigma(t, S_t) dW_t^*$, on obtient que $H_t = \nabla F(t, S_t)$. ■

Bibliographie

[1] J. COX, J.E. INGERSOLL, and S.A. ROSS. A theory of the term structure of the interest rates. *Econometrica*, 53, 1985.

[2] Hélyette Geman, Nicole El Karoui, and Jean-Charles Rochet. Changes of numéraire, changes of probability measure and option pricing. *J. Appl. Probab.*, 32(2) :443–458, 1995.

[3] David Heath, Robert Jarrow, and Andrew Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates. *preprint*, 1987.

[4] David Heath, Robert Jarrow, and Andrew Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates : A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60, 1992.

[5] I. KARATZAS and S.E. SHREVE. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[6] D. LAMBERTON and B. LAPEYRE. *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*. Collection Mathématiques et Applications. Ellipses, 1991.

[7] M. MUSIELA and M. RUTKOWSKI. *Martingale Methods in Financial Models*, volume 36 of *Applications of Mathematics*. Springer Verlag, 1997.

[8] D. REVUZ and M. YOR. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer–Verlag, Berlin, 1991.