

LE BÉTON ARMÉ AUX ÉTATS LIMITES

- Chapitre 1 : Généralités
- Chapitre 2 : Notions de sécurité - Principe de la réglementation
- Chapitre 3 : Caractéristiques des matériaux - Modélisation réglementaire
- Chapitre 4 : Dispositions constructives
- Chapitre 5 : Dimensionnement en flexion simple - Justifications vis-à-vis des sollicitations normales
- Chapitre 6 : Justification des poutres fléchies sous sollicitations d'effort tranchant
- Chapitre 7 : Ancrage et recouvrement de barres
- Chapitre 8 : Épure de répartition des armatures longitudinales
- Chapitre 9 : Compression simple – Poteaux réputés centrés
- Chapitre 10 : Traction simple – Tirants

Généralités

Qu'est-ce que le béton?

Le béton est un matériau complexe obtenu en mélangeant, dans des proportions convenables :

- des granulats (sable, graviers, cailloux ou pierres concassées)
- un liant (généralement du ciment)
- et de l'eau (eau de mouillage des granulats et d'hydratation du ciment)

Ce mélange fait **prise** (il se solidifie) puis il **durcit** (il devient résistant).

Avantages :

Dans le domaine du génie civil, le béton se révèle être un matériau :

- bon marché et durable,
- de préparation facile et rapide,
- facile à mouler (permet de réaliser des formes quelconques),
- de très bonne résistance à la compression (20 à 60 MPa)

Inconvénient majeur :

Sa résistance à la traction est médiocre

(résistance à la traction du béton = 1/10 de sa résistance en compression)

Pour pallier à cette insuffisance, deux solutions

- **disposer dans les zones tendues des armatures d'acier qui ne deviennent efficaces que lorsque les charges extérieures commencent à agir**



c'est le Béton Armé

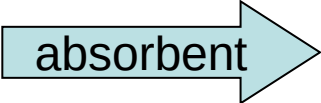
- **Pré-comprimer le béton par le jeu d'efforts intérieurs de manière à neutraliser les contraintes de traction qui seraient apparues sous l'effet des charges**

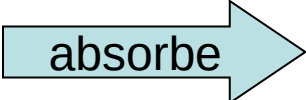


c'est le Béton Précontraint

Principe du Béton Armé

Pour pallier à la faible résistance du béton en traction et à sa fragilité, on lui associe des **armatures en acier**.

les **armatures**  absorbent les efforts de **traction**

le **béton**  absorbe les efforts de **compression**

Causes de la réussite de l'association acier béton?

- l'acier adhère bien au béton, ce qui permet la transmission des efforts d'un matériau à l'autre,
- il n'y a pas de réaction chimique entre le béton et l'acier,
- le béton protège l'acier contre la corrosion,
- le coefficient de dilatation thermique est sensiblement le même pour les deux matériaux.

Phases d'exécution du Béton Armé?

Le béton armé s'exécute généralement en 4 phases :

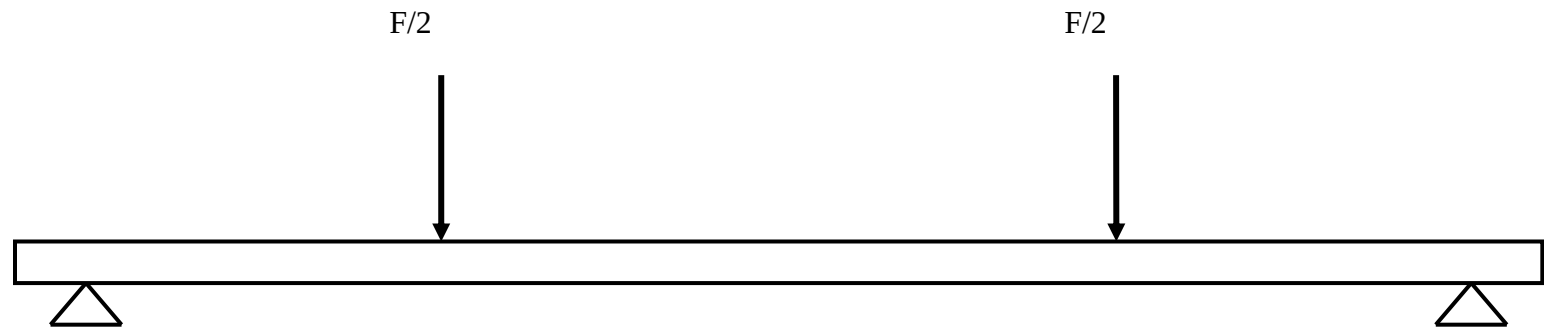
- Le coffrage
- Le ferrailage
- Le bétonnage
- Le décoffrage

Quelques caractères structuraux



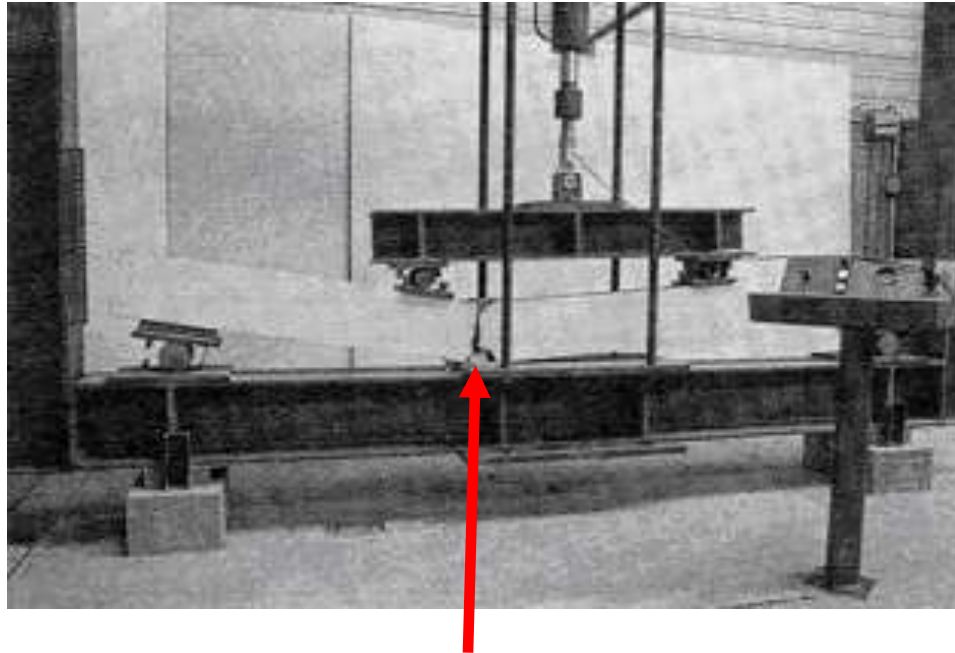
Exemple de ferrailage –Nomenclature

Considérons une poutre de béton **sans armatures** et chargeons-la comme suit:



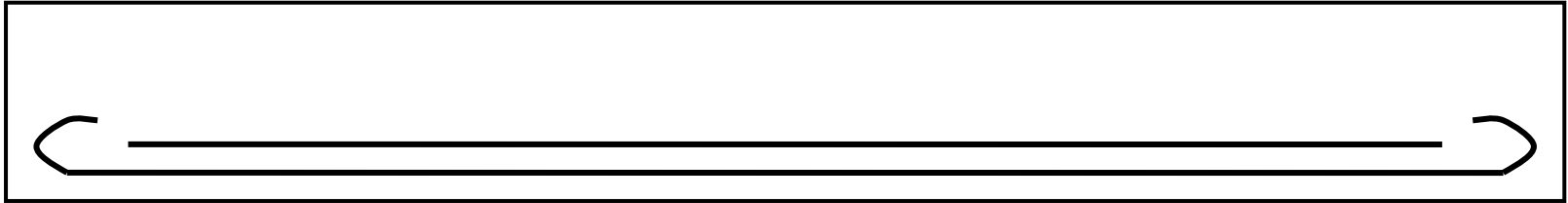
Augmentons F jusqu'à la rupture de la poutre.

La rupture interviendra brutalement pour une faible charge : **$F=6\ 000\ \text{N}$**

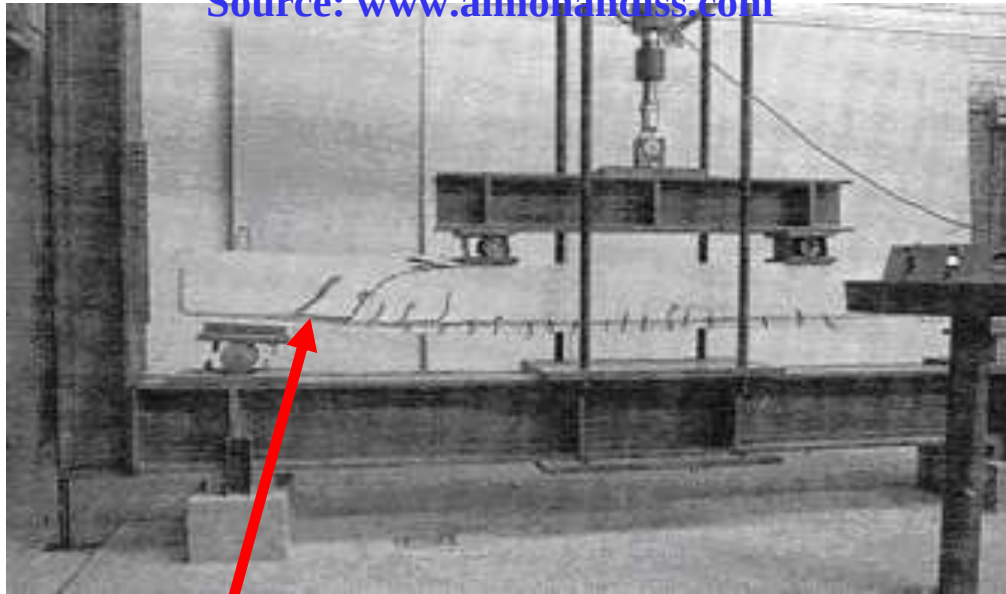


La forme même de la rupture nous montre que cette dernière provient d'une insuffisance du béton à la traction.

Nous allons remédier à cette insuffisance en plaçant en zone inférieure (là où se développent les contraintes de traction) des **barres d'acier longitudinales**.



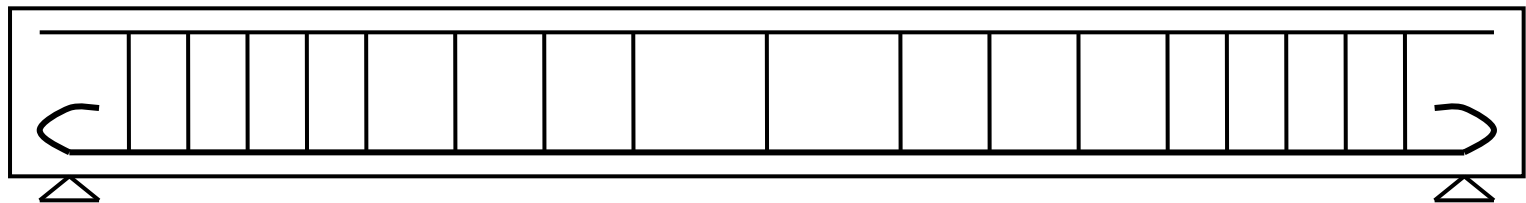
Armée d'aciers longitudinaux en partie tendue, la poutre présente une meilleure résistance : **$F=70\,000\text{ N}$** (12 fois plus)

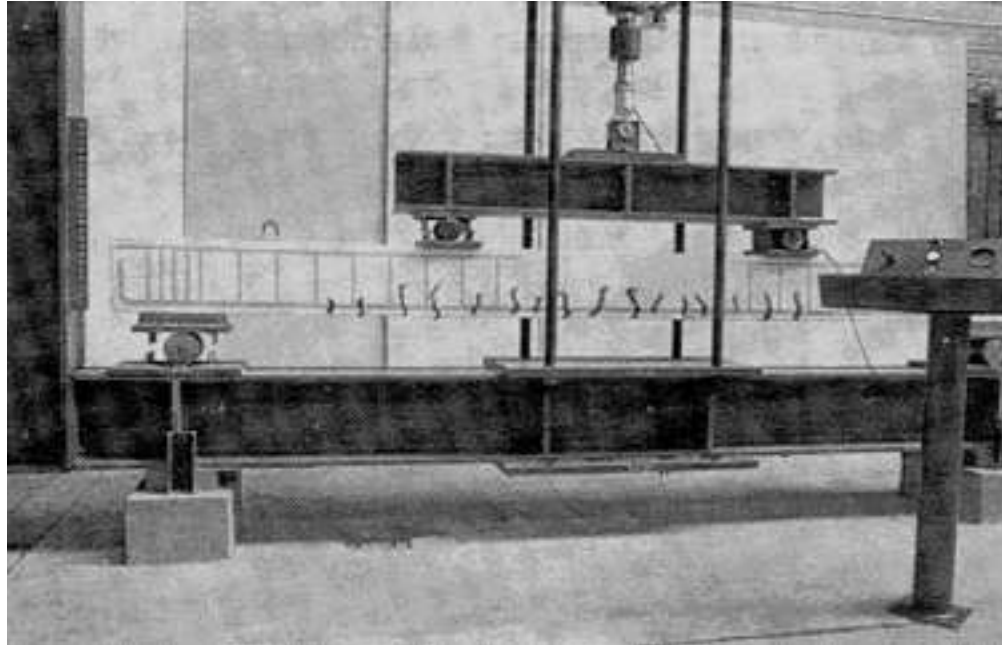


Ce sont des fissures inclinées, près des appuis, qui provoquent maintenant la rupture de la poutre...

Ce type de fissure est dû à l' **effort tranchant** (ou cisaillement).

Pour empêcher ce type de rupture, nous allons concevoir une 3ème poutre possédant, en plus, des **armatures transversales** (cadres)





Ainsi armée (aciers longitudinaux + aciers transversaux), la poutre possède une résistance améliorée.

La rupture intervient à **$F=110\ 000\ \text{N}$** (18 fois plus)

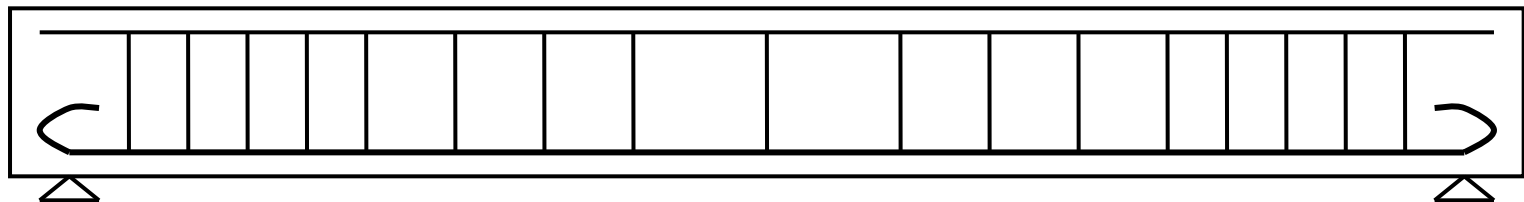
Bilan des différents types d'armatures

1. Les armatures longitudinales

- ✓ **Les armatures de traction** : Elles sont disposées dans le béton tendu pour reprendre les efforts de traction.
- ✓ **Les armatures de compression** : Elles sont disposées lorsque la section de béton est insuffisante pour reprendre la totalité de l'effort de compression.
- ✓ **Les armatures de montage** : Si l'on n'a pas besoin d'armatures de compression, on les dispose en partie supérieure pour permettre la mise en place des armatures transversales.

2. Les armatures transversales

Elles reprennent l'effort tranchant. elles sont généralement constituées de cadres, d'épingles ou d'étriers.



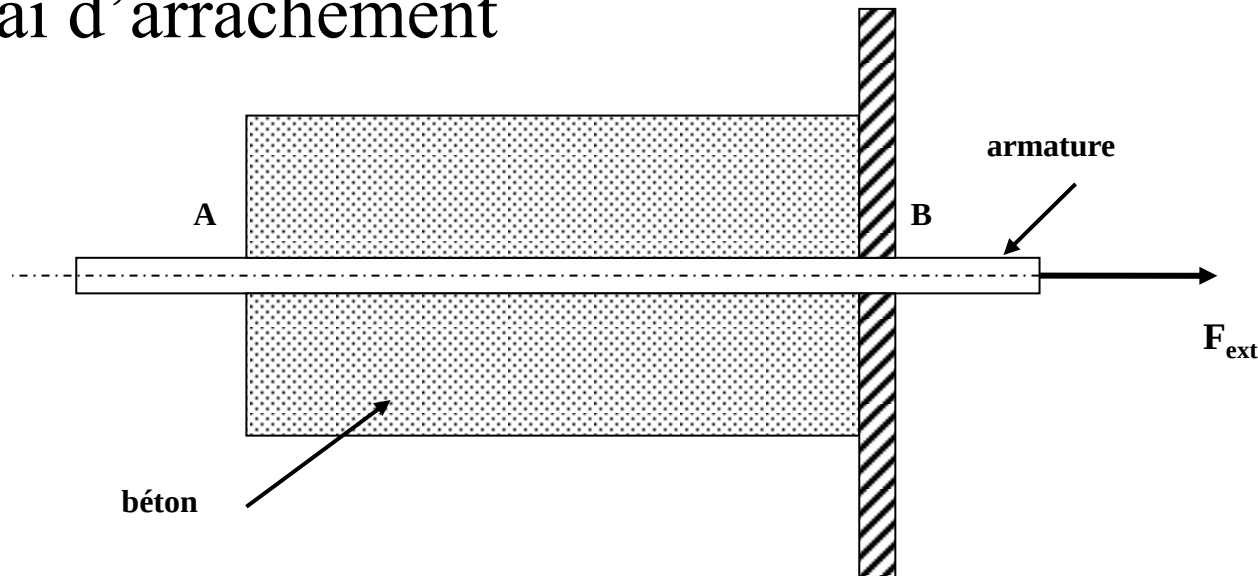
Adhérence acier-béton

Définition

L'adhérence désigne l'action des forces de liaison qui s'opposent au glissement des armatures par rapport au béton qui les enrobe.

Nature de l'adhérence

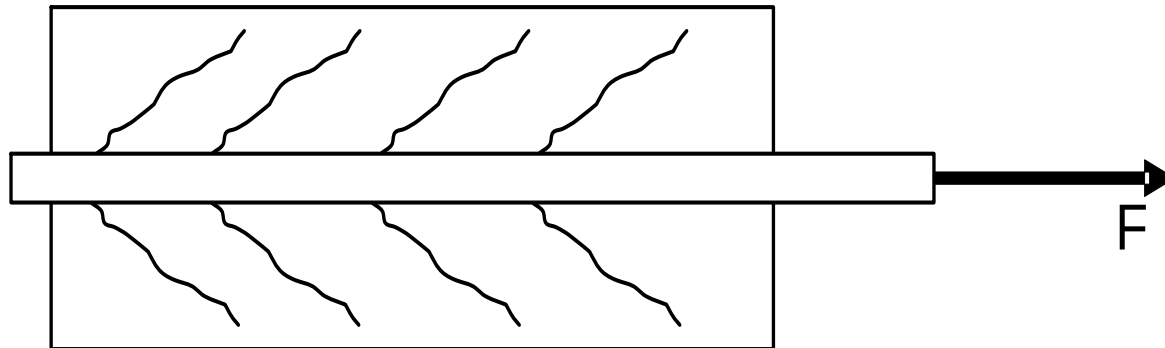
Essai d'arrachement



L'adhérence entre les deux matériaux subsiste même après des déplacements notables.

➡ Ce n'est pas un simple "**collage**"

Apparition de fissures inclinées à 45° sur l'axe de la barre ➡ "**bielles**" de béton provoquant un phénomène de frottement.



Types de rupture:

- glissement de la barre dans le béton (ronds lisses),
- destruction du béton par arrachement d'un cône de béton ou par fendage longitudinal du béton (barres à haute adhérence),
- rupture par traction de l'acier (ancrage parfait).

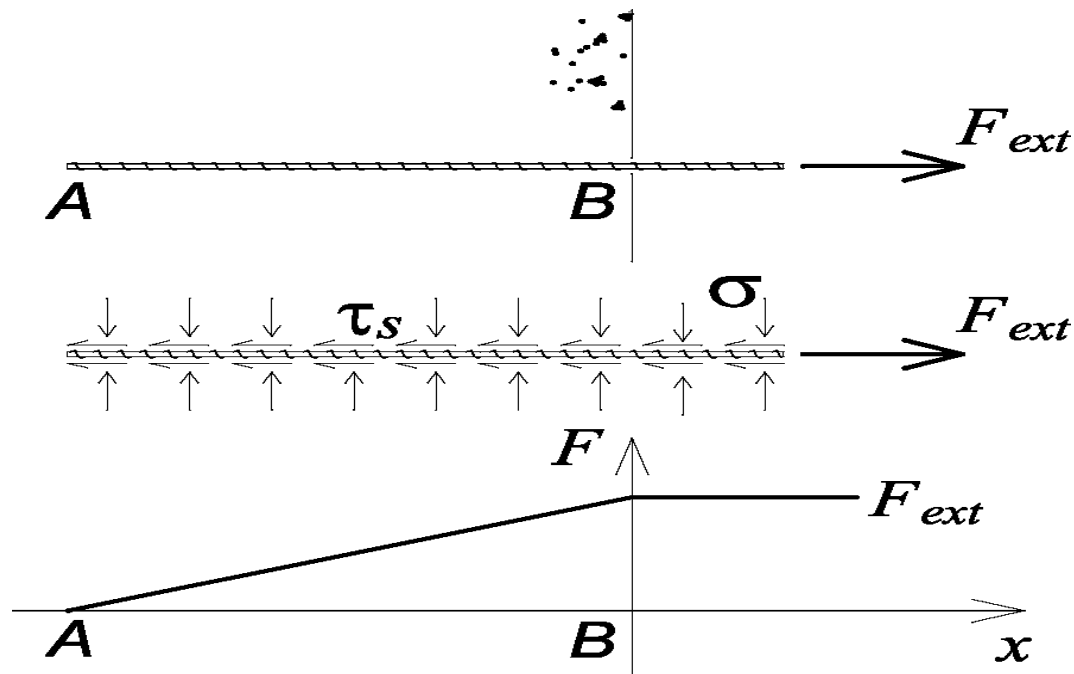
Facteurs agissant sur l'adhérence

- ✓ état de surface des armatures,
- ✓ groupement des armatures,
- ✓ épaisseur du béton d'enrobage et présence d'armatures de couture,
- ✓ résistance du béton,
- ✓ et conditions de moulage.

Rôle de l'adhérence

- **Ancrage des barres à leurs extrémités,**
- **Répartition des fissures,**
- **Entraînement des armatures.**

Approche théorique



$$F_{ext} = \int_{X_A}^{X_B} \tau_s \cdot u \cdot dx = \tau_s \cdot u \cdot l_{AB}$$

Notions de sécurité

Principe de la réglementation

A quels critères doit répondre une structure?

- Une structure doit être conçue et réalisée de sorte que :
- 👉 elle reste adaptée à l'usage pour lequel elle a été conçue,
 - 👉 elle résiste à toutes les actions et influences susceptibles d'intervenir pendant son exécution et son utilisation.

la **sécurité** ➡ critère important dans la construction,
mais pas de **sécurité absolue**.

Pourquoi?

Comment résoudre le problème?

recherches

{
domaine du "**probabilisme**"
de "**la plasticité**"
et du "**calcul à la rupture**"

➡ **Méthode des états limites** base du calcul suivant les règles **BAEL** et les **Eurocodes**.

Principe de la méthode des états limites

Comme la plupart des codes internationaux, le règlement Français BAEL 91 ainsi que l'Eurocode 2, sont des règlements semi probabilistes basés sur la notion d'états limites.

En quoi consiste cette méthode?

La méthode des états-limites consiste à :

- 👉 **définir les phénomènes** (appelés états-limites) à éviter
- 👉 **estimer la gravité des risques** liés à ces phénomènes
- 👉 **définir des critères de sécurité**
- 👉 **dimensionner les éléments** de la construction de telle manière que la probabilité d'atteinte d'un de ces phénomènes soit limitée à une valeur assez faible pour être acceptable en fonction du risque et du coût.

Les différents états-limites

En pratique, à chaque phénomène à éviter correspond un état limite. Selon la gravité des risques qui leurs sont associés, ces états limites se rangent en deux grandes catégories :

- ➡ **les états limites ultimes** dont on considère que l'atteinte équivaut à **la ruine** de la structure ou un de ses éléments.
- ➡ **les états limites de service** dont on considère que l'atteinte compromet **l'utilisation de la structure** sans qu'il y ait ruine.

Les états limites ultimes (ELU)

On distingue :

- l'état limite ultime d'équilibre statique qui concerne la stabilité de l'ouvrage
- l'état limite ultime de résistance qui concerne la non rupture de l'ouvrage.
- l'état limite ultime de stabilité de forme, concerne les pièces élancées soumises à un effort de compression axiale

Les états limites de service (ELS)

On distingue :

- **l'état limite de compression du béton** : des désordres graves peuvent apparaître dans les éléments.
- **l'état limite d'ouverture des fissures** :
la corrosion des armatures insuffisamment protégées compromet la durabilité de l'ouvrage .
- **l'état limite de déformation** : des déformations trop importantes de l'ouvrage peuvent créer des désordres.

Conduite des justifications

La démarche est la suivante :

1. faire l'inventaire des actions appliquées aux différents éléments de la structure
2. déterminer leurs intensités
3. calculer les sollicitations engendrées par ces actions
4. déterminer les sollicitations de calcul
5. faire les justifications nécessaires

Les actions

Ensemble des forces et couples appliqués à une structure.

On distingue :

- **les actions permanentes notées G**
- **les actions variables notées Q**
- **les actions accidentelles notées A ou FA**

Valeurs représentatives

La nature et l'intensité des actions à introduire dans les calculs sont fixées :

- ✓ **soit par le marché,**
- ✓ **soit par référence à des normes, codes ou règlements en vigueur,**
- ✓ **soit directement lorsqu'elles sont propres à l'ouvrage.**

Exemples:

- Norme NF P006-001 : charges d'exploitation des bâtiments.
- Règles NV65: effets de la neige et du vent sur les constructions.
- CPC fascicule61-titre2 : Programme de charges et épreuves des ponts routes.

Les sollicitations

Les sollicitations = **efforts** (normal et tranchant) ou **moments** (fléchissant et de torsion) dans chaque section de la structure.

Pour la plupart des justifications, les sollicitations sont calculées en utilisant pour l'ensemble de la structure un modèle élastique et linéaire. On emploie ainsi les procédés de la R.D.M dans la mesure où la forme des pièces le permet.

Les sollicitations de calcul

Elles résultent des **combinaisons d'actions** c'est-à-dire de l'ensemble des actions qu'il y a lieu de considérer simultanément.

Sollicitations de calcul vis-à-vis des ELU

a) Combinaisons fondamentales

$$S_{ult} = S (1.35 G_{max} + G_{min} + Y_{Q1} Q_1 + \sum 1.3 \Psi_{0i} Q_i)$$

G_{max} = ensemble des actions permanentes défavorables

G_{min} = ensemble des actions permanentes favorables

Q_1 = valeur caractéristique d'une action variable dite de base

Q_i ($i > 1$) = valeurs caractéristiques des autres actions variables dites d'accompagnement

$Y_{Q1} = \begin{cases} 1.5 \text{ dans le cas général} \\ 1.35 \text{ dans les cas suivants :} \\ \quad - \text{ la température} \\ \quad - \text{ les charges d'exploitation de caractère particulier (convois militaires et convois exceptionnels des ponts routes)} \\ \quad - \text{ les bâtiments agricoles à faible densité d'occupation humaine} \end{cases}$

b) Combinaisons accidentelles

$$S_{ult} = S (F_A + G_{max} + G_{min} + \Psi_{11} Q_1 + \sum \Psi_{2i} Q_i)$$

F_A est la valeur nominale de l'action accidentelle

Sollicitations de calcul vis-à-vis des ELS

Elles résultent des combinaisons d'actions ci-après dites **combinaisons rares** :

$$S_{ser} = S (G_{max} + G_{min} + Q_1 + \sum \Psi_{0i} Q_i)$$

Les valeurs des coefficients Ψ_0 , Ψ_1 et Ψ_2 sont fixés par les textes en vigueur ou par les documents particuliers du marché. Elles sont précisées à titre transitoire dans l'annexe D du BAEL91.

Ils permettent de définir, les valeurs représentatives des actions variables appliquées simultanément :

- $\Psi_{0i} Q_i$: valeur représentative d'application rare
- $\Psi_{1i} Q_i$: valeur représentative d'application fréquente
- $\Psi_{2i} Q_i$: valeur représentative d'application quasi-permanente

Charges climatiques dans le cas des bâtiments

Nature des charges	Ψ_0	Ψ_1	Ψ_2	
Vent	0.77	0.20	0	
Neige {	altitude $\leq$ 500m	0.77	0.15	0
	altitude $>$ 500m	0.77	0.30	0.10
Température (variation uniforme)	0.60	0.50	0	

Charges d'exploitation dans les bâtiments

Locaux	Ψ_0	Ψ_1	Ψ_2
Habitations	0.77	0.75	0.65
Salles de réunion	0.77	0.65	0.25
Archives	0.90	0.90	0.80
Parcs de stationnement	0.90	0.75	0.65
Restaurants	0.77	0.65	0.40

Remarques

- *Lorsque plusieurs actions variables sont susceptibles d'être appliquées en même temps, il y a lieu de considérer successivement chacune d'elles comme action de base et les autres en actions d'accompagnements.*
- *Une action variable peut être appliquée totalement, partiellement ou pas du tout.*
- *Les actions variables sont introduites de la façon la plus défavorable. Elles seront placées dans les positions qui permettent d'obtenir les effets extrêmes.*

La connaissance des lignes d'influence permet en général de définir les cas de chargement qui correspondent aux effets extrêmes recherchés.

- *Lorsqu'une même action permanente a des effets partiellement favorables et partiellement défavorables, il est interdit de partager cette action en deux parties : on attribue globalement à cette action soit la valeur G_{max} défavorable, soit la valeur G_{min} favorable.*
- *Si on ne sait pas, a priori, si une action est défavorable ou favorable pour une sollicitation donnée; ce qui est souvent le cas pour les structures hyperstatiques; on examine successivement les deux possibilités.*

Ces différentes combinaisons doivent être envisagées pour trouver les situations les plus défavorables.

Justifications

Les combinaisons les plus défavorables (les plus fortes et/ou les plus faibles) étant déterminées, les justifications consistent à **montrer** pour les divers éléments d'une structure et pour l'ensemble de celle-ci, **que les sollicitations de calcul ne provoquent pas le phénomène que l'on veut éviter.**

Exemple 1

Quelles sont les combinaisons à considérer en ELU pour le calcul du poteau d'un parking soumis à une charge d'exploitation Q et au vent W ?

Exemple 2

Déterminer l'enveloppe des moments en E.L.S et en E.L.U d'une poutre continue à 2 travées égales de portée $\ell=15\text{m}$, soumise à :

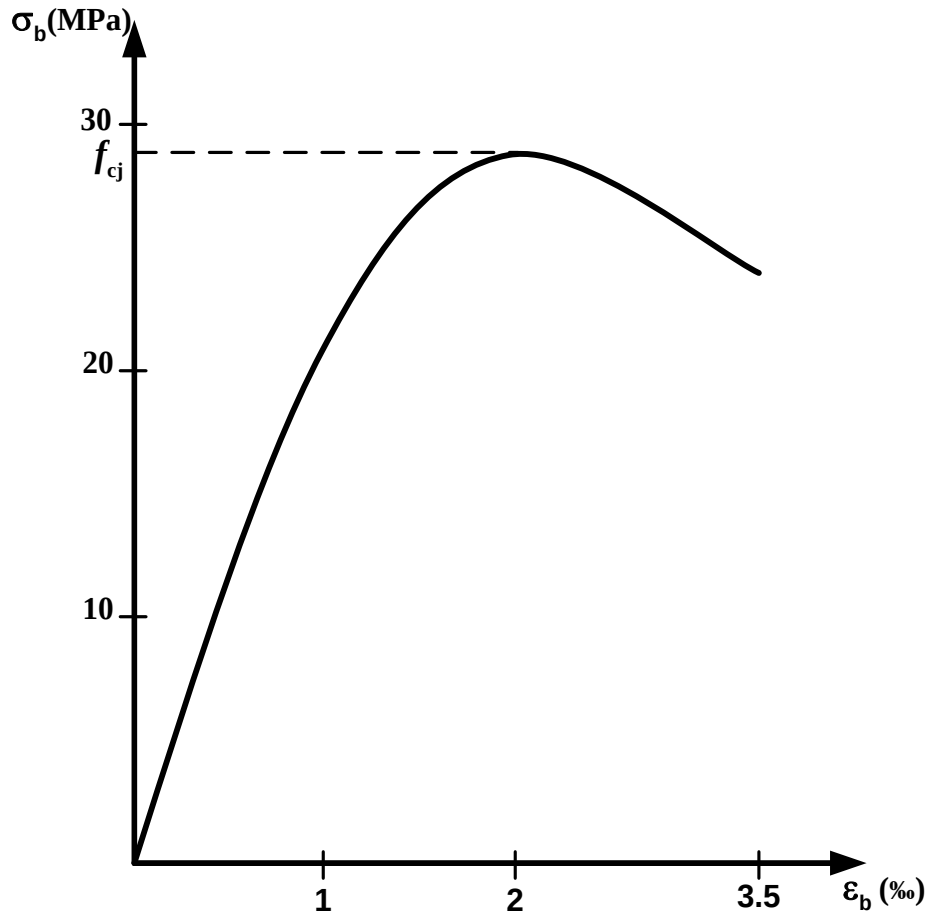
- ✓ une charge permanente (y compris le poids propre de la poutre) :
 $g = 20 \text{ KN/m}$.
- ✓ une charge d'exploitation : $q = 30 \text{ KN/m}$.

Caractéristiques des matériaux

Modélisation réglementaire

LE BETON

Diagramme contrainte-déformation en compression



On constate :

- un comportement élastique pour $\sigma_b \leq 0.5 f_{cj}$
- une déformation pour f_{cj} :
 $\epsilon_b = 2 \text{ ‰}$
- rupture pour $\epsilon_b = 3.5 \text{ ‰}$
- $E_{ij} \approx 30000 \text{ MPa}$

Résistance caractéristique à la compression

Pour l'établissement des projets, un béton est défini par une valeur de sa résistance à la compression à l'âge de 28 jours notée f_{c28}

Exemples de résistances couramment atteintes (Article A.2.1,13 du BAEL) :

- 20 MPa sont facilement atteintes sur les chantiers convenablement outillés,
- 25 MPa sont atteintes sur les chantiers faisant l'objet d'un contrôle régulier,
- on peut obtenir 30 MPa, à condition de choisir convenablement les matériaux et d'étudier la composition du béton,
- des résistances supérieures peuvent être atteintes moyennant une sélection rigoureuse des matériaux utilisés.

Pour des calculs en phase de réalisation, on adoptera les valeurs à j jours, définies à partir de f_{c28} (Article A.2.1,11), par :

- Pour $j \leq 28$ jours, on peut admettre que la résistance des bétons non traités thermiquement suit approximativement les lois suivantes:

$$f_{cj} = \frac{j}{4.76+0.83j} f_{c28} \quad \text{pour } f_{c28} \leq 40 \text{ MPa}$$

$$f_{cj} = \frac{j}{1.40+0.95j} f_{c28} \quad \text{pour } f_{c28} > 40 \text{ MPa}$$

- Pour $j > 28$ jours, on admet pour justifier la résistance des sections :
 $f_{cj} = f_{c28}$

Résistance caractéristique à la traction

La résistance caractéristique à la traction du béton à j jours, notée f_{tj} , est conventionnellement définie (Article A.2.1,12) par la relation :

$$f_{tj} = 0.6 + 0.06 f_{cj} \quad \text{où } f_{tj} \text{ et } f_{cj} \text{ sont exprimées en MPa}$$

Cette formule est valable pour les valeurs $f_{cj} \leq 60$ MPa

Module d'élasticité

A l'âge de j jours, le module de déformation longitudinale instantanée du béton E_{ij} vaut (Article A2.1,2)

$$E_{ij} = 11\,000 f_{cj}^{1/3} \quad (E_{ij} \text{ et } f_{cj} \text{ en MPa})$$

Déformations différées

Retrait du béton

Retrait = réduction de volume accompagnant l'évaporation d'eau en excès.

Le retrait commence dès le premier jour et atteint 80% au bout de deux ans.

Pratiquement, pour se protéger des désordres liés au retrait, on adoptera certaines dispositions :

- **limiter le retrait lui-même en choisissant une composition adéquate du béton,**
- **ralentir son évolution en maintenant humide la surface du béton après coulage,**
- **disposer des armatures de peaux de faible espacement pour bien répartir les fissures de retrait,**
- **éviter les variations brusques d'épaisseur des pièces qui entraîneraient des vitesses de retrait différentes d'où risque de fissuration,**
- **prévoir des dispositions autorisant la libre contraction du béton : joints de dilatation.**

Fluage du béton

Fluage = déformation croissante dans le temps sous charge constante.

Pour le béton, les déformations de fluage ε_v sont loin d'être négligeables puisqu'elles peuvent représenter jusqu'à deux fois les déformations instantanées :

$$\varepsilon_v \approx 2\varepsilon_i$$

La déformation finale est alors :

$$\varepsilon_\infty = \varepsilon_i + \varepsilon_v \approx 3\varepsilon_i$$

Le module de déformation différé E_{vj} , qui permet de calculer la déformation finale du béton est alors :

$$E_{vj} = \frac{E_{ij}}{3}$$

Il est évident que cette approche est simplificatrice et que le fluage d'un matériau ne vérifie pas la loi de Hooke d'un matériau élastique. Néanmoins, cette approche permet d'estimer les déformations cumulées dues à la déformation instantanée élastique et au fluage à un temps infini.

A défaut de mesures, le règlement BAEL91 (Article A2.1,2) retient la valeur :

$$E_{vj} = 3\,700\, f_{cj}^{1/3} \quad \text{si } f_{c28} \leq 60 \text{ MPa}$$

Dilatation thermique

- coefficient de dilatation du béton = $9 \text{ à } 12.10^{-6}$
- coefficient de dilatation de l'acier = 11.10^{-6}
- on adoptera une valeur forfaitaire de 10^{-5} pour le béton armé.

Dans la pratique, les éléments ne sont pas libres, et les variations de température entraînent des contraintes internes de traction.

Pour éviter des désordres, on placera régulièrement sur les éléments (dalles, voiles de façade) ou bâtiments de grandes dimensions des joints de dilatation espacés de 25 à 50 mètres selon la région. Notons que ces joints de dilatation sont aussi un moyen de lutter contre les désordres dus au retrait.

Les aciers

Caractéristiques géométriques des aciers utilisés en BA

- **Les aciers en barres** : On distingue les ronds lisses et les barres à haute adhérence (HA) que l'on trouve en longueurs variants de 6 à 12 m, pour les diamètres normalisés suivants :

5 - 6 - 8 - 10 - 12 - 14 - 16 - 20 - 25 - 32 – 40 mm

- **Les fils** : Les armatures sous forme de fils sont stockées sur des bobines. Les fils servent principalement à la réalisation de treillis soudés, de cadres, d'épingles et d'étriers en usine de façonnage d'armatures, ou pour le ferrailage d'éléments préfabriqués tels que les prédalles BA ou BP. On trouve des diamètres de 5 à 12mm et se sont généralement des aciers à haute adhérence.
- **Les treillis soudés** : Les TS sont constitués par des fils ou barres en mailles rectangulaires soudés entre eux. Ils sont utilisés pour ferrailer rapidement des éléments plans, tels que les voiles, dalles et dallages. Ils sont disponibles en rouleaux de 50m pour les diamètres inférieurs à 5mm et en panneaux de 3 à 5m de long par 2.4m de large pour les Ø de 5 à 12mm.

Prescriptions générales

Limite d'élasticité

Le caractère mécanique servant de base aux justifications est la limite d'élasticité garantie notée f_e . Il existe deux nuances:

- ✓ Pour les ronds lisses (aciers doux laminés à chaud), on trouve :
 - les aciers **FeE215** de limite élastique $f_e = 215 \text{ MPa}$
 - les aciers **FeE235** de limite élastique $f_e = 235 \text{ MPa}$
- ✓ Pour les barres à haute adhérence (aciers comportant des reliefs de surface qui améliorent la liaison béton-acier), on distingue :
 - les aciers **FeE400** de limite élastique $f_e = 400 \text{ MPa}$
 - les aciers **FeE500** de limite élastique $f_e = 500 \text{ MPa}$

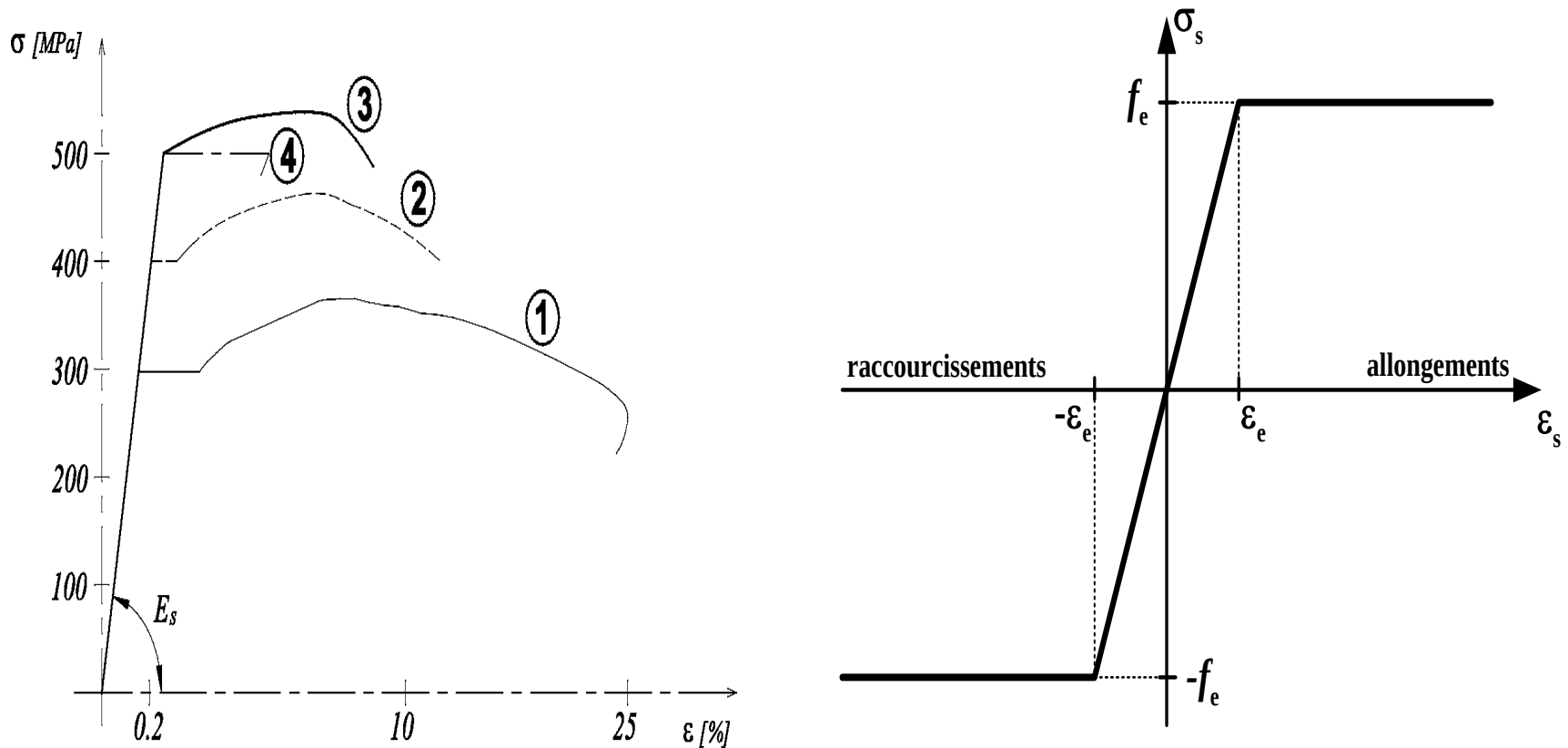
Module d'élasticité

Le module d'élasticité longitudinale de l'acier est pris égal à :

$E_s = 200000 \text{ MPa}$.

Diagramme conventionnel ou diagramme caractéristique

Dans les calculs en BA, on remplace le diagramme contrainte-déformation réel par un diagramme conventionnel, vérifiant une loi de type élasto-plastique parfait.



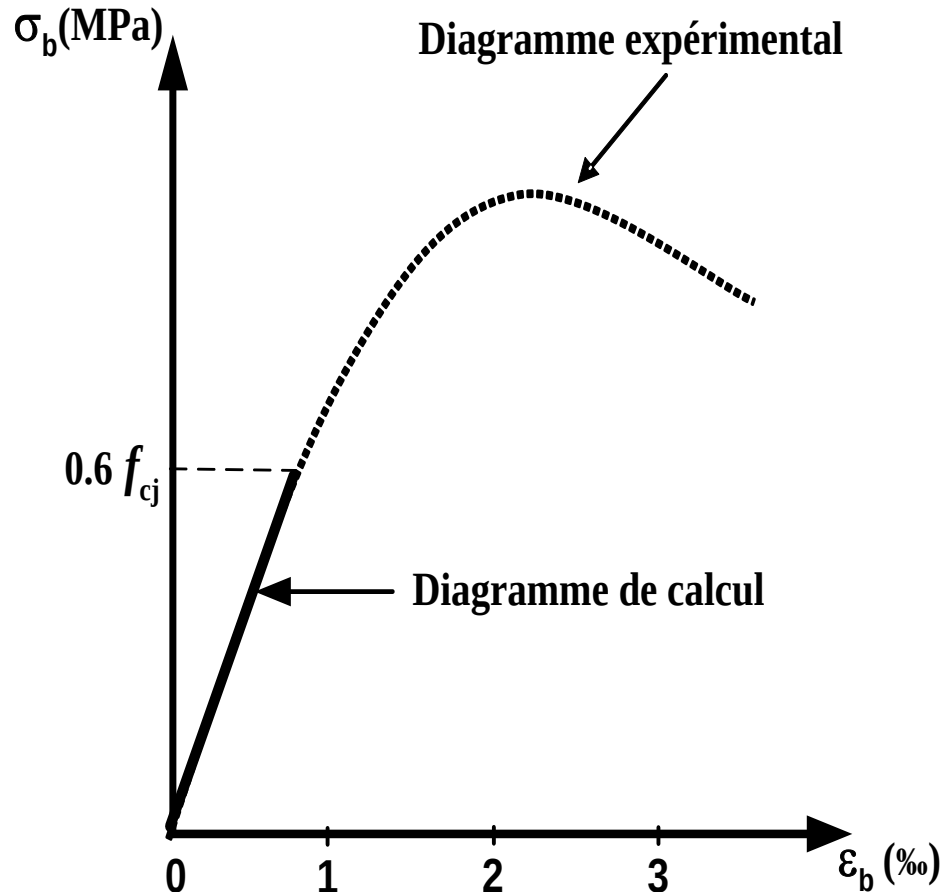
Modélisation réglementaire

On admet que :

- vis-à-vis des états limites de service, les matériaux se comportent élastiquement.
- vis-à-vis des états limites ultimes, on accepte généralement que les matériaux entrent dans leur domaine de fonctionnement plastique.

1) *Le béton*

a) *Modèle de calcul à l'E.L.S*



Pour décrire le comportement du béton à l'E.L.S, on adopte alors la loi de Hooke:

$$\sigma_b = E_b \cdot \epsilon_b$$

Pour le module d'Young du béton, on adopte une valeur forfaitaire telle que :

$$E_b = E_s / n$$

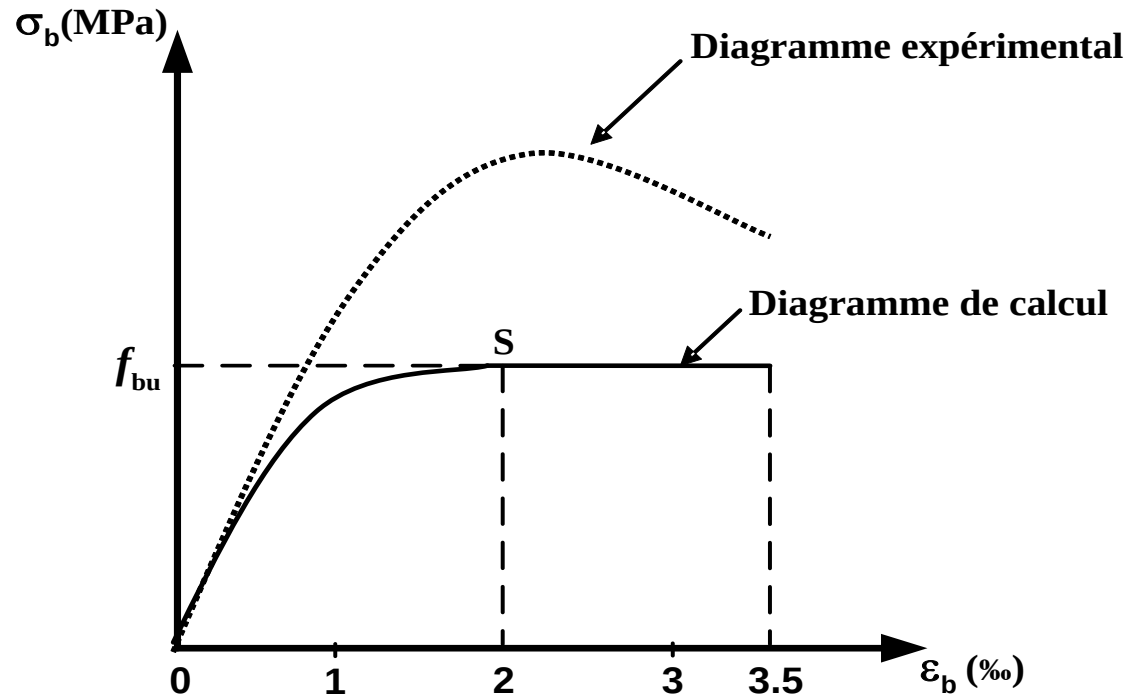
$$n = 15$$

= coefficient d'équivalence

Le module E_b est considéré constant quelque soit l'âge du béton et quelque soit sa résistance caractéristique.

6) *Modèle de calcul à l'ELU*

Pour les calculs à l'ELU, le comportement du béton est modélisé par la loi *parabole-rectangle*



L'équation de la courbe contrainte-déformation de calcul est :

- pour $0 \leq \epsilon_b \leq 2 \text{ ‰}$ $\sigma_b = 0.25 f_{bu} \cdot 10^3 \epsilon_b (4 - 10^3 \epsilon_b)$
- pour $2 \text{ ‰} \leq \epsilon_b \leq 3.5 \text{ ‰}$ $\sigma_b = f_{bu}$

- ✓ la valeur de calcul de la résistance en compression du béton f_{bu} est

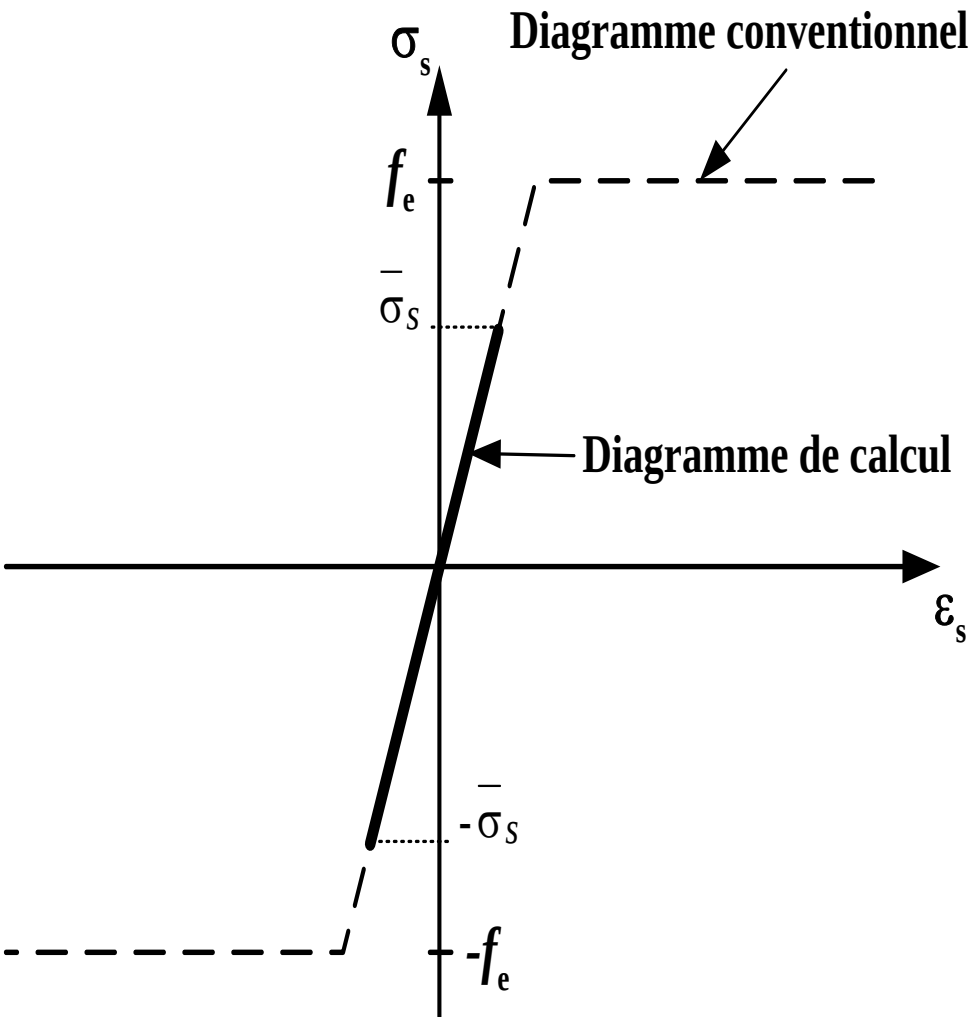
$$f_{bu} = \frac{0.85 f_{c28}}{\theta \gamma_b}$$

où :

- le coefficient de sécurité partiel, γ_b vaut :
et $\left\{ \begin{array}{l} 1.5 \text{ pour les combinaisons fondamentales} \\ 1.15 \text{ pour les combinaisons accidentelles,} \end{array} \right.$
- θ est un coefficient qui tient compte de la durée d'application des charges :
et $\left\{ \begin{array}{ll} \theta = 1 & \text{si la durée est supérieure à 24h,} \\ \theta = 0.9 & \text{si la durée est comprise entre 1h et 24h} \\ \theta = 0.85 & \text{si elle est inférieure à 1h} \end{array} \right.$
- ✓ Le raccourcissement relatif du béton est limité à 3.5 ‰ en flexion et 2 ‰ en compression simple.
- ✓ Le coefficient de Poisson est pris égal à :
 $\left\{ \begin{array}{ll} \nu = 0.2 & \text{pour les justifications à l'ELS (section non fissurée),} \\ \nu = 0 & \text{pour les justifications à l'ELU (section fissurée)} \end{array} \right.$

2) *L'acier*

a) *Modèle de calcul à l'E.L.S*



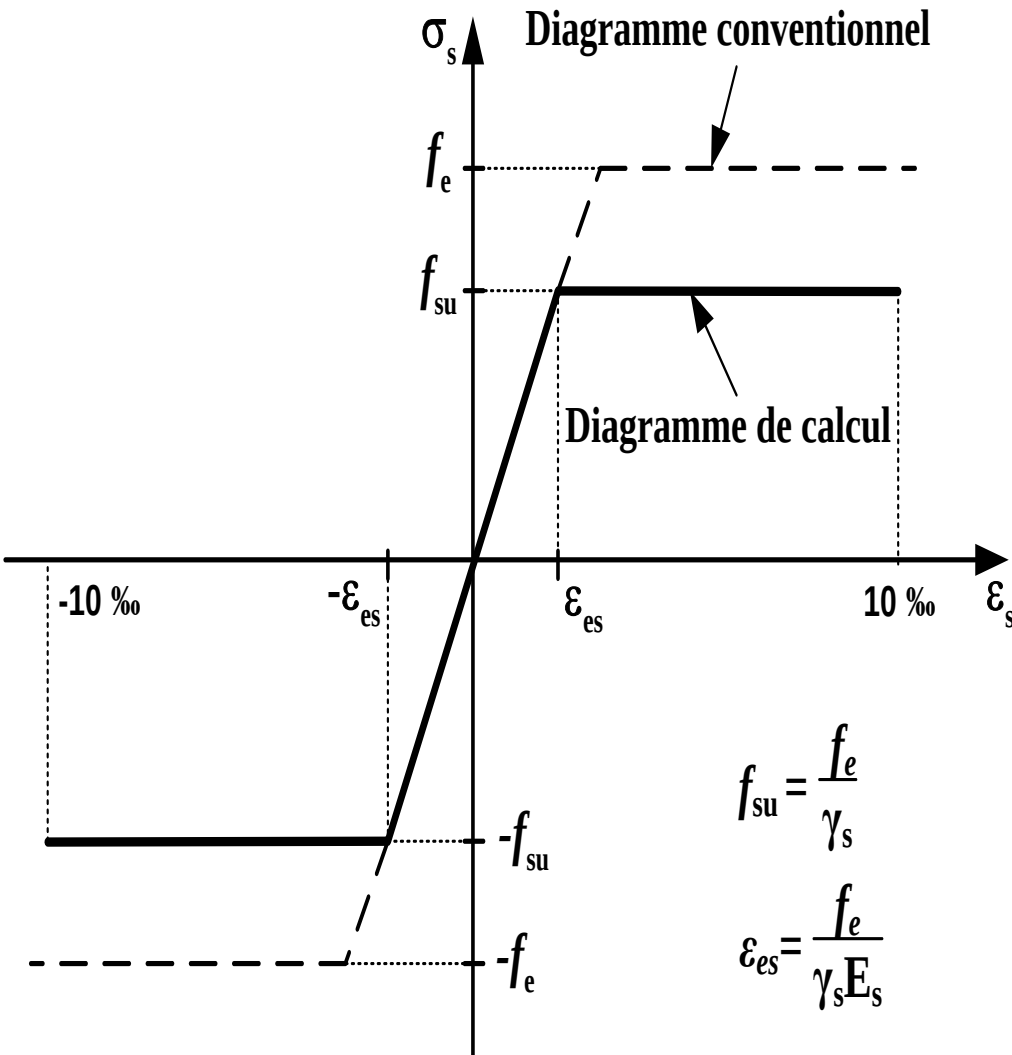
Comme le béton, les aciers travaillent à l'E.L.S dans le domaine élastique:

$$\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s$$

On adopte une valeur forfaitaire du module d'élasticité :

$$E_s = 200000 \text{ MPa}$$

6) *Modèle de calcul à l'ELU*

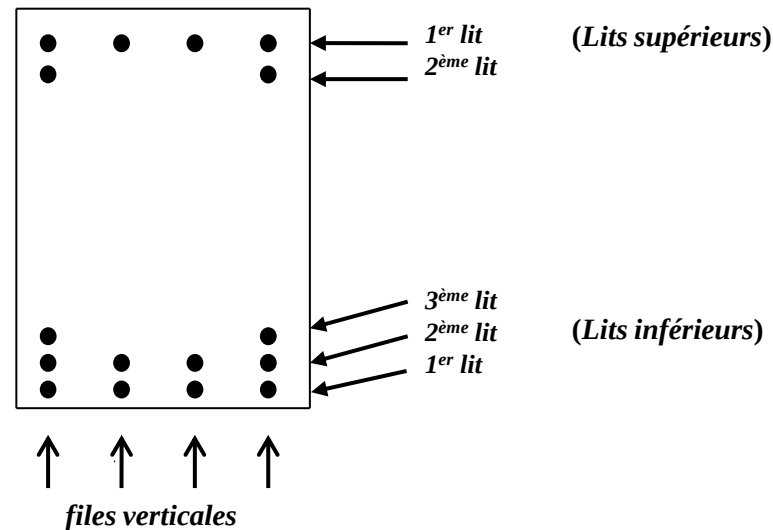


Dispositions constructives

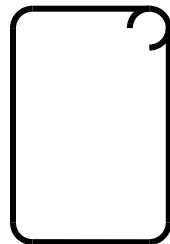
Dénomination des armatures

On distingue deux types d'armatures :

Les armatures longitudinales



Les armatures transversales



CADRE



ETRIER



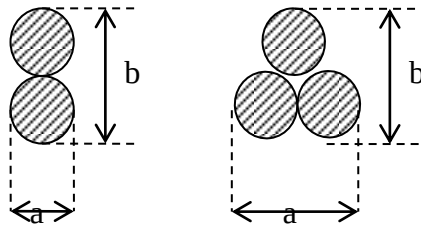
EPINGLE

Groupement des armatures longitudinales

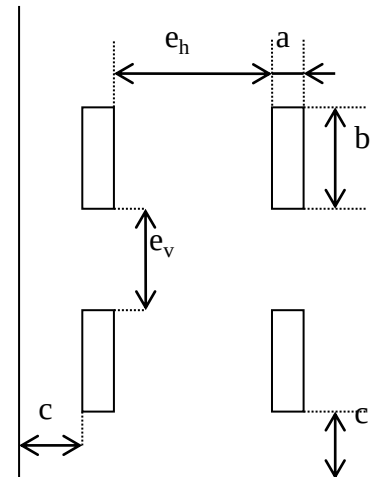
Les barres d'acier sont disposées :

- de manière isolée,
- en paquet vertical (jamais horizontal) de deux barres,
- en paquet de trois barres (rare).

Groupement des armatures



Sens de coulage



Enrobage des armatures

L'enrobage d'une armature doit être tel que : $c \geq \max (\emptyset \text{ ou } a, e)$

Avec :

- $\emptyset$: diamètre de l'armature si elle est isolée,
- a : largeur du paquet dont elle fait partie dans le cas contraire,
- $e = \begin{cases} 5\text{cm} : \text{ouvrages à la mer ou exposés aux embruns ou aux atmosphères très agressives,} \\ 3\text{cm} : \text{parois non coffrées soumises à des actions agressives, parois exposées aux intempéries, aux condensations ou au contact d'un liquide,} \\ 1\text{cm} : \text{parois situées dans des locaux couverts et clos non exposées aux condensations.} \end{cases}$

Distances entre barres

horizontalement : $e_h \geq \max(a, 1.5c_g)$

Verticalement : $e_v \geq \max(a, c_g)$

Ancrage des barres

Un ancrage est la liaison d'une barre d'acier et le béton, en bout de barre.

On distingue:

✓ L'ancrage droit :

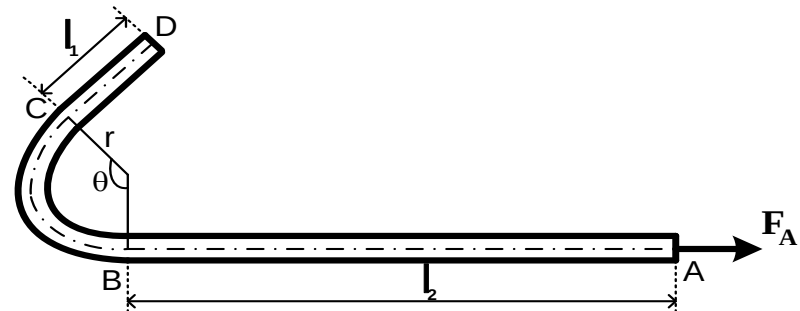
la barre doit être ancrée sur une longueur l_s dite longueur de scellement droit et définie comme étant la longueur à mettre en œuvre pour avoir un bon ancrage droit.

✓ Les ancrages courbes :

par manque de place comme aux appuis de rive par exemple, on est obligé d'avoir recourt à des ancrages courbes afin de diminuer la longueur d'encombrement de l'ancrage.

On utilise le plus couramment :

- les "crochets normaux" : $\theta=180^\circ$
- les "retours d'équerre" : $\theta=90^\circ$
- les "ancrages à 45° " : $\theta=135^\circ$
- les "ancrages à 60° " : $\theta=120^\circ$



Façonnage des aciers

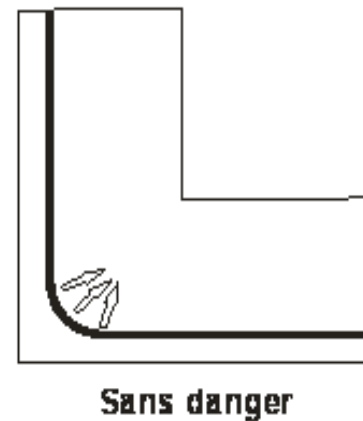
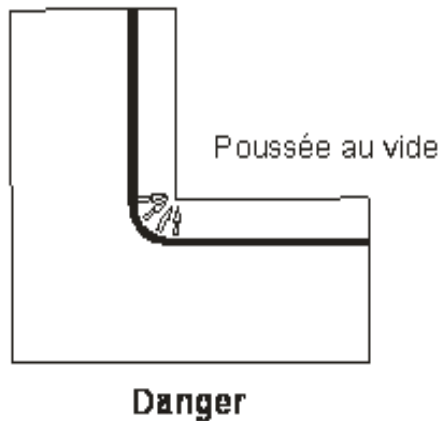
Afin de ne pas trop plastifier les aciers, il convient d'adopter des mandrins de façonnage dont les diamètres ne soient pas trop petits.

- ✓ Pour les barres longitudinales les rayons de courbure r des ancrages doivent vérifier :
 - $r \geq 3\emptyset$ pour un rond lisse de diamètre $\emptyset$
 - $r \geq 5.5\emptyset$ pour un HA de diamètre $\emptyset$

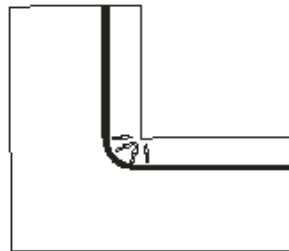
- ✓ Pour les cadres, étriers et épingles, les rayons de courbures r sont :
 - $r \geq 2\emptyset$ pour un rond lisse de diamètre $\emptyset$
 - $r \geq 3\emptyset$ pour un HA de diamètre $\emptyset$

Poussée au vide

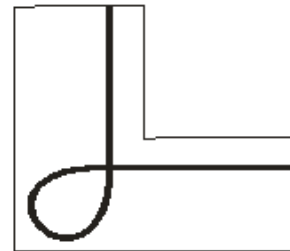
Une armature courbe et tendue exerce sur le béton une poussée vers sa concavité. Si cette poussée s'effectue près d'une paroi la barre sollicite à la traction la couverture de béton (poussée au vide).



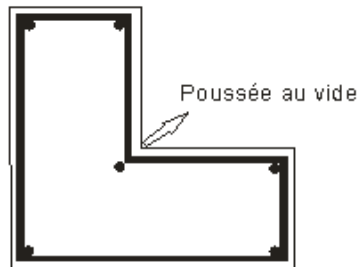
Il convient d'adopter un mode constructif qui permet d'éviter tout désordre engendré par la poussée au vide des armatures



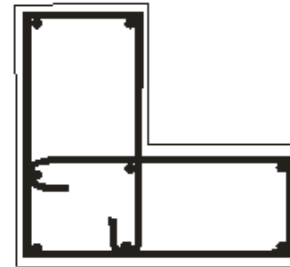
Incorrect



Correct



Incorrect



Correct



Incorrect



Correct

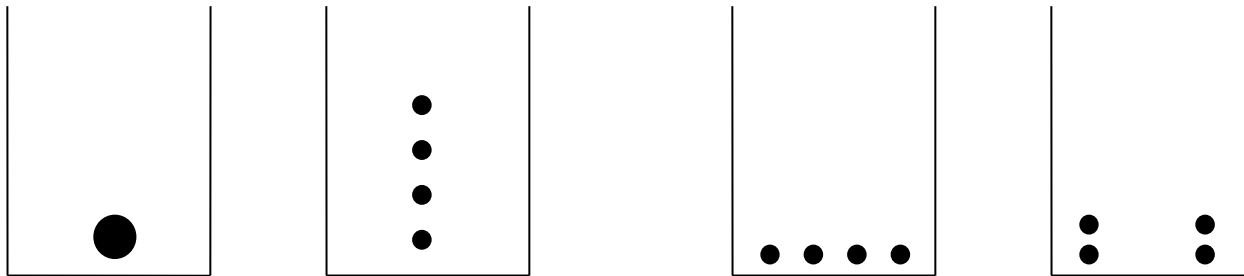


Correct

Prescriptions pour limiter la fissuration

Pour limiter la fissuration (Article A.4.5,323), il convient de :

- n'utiliser les armatures de gros diamètres que dans les pièces de béton suffisamment épaisses.
- Eviter les très petits diamètres dans les pièces exposées aux intempéries.
- Prévoir le plus grand nombre de barres compatibles avec une mise en place correcte du béton.



Dispositions mauvaises

Dispositions correctes

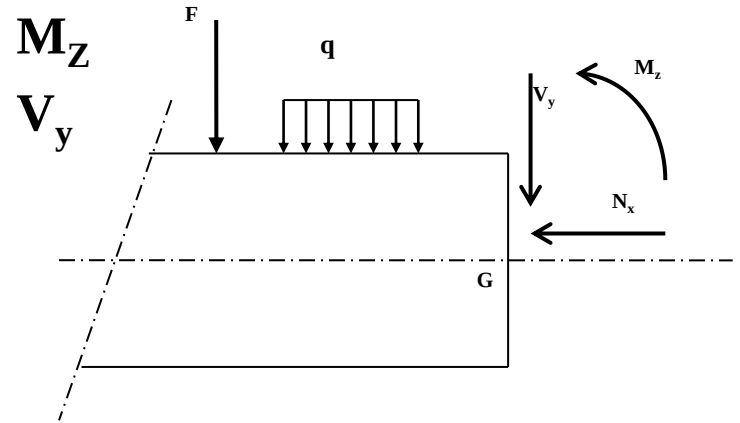
Dimensionnement en flexion simple

Justifications vis-à-vis des sollicitations normales

1) Définition

Une poutre à plan moyen est soumise à la flexion plane simple si les sollicitations se réduisent à :

- un moment fléchissant :
- et un effort tranchant :



2) Justifications à faire

En béton armé, on distingue :

- * L'action du moment fléchissant qui conduit au dimensionnement des armatures longitudinales.
- * L'action de l'effort tranchant qui concerne le dimensionnement des armatures transversales.

Ces deux calculs sont menés séparément et dans cette partie on se limitera aux calculs relatifs au moment fléchissant.

3) Portées des poutres

En béton armé, la portée des poutres à prendre en compte est :

- **la portée entre axes d'appuis lorsqu'il y a des appareils d'appui ou que la poutre repose sur des voiles en maçonnerie,**
- **la portée entre nus d'appuis lorsque les appuis sont en béton armé (poutre principale, poteau ou voile).**

Justifications vis-à-vis du moment fléchissant

Trois états limites sont à considérer pour la justification des poutres fléchies :

-  **état limite ultime de résistance**
-  **état limite de service vis-à-vis de la durabilité**
-  **état limite de service vis-à-vis de la déformation**

I. Etat Limite Ultime de Résistance

On doit vérifier que:

$$M_u \leq M_{ur}$$

Où : M_u est le moment appliqué (moment de calcul)
et M_{ur} est le moment résistant de la section

1) Hypothèses de calcul

Les principales hypothèses du calcul aux ELU des sections en BA soumises à la flexion simple sont les suivantes :

- a) les sections droites restent planes après déformation (hypothèse de Navier-Bernoulli),**
- b) il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures et le béton,**
- c) le béton tendu est négligé,**
- d) l'aire des aciers est supposée concentrée en son centre de gravité pourvu que l'erreur ainsi commise sur les déformations unitaires ne dépasse pas 15% (ce qui est généralement réalisé en pratique),**
- e) le comportement de l'acier est défini par le diagramme contrainte-déformation de calcul défini dans le chapitre 3**

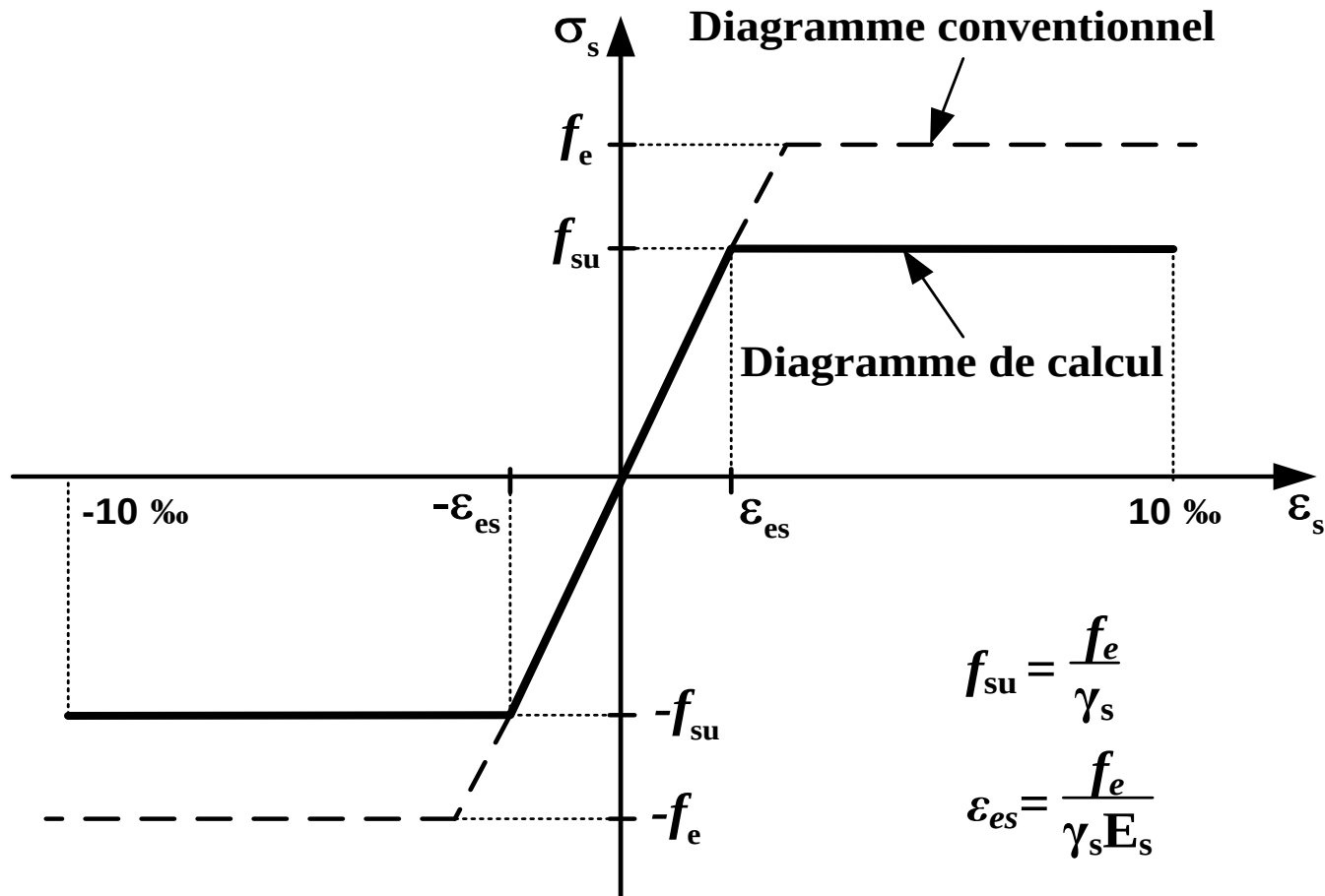
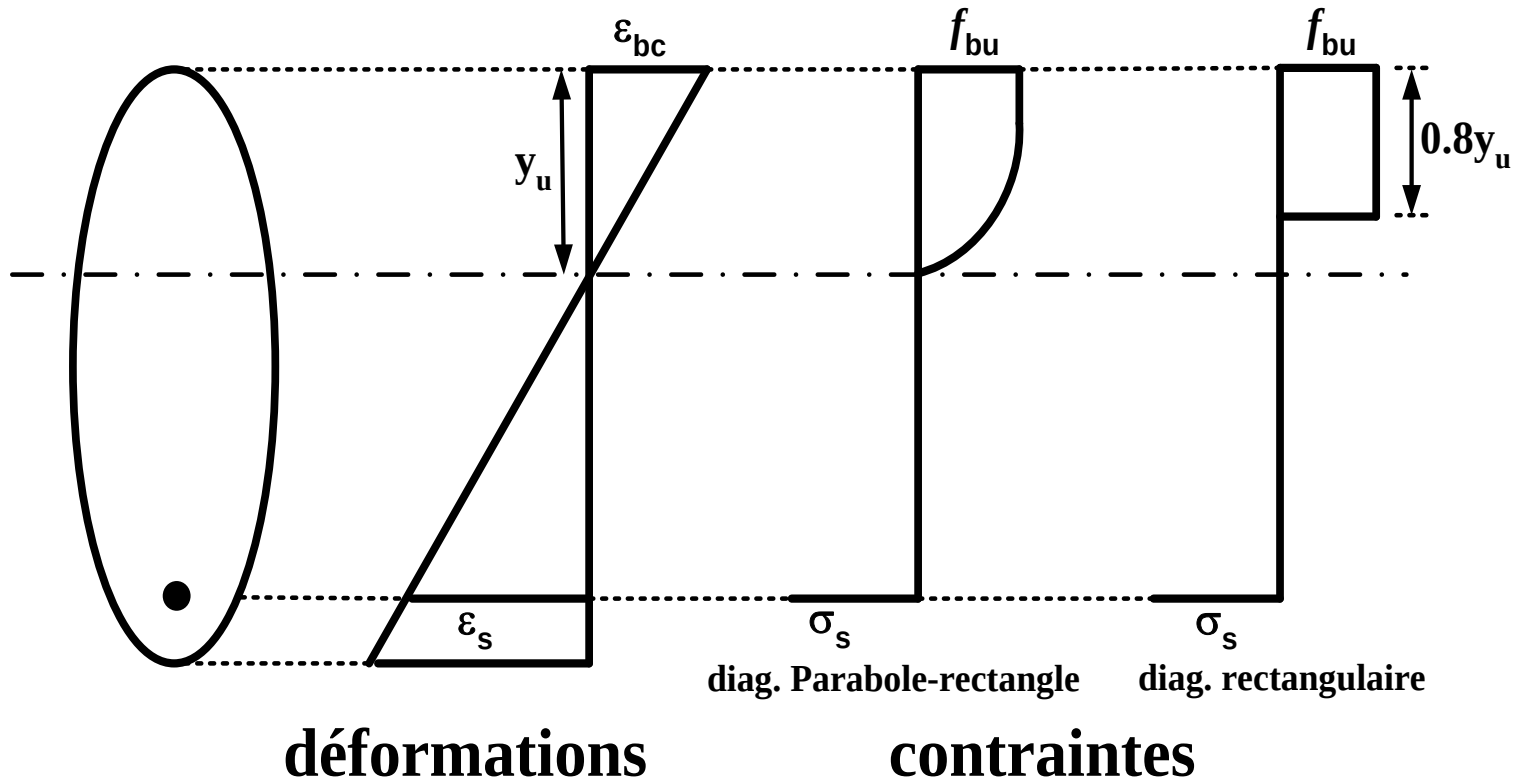


Diagramme contrainte-déformation de calcul des aciers

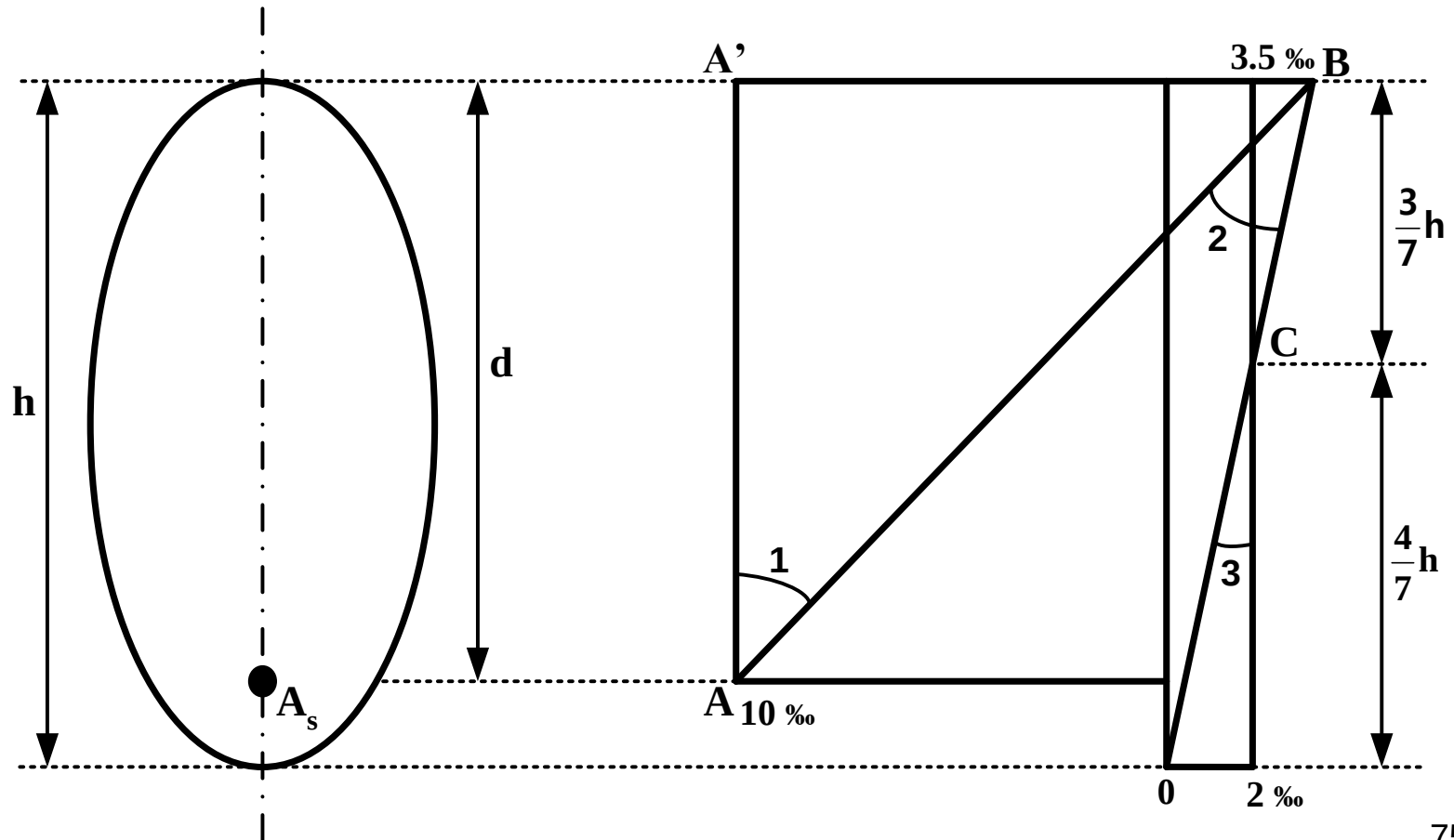
f) pour le béton $\Rightarrow$ diagramme rectangulaire simplifié (Article A.4.3,42).



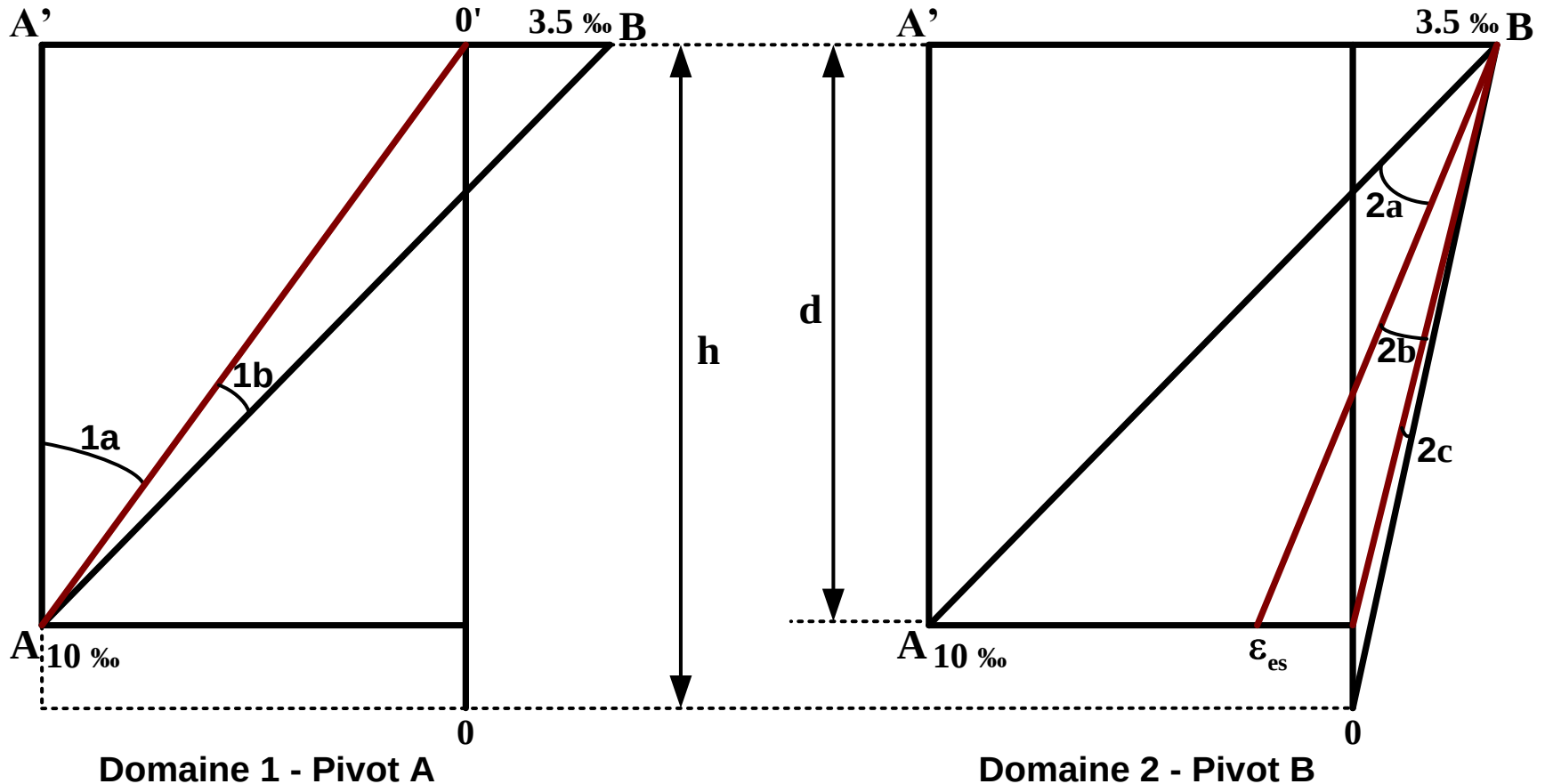
g) $\varepsilon_b \leq 3.5\text{‰}$ en flexion et 2‰ en compression simple

$$\varepsilon_s \leq 10\text{‰}$$

Le diagramme de déformation de la section à l'E.L.U.R (Article A.4.3.3) passe donc par l'un des 3 pivots A, B ou C définis ci-dessous :



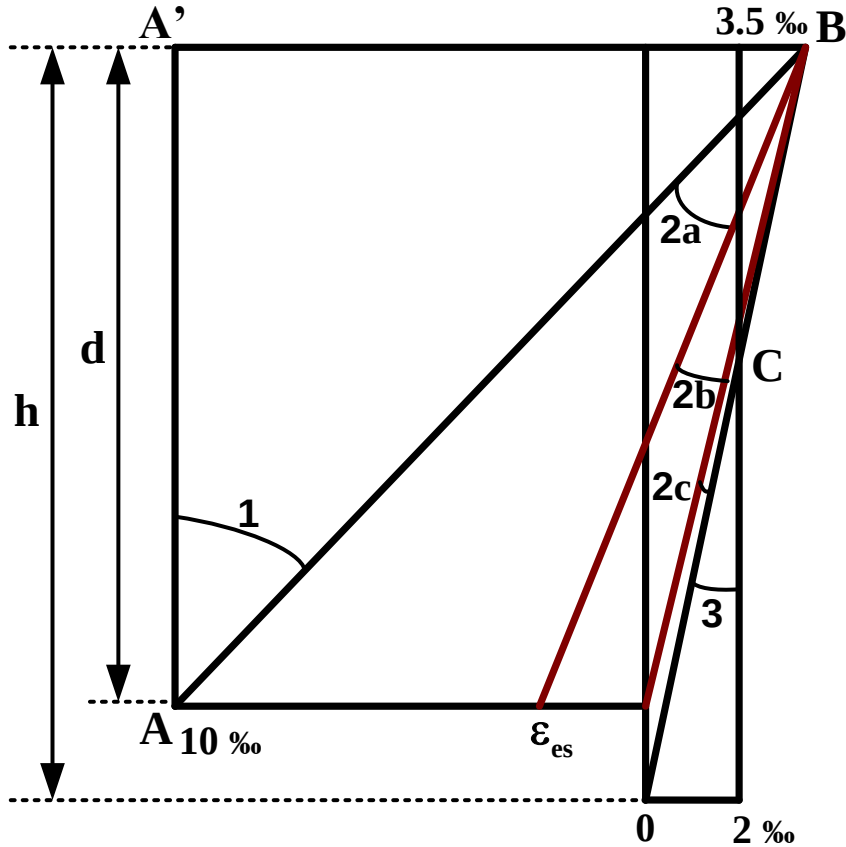
2) Droites de déformation possibles dans le cas de la flexion simple



Soit y_u la profondeur de l'axe neutre,

$\alpha_u = y_u/d$ est dite profondeur relative de l'axe neutre

Déterminer les limites de α_u pour chaque domaine.



domaine 1 : $\alpha_u \leq 0.259$

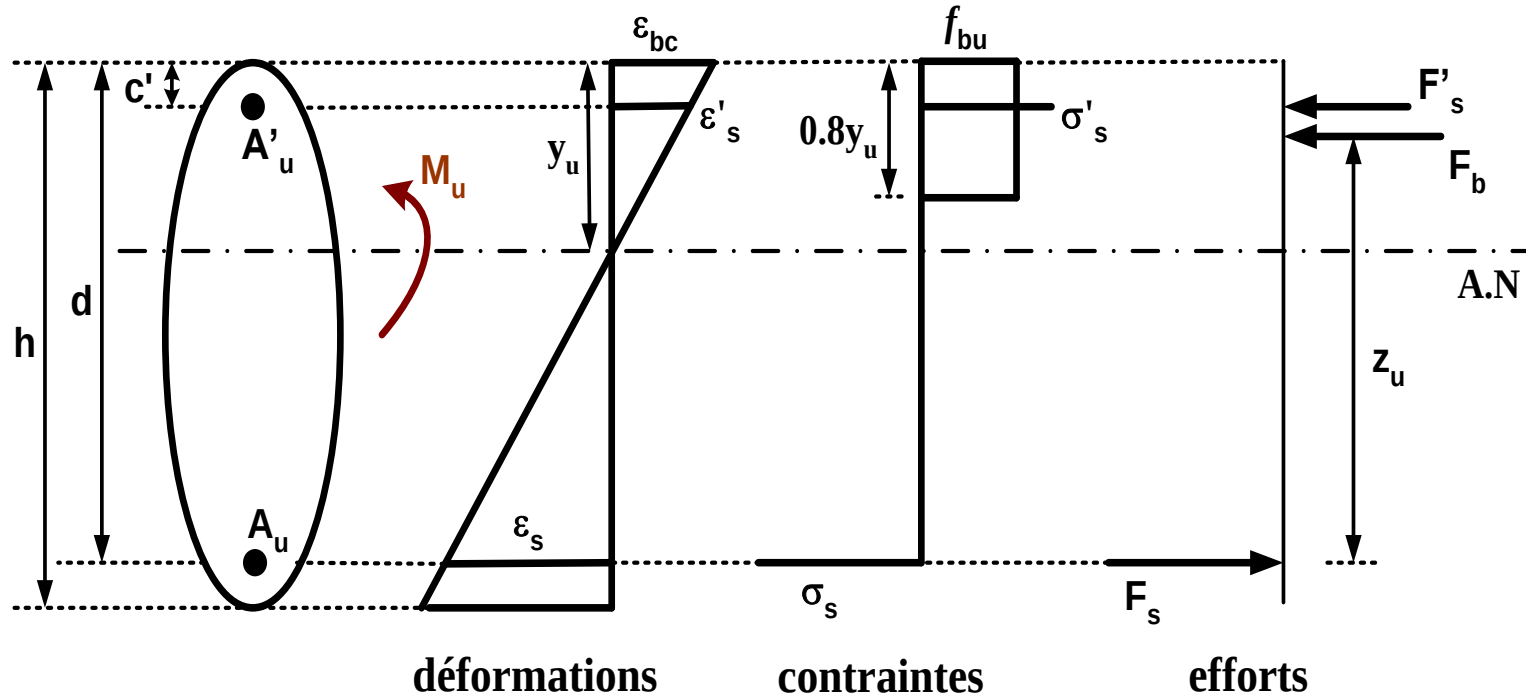
domaine 2a : $0.259 < \alpha_u \leq \alpha_\ell$
avec $\alpha_\ell = 3.5 / (3.5 + 1000 \varepsilon_{es})$

domaine 2b : $\alpha_\ell < \alpha_u \leq 1$

domaine 2c : $1 < \alpha_u \leq \alpha_{BC} = h/d$

domaine 3 : $h/d < \alpha_u$

3) Notations – Equations d'équilibre

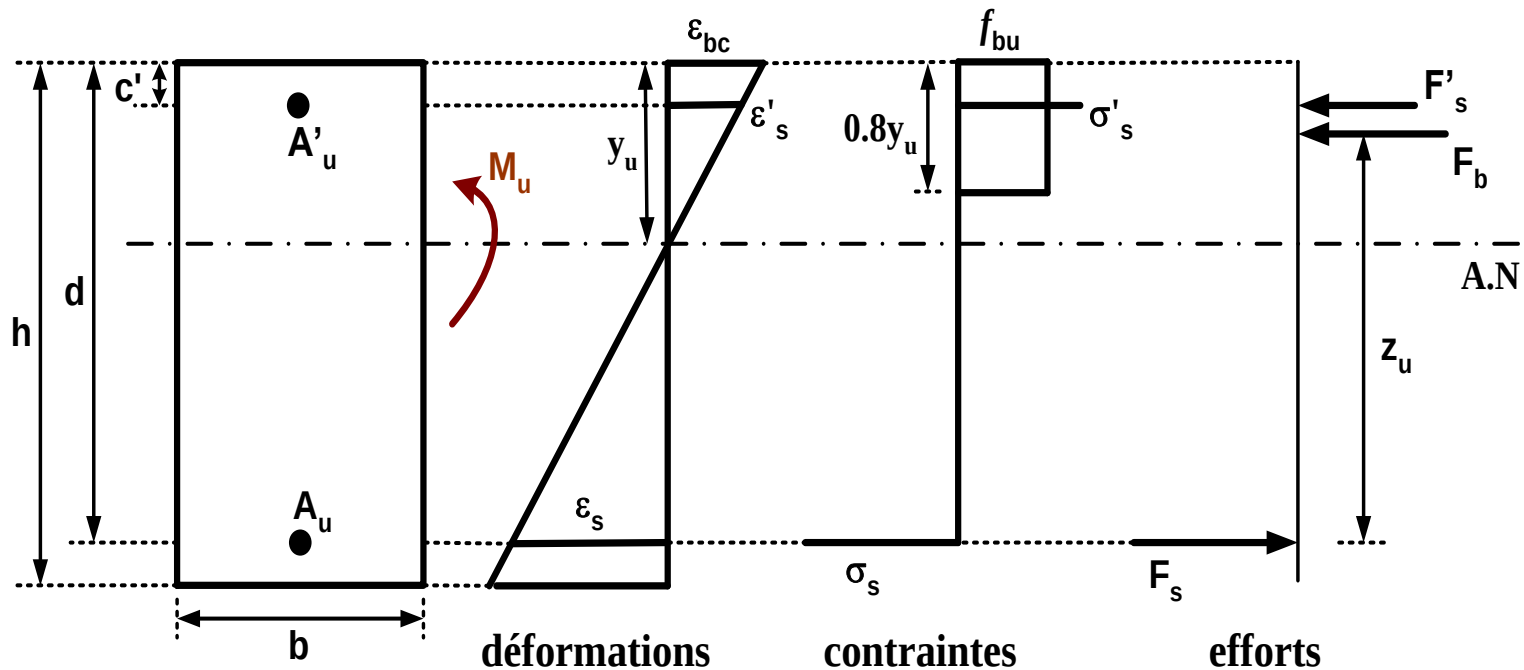


L'équilibre de la section conduit aux deux équations suivantes :

- équilibre des efforts normaux : $F_b + F'_s - F_s = 0$
- équilibre des moments par rapport au centre de gravité des aciers tendus :

$$F_b z_u + F'_s (d - c') = M_u$$

4) Cas des sections rectangulaires



Dans ce cas nous avons :

$$F_b = 0.8 b y_u f_{bu}$$

$$F_s = A_u \cdot \sigma_s$$

$$F'_s = A'_u \cdot \sigma'_s$$

$$z_u = d - 0.4 y_u$$

➤ **Moment résistant béton :**

$$\begin{aligned} M_b = F_b z_u &= 0.8 b y_u f_{bu} (d - 0.4 y_u) \\ &= 0.8 b \cdot y_u/d \cdot f_{bu} \cdot d^2 (1 - 0.4 y_u/d) \\ &= 0.8 \alpha_u (1 - 0.4 \alpha_u) b d^2 \cdot f_{bu} \quad \text{avec} \quad \alpha_u = y_u / d \end{aligned}$$

On peut écrire : $M_b = \mu_u b d^2 f_{bu}$
avec $\mu_u = 0.8 \alpha_u (1 - 0.4 \alpha_u)$ et $\alpha_u = y_u / d$

- μ_u s'appelle le moment relatif du béton ou "**moment ultime réduit**"
- α_u est la **profondeur relative** de l'axe neutre

➤ **Equations d'équilibre :**

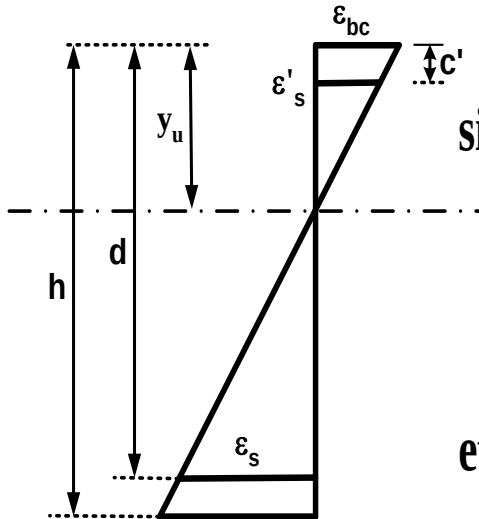
$$\begin{aligned} 0.8 \alpha_u b d f_{bu} + A'_u \sigma'_s - A_u \sigma_s &= 0 \\ \mu_u b d^2 f_{bu} + A'_u \sigma'_s (d - c') &= M_u \end{aligned}$$

Quelles sont les inconnues de ce système d'équations?

Si le diagramme de déformation est connu, les paramètres y_u , ϵ_{bc} , ϵ_s , ϵ'_s , σ_s et σ'_s sont connus.

En effet :

Le diagramme des déformations donne: $\frac{\epsilon_{bc}}{y_u} = \frac{\epsilon_s}{d - y_u} = \frac{\epsilon'_s}{y_u - c'}$



si la droite de déformation passe par le pivot A on aura :

$$\epsilon_s = 10 \text{ ‰} ; \quad \epsilon_{bc} = \frac{y_u}{d - y_u} 10 \text{ ‰} \quad \text{et} \quad \epsilon'_s = \frac{y_u - c'}{d - y_u} 10 \text{ ‰}$$

et si la droite de déformation passe par le pivot B on aura :

$$\epsilon_{bc} = 3.5 \text{ ‰} ; \quad \epsilon_s = \frac{d - y_u}{y_u} 3.5 \text{ ‰} \quad \text{et} \quad \epsilon'_s = \frac{y_u - c'}{y_u} 3.5 \text{ ‰}$$

Les déformations étant connues, on en déduit les contraintes correspondantes.

Supposons maintenant que les dimensions de la section de béton (**b,h**) sont connues

et prenons des valeurs approchées pour d et c'

soient **$d=0.9h$** et **$c'=d/9$**

Il reste donc comme inconnues :

- la position **y_u** du diagramme de déformation
- et les sections d'armatures **A_u, A'_u**

RQ

Les armatures d'acier étant destinées, en premier lieu, à reprendre l'effort de traction, on supposera dans un premier temps que : **$A'_u = 0$**

a) Section sans armatures comprimées

Si $A'_u = 0$ l'équilibre des moments par rapport au c.g.a donne :

$$\mu_u = \frac{M_u}{bd^2 f_{bu}} \quad (F_b z_u = M_u)$$

or $\mu_u = 0.8 \alpha_u (1 - 0.4 \alpha_u)$

donc α_u est la racine inférieure de l'équation :

$$0.4 \alpha_u^2 - \alpha_u + 1.25 \mu_u = 0$$

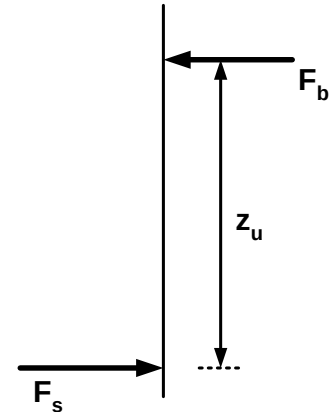
soit
$$\alpha_u = \frac{1 - \sqrt{1 - 2 \mu_u}}{0.8} = 1.25(1 - \sqrt{1 - 2 \mu_u})$$

En écrivant l'équilibre des moments par rapport au point d'application de F_b , on obtient :

$$M_u = F_s z_u = A_u \sigma_s z_u$$

d'où

$$A_u = \frac{M_u}{\sigma_s z_u} \text{ avec } z_u = d(1 - 0.4\alpha_u) \text{ et } \alpha_u = 1.25(1 - \sqrt{1 - 2 \mu_u})$$

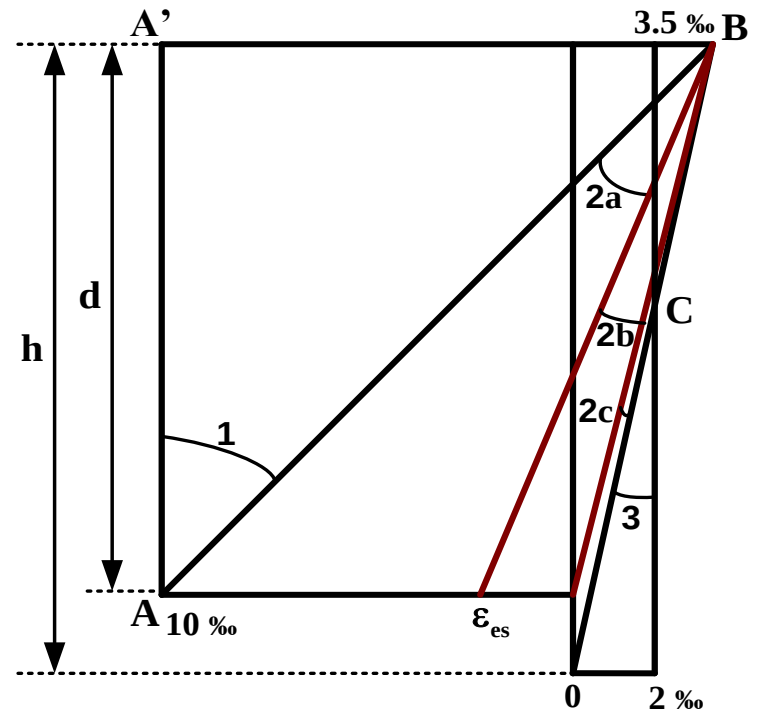


b) Position du diagramme de déformation

Pour positionner le diagramme des déformations à l'intérieur du domaine possible, on compare le moment réduit de calcul μ_u

$$\mu_u = \frac{M_u}{bd^2 f_{bu}}$$

avec les moments réduits correspondants aux limites des différents domaines.



- | | | |
|--------------|-------------------------------|---------------------------------------|
| • domaine 1 | $\mu_u \leq \mu_{AB} = 0.186$ | $\alpha_u \leq \alpha_{AB} = 0.259$ |
| • domaine 2a | $0.186 < \mu_u \leq \mu_\ell$ | $0.259 < \alpha_u \leq \alpha_\ell$ |
| • domaine 2b | $\mu_\ell < \mu_u \leq 0.48$ | $\alpha_\ell < \alpha_u \leq 1$ |
| • domaine 2c | $0.48 < \mu_u \leq \mu_{BC}$ | $1 < \alpha_u \leq \alpha_{BC} = h/d$ |
| • domaine 3 | $\mu_{BC} < \mu_u$ | $\alpha_{BC} < \alpha_u$ |

Exercice n°1

On considère une poutre isostatique de portée 7m et de section rectangulaire $0.20 \times 0.45 \text{ m}^2$ soumise à l'action de :

- une superstructure : $g_s = 2.5 \text{ KN/m}$.
- une charge d'exploitation de durée d'application supérieure à 24 heures : $q = 12 \text{ KN/m}$.

- 1) Calculer le moment ultime sollicitant la section médiane.
- 2) On choisit de réaliser cette poutre à l'aide de :
 - un béton de résistance caractéristique $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$,
 - un acier haute adhérence de nuance FeE400.
 - a) Calculer la section d'armatures longitudinales.
 - b) Choisir les diamètres des armatures et disposez-les sachant que la poutre est protégée des intempéries.

Exercice n°2

Dimensionner la section médiane de la poutre étudiée à l'exercice n°1 en choisissant cette fois-ci un béton de résistance caractéristique $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$.

c) Section avec armatures comprimées

Les sections d'acier tendu et comprimé s'obtiennent en supposant que l'allongement des armatures tendues est égal à ε_{es} (frontière entre les domaines 2a et 2b).

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{es} \quad \text{donc} \quad \sigma_s = f_e / \gamma_s$$

Le moment équilibré par le béton est alors :

$$M_{bl} = \mu_l b d^2 f_{bu} \quad \text{avec} \quad \mu_l = 0.8\alpha_l (1 - 0.4\alpha_l) \quad \text{et} \quad \alpha_l = \frac{3.5}{3.5 + 1000\varepsilon_{es}}$$

Le moment équilibré par la section est : $M_u = M_{bl} + A'_u \sigma'_s (d - c')$

La section d'armatures comprimées est alors :

$$A'_u = \frac{M_u - M_{bl}}{(d - c') \sigma'_s} \quad \text{avec} \quad M_{bl} = \mu_l b d^2 f_{bu} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma'_s = E_s \varepsilon'_s & \text{si } \varepsilon'_s < \varepsilon_{es} \\ \sigma'_s = \frac{f_e}{\gamma_s} & \text{si } \varepsilon'_s \geq \varepsilon_{es} \end{cases}$$

L'équilibre des efforts normaux s'écrit :

$$F_b + F'_s - F_s = 0$$

C'est-à-dire :
$$\frac{M_{bl}}{d(1 - 0.4\alpha_\ell)} + \frac{M_u - M_{bl}}{(d - c')} = A_u \frac{f_e}{\gamma_s}$$

D'où :
$$A_u = \left(\frac{M_{bl}}{d(1 - 0.4\alpha_\ell)} + \frac{M_u - M_{bl}}{(d - c')} \right) \frac{1}{\frac{f_e}{\gamma_s}}$$

Suite exercice n° 2

c) Récapitulatif

Soit une section soumise au moment fléchissant ultime de calcul M_u .
On détermine la section d'armatures longitudinales comme suit :

➡ On calcule : $\mu_u = \frac{M_u}{bd^2 f_{bu}}$ avec $d \approx 0.9h$

➡ On choisit la nuance d'acier puis on calcule :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{es} = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} \\ \alpha_l = \frac{3.5}{3.5 + 1000 \varepsilon_{es}} \\ \mu_l = 0.8 \alpha_l (1 - 0.4 \alpha_l) \end{array} \right.$$

1^{er} cas : $\mu_u \leq \mu_\ell$ (domaine 1b ou 2a) $\rightarrow A'_u = 0$ et $\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$ (car $\varepsilon_{es} \leq \varepsilon_s \leq 10\text{‰}$)

d'où : $A_u = \frac{M_u}{z_u \frac{f_e}{\gamma_s}}$ avec $z_u = d(1 - 0.4\alpha_u)$ et $\alpha_u = 1.25(1 - \sqrt{1 - 2\mu_u})$

2^{ème} cas : $\mu_u > \mu_\ell$ (domaine 2b ou 2c) $\rightarrow$ On se ramène au domaine 2a ($A'_u \neq 0$)

et on calcule : $A_u = \left(\frac{M_{bl}}{d(1 - 0.4\alpha_\ell)} + \frac{M_u - M_{bl}}{(d - c')} \right) \frac{1}{\frac{f_e}{\gamma_s}}$

$A'_u = \frac{M_u - M_{bl}}{(d - c') \sigma'_s}$ avec $M_{bl} = \mu_\ell b d^2 f_{bu}$

e) Estimation des dimensions de la section

Soit M_u la sollicitation de calcul appliquée à une section donnée. Pour reprendre économiquement cette sollicitation, il faut que :

- la largeur b et la hauteur h de la section soient minimales,
- les aciers soient bien utilisés,

⇒ exigences contradictoires.

Optimisation ⇒ frontière du domaine 2a et 2b.

Le coffrage de la section est donc obtenu en écrivant qu'il ne faut pas d'acier comprimé :

$$M_u \leq M_{bl} = \mu_l b d^2 f_{bu} \quad \text{donc} \quad b d^2 \geq \frac{M_u}{\mu_l f_{bu}}$$

Pour déterminer la seconde inconnue du problème, une règle de bonne construction consiste à prendre $0.3d \leq b \leq 0.5d$.

Exercice n°3

Dimensionner la section médiane d'une poutre de section rectangulaire soumise à un moment ultime $M_u=400$ KN.m, sachant que :

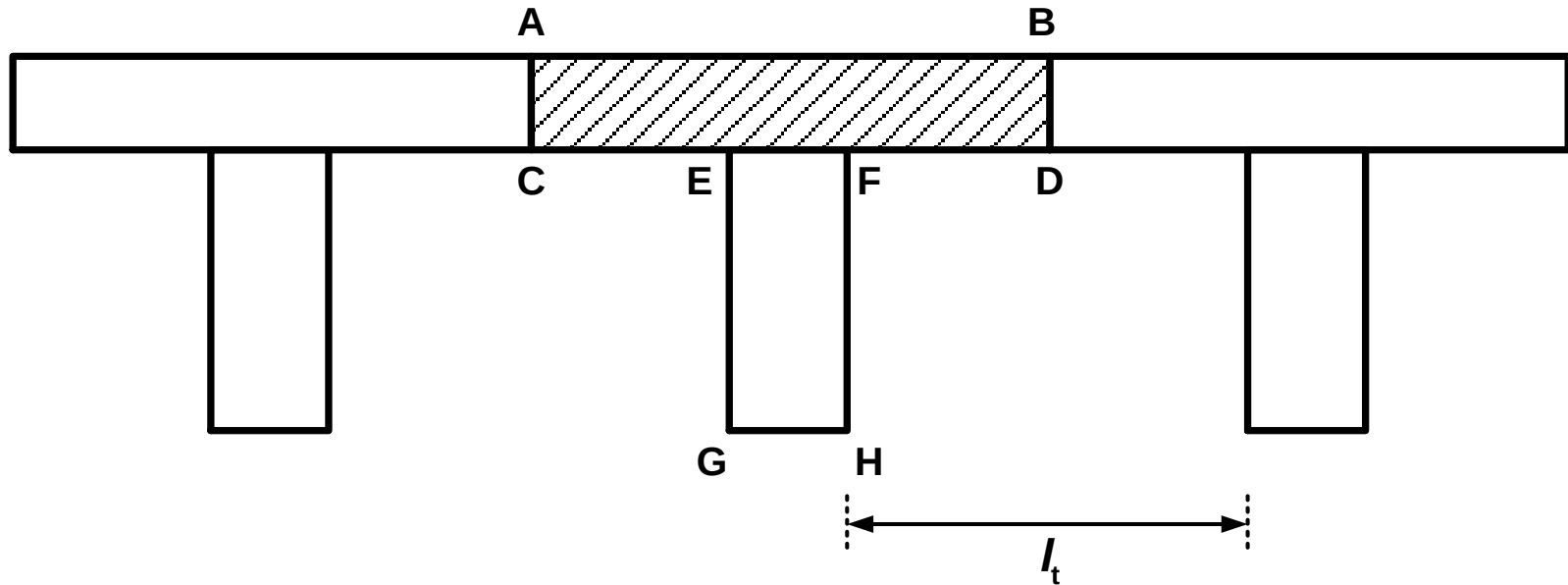
- **La poutre sera exposée aux intempéries**
- **La largeur de la section est $b = 25$ cm**
- **Caractéristiques du béton : $f_{c28} = 27$ MPa ; $\gamma_b = 1.5$ et $\theta=1$**
- **Acier FeE400 ; $\gamma_s = 1.15$; $\varnothing_t=6$ mm**

Exercice n°4

Dimensionner la poutre de l'exercice n°3 sachant qu'elle fait partie d'un plancher de 20 cm d'épaisseur et que sa retombée ne peut pas dépasser 30 cm.

Sections en Té

a) Pourquoi des sections en Té



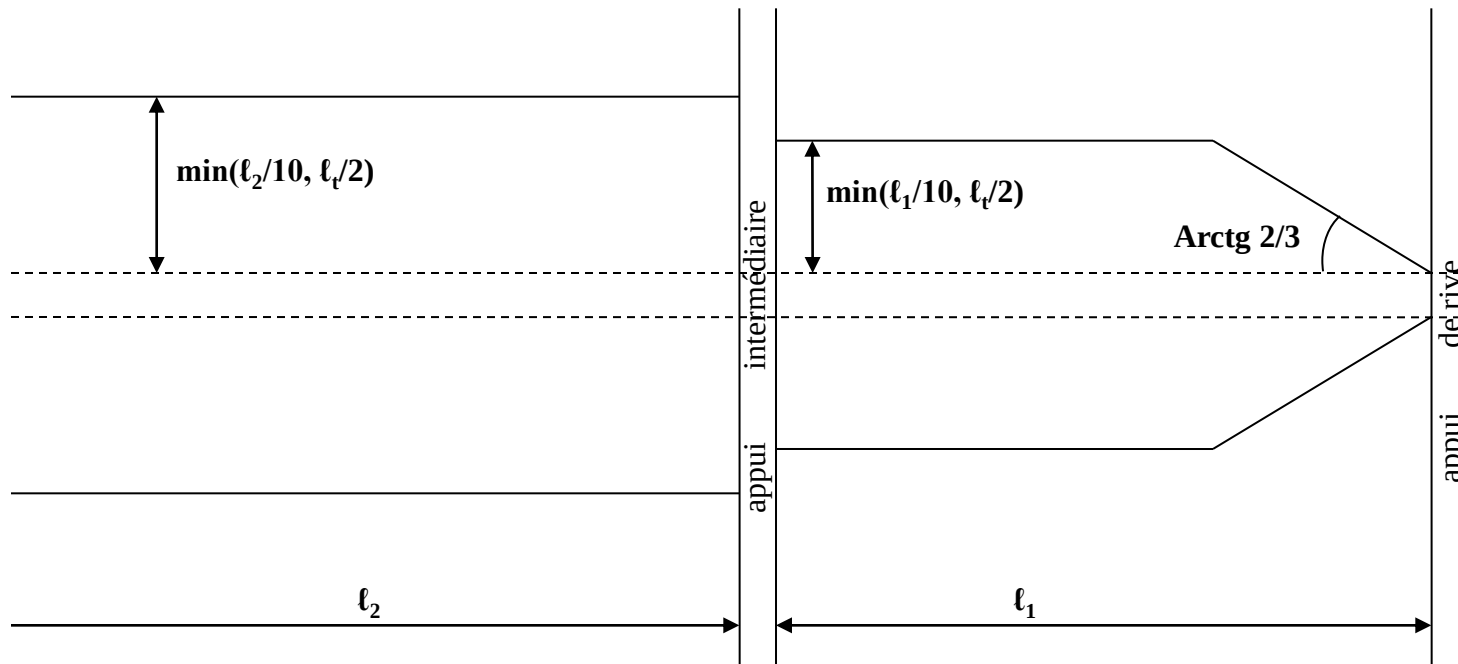
On appelle :

- "table de compression" ou tout simplement "table" la partie ABCD de la poutre
- "nervure" la partie EFGH

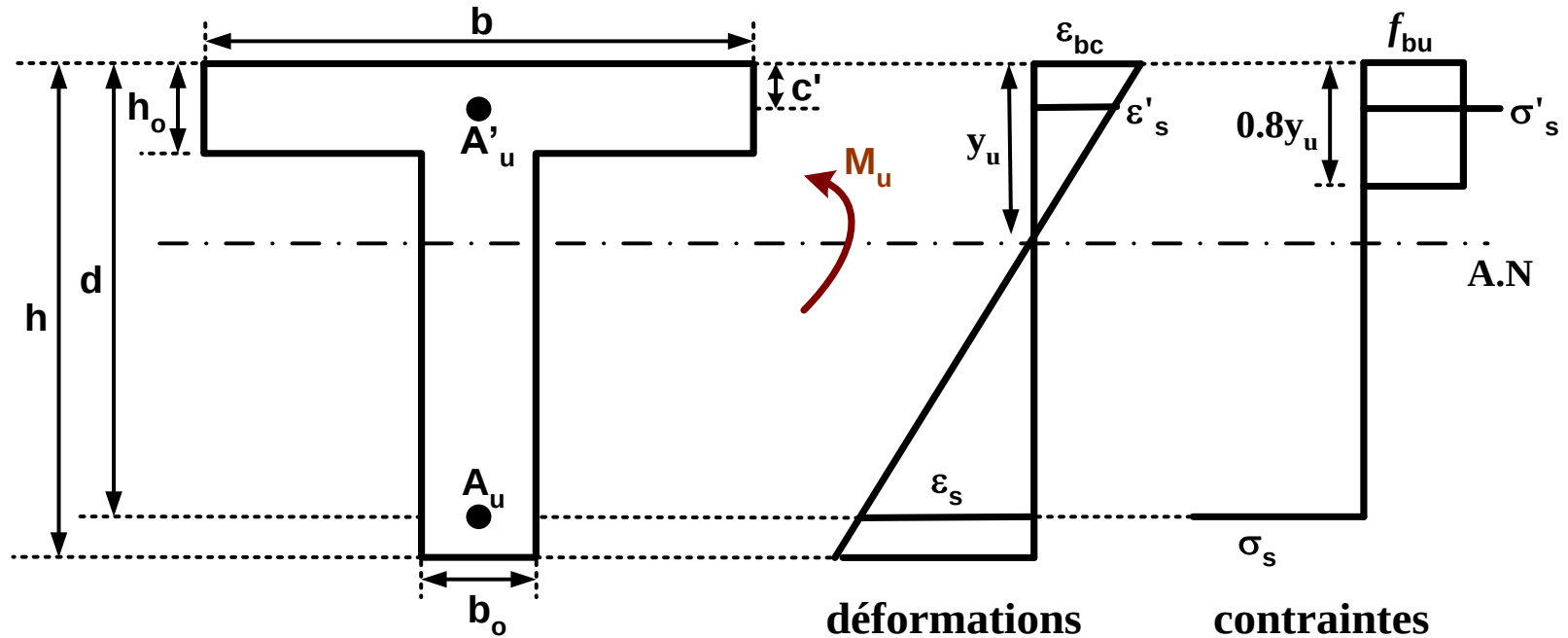
b) Largeur de table à prendre en compte dans les calculs

Le BAEL (Article A.4.1,3) définit la largeur du **débord** à prendre en compte par la plus restrictive des conditions suivantes :

- on ne doit pas attribuer une même zone de hourdis à deux nervures différentes,
- la largeur en cause ne doit pas dépasser le dixième de la travée,
- la largeur en cause ne doit pas dépasser les deux tiers de la distance de la section considérée à l'axe de l'appui extrême le plus proche.



c) Calcul des armatures



soit M_t le moment équilibré par la table de compression bh_o supposée entièrement comprimée

$$M_t = bh_o f_{bu} \left(d - \frac{h_o}{2} \right)$$

1^{er} cas

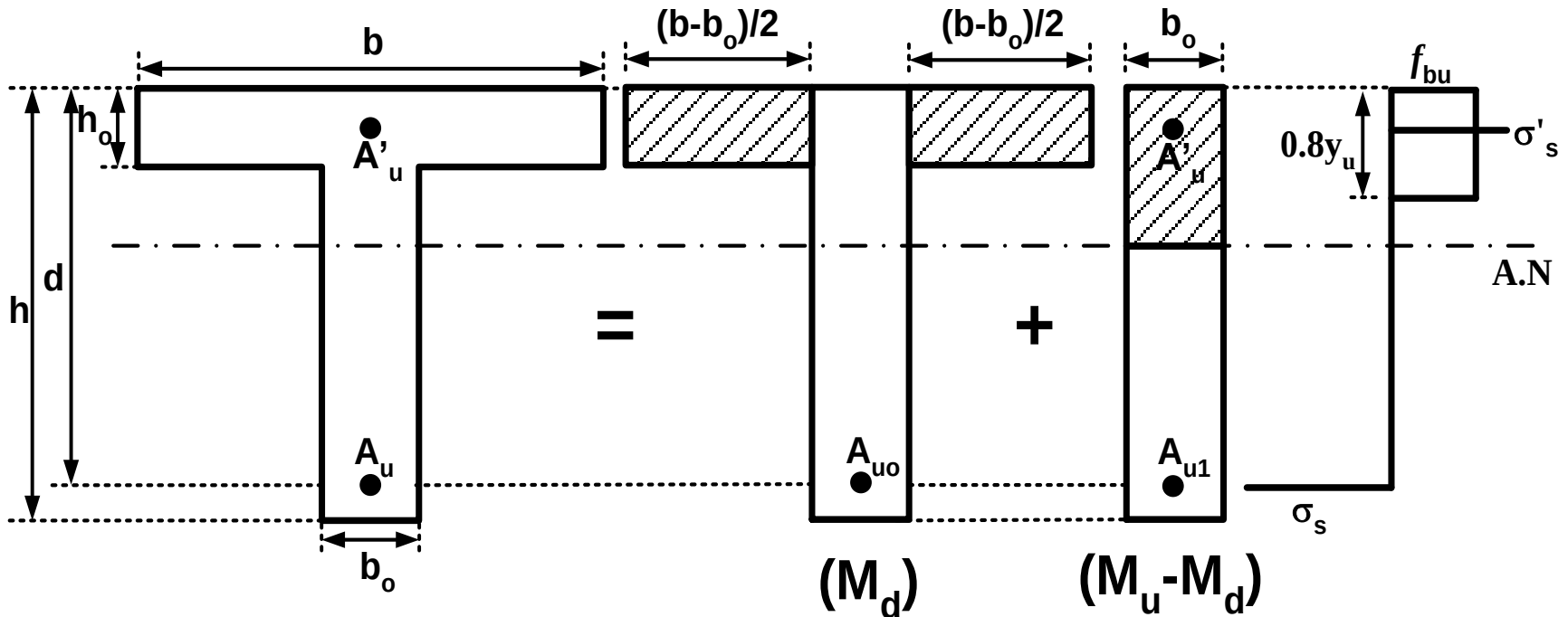
$$M_u \leq M_t \quad \text{c-à-d.} \quad 0.8 y_u \leq h_o \quad \text{ou} \quad y_u \leq 1.25 h_o$$

On se ramène à une section rectangulaire de largeur b et de hauteur utile d .

2^{ème} cas

$$M_u > M_t \quad \text{c-à-d.} \quad 0.8 y_u > h_o \quad \text{ou} \quad y_u > 1.25 h_o$$

Dans ce cas une partie de la nervure est comprimée. Le moment ultime est alors repris d'une part par les débords de la table et d'autre part par l'âme de la poutre.



- Le moment équilibré par les débords est :

$$M_d = (b - b_0) h_0 f_{bu} \left(d - \frac{h_0}{2}\right) = \frac{b - b_0}{b} \cdot M_t$$

L'équilibre des moments par rapport au point d'application de la résultante (F_{bd}) des efforts repris par les débords donne :

$$A_{uo} = \frac{M_d}{\left(d - \frac{h_0}{2}\right) \sigma_s}$$

- Le moment que doit équilibrer l'âme $b_0 h$ de la poutre est :

$$M_{\text{âme}} = M_u - M_d$$

On calcule :

$$\mu_u = \frac{M_u - M_d}{b_0 d^2 f_{bu}}$$

Si $\mu_u \leq \mu_\ell$ $\Rightarrow$ domaine 1b ou 2a donc $A'_u = 0$

$$A_{u1} = \frac{M_u - M_d}{z_u \frac{f_e}{\gamma_s}} \text{ avec } z_u = d(1 - 0.4\alpha_u) \text{ et } \alpha_u = 1.25(1 - \sqrt{1 - 2\mu_u})$$

la section totale d'acier est alors :

$$A_u = A_{u0} + A_{u1} = \frac{M_d}{(d - \frac{h_0}{2}) \frac{f_e}{\gamma_s}} + \frac{M_u - M_d}{d(1 - 0.4\alpha_u) \frac{f_e}{\gamma_s}}$$

- Si $\mu_u > \mu_\ell$ $\Rightarrow$ on se ramène au domaine 2a donc $A'_u \neq 0$
Soit $M_{b\ell} = \mu_\ell b_o d^2 f_{bu}$ le moment repris par le béton comprimé de l'âme.

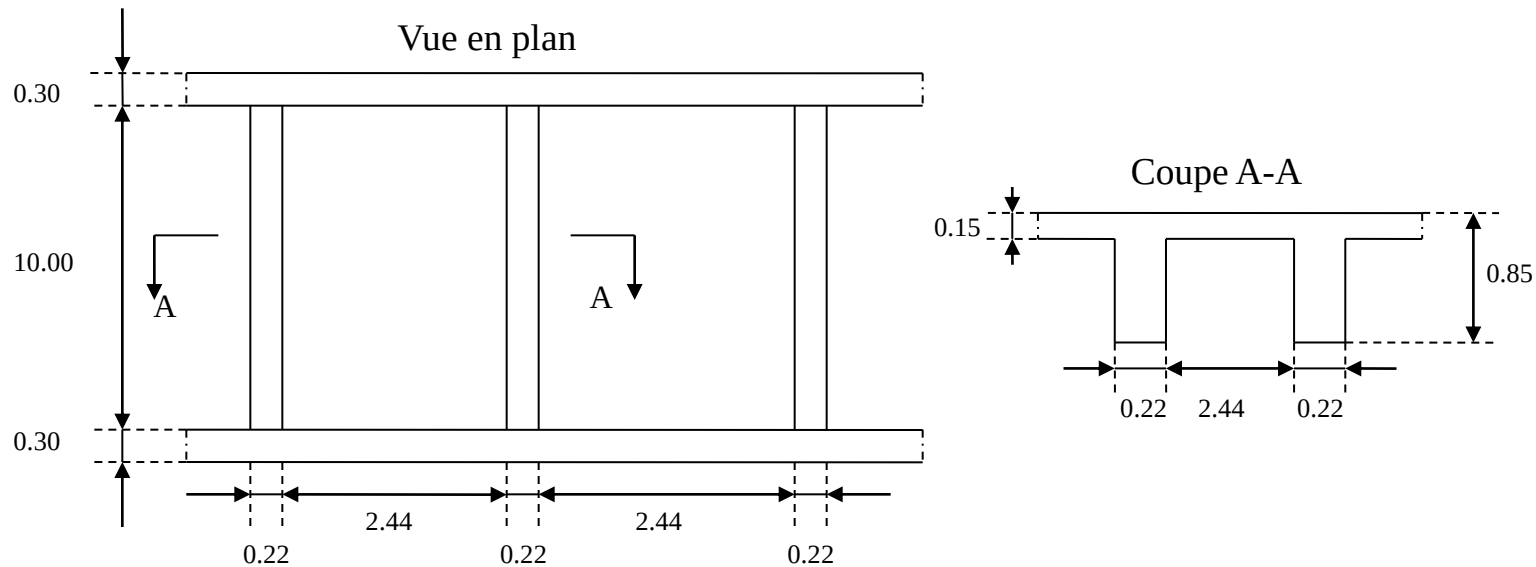
- Si $0.8 y_\ell > h_o$ alors
$$A_u = \frac{M_d}{(d - \frac{h_o}{2}) \frac{f_e}{\gamma_s}} + \frac{M_{b\ell}}{d(1 - 0.4a_\ell) \frac{f_e}{\gamma_s}} + \frac{M_u - M_d - M_{b\ell}}{(d - c') \frac{f_e}{\gamma_s}}$$

et
$$A'_u = \frac{M_u - M_d - M_{b\ell}}{(d - c') \sigma'_s} \quad \text{avec} \quad \sigma'_s = f(\epsilon'_s)$$

- Si $0.8 y_\ell \leq h_o$ on se ramène à une section rectangulaire (b,h) avec $A'_u \neq 0$

Exercice n°5

Déterminer à l'état limite ultime de résistance les armatures en section médiane des poutrelles du plancher représenté sur la figure ci-dessous :



Données

- charge variable uniformément répartie de durée d'application supérieure à 24 heures : $Q = 10 \text{ KN/m}^2$
- matériaux : béton de résistance $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et acier FeE 500
- enrobage : $e = 3 \text{ cm}$

Etat Limite de Service vis-à-vis de la durabilité de la structure

1) Principe de justification

Etat limite ultime de résistance $\Rightarrow$ comparaison des sollicitations,

Etat limite de service $\Rightarrow$ vérification des contraintes calculées conformément aux hypothèses de l'article A.4.5.1 et suivants les combinaisons de sollicitations de l'article A.3.3.3

Les vérifications à effectuer (Article A.4.5) portent sur :

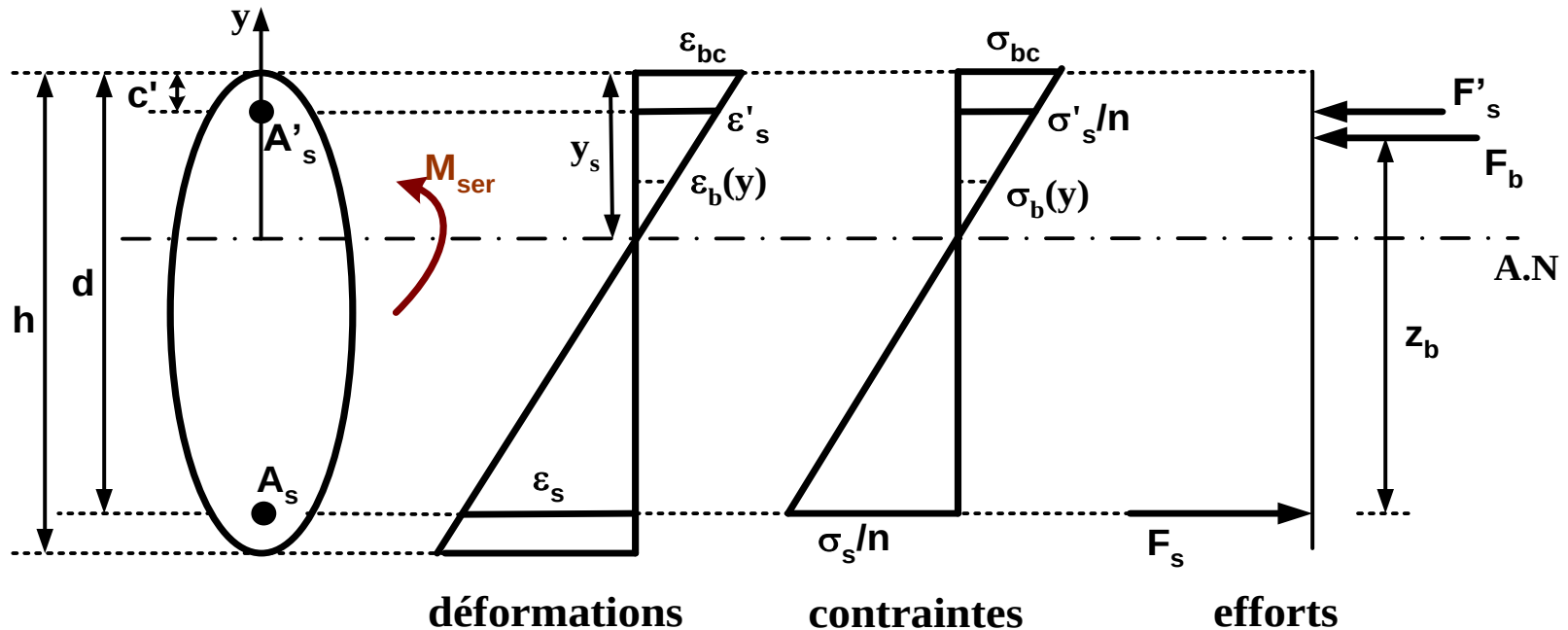
- Un état limite de compression du béton : $\sigma_b \leq \bar{\sigma}_b$
- Un état limite d'ouverture des fissures : $\sigma_s \leq \bar{\sigma}_s$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_b : \text{contrainte admissible en compression du béton,} \\ \bar{\sigma}_s : \text{contrainte admissible en traction de l'acier.} \end{array} \right.$

2) Hypothèses de calcul

- les sections droites restent planes après déformation (hypothèse de Navier-Bernoulli),
- il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures et le béton,
- le béton tendu est négligé,
- l'aire des aciers est supposée concentrée en son centre de gravité pourvu que l'erreur ainsi commise sur les déformations unitaires ne dépasse pas 15% (ce qui est généralement réalisé en pratique),
- le béton et l'acier sont considérés comme des matériaux linéairement élastiques,
- le rapport du module d'élasticité longitudinal de l'acier à celui du béton est : $n = 15$

3) Notations



A la distance y de l'axe neutre, nous avons :

$$\varepsilon_b(y) = k.y$$

et $\sigma_b(y) = E_b \varepsilon_b(y) = k.E_b.y = K.y$

or $n = E_s/E_b = \sigma_s/\sigma_b$ d'où $\sigma_s(y) = n.\sigma_b(y) = n.K.y$

4) Calcul des contraintes

$$\sigma_{bc} = K y_s$$

$$\sigma_s = n K (d - y_s)$$

$$\sigma'_s = n K (y_s - c')$$

Nous pourrions, donc, calculer σ_{bc} , σ'_s et σ_s dès que y_s et K seront connus.

L'équilibre des efforts normaux permet de calculer y_s

L'équilibre des moments permet de calculer K

Détermination de la profondeur " y_s " de l'axe neutre

Equilibre des efforts normaux : $F_b + F'_s - F_s = 0$

$$F_b = \iint_{B_c} \sigma_b(y) dB = K \iint_{B_c} y dB = K.S_b$$

$$F_s = \iint_{A_s} \sigma_s(y) dA = n.K \iint_{A_s} y dA = n.K.S_a$$

$$F'_s = \iint_{A'_s} \sigma'_s(y) dA' = n.K \iint_{A'_s} y dA' = n.K.S'_a$$

On aura alors : $K(S_b + n S'_a - n S_a) = 0$

d'où : $S_b + n S'_a - n S_a = 0$

Avec S_b , S_a et S'_a les moments statiques par rapport à l'axe neutre des sections B_c , A_s et A'_s .

Les armatures étant considérées concentrées en leur centre de gravité, la relation devient alors :

$$S_b + n A'_s(y_s - c') - n A_s(d - y_s) = 0$$

La résolution de cette équation donne y_s (profondeur de l'axe neutre)

Détermination du coefficient "K"

L'équilibre des moments donne :

$$\iint_{B_c} \sigma_b(y) y dB + \iint_{A'_s} \sigma'_s(y) y dA' + \iint_{A_s} \sigma_s(y) y dA = M_{ser}$$

$$K \left(\iint_{B_c} y^2 dB + n \cdot \iint_{A'_s} y^2 dA' + n \cdot \iint_{A_s} y^2 dA \right) = M_{ser}$$

donc $K(I_b + n I_a + n I'_a) = M_{ser}$

d'où : $K = M_{ser}/I$ avec $I = I_b + n I_a + n I'_a$

I est le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre de la section homogène réduite.

I_b , I_a et I'_a sont les moments d'inertie par rapport à l'axe neutre des sections B_c , A_s et A'_s .

Les armatures étant considérées concentrées en leur centre de gravité, on aura alors :

$$I = I_b + nA'_s (y_s - c')^2 + nA_s(d - y_s)^2$$

6) Expressions des contraintes

Les contraintes sont alors données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{bc} = \frac{M_{ser}}{I} \cdot y_s \\ \sigma'_s = n \cdot \frac{M_{ser}}{I} (y_s - c') \\ \sigma_s = n \cdot \frac{M_{ser}}{I} (d - y_s) \end{array} \right.$$

7) Vérifications des contraintes

On doit donc vérifier que : $\begin{cases} \sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_b \\ \text{et} \quad \sigma_s \leq \bar{\sigma}_s \end{cases}$

Contrainte admissible en compression du béton:

$\bar{\sigma}_b = 0.6 f_{cj}$ avec f_{cj} = résistance à la compression du béton à "j" jours

Contraintes admissibles en traction de l'acier:

☞ *Fissuration peu préjudiciable:* contrainte non limitée

☞ *Fissuration préjudiciable:* $\bar{\sigma}_s = \min\left(\frac{2}{3} f_e; 110\sqrt{\eta f_{tj}} \text{ MPa}\right)$

☞ *Fissuration très préjudiciable:* $\bar{\sigma}_s = \min\left(\frac{f_e}{2}; 90\sqrt{\eta f_{tj}} \text{ MPa}\right)$

avec : f_e = limite d'élasticité garantie des armatures

η = coefficient de fissuration : $\eta = \begin{cases} 1 & \text{pour les ronds lisses} \\ 1.6 & \text{pour les barres H.A.} \end{cases}$

✓ *Fissuration peu préjudiciable (ou peu nuisible)*

La fissuration est considérée comme peu préjudiciable lorsque:

- les éléments en cause sont situés dans des locaux couverts et clos, non soumis à des condensations,
- les parements susceptibles d'être fissurés ne sont pas visibles.

✓ *Fissuration préjudiciable*

La fissuration est considérée comme préjudiciable lorsque les éléments en cause sont exposés aux intempéries ou à des condensations, ou peuvent être alternativement noyés et émergés en eau douce.

✓ *Fissuration très préjudiciable*

La fissuration est considérée comme très préjudiciable lorsque les éléments en cause sont exposés à une atmosphère très agressive (eau de mer, brouillards salins, gaz ou sols particulièrement corrosifs).

Dans ce cas,

- le diamètre des armatures les plus proches des parois doit être au moins égal à 8mm
- et si $\Phi \geq 20\text{mm}$ alors l'espacement des armatures est $e_h \leq 3\Phi$

Exercice n°6

On se propose de dimensionner une poutre de pont de section rectangulaire $B=0.22 \times 0.50 \text{ m}^2$.

Sachant que la section la plus sollicitée est soumise à:

- un moment dû aux charges permanentes (y compris le poids propre):
 $M_g=30 \text{ KN.m}$
- un moment dû aux charges de chaussée : $M_q=75 \text{ KN.m}$

$f_{c28} = 25 \text{ MPa}$; $\gamma_b = 1.5$; $\theta = 1$ et $f_e = 400 \text{ MPa}$

- 1) calculer à l'état limite ultime de résistance la section d'armatures longitudinales.
- 2) vérifier les contraintes à l'état limite de service.

Exercice n°6bis

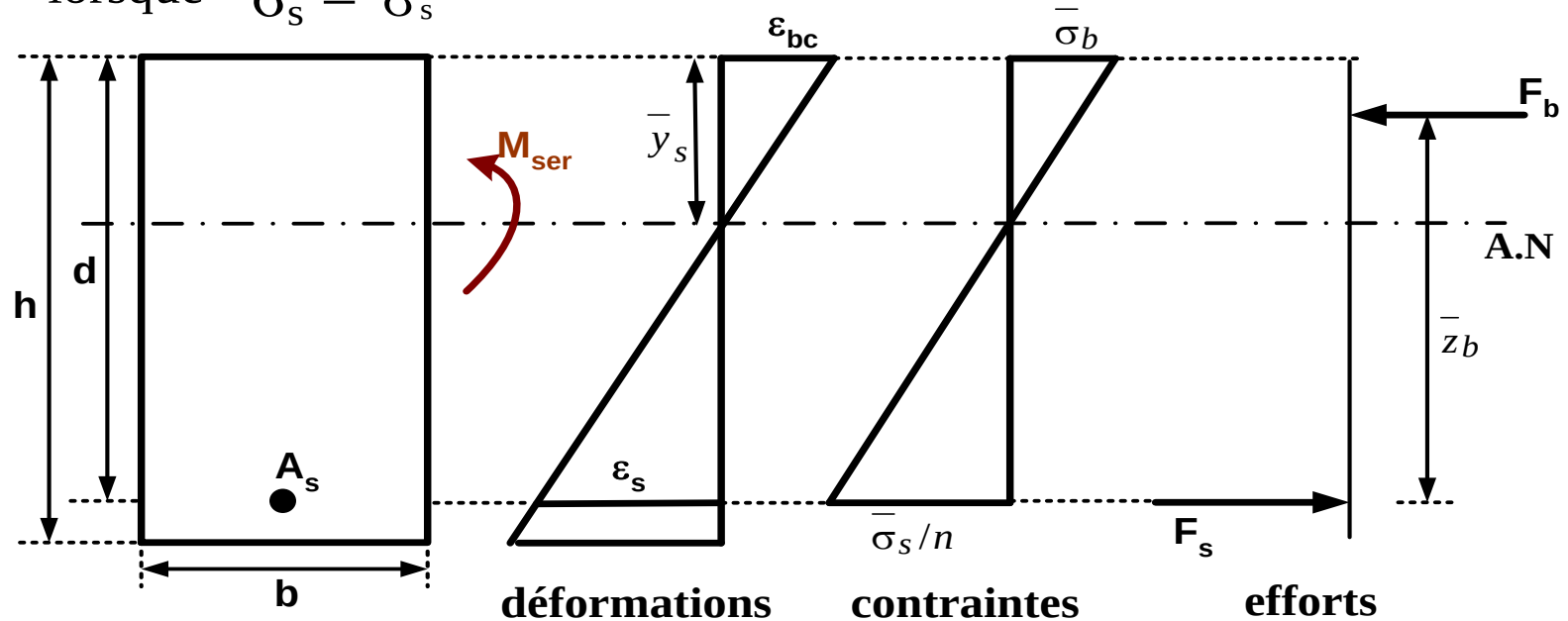
Vérifier à l'état limite de service la poutrelle de l'exercice n°5 sachant que la fissuration est préjudiciable.

Calcul des armatures en ELS

I. Cas d'une section rectangulaire

1) Notion de moment résistant béton

On appelle moment résistant béton, le moment pour lequel $\sigma_{bc} = \bar{\sigma}_b$ lorsque $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$

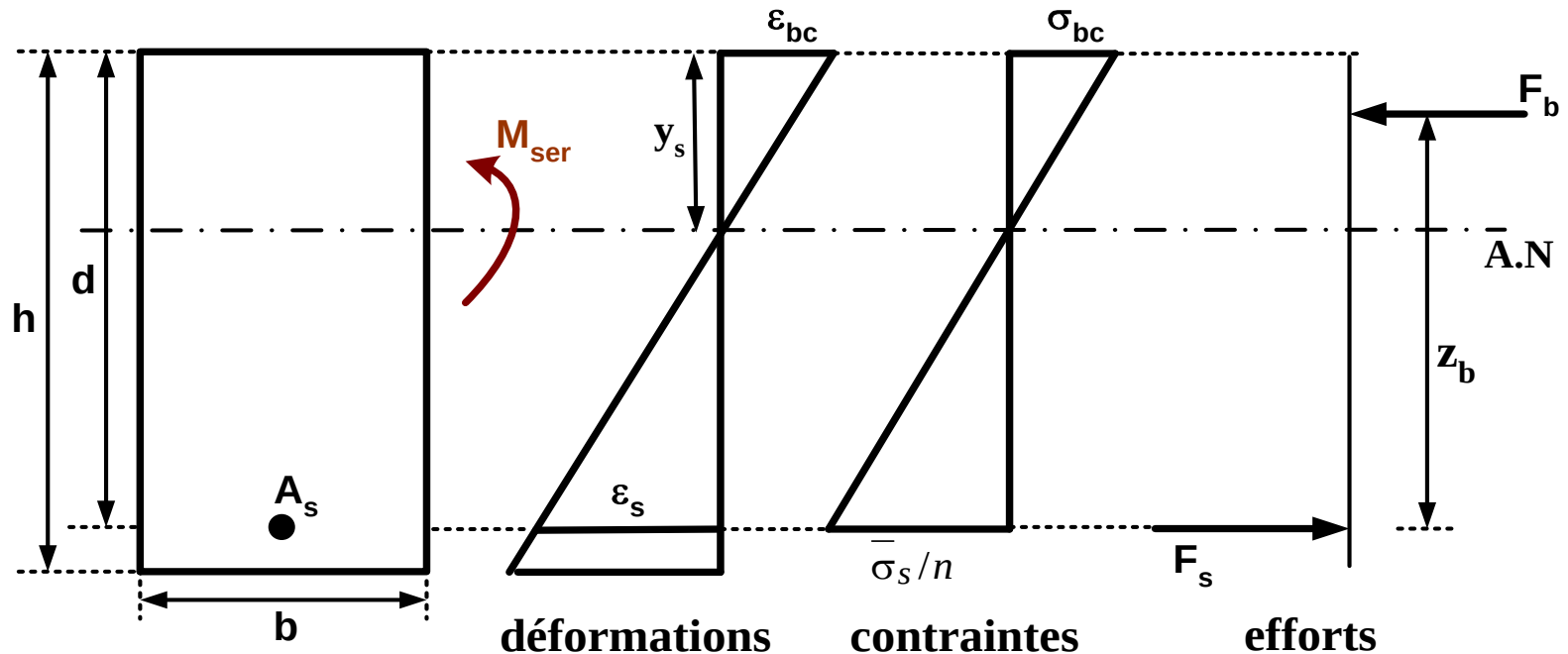


$$F_b = \frac{1}{2} b \bar{y}_s \bar{\sigma}_b \quad \text{et} \quad M_{rb} = F_b \bar{z}_b \quad \text{avec} \quad \bar{z}_b = d - \frac{\bar{y}_s}{3} = d \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_s}{3}\right)$$

$$M_{rb} = \frac{1}{2} \bar{\alpha}_s \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_s}{3}\right) b d^2 \bar{\sigma}_b \quad \text{avec} \quad \bar{\alpha}_s = \frac{\bar{y}_s}{d} = \frac{n \bar{\sigma}_b}{n \bar{\sigma}_b + \bar{\sigma}_s}$$

2) Calcul des armatures

- Cas où $M_{ser} \leq M_{rb} \implies \sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_b$ et $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$
 $\implies$ on n'a pas besoin d'armatures comprimées



$$A_s = \frac{M_{ser}}{z_b \bar{\sigma}_s} \quad \text{avec} \quad z_b = d \left(1 - \frac{\alpha_s}{3}\right)$$

$$M_{ser} = \frac{1}{2} \alpha_s \left(1 - \frac{\alpha_s}{3}\right) b d^2 \sigma_{bc} \quad \text{avec} \quad \sigma_{bc} = \frac{\bar{\sigma}_s}{n} \frac{\alpha_s}{1 - \alpha_s}$$

$$\text{d'où} \quad M_{ser} = \frac{\bar{\sigma}_s}{2n} \frac{\alpha_s^2}{1 - \alpha_s} \left(1 - \frac{\alpha_s}{3}\right) b d^2$$

$$\text{on pose} \quad \mu_s = \frac{M_{ser}}{b d^2 \bar{\sigma}_s} = \frac{1}{2n} \frac{\alpha_s^2}{1 - \alpha_s} \left(1 - \frac{\alpha_s}{3}\right)$$

$$\text{d'où} \quad 2 n \mu_s (1 - \alpha_s) = \alpha_s^2 \left(1 - \frac{\alpha_s}{3}\right)$$

α_s est donc obtenue par résolution de l'équation :

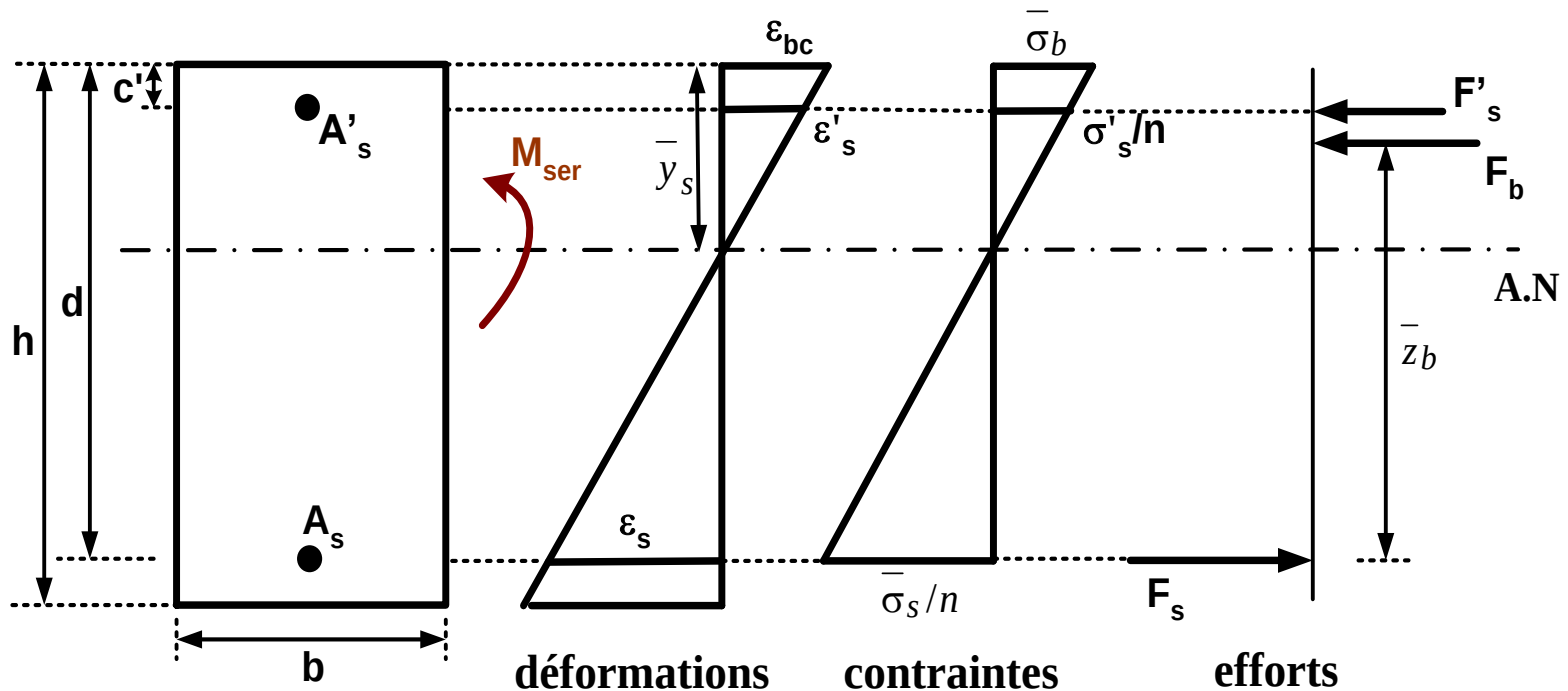
$$\alpha_s^3 - 3\alpha_s^2 - 6n \mu_s \alpha_s + 6n\mu_s = 0 \quad (0 \leq \alpha_s \leq 1)$$

Remarque

En pratique, on utilise une valeur approchée par défaut de z_b qui conduit à une section A_s par léger excès :

$$\bar{z}_b = d \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_s}{3}\right) \quad \text{d'où} \quad A_s = \frac{M_{ser}}{\bar{z}_b \bar{\sigma}_s}$$

- Cas où $M_{ser} > M_{rb} \Rightarrow \sigma_{bc} > \bar{\sigma}_b$ et $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$
 $\Rightarrow$ il faut mettre des armatures comprimées



Le moment équilibré par le béton étant : $M_{rb} = \mu_{rb} b d^2 \bar{\sigma}_b$

L'équilibre des moments par rapport au centre de gravité des aciers tendus donne :

$$A'_s = \frac{M_{ser} - M_{rb}}{(d - c') \sigma'_s} \quad \text{avec} \quad \sigma'_s = n \bar{\sigma}_b \frac{\bar{y}_s - c'}{\bar{y}_s}$$

Et l'équilibre des efforts normaux donne:

$$A_s = \frac{M_{rb}}{\bar{Z}_b \bar{\sigma}_s} + \frac{M_{ser} - M_{rb}}{(d - c') \bar{\sigma}_s} \quad \text{avec} \quad \bar{Z}_b = d \left(1 - \frac{\alpha_s}{3}\right)$$

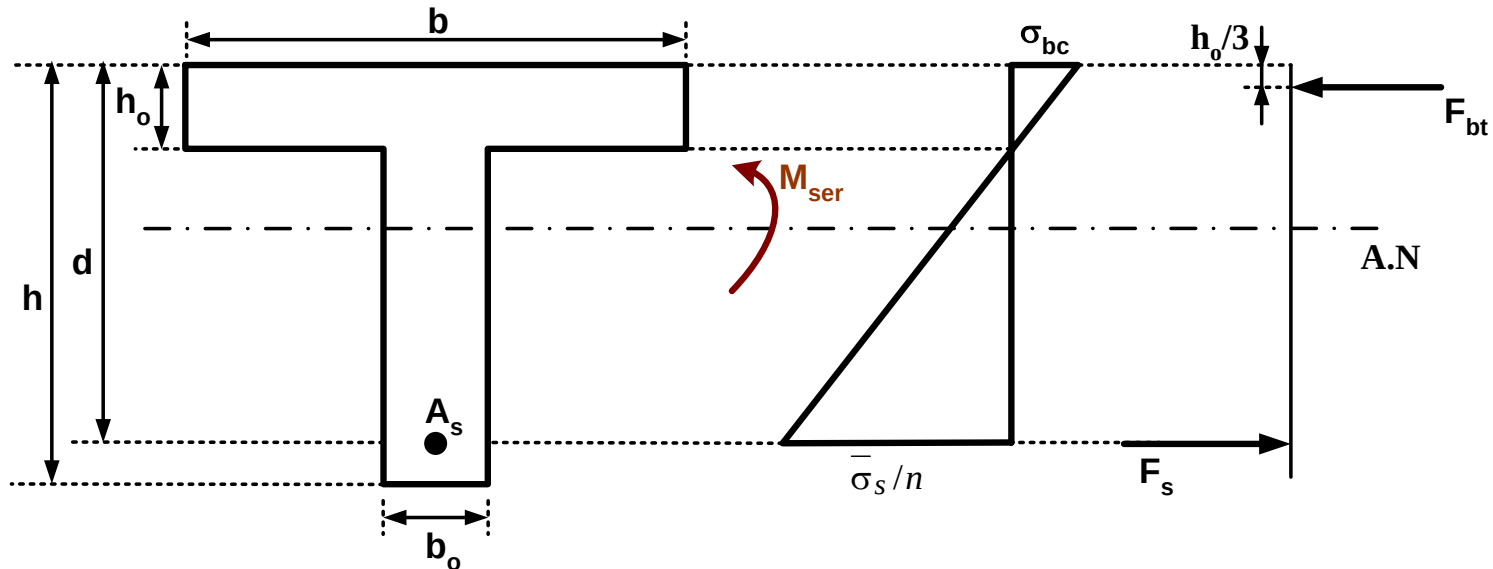
Exercice n°7

Dimensionner à l'état limite de service la poutre de l'exercice n°6.

II. Cas d'une section en T

1) Moment de référence

C'est le moment équilibré par la seule table entièrement comprimée pour atteindre $\bar{\sigma}_s$ dans les aciers tendus.



$$M_{ts} = \frac{1}{2} b h_o \sigma_{bc} \left(d - \frac{h_o}{3} \right) \quad \text{avec} \quad \sigma_{bc} = \frac{\bar{\sigma}_s}{n} \frac{h_o}{d - h_o}$$

$$\text{d'où :} \quad M_{ts} = \frac{\bar{\sigma}_s}{2n} \frac{d - \frac{h_o}{3}}{d - h_o} b h_o^2$$

2) Calcul des armatures

- Cas où $M_{ser} \leq M_{ts}$ $\Rightarrow$ l'axe neutre tombe dans la table
section rectangulaire de largeur b
- Cas où $M_{ser} > M_{ts}$ $\Rightarrow$ l'axe neutre tombe dans la nervure

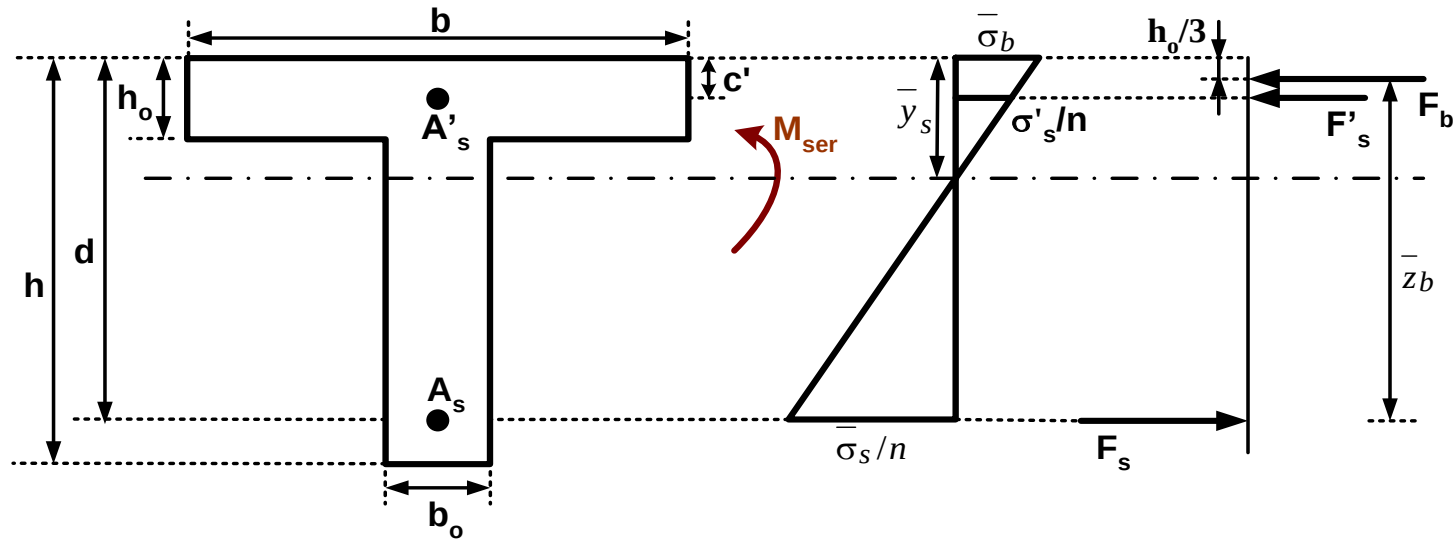
Le calcul exact étant complexe, on préfère utiliser des expressions approchées pour le bras de levier z_b .

- ✓ pour les planchers de bâtiments :
ou $\begin{cases} z_b = 0.99d - 0.4h_o \\ z_b = d - 0.5h_o \end{cases}$
- ✓ pour les ouvrages d'art : $z_b = 0.93d$

On calcule $A_s = \frac{M_{ser}}{z_b \sigma_s}$ et on vérifie les contraintes.

Si $\sigma_{bc} > \bar{\sigma}_b \implies A'_s \neq 0$

A'_s et A_s sont calculées en considérant le diagramme suivant :



- L'équilibre des moments par rapport aux armatures tendues donne :

$$A'_s = \frac{M_{ser} - F_b z_b}{(d - c') \sigma_s}$$

- et l'équilibre des efforts normaux donne :

$$A_s = \frac{F_b + A'_s \sigma_s}{\bar{\sigma}_s}$$

Exercice n°8

- 1) Calculer à l'ELS les armatures de la poutrelle étudiée dans l'exercice n°5 sachant que la fissuration est préjudiciable.
- 2) Vérifier les contraintes.

Exercice n°9

Dimensionner une poutre isostatique de portée $\ell = 6.85\text{m}$ et de section rectangulaire $B = 18 \times 60 \text{ cm}^2$, sachant que :

- la charge permanente autre que le poids propre est : $g_o = 5.30 \text{ KN/m}$
- la surcharge d'exploitation de durée d'application $> 24\text{h}$ est : $q = 22 \text{ KN/m}$
- la fissuration est peu préjudiciable
- les matériaux sont : $\left\{ \begin{array}{l} \text{un béton de résistance } f_{c28} = 25 \text{ MPa} \\ \text{des aciers haute adhérence } F_e E 500 \end{array} \right.$
- $d = 55 \text{ cm}$ et $c' = 3\text{cm}$

Remarque

- Si une section, dimensionnée à l'E.L.U, ne vérifie pas l'E.L.S on a toujours la possibilité dans le cas où la fissuration est préjudiciable de redimensionner les aciers à l'E.L.S puisque la contrainte admissible des aciers est définie.
- Par contre, quand la fissuration est peu préjudiciable, la contrainte des aciers tendus est inconnue, ce qui rend imprécis le dimensionnement à l'E.L.S.
- Dans le cas des sections rectangulaires, on définit une méthode de dimensionnement à l'E.L.U qui permet de vérifier l'état limite de compression du béton.

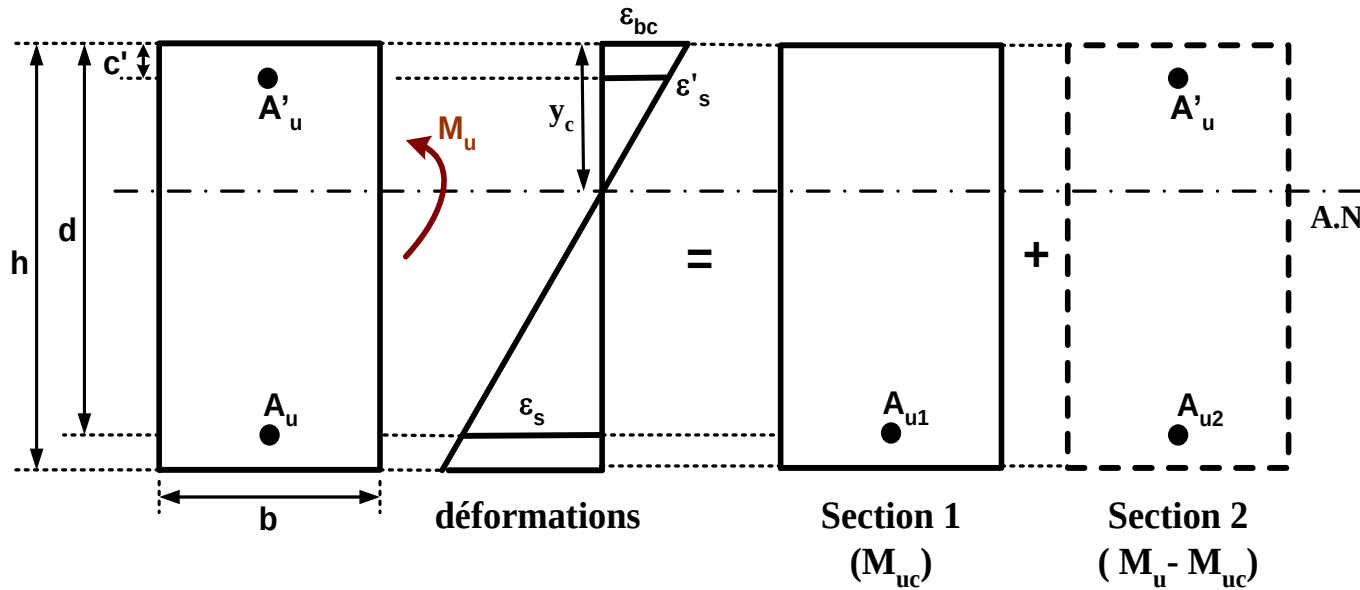
Méthode de calcul

On recherche la valeur μ_c du moment relatif telle qu'à l'E.L.S la contrainte de la fibre la plus comprimée soit égale à : $\bar{\sigma}_b = 0.6 f_{c28}$

- Si $\mu_u \leq \mu_c$ $A'_s = 0$ en E.L.S
- Si $\mu_u > \mu_c$ $A'_s \neq 0$ en E.L.S

1) Calcul des armatures comprimées

a) Dimensionnement à l'E.L.U

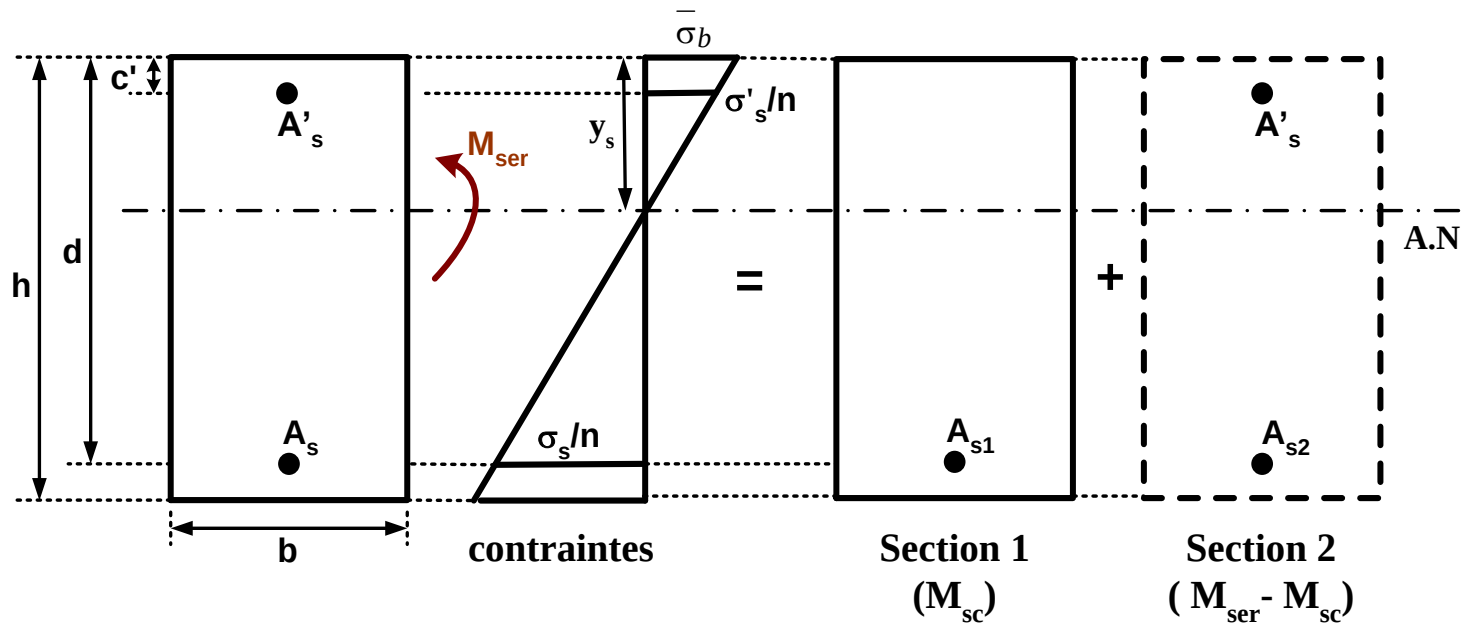


$$A'_u = \frac{M_u - M_{uc}}{(d - c') \sigma_{su}}$$

avec $M_{uc} = \mu_c b d^2 f_{bu}$

et $\sigma_{su} = \sigma(\epsilon'_s)$ avec $\epsilon_s = \frac{y_c - c'}{y_c} 3.5 \text{ ‰}$

b) Dimensionnement à l'E.L.S



Au moment critique M_{uc} correspond $M_{sc} = \frac{M_{uc}}{\rho} =$ moment maximal de service équilibré par la section 1.

La section d'armatures comprimée en E.L.S est donc :

$$A'_s = \frac{M_{ser} - M_{sc}}{(d - c') \sigma'_s} \quad \text{avec} \quad \sigma'_s = n \bar{\sigma}_b \frac{\alpha_s - \delta'}{\alpha_s} ; \quad \alpha_s = \frac{y_s}{d} \quad \text{et} \quad \delta' = \frac{c'}{d}$$

$$\text{d'où :} \quad A'_s = \frac{\rho(M_{ser} - M_{sc})}{(d - c') \rho \sigma'_s} = \frac{M_u - M_{uc}}{(d - c') \rho \sigma'_s}$$

2) Calcul des armatures tendues

La section d'armatures comprimées est alors : $A' = \max (A'_u ; A'_s)$

Si on pose : $\sigma'_{se} = \min (\sigma'_{su} ; \rho \sigma'_s)$ on aura $A' = \frac{M_u - M_{uc}}{(d - c') \sigma'_{se}}$

La section fictive 1 équilibre au plus M_{uc}
(elle équilibre réellement $M_{u1} = M_u - A' \sigma'_{se} (d - c')$)

la section d'armatures tendues est donc :

$$A = \frac{M_{uc}}{z_c \frac{f_e}{\gamma_s}} + A' \frac{\sigma'_{se}}{\frac{f_e}{\gamma_s}} \quad \text{avec} \quad z_c = d(1 - 0.4\alpha_c) \quad \text{et} \quad \alpha_c = 1.25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu_c})$$

Application (exercice n°9)

Coffrage des sections rectangulaires

Le choix des dimensions à donner aux sections est fonction des conditions à vérifier à la fois en E.L.U et en E.L.S :

- Dans le cas où la fissuration est peu préjudiciable :

$$bd^2 \geq \frac{M_u}{\mu_c f_{bu}}$$

- Si la fissuration est préjudiciable ou très préjudiciable :

$$bd^2 \geq \frac{M_{ser}}{\mu_{rb} \sigma_b}$$

Le choix des dimensions de la section est en fait une question d'expérience. On se reporte à des ouvrages analogues ou on se base sur des règles dites "règles de bonne pratique".

Condition de non fragilité

1) Définition d'une section non fragile (Article A.4.2.1) :

Est considérée comme non fragile, une section tendue ou fléchie telle que la sollicitation provoquant la fissuration du béton dans le plan de la section considérée entraîne dans les aciers une contrainte au plus égale à leur limite d'élasticité garantie.

2) Calcul de la section minimale d'armatures

- La sollicitation provoquant la fissuration du béton est celle qui conduit sur la fibre la plus tendue de la section à une contrainte égale à f_{t28} .

$$\sigma_i = M_f \frac{v'}{I} = f_{t28} \quad \Longrightarrow \quad M_f = f_{t28} \frac{I}{v'}$$

- La sollicitation de fissuration doit entraîner dans les aciers tendus une contrainte au plus égale à f_e :

$$M_f \leq A \cdot z_b \cdot f_e \quad \Longrightarrow \quad A \geq \frac{M_f}{z_b \cdot f_e}$$

La section minimale d'armatures nécessaire pour que la section ne soit pas fragile est alors :

$$A_{\min} = \frac{f_{t28}}{f_e} \frac{I}{z_b \cdot v'} \quad \left(\text{si } M < 0 \quad \text{alors} \quad A_{\min} = \frac{f_{t28}}{f_e} \frac{I}{z_b \cdot v} \right)$$

Cas d'une section rectangulaire

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \frac{bh^3}{12} \\ v = v' = \frac{h}{2} \\ z_b \approx 0.9d \quad \text{et} \quad d \approx 0.9h \end{array} \right.$$

ce qui conduit à : $\frac{A_{\min}}{bd} = 0.23 \frac{f_{t28}}{f_e}$

Exercice

Calculer dans le cas d'une section en T, la section minimale d'armature à mettre en œuvre.

Données : $b=80\text{cm}$; $h=70\text{cm}$; $b_o=25\text{cm}$; $h_o=10\text{cm}$; $f_{c28}=25\text{MPa}$; $f_e=400\text{MPa}$

Etat Limite de Service vis-à-vis des déformations

1) Dispositions générales

On peut admettre (Article B.6.5.1) qu'il n'est pas indispensable de procéder au calcul de flèches si les trois conditions suivantes sont vérifiées:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h}{\ell} \geq \max \left(\frac{1}{16} ; \frac{M_t}{10 M_o} \right) \\ \frac{A}{b_o d} \leq \frac{4.2}{f_e} \quad (f_e \text{ en MPa}) \\ \text{et} \quad \ell \leq 8 \text{ m} \end{array} \right. \quad \text{avec :} \quad \left\{ \begin{array}{l} h = \text{hauteur de la poutre} \\ \ell = \text{portée de la poutre} \\ M_t = \text{moment maximal en travée} \\ M_o = \text{moment dans la travée considérée isostatique} \\ b_o = \text{largeur de la nervure} \\ d = \text{hauteur utile de la poutre} \end{array} \right.$$

Si ces conditions ne sont pas vérifiées, on procède à l'évaluation des flèches.

2) Évaluation des flèches

- Le calcul des déformations globales doit tenir compte des phases successives de construction et des différentes sollicitations exercées.
- Pour la conduite du calcul, on distingue deux cas suivant que la pièce est fissurée ou non.
- Dans le cas des planchers, on procède à l'évaluation des flèches suivant l'article B.6.5.2.

3) Valeurs limites des flèches

Les valeurs limites des déformations qui peuvent résulter des conditions particulières d'exploitation de l'ouvrage sont fixées par le cahier des charges.

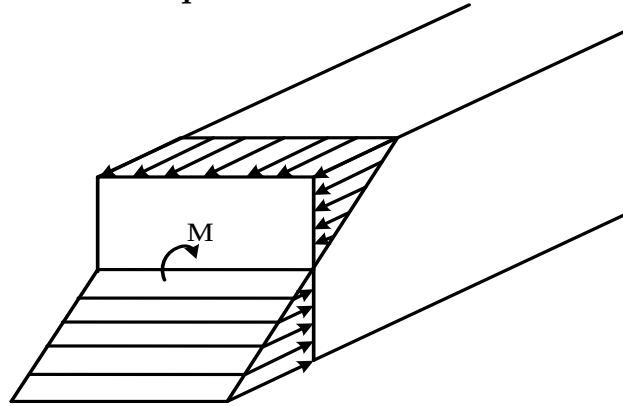
Dans le cas de bâtiments courants, il est par exemple admis que :

- pour les éléments reposant sur deux appuis ou plus, les flèches sont limitées à :
 - ✗ $\frac{\ell}{500}$ si $\ell \leq 5 \text{ m}$
 - ✗ $0.005 + \frac{\ell}{1000}$ si $\ell > 5 \text{ m}$ (la flèche et la portée sont exprimées en mètre)
- et pour les éléments en console, elles sont limitées à :
 - ✗ $\frac{\ell}{250}$ si $\ell \leq 2 \text{ m}$

Justification des poutres fléchies sous sollicitations d'effort tranchant

Rappels : Effets des efforts M et V

- a) Le moment fléchissant fait tourner la section jusqu'à ce que les contraintes normales qui apparaissent équilibrent cet effort.



- b) l'effort tranchant fait glisser les uns par rapport aux autres les plans perpendiculaires au plan moyen et ceux parallèles au plan moyen.



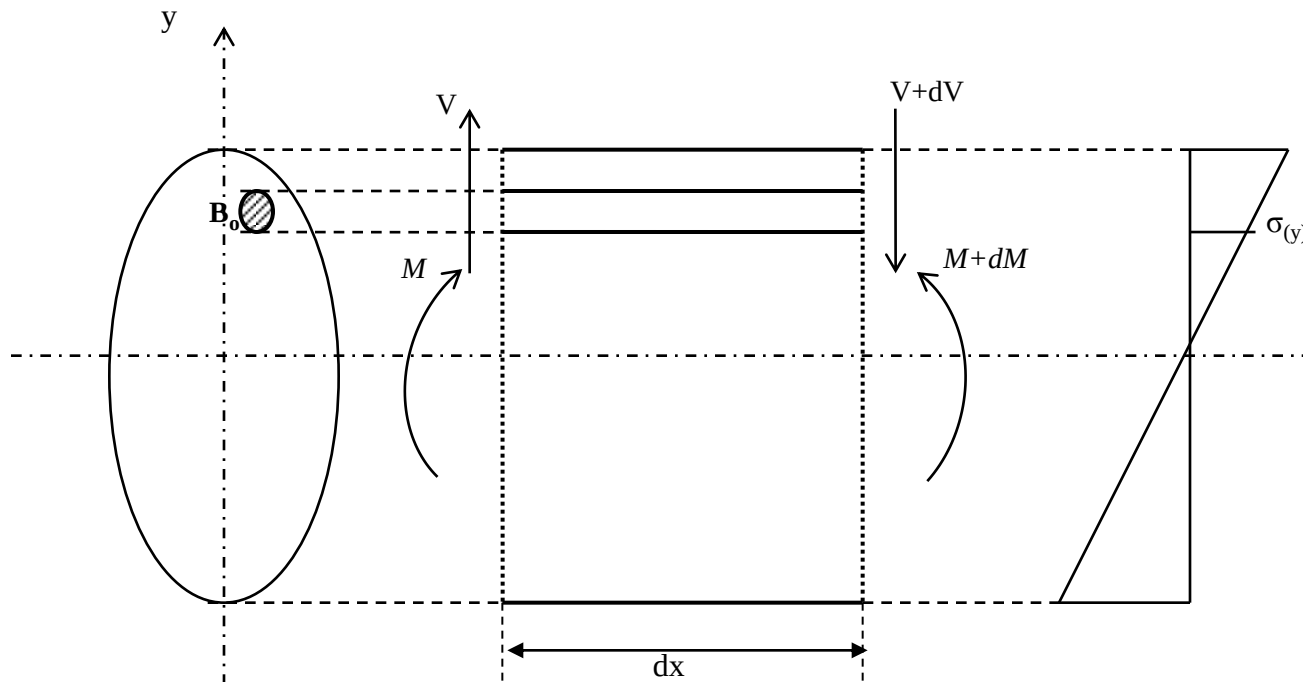
Des contraintes tangente τ apparaissent dans ces plans pour s'opposer à ces glissements.

Répartition des contraintes tangentielles

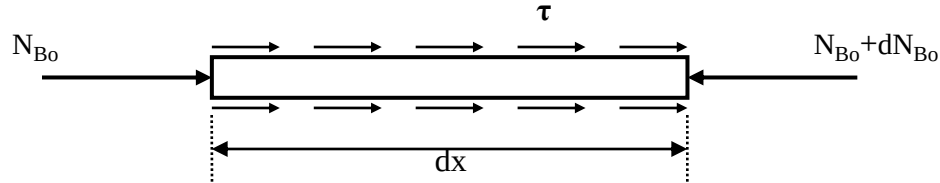
1) Contraintes tangentielles dans une poutre (Rappel RDM)

Hypothèses : $\left\{ \begin{array}{l} - \text{matériau homogène et élastique} \\ - \text{Calculs en phase élastique} \end{array} \right.$

Considérons un tronçon de poutre dx en équilibre



Efforts appliqués à la fibre d'aire B_o :



$$N_{B_o} = \iint_{B_o} \sigma_b(y) dB = \frac{M}{I} \iint_{B_o} y dB = \frac{M}{I} \cdot S_{B_o}$$

Effort normal sur la fibre d'aire B_o de longueur dx :

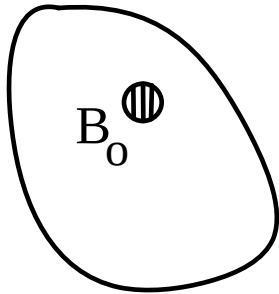
$$dN_{B_o} = \frac{dM}{I} S_{B_o}$$

Cet effort normal tend à faire glisser la fibre parallèlement à l'axe longitudinal de la poutre.

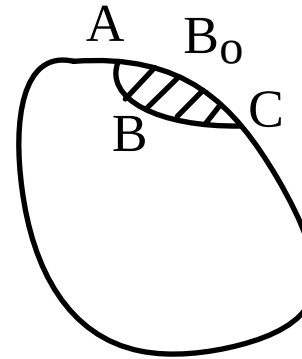


équilibré par la résultante des efforts qui s'exercent sur les faces latérales de la fibre.

Soit u : la trace de la surface de glissement sur le plan de la section



u = périmètre de B_0



u = arc(ABC)

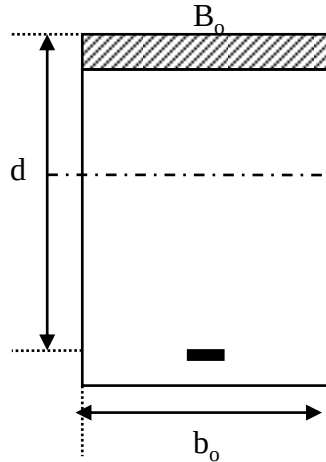
En supposant que les contraintes tangentes sont uniformément réparties, on peut écrire :

$$\tau \cdot u \cdot dx = \frac{dM}{dx} \cdot B_0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{B_0}{u \cdot I} = \frac{V}{u} \frac{S_{B_0}}{I}$$

Appliquons cette expression à différents cas.

2) Répartition des contraintes tangentes sur la hauteur d'une poutre en B.A.

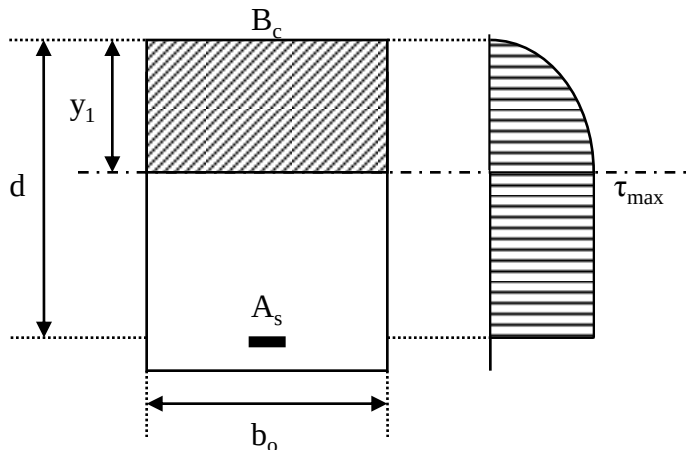
a) Section rectangulaire



$u = b_0 =$ largeur de la poutre au niveau du plan de cisaillement

$$\text{donc } \tau = \frac{V}{b_0} \frac{S_{B_0}}{I_1}$$

avec $I_1 =$ moment d'inertie de la section homogène réduite



La valeur de la contrainte est maximale au niveau de l'axe neutre

$$\tau_{\max} = \frac{V}{b_0} \frac{S_{B_c}}{I_1}$$

Sous l'axe neutre :

$$\tau = \text{cste} = \tau_{\max}$$

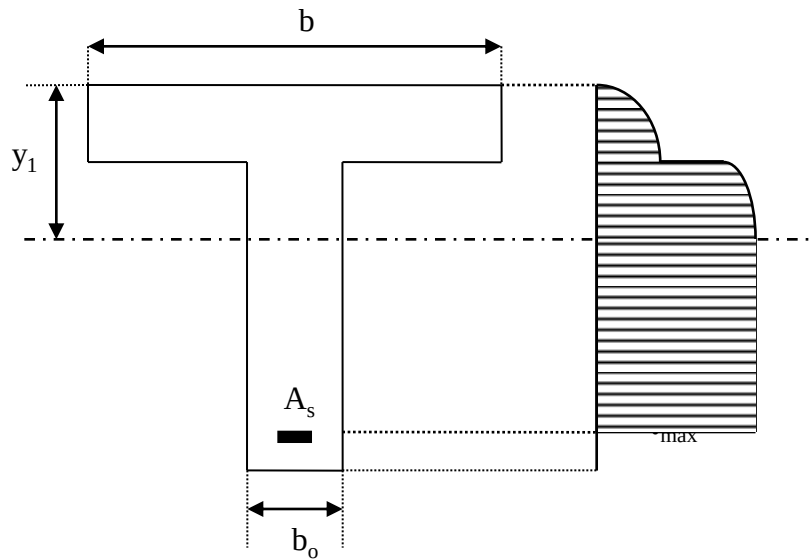
La résultante des efforts de compression qui s'exerce sur la section est : $N_{Bc} = \frac{M}{I_1} S_{Bc}$

Or $N_{Bc} = \frac{M}{z}$

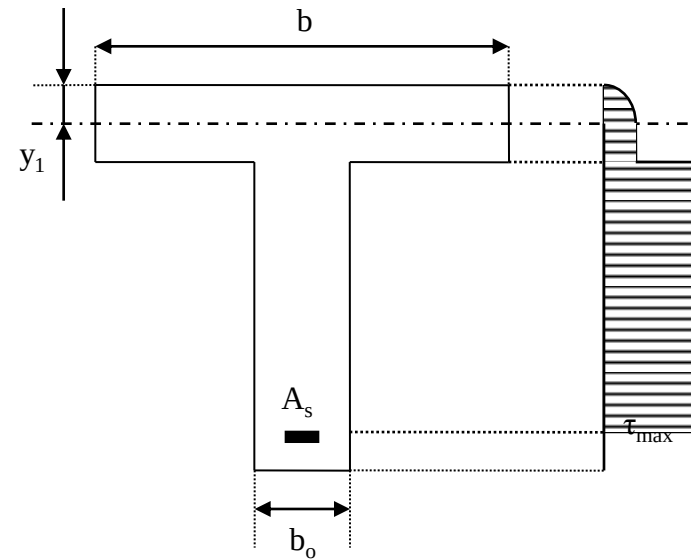
D'où le bras de levier des forces élastiques $z = \frac{I_1}{S_{Bc}}$

Donc $\tau_{\max} = \frac{V}{b_o z}$

b) Section en T



Axe neutre dans la nervure

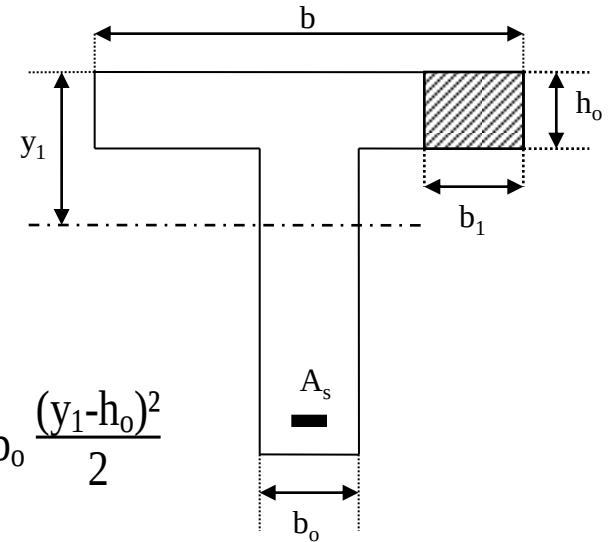


Axe neutre dans la table

3) Contrainte tangente sur une section verticale du hourdis d'une poutre en T

$$u = h_o \text{ donc } \tau = \frac{V}{I_1} \frac{S_{Bo}}{h_o}$$

$$\text{avec } S_{Bo} = b_1 h_o \left(y_1 - \frac{h_o}{2} \right)$$



$$\text{Moment statique du béton comprimé : } S_{Bc} = b h_o \left(y_1 - \frac{h_o}{2} \right) + b_o \frac{(y_1 - h_o)^2}{2}$$

Si on néglige la partie comprimée de l'âme on aura :

$$S_{Bc} \approx b h_o \left(y_1 - \frac{h_o}{2} \right) \quad \text{d'où} \quad \tau = \frac{V}{I_1} \frac{b_1}{b}$$

$$\text{A la jonction du hourdis avec l'âme, on aura donc : } \tau = \frac{V}{I_1} \frac{b - b_o}{2b}$$

4) Contrainte tangente à la périphérie des armatures longitudinales tendues

La contrainte à la périphérie des armatures longitudinales tendues est appelée "**contrainte d'entraînement des armatures**".

Soit $u = \sum u_i$ la somme des périmètres utiles des barres ou paquets de barres

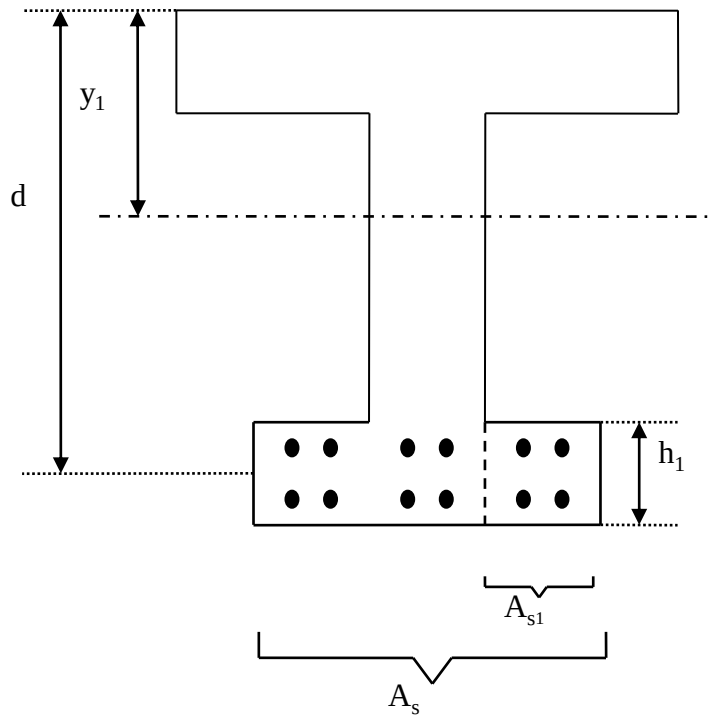
On a alors : $\tau = \frac{V}{I_1} \frac{n A_s (d - y_1)}{u}$ ou $\tau = \frac{V}{I_1} \frac{n A_s (d - y_1)}{\sum u_i}$

Sur un paquet de barres de section A_{si} , la contrainte d'entraînement est :

$$\tau = \frac{V}{u_i I_1} \frac{n A_s (d - y_1) A_{si}}{A_s}$$

donc : $\tau = \frac{V}{u_i I_1} \frac{A_{si}}{A_s}$ avec u_i le périmètre utile du paquet de barres considéré

5) Contrainte tangente dans le plan vertical de jonction entre nervure et saillie du talon



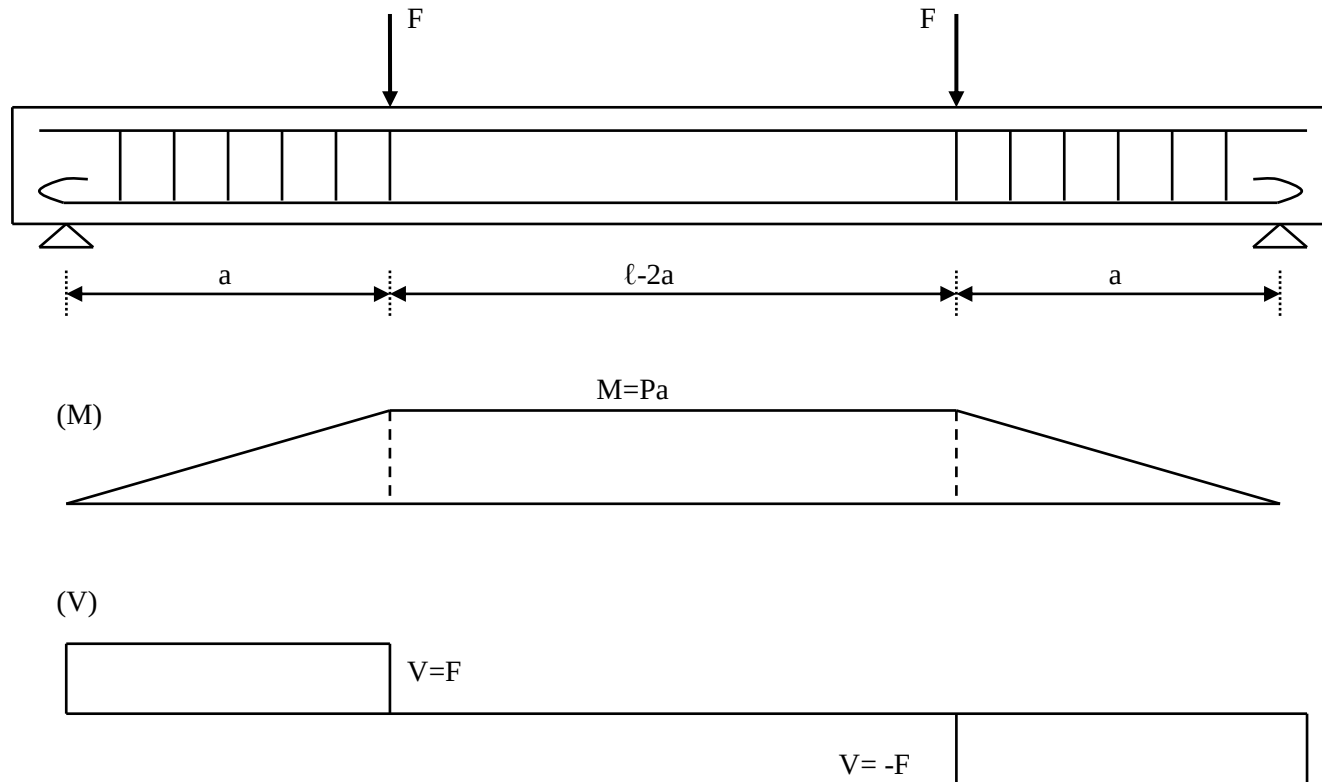
$u = h_1$: hauteur du talon

$$\tau = \frac{V}{b_1} \frac{n A_{s1} (d - y_1)}{I_1} = \frac{V}{h_1} \frac{n A_s (d - y_1)}{I_1} \frac{A_{s1}}{A_s}$$

$$\tau = \frac{V}{b_1 \cdot Z} \frac{A_{s1}}{A_s}$$

Comportement des poutres en béton armé

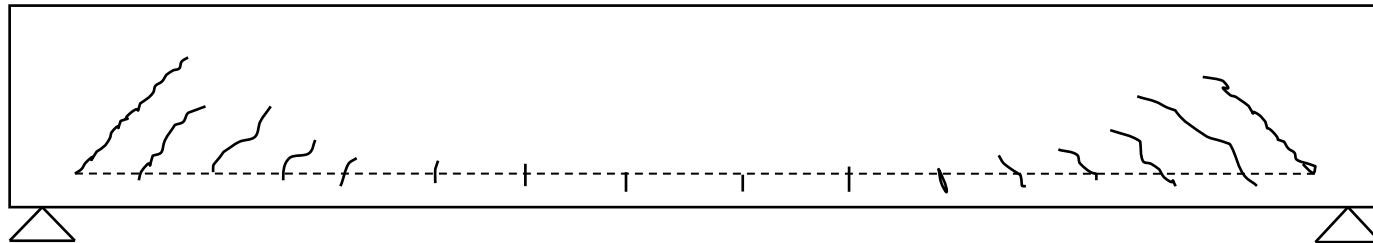
Considérons une poutre sur 2 appuis simples soumise à 2 charges concentrées F



1) Observation expérimentale

On fait croître les charges F :

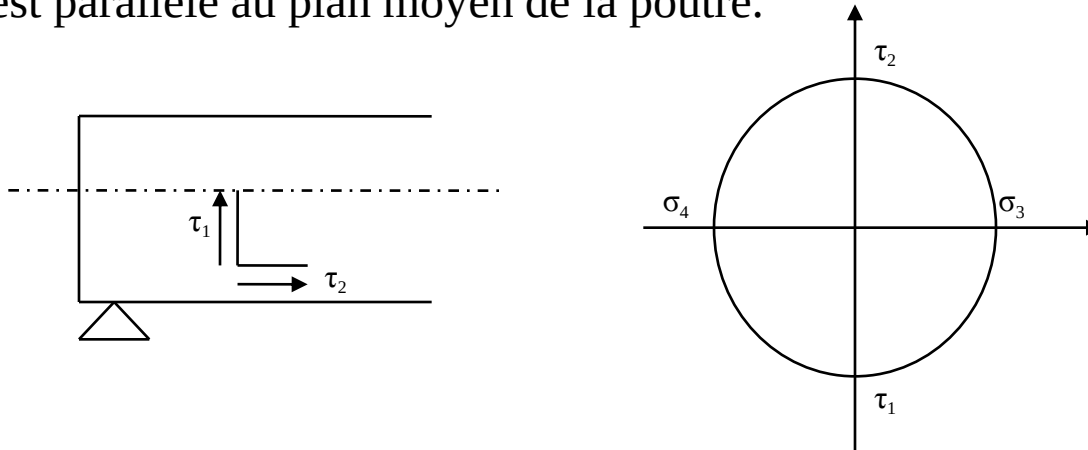
- dans un premier temps le béton n'est pas fissuré
- ensuite apparaissent des fissures inclinées dans la zone d'effort tranchant et verticales en fibres inférieures dans la zone de moment fléchissant
- si on augmente encore la charge, les fissures dans la zone d'effort tranchant progressent vers la face supérieure en s'inclinant d'avantage et les fissures dans la zone de moment fléchissant deviennent de plus en plus nombreuses et importantes. On observe aussi des fissures horizontales le long des armatures longitudinales.



- La pièce se transforme en un système de blocs de béton dont l'équilibre est assuré par leurs réactions mutuelles et par celles des armatures qui les relient.

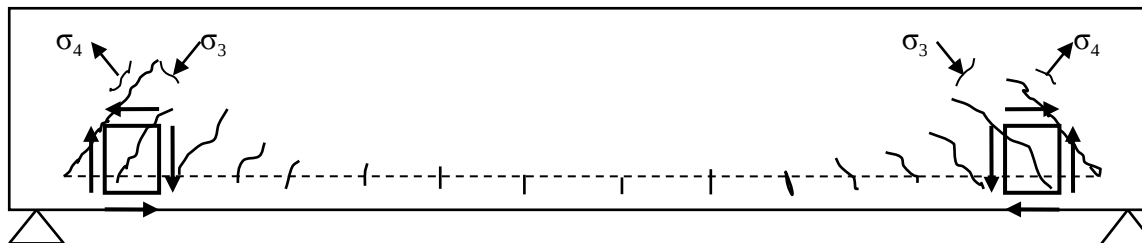
2) Etat de contrainte provoqué par l'effort tranchant

Considérons dans la zone tendue de la poutre, deux plans perpendiculaires dont l'un est parallèle au plan moyen de la poutre.



Les contraintes normales dans le béton tendu étant nulles, celui-ci se trouve dans un état de cisaillement pur ($\tau_1 = \tau_2 = \tau$).

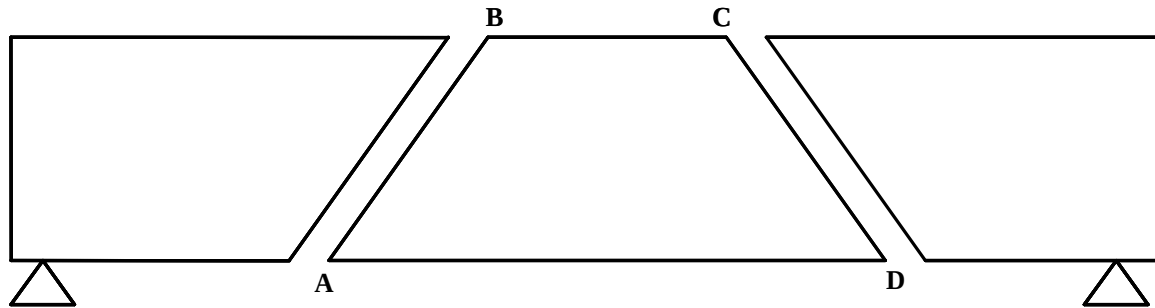
Le cercle de Mohr représentatif de cet état fait apparaître deux contraintes principales σ_3 de compression et σ_4 de traction ($\sigma_3 = \sigma_4 = \tau$) s'exerçant sur les plans 3 et 4 situés à $\pm\pi/4$ par rapport au plan 1;



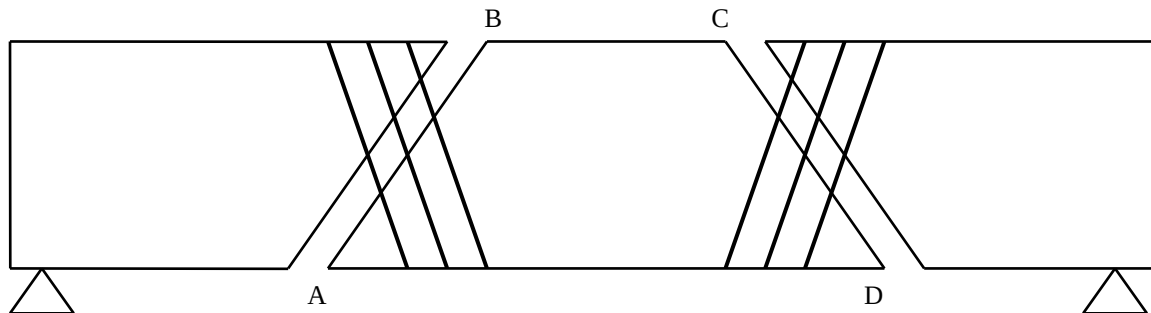
3) Règle de couture

L'effort tranchant a donc pour effet de créer des fissures inclinées sensiblement à 45° sur la ligne moyenne.

Schématiquement, si de telles fissures apparaissent, la partie ABCD de la poutre ci-dessous tendra à se détacher et à tomber.



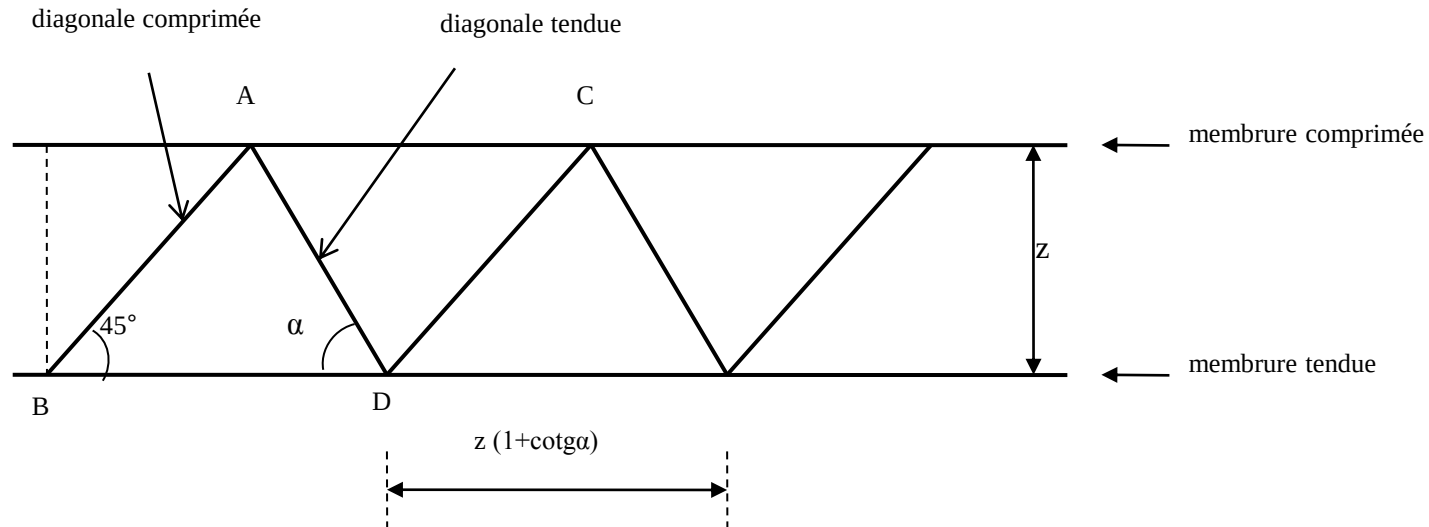
On conçoit donc qu'il est nécessaire de rattacher cette partie ABCD au reste de la poutre à l'aide d'armatures dites de couture ou armatures transversales.



4) Section d'acier de couture – Théorie du treillis de RITTER-MÖRCH

Pour assurer l'équilibre des bielles, on dispose des armatures transversales inclinées d'un angle α par rapport à l'axe de la poutre appelées armatures de couture.

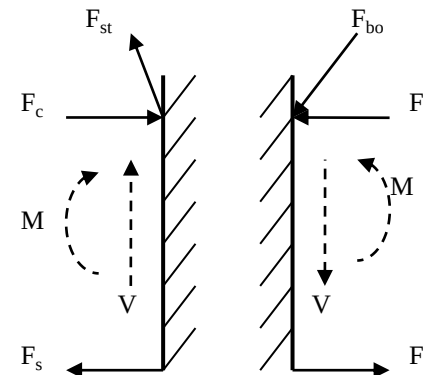
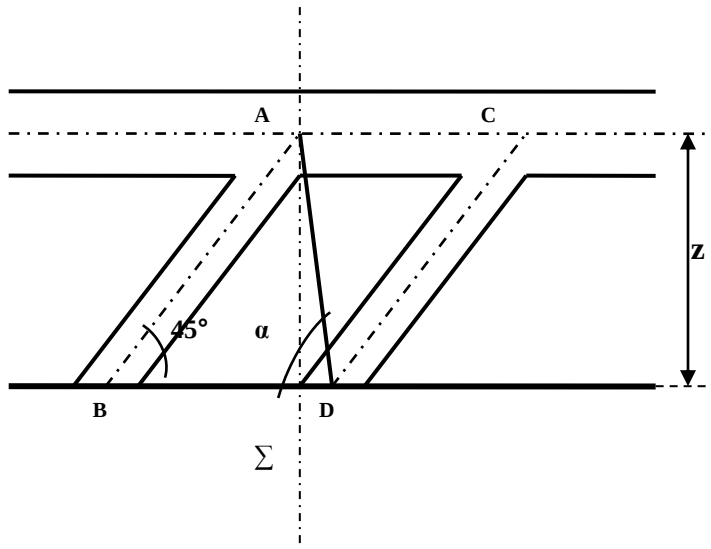
RITTER-MÖRSH modélise la structure ainsi ferraillée par un treillis simple constitué de la façon suivante :



soient : $\left\{ \begin{array}{l} F_c = \text{effort dans la barre AC} \\ F_s = \text{effort dans la barre BD} \\ F_{st} = \text{effort dans la barre AD} \\ F_{bo} = \text{effort dans la barre AB} \end{array} \right.$

En utilisant la méthode de Ritter, applicable aux treillis articulés, on obtient :

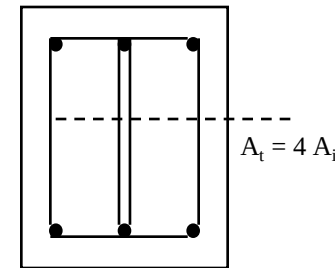
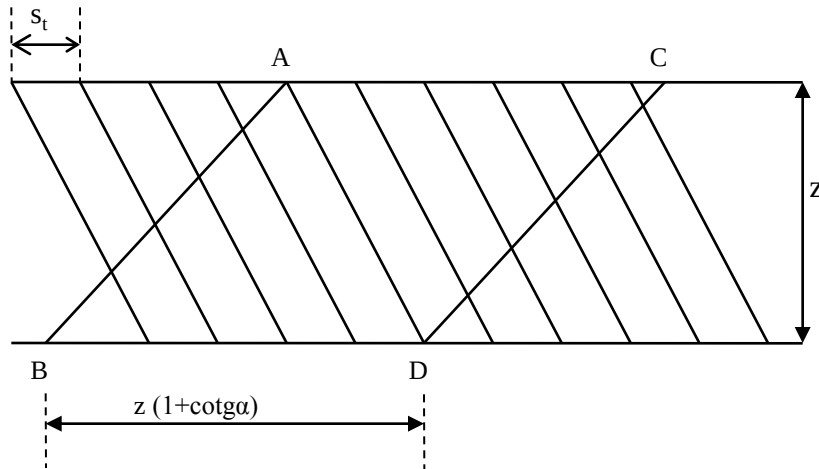
$$F_s = \frac{M_A}{z}; \quad F_c = \frac{M_B}{z}; \quad F_{st} = \frac{V}{\sin \alpha} \quad \dots \quad F_{bo} = V\sqrt{2}$$



Coupe dans la section Σ

cas d'un treillis multiple

Soient : A_t la section totale des armatures transversales situées dans un cours
 s_t l'espacement des cours d'armatures transversales
 et σ_{st} la contrainte de traction dans les armatures transversales



Le nombre de cours d'armatures transversales sur la longueur $z(1+\cotg\alpha)$ séparant deux bielles est :

$$n = \frac{z(1+\cotg\alpha)}{s_t}$$

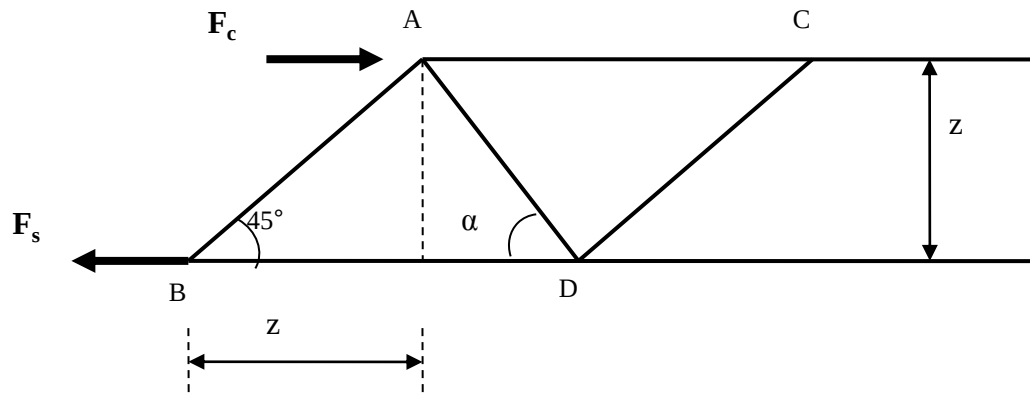
L'effort repris par chaque cours d'armatures est donc : $F_t = \frac{F_{st}}{n} = \frac{V}{n \cdot \sin\alpha} \cdot \frac{s_t}{z(\sin\alpha)}$

or $F_t = A_t \cdot \sigma_{st}$ donc $\frac{A_t}{s_t} = \frac{V}{z \cdot \sigma_{st} (\sin\alpha)}$

5) Décalage de la courbe du moment fléchissant

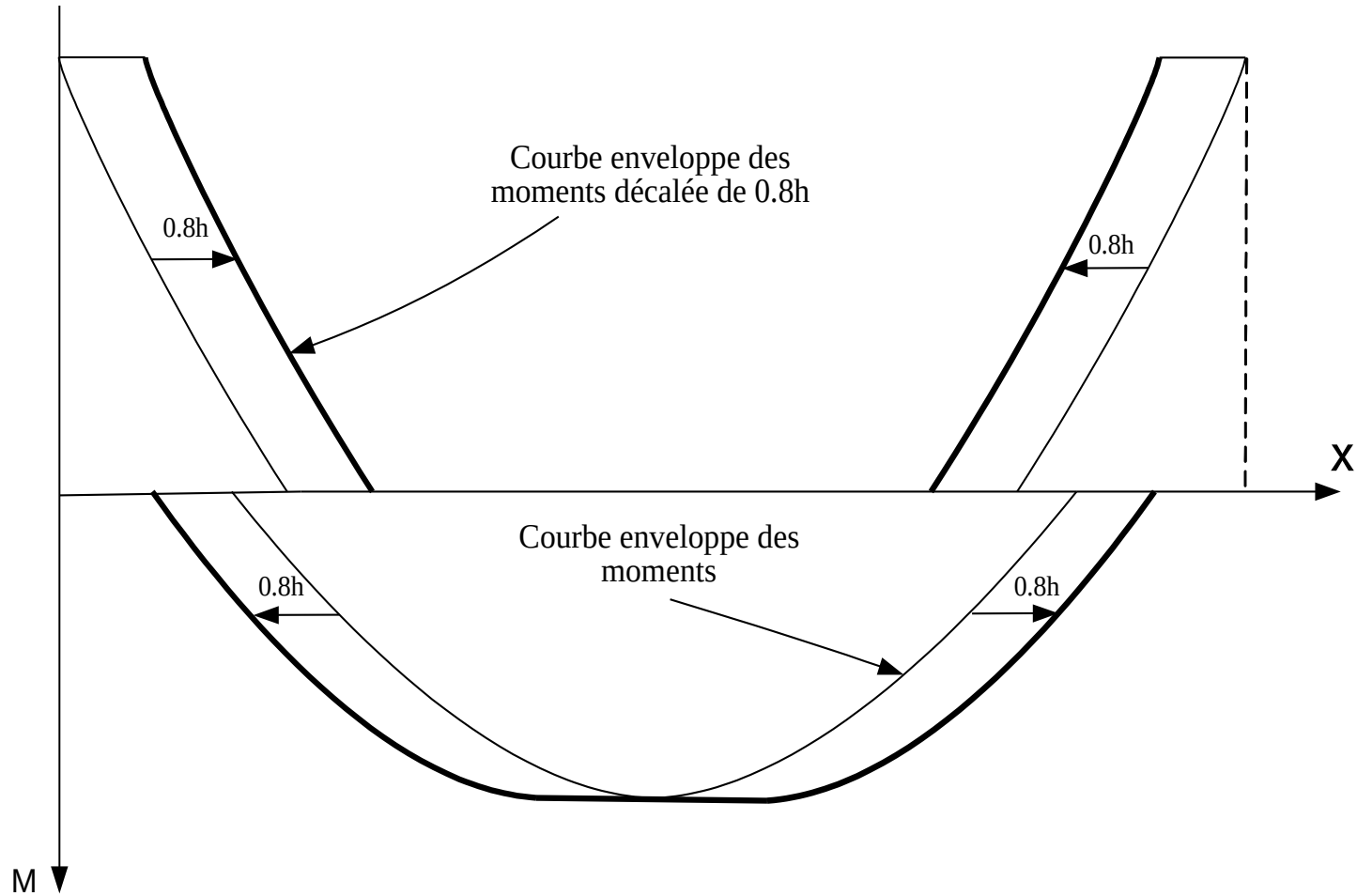
Selon le fonctionnement en treillis simple de Ritter-Mörsh, l'effort de traction F_s en B est évalué en prenant en compte le moment fléchissant agissant à une distance z de la section considérée:

$$F_s^B = \frac{M_A}{z}$$



Donc:

Pour évaluer le moment agissant sur une membrure tendue, on prend en compte le moment fléchissant agissant à une distance $a=0.8h$ de la section considérée dans la direction où les moments augmentent en valeur absolue.



Prescriptions réglementaires

1) Contraintes tangentes conventionnelles

a) Contrainte au niveau de l'axe neutre

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_o d} \quad \text{au lieu de} \quad \tau_u = \frac{V_u}{b_o z}$$

b) contrainte tangente sur le plan de jonction du hourdis avec l'âme d'une poutre en T

$$\tau_u = \frac{V_u}{0.9d.h_o} \frac{b - b_o}{2b}$$

c) contrainte tangente dans le plan vertical de jonction entre nervure et saillie du talon

$$\tau_u = \frac{V_u}{0.9d.h_1} \frac{A_{s1}}{A_s}$$

d) contrainte d'entraînement des armatures tendues

$$\tau_{se} = \frac{V_u}{0.9d.u_i} \frac{A_{si}}{A_s}$$

avec : u_i = périmètre utile du paquet de barres

A_{si} = section du paquet de barres

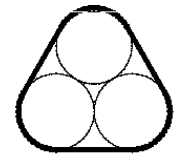
A_s = section totale des armatures tendues



$$u_i = \pi\phi$$



$$u_i = (\pi+2)\phi$$



$$u_i = (\pi+3)\phi$$

2) Justification d'une section courante

a) Etat limite ultime du béton de l'âme (A.5.1,21)

Le règlement impose la vérification suivante : $\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} \leq \bar{\tau}_u$

Valeurs de la contrainte tangente limite :

- Cas où les armatures d'âme sont droites

fissuration peu préjudiciable : $\bar{\tau}_u = \min(0.2 f_{cj} / \gamma_b ; 5 \text{ MPa})$

fissuration préjudiciable ou très préjudiciable : $\bar{\tau}_u = \min(0.15 f_{cj} / \gamma_b ; 4 \text{ MPa})$

- Cas où les armatures droites sont inclinées à 45°

$$\bar{\tau}_u = \min(0.27 f_{cj} / \gamma_b ; 7 \text{ MPa})$$

b) Calcul des armatures d'âme (A.5.1,23)

La justification vis-à-vis de l'ELU des armatures d'âme s'exprime par :

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{V_u}{z(\sin\alpha + \cos\alpha \cdot \sigma_{st})}$$

avec :

- A_t = section d'un cours d'armatures transversales
- s_t = espacement des cours d'armatures transversales
- α = angle d'inclinaison des armatures transversales
- $\sigma_{st} = f_{et} / \gamma_s$
- f_{et} = limite d'élasticité des armatures transversales

$$\text{Or } \tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} \quad \text{et } z \approx 0.9d \quad \text{d'où} \quad \frac{A_t}{s_t} \geq \frac{\gamma_s b_0 \tau_u}{0.9(\sin\alpha + \cos\alpha \cdot f_{et})}$$

Remarque :

Il existe une différence sensible entre les résultats théoriques (théorie du treillis) et expérimentaux car tant que le béton n'est pas fissuré, il participe à la résistance à l'effort tranchant. Il s'en suit que les armatures d'âme n'ont à équilibrer qu'une part de l'effort tranchant V_u , donc de τ_u .

L'écart est fixé réglementairement à $0.3k f_{tj}^*$ d'où l'inéquation :

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{\gamma_s b_o (\tau_u - 0.3k f_{tj}^*)}{0.9(\sin\alpha + \cos\alpha f_{et}}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{tj}^* = \min (f_{tj} ; 3.33 \text{ MPa}) \\ k = 1 \text{ en flexion simple sans reprise de bétonnage ou si surface de reprise à indentations de saillie } \geq 5\text{mm.} \\ k = 0 \text{ si reprise de bétonnage non traitée (sans indentations) ou si fissuration très préjudiciable.} \\ k = 1 + \frac{3N_u}{B \cdot f_{cj}} \text{ en flexion composée avec compression} \\ k = 1 - \frac{10|N_u|}{B \cdot f_{cj}} \text{ en flexion composée avec traction (k en valeur algébrique)} \end{array} \right.$$

c) Section minimale d'armatures transversales (A.5.1,22)

$$\frac{A_t f_{et}}{b_o s_t} \geq 0.4 \text{ MPa}$$

d) Diamètre des aciers transversaux

$$\varnothing_t \leq \min \left(\varnothing_\ell ; \frac{h}{35} ; \frac{b_o}{10} \right)$$

e) Espacement maximal

$$s_t \leq \min (0.9 d ; 40 \text{ cm} ; 15 \varnothing'_{\ell \min})$$

avec $\varnothing'_{\ell \min}$ = diamètre minimal des armatures longitudinales comprimées si $A' \neq 0$

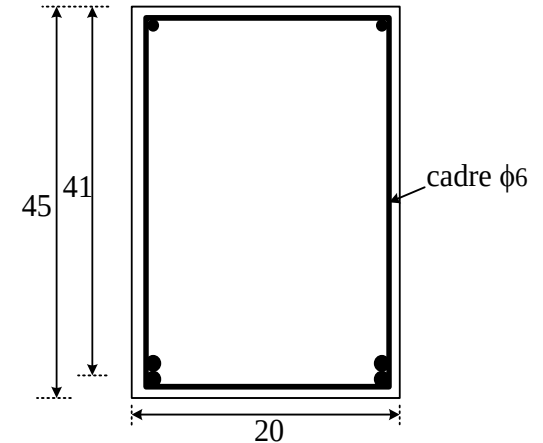
Exercice n°10

On considère la section suivante, soumise en flexion simple à un effort tranchant ultime $V_u = 92.4$ KN.

Sachant que :

- $f_{c28} = 30$ MPa
- $f_{et} = 215$ MPa
- il n'y a pas de reprise de bétonnage
- la fissuration est peu préjudiciable

- 1) Justifier l'âme de la poutre
- 2) Calculer l'espacement des armatures à la section considérée



3) Répartition des armatures transversales

a) Méthode générale

- ✓ On se fixe la section d'armatures transversales A_t ce qui revient à choisir $\emptyset_t$ ($\emptyset_t = 6$ à 12 mm).
Pour des facilités de mise en œuvre, on placera en général des cadres identiques sur toute la travée.
- ✓ On calcule les espacements :
 - initial s_{t0} au voisinage de l'appui
 - intermédiaires $s_t(x)$; en particulier à gauche et à droite des charges concentrées.
- ✓ On trace la courbe "E" représentative de $s_t(x)$
- ✓ On choisit $s_{t1} \leq s_{t0}$ (il est recommandé de prendre $s_{t1} \geq 7$ cm)
- ✓ On place la première nappe d'armatures à $s_{t1}/2$ du nu de l'appui.
- ✓ On répète s_{t1} un nombre entier de fois jusqu'à ce qu'il soit possible de passer à un espacement supérieur et ainsi de suite en enveloppant la courbe "E".
- ✓ On arrête le processus lorsque $s_t \geq s_{tmax}$

b) Méthode pratique de Caquot

Conditions d'application :

- charges uniformément réparties
- poutre à section constante
- cas de flexion simple avec $k=1$

Démarche à suivre :

- calcul de l'espacement s_{to} à l'appui
- position du premier cours d'armatures à une distance $s_{to}/2$ du nu de l'appui
- espacements suivants pris dans la suite de Caquot :
 $7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 13 - 16 - 20 - 25 - 35 - 40$
- Chaque valeur d'espacement est répétée "n" fois avec n = nombre de mètres (par excès) dans la demi-portée de la poutre ou dans la portée totale pour une console.

Exercice n° 11

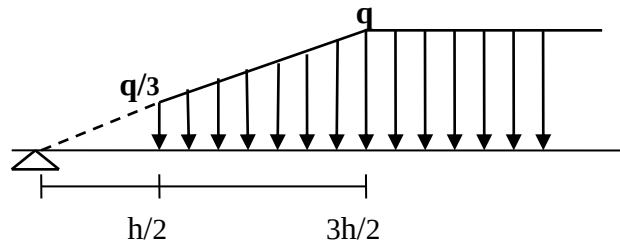
Déterminer, selon la méthode de caquot, la répartition des armatures dans une poutre de portée 5.80 m sachant que l'espacement initial au voisinage de l'appui est $s_{t1} = 11$ cm et $s_{tmax} = 35$ cm

4) Effort tranchant à prendre en compte au voisinage des appuis

Article A.5.1,2:

Pour la vérification de la résistance du béton et des armatures d'âme au voisinage des appuis, l'effort tranchant V_u peut être évalué en négligeant les charges situées à une distance de l'appui inférieure à $\frac{h}{2}$ et en ne prenant en compte qu'une fraction égale à $\frac{2a}{3h}$ des charges situées à une distance "a" de l'appui comprise entre $0.5h$ et $1.5h$.

a) charges réparties



simplification : Souvent, au lieu de faire les calculs avec $V_u(0)$ on les fait avec $V_u(h/2)$

b) charges concentrées

$$Q_u = 0 \quad \text{si } a < \frac{h}{2} \quad (Q_u \text{ est considérée comme directement transmise à l'appui})$$

$$\text{et } \frac{2a}{3h} Q_u \quad \text{si } \frac{h}{2} \leq a \leq \frac{3h}{2}$$

Exercice n°12

Considérons la poutre étudiée en flexion simple dans l'exercice n°5.

Vérifier l'âme de la poutre et déterminer les armatures transversales, en supposant une variation linéaire de l'effort tranchant pour $0 \leq x \leq \ell/2$:

$$V_u(x) = 292.9 - 48.6x \quad (\text{avec "x" en mètre et "V}_u\text{" en KN}).$$

Exercice n°13

Faire la répartition des armatures transversales dans une poutre reposant sur deux poteaux de largeur $b_p = 20$ cm.

Données :

- portée $\ell = 6$ m; section $B = 20 \times 40$ cm²
- résistance caractéristique du béton $f_{c28} = 25$ MPa; $\theta = 1$; $\gamma_b = 1.5$
- bétonnage avec reprise
- armatures de haute adhérence FeE400 ; $\eta = 1.6$
- fissuration préjudiciable ; enrobage minimum $e = 2.5$ cm
- armatures longitudinales :
 - armatures tendues 6HA20 ; $d = 35$ cm
 - armatures comprimées 3HA12 ; $c' = 4$ cm
- armatures transversales : un cadre + une épingle HA6 dont les espacements seront pris dans la suite suivante : 9 – 11 – 13 – 16 – 20 – 25 – 35 – 40.
- $V_u(x) = 90 - 27x$ avec "x" en mètre et "V_u" en KN

5) Justifications des sections d'appui (A.5.1,3)

a) Appui simple d'about ou appui de rive

✓ Section minimale d'armatures longitudinales

Pour équilibrer la composante horizontale transmise par la bielle d'about, on doit prolonger au-delà du bord de l'appui et y ancrer une section d'armatures longitudinales inférieures A_s telle que :

$$A_s \geq \frac{V_u}{f_e / \gamma_s}$$

✓ Profondeur minimale de l'appui

la contrainte de compression σ_c dans la bielle doit rester admissible:

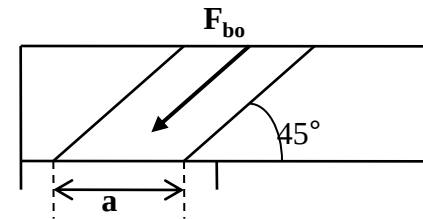
$$\sigma_c \leq 0.8 \frac{f_{cj}}{\gamma_b}$$

Soient : a = longueur d'appui de la bielle

b_o = largeur de la poutre avant l'appui

F_{bo} = effort de compression dans la bielle : $F_{bo} = V_u \sqrt{2}$

B_o = aire de la section droite de la bielle : $B_o = \frac{a}{\sqrt{2}} b_o$



La contrainte de compression dans la bielle est : $\sigma_c = \frac{F_{bo}}{B_o} = \frac{2 V_u}{a b_o}$

On doit donc avoir : $\sigma_c = \frac{2 V_u}{a b_o} \leq 0.8 \frac{f_{cj}}{\gamma_b}$ c-à-d $V_u \leq 0.267 a b_o f_{cj}$ ou $a \geq \frac{3.75 V_u}{b_o f_{cj}}$

b) Appui intermédiaire

Soient : M_u le moment fléchissant à l'ELU sur l'appui intermédiaire

V_u l'effort tranchant qui prend la valeur : V_{ug} à gauche de l'appui
et V_{ud} à droite de l'appui

$R_u = |V_{ug}| + |V_{ud}|$ = réaction verticale de l'appui

✓ Profondeur minimale d'appui de la bielle

Pour chacune des travées adjacentes il faut vérifier : $V_u \leq 0.267 a b_0 f_{cj}$

✓ Contrainte moyenne de compression sur appui

$$\sigma_{cm} = \frac{R_u}{a b_0} \leq 1.3 \frac{f_{cj}}{\gamma_b}$$

✓ Section minimale d'armatures longitudinales inférieures

Le moment négatif M_u provoque au niveau des armatures inférieures une force de compression :

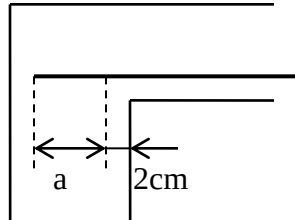
$$F'_s = \frac{|M_u|}{z} \approx \frac{|M_u|}{0.9 d}$$

L'armature longitudinale doit donc équilibrer l'effort : $V_u + \frac{M_u}{0.9 d}$ avec M_u en valeur algébrique.

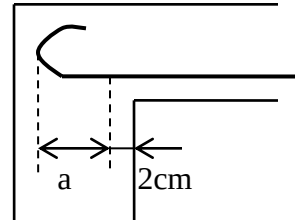
D'où : $A_s \geq \frac{V_u + \frac{M_u}{0.9 d}}{f_e / \gamma_s}$ à vérifier de chaque côté de l'appui si $|M_u| < 0.9 d V_u$.

c) Profondeur d'appui prise en compte dans les cas courants (A.5.1,313)

- Poutre à nervure rectangulaire reposant sur un poteau dont elle est solidaire

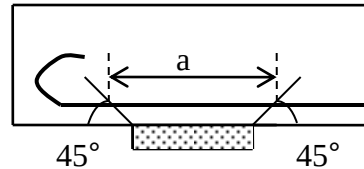
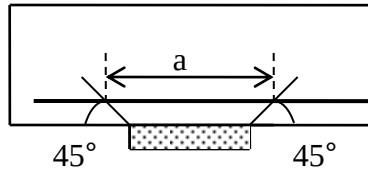


Armature inférieure avec ancrage droit

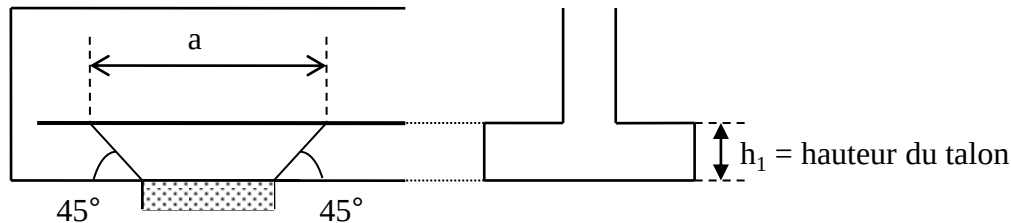


Armature inférieure avec ancrage courbe

- Poutre à nervure rectangulaire reposant sur un appareil d'appui



- Poutre à talon reposant sur un appareil d'appui



Exercice n°14

Pour la poutre de l'exercice n°12, faire les vérifications nécessaires aux appuis

6) Couture du hourdis avec l'âme (A.5.3,2)

$$A_t = A_{sd} + A_{id}$$

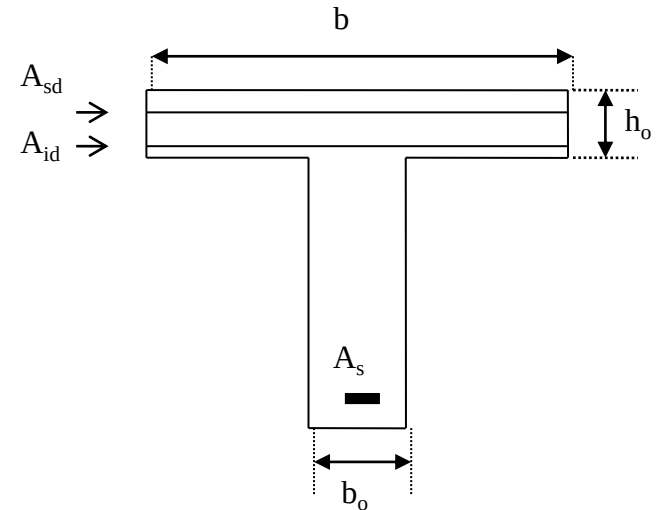
= aciers supérieurs et inférieurs de la dalle

$$\tau_u = \frac{V_u}{0.9d.h_o} \frac{b - b_o}{2b}$$

✕ vérification du béton : $\tau_u \leq \bar{\tau}_u$

✕ armatures de couture hourdis-âme :

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{V_u}{0.9d f_{et} \gamma_s} \frac{b - b_o}{2b} \quad \text{ou} \quad \frac{A_t}{s_t} \geq \frac{\gamma_s V_u}{0.9d f_{et}} \frac{b - b_o}{2b}$$

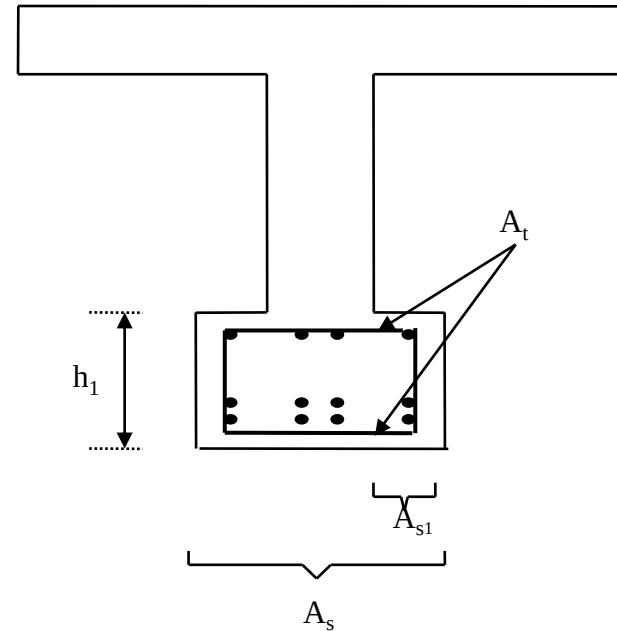


7) Couture du talon avec l'âme

$$\tau_u = \frac{V_u}{0.9d.h_1} \frac{A_{s1}}{A_s}$$

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{V_u}{0.9d} \frac{A_{s1}}{f_{et} / \gamma_s A_s}$$

$$\text{ou } \frac{A_t}{s_t} \geq \frac{\gamma_s V_u}{0.9d} \frac{A_{s1}}{f_{et} A_s}$$



Exercice n°15

Pour la poutre de l'exercice n°12, vérifier la liaison hourdis-nervure

8) Entraînement des armatures

La brusque variation de la contrainte de cisaillement longitudinal au niveau de l'armature tendue peut conduire à un glissement de la barre par rapport au béton. Il convient donc de vérifier que l'effort tranchant est équilibré par l'adhérence se développant au contact acier-béton pour les différentes armatures isolées ou en paquet.

$$\tau_{se} = \frac{V_u}{0.9d.u_i} \frac{A_{si}}{A_s} \leq \psi_s f_{tj} \quad \text{avec} \quad \psi_s = 1 \text{ pour les ronds lisses}$$

et $\psi_s = 1.5$ pour les barres HA

Article A6.1,3 :

En général, la vérification $\tau_{se} \leq \psi_s f_{tj}$ n'est à effectuer que :

- pour les chapeaux des poutres hyperstatiques soumises à des charges très concentrées,
- en cas d'utilisation de paquets de plus de 2 barres.

Exercice n°16

Le dimensionnement en flexion simple de l'appui intermédiaire d'une poutre continue conduit à une section d'armatures $A = 4\text{cm}^2$.

Choisir les armatures en chapeau et contrôler la contrainte d'adhérence par entraînement.

Données :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{c28} = 25 \text{ MPa} \\ f_e = 500 \text{ MPa} \\ d = 40 \text{ cm} \\ V_u = 115 \text{ KN} \end{array} \right.$$

Ancrage et recouvrement de barres

1) Ancrage des armatures

Dans la pratique, les calculs d'ancrage sont réalisés à l'état limite ultime.

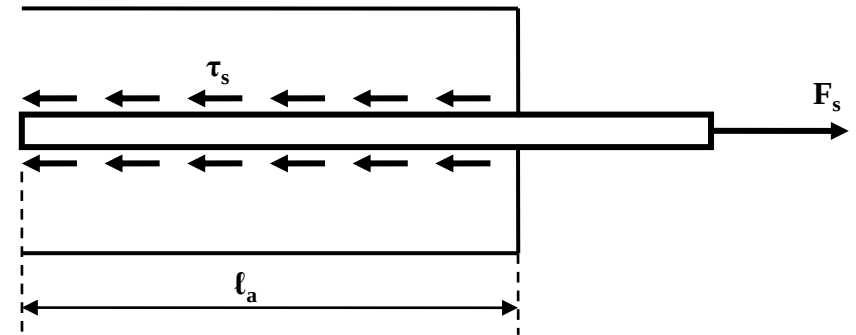
a) Ancrage rectiligne

➤ Longueur d'ancrage

La longueur d'ancrage est la longueur ℓ_a nécessaire pour équilibrer l'effort axial exercé sur l'armature :

$$F_s = \tau_s \cdot u_i \cdot \ell_a$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} u_i : \text{le périmètre utile de la barre} \\ \tau_s : \text{la contrainte d'adhérence supposée} \\ \text{constante sur la longueur d'ancrage} \end{array} \right.$



RQ: Sur la longueur d'ancrage, la contrainte d'adhérence est supposée constante et égale à sa valeur limite ultime : $\tau_s = 0.6 \psi_s^2 f_{tj}$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \psi_s = \text{coefficient de scellement} (\psi_s=1 \text{ pour les ronds lisses et } 1.5 \text{ pour les barres H.A.}) \\ f_{tj} = \text{résistance du béton à la traction} \end{array} \right.$

D'où :
$$\ell_a = \frac{F_s}{\tau_s u_i}$$

➤ Longueur de scellement droit

On définit la **longueur de scellement** droit ℓ_s comme étant la longueur à mettre en œuvre pour avoir un bon ancrage droit ou **ancrage total**.

Un ancrage total est un ancrage pour lequel la barre commence à glisser lorsqu'elle atteint sa limite d'élasticité f_e .

$$F_s = A_s \cdot f_e \quad \text{et} \quad F_s = \bar{\tau}_s \cdot u_i \cdot \ell_s \quad \text{donc} \quad \ell_s = \frac{A_s f_e}{\bar{\tau}_s u_i}$$

✓ Cas d'une barre isolée

$$u_i = \pi \varnothing; \quad A_s = \frac{\pi \varnothing^2}{4} \quad \text{d'où} \quad \ell_s = \frac{\varnothing f_e}{4 \bar{\tau}_s}$$

Art. A6.1,221

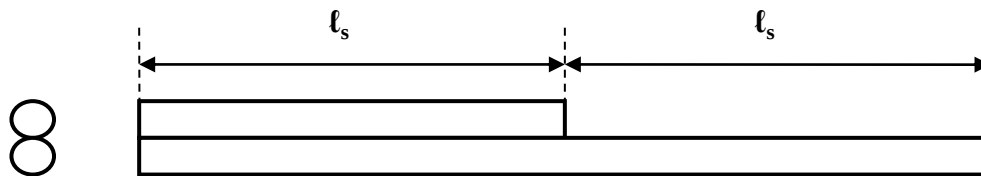
A défaut de calcul précis, on peut adopter les valeurs forfaitaires suivantes (applicables pour $f_{c28} \leq 25$ MPa)

- $\ell_s = 40 \varnothing$ pour FeE400
- $\ell_s = 50 \varnothing$ pour FeE500 et les ronds lisses

✓ Barres faisant partie d'un paquet

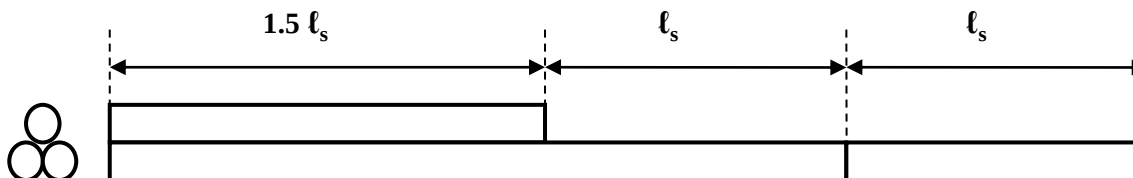
Chaque barre d'un paquet sera ancrée individuellement (Art. A6.1,21)

- Pour ancrer les barres d'un paquet de 2 barres, il faut prévoir " $2 \ell_s$ "



- Pour un paquet de 3 barres, il faut prévoir $(2+1.5) \ell_s$, puisque la première barre à ancrer a un périmètre utile (Art. A6.1,221) :

$$u_i = \frac{2\pi \varnothing}{3}$$



Exercice n°17

Déterminer la longueur de scellement droit d'une barre de diamètre $\emptyset$ en acier F_eE 215, 235, 400 et 500; pour un béton de résistance $f_{c28} = 20, 25, 30$ et 40 MPa

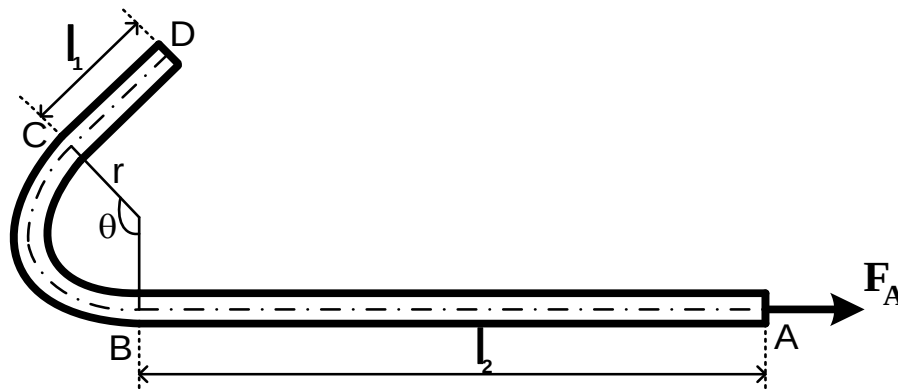
Solution

$$\ell_s = \frac{\emptyset f_e}{4 \bar{\tau}_s} \quad \text{et} \quad \bar{\tau}_s = 0.6 \psi_s^2 f_{tj}$$

	f_{c28} (MPa)	20	25	30	35	40
F _e E215	ℓ_s	50 $\emptyset$	43 $\emptyset$	37 $\emptyset$	33 $\emptyset$	30 $\emptyset$
F _e E235	ℓ_s	54 $\emptyset$	47 $\emptyset$	41 $\emptyset$	36 $\emptyset$	33 $\emptyset$
F _e E400	ℓ_s	41 $\emptyset$	35 $\emptyset$	31 $\emptyset$	27 $\emptyset$	25 $\emptyset$
F _e E500	ℓ_s	51 $\emptyset$	44 $\emptyset$	39 $\emptyset$	34 $\emptyset$	31 $\emptyset$

b) Ancrage courbe

Par manque de place, comme aux appuis de rive, par exemple, on est obligé d'avoir recours à des ancrages courbes afin de diminuer la longueur d'encombrement de l'ancrage



$$F_A = \pi \varnothing \bar{\tau}_s (\psi l_1 + \psi' r + l_2)$$

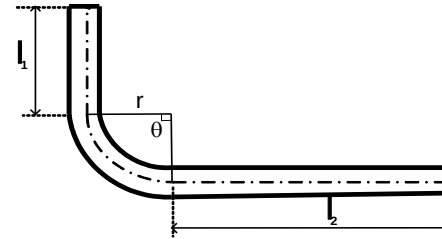
$$\text{avec } \begin{cases} \psi = e^{\varphi\theta} \\ \psi' = \frac{e^{\varphi\theta} - 1}{\varphi} = \frac{\psi - 1}{\varphi} \\ \varphi = 0.4 \end{cases} \quad (\theta \text{ en rd})$$

c) Ancrages courants

- Les "retours d'équerre" : $\theta = 90^\circ$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

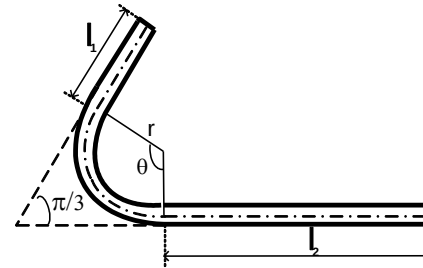
$$1.87 \ell_1 + \ell_2 \geq \ell_s - 2.19 r$$



- Les "ancrages à 60°" : $\theta = 120^\circ$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

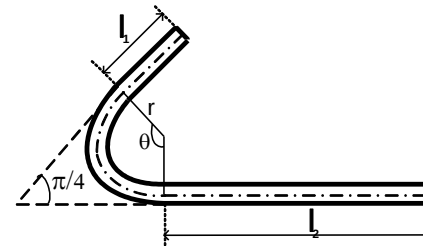
$$2.31 \ell_1 + \ell_2 \geq \ell_s - 3.28 r$$



- Les "ancrages à 45°" : $\theta = 135^\circ$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

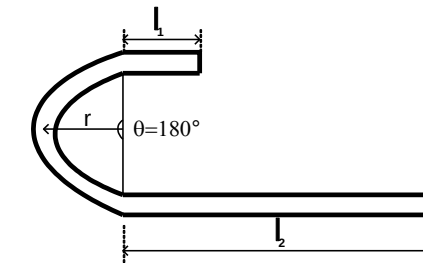
$$2.57 \ell_1 + \ell_2 \geq \ell_s - 3.92 r$$



- Les crochets à $\theta = 180^\circ$

$$\theta = \pi$$

$$3.51 \ell_1 + \ell_2 \geq \ell_s - 6.28 r$$



d) Rayons de courbures de l'axe des barres

Ils résultent :

- ✓ Des conditions de façonnage des barres

$$r \geq 3\emptyset \quad \text{pour les ronds lisses}$$

$$r \geq 5.5\emptyset \quad \text{pour les barres H.A.}$$

- ✓ De la condition de non écrasement du béton

$$r \geq 0.2 \emptyset \frac{\sigma_s}{f_{cj}} \left(1 + \frac{\emptyset}{e_r}\right) v$$

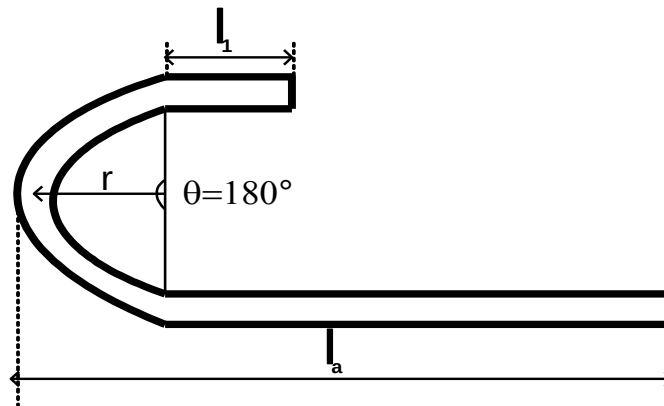
avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_s = \text{contrainte à l'origine de la courbure} \\ e_r = \text{distance du centre de courbure de la barre à la paroi la plus proche} \\ v = \frac{1+2m}{3} \\ m = \text{nombre de lits, courbés simultanément, dont fait partie la barre considérée} \end{array} \right.$$

e) Ancrage par "crochets normaux"

C'est un ancrage tel que :

- ✓ $\theta = 180^\circ$
- ✓ un retour rectiligne $\ell_1 = 2\varnothing$
- ✓ une longueur d'ancrage mesurée hors crochet " ℓ_a " telle que :
et $\begin{cases} \ell_a = 0.6\ell_s & \text{pour les ronds lisses} \\ \ell_a = 0.4\ell_s & \text{pour les barres H.A.} \end{cases}$
- ✓ un rayon de courbure tel que :
et $\begin{cases} r = 3\varnothing & \text{pour les ronds lisses} \\ r = 5.5\varnothing & \text{pour les barres H.A.} \end{cases}$



Exercice n°18

Calculer la longueur ℓ_1 du retour rectiligne nécessaire pour assurer l'ancrage total à 45° d'une barre HA16 d'une poutre reposant à chaque extrémité sur un voile en BA d'épaisseur 18 cm.

Données :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{c28} = 30 \text{ MPa} \\ f_e = 500 \text{ MPa} \\ \text{enrobage } c = 2.5 \text{ cm} \\ \text{rayon de courbure } r = 5.5\varnothing \end{array} \right.$$

2) Jonction par recouvrement de barres

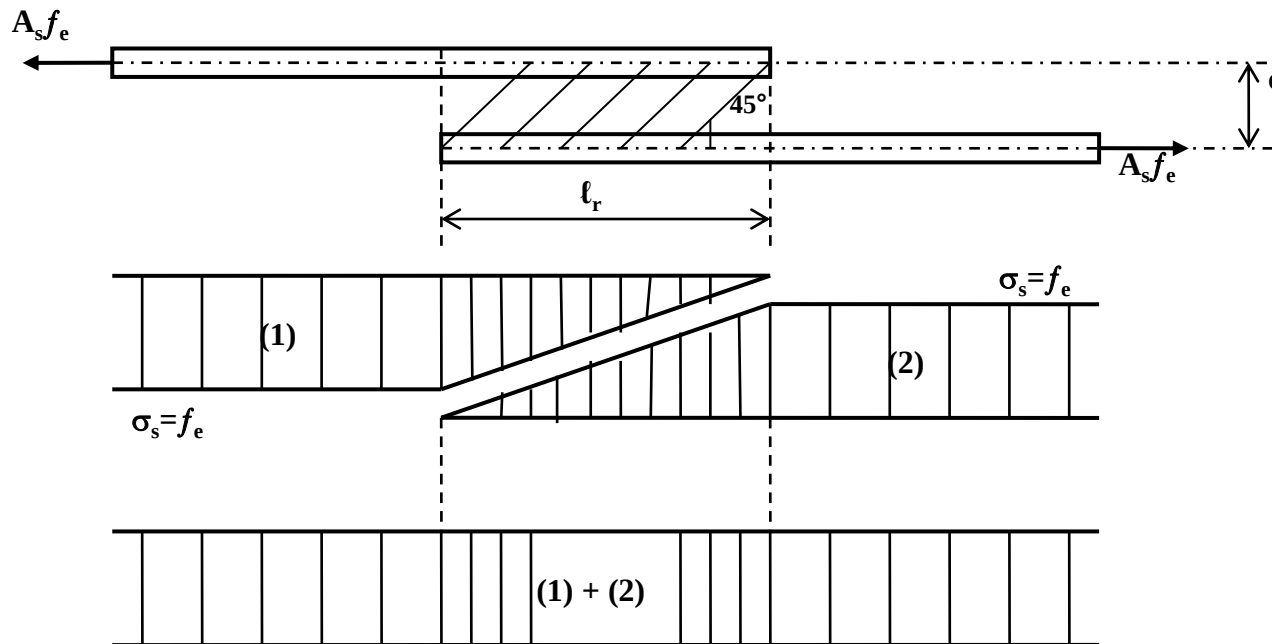
a) But du recouvrement

Dans une pièce de grande longueur $\Rightarrow$ constituer une armature longitudinale à l'aide de plusieurs barres disposées dans le prolongement l'une de l'autre.

b) Principe

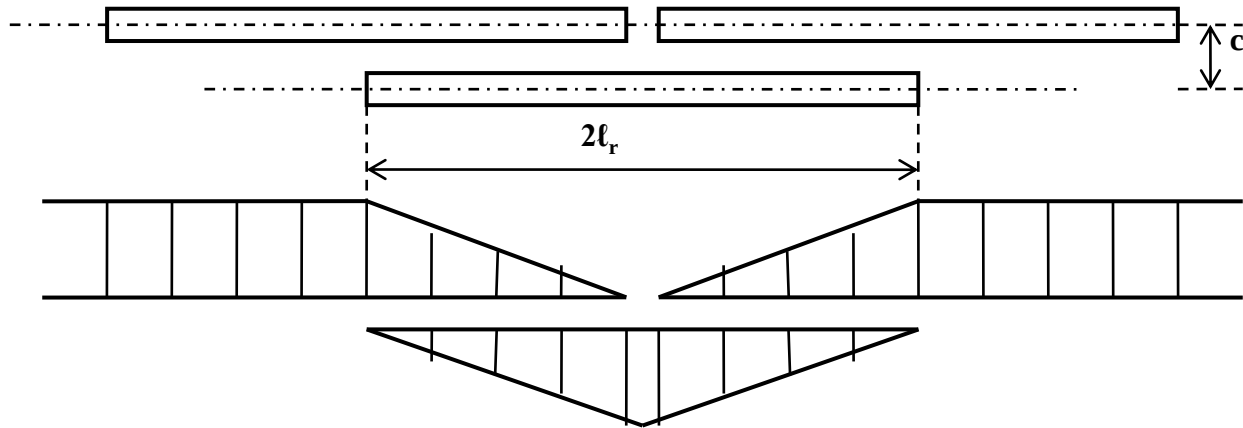
Pour assurer La continuité mécanique des barres, on fait chevaucher leurs extrémités sur une longueur ℓ_r dite "**longueur de recouvrement**".

1^{er} procédé : simple recouvrement des extrémités de barres



2^{ème} procédé : recouvrement par couvre-joint

L'emploi de barres "couvre-joint" permet de placer les barres à joindre dans le prolongement l'une de l'autre.

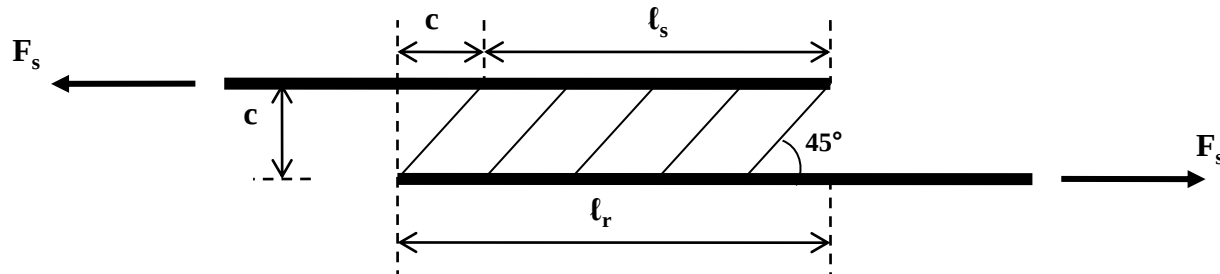


N.B: la jonction mécanique de deux barres peut être réalisée par d'autres procédés, notamment par soudure (bout à bout ou par recouvrement), dans la mesure où des essais probants ont permis de vérifier la résistance du système (Art. A6.1,223).

b) Longueurs de recouvrement

➤ Armatures tendues

On admet que la transmission des efforts d'une barre à l'autre s'effectue par compression des "bielles" de béton découpées par des fissures inclinées à 45° sur la direction des barres.



Cette transmission n'est donc effective que sur la longueur : $l_s = l_r - c$

✓ **Barres sans crochets :** (Art. A6.1,223)

$$\begin{cases} l_r \geq l_s & \text{si} & c \leq 5\emptyset \\ l_r \geq l_s + c & \text{si} & c > 5\emptyset \end{cases}$$

✓ **Barres avec crochets normaux :** (Art. A6.1,253)

- Ronds lisses : $\begin{cases} l_r \geq 0.6l_s & \text{si} & c \leq 5\emptyset \\ l_r \geq 0.6l_s + c & \text{si} & c > 5\emptyset \end{cases}$
- Barres H.A : $\begin{cases} l_r \geq 0.4l_s & \text{si} & c \leq 5\emptyset \\ l_r \geq 0.4l_s + c & \text{si} & c > 5\emptyset \end{cases}$

➤ Armatures comprimées

Leur recouvrement se fait **sans crochets** pour ne pas faire éclater le béton qui les entoure.

$$\ell_r \geq 0.6\ell_s \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} c \leq 5\emptyset \\ \text{la barre est toujours comprimée} \\ \text{elle ne fait pas partie d'un paquet de 3 barres} \end{array} \right.$$

sinon ℓ_r = longueur de recouvrement des armatures tendues sans crochets

➤ Remarque

Lorsqu'on a à assurer la jonction par recouvrement de deux **barres différentes**, il faut considérer la plus **grande** longueur de scellement droit.

3) Armatures de coutures

Art. A6.1,23 : Dans le cas d'une jonction par recouvrement de deux barres parallèles, la résistance de l'ensemble des armatures de couture est au moins égale à la résistance de chacune des barres à ancrer.

Il en résulte que pour coudre l'ancrage d'une armature de section A_s et de limite d'élasticité f_e , il faut une section totale d'armatures de couture ΣA_t de limite d'élasticité f_{et} telle que :

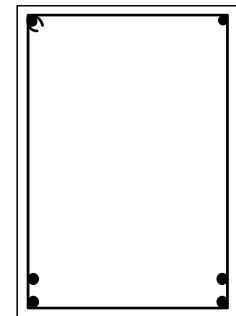
$$\Sigma A_t f_{et} \geq A_s f_e$$

Exercice n°19

Pour assurer la continuité des armatures du 1^{er} lit d'une poutre de section rectangulaire, on prévoit un recouvrement de barres de façon que la résultante des efforts soit située sur l'axe de symétrie de la section.

Déterminer la longueur de recouvrement et les coutures nécessaires.

Données :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{c28} = 22 \text{ MPa} \\ \text{armatures longitudinales : } A = 4\text{HA20} \\ \text{armatures transversales : un cadre HA8} \\ f_e = f_{et} = 500 \text{ MPa} \end{array} \right.$$


Epure de répartition des armatures longitudinales

1) Ferrailage d'une poutre

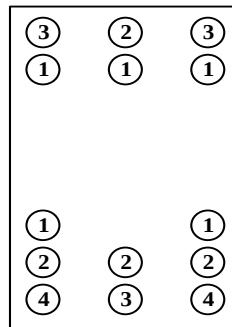
Pour le ferrailage d'une poutre, on procède, en pratique, comme suit :

- On trace la courbe enveloppe des moments de flexion.
- On détermine les armatures longitudinales nécessaires dans les sections de moments extrêmes en travée et sur appuis.
- On procède à l'arrêt des barres.

2) Principe des arrêts de barres

Toujours arrêter les armatures par groupes symétriques par rapport au plan moyen.

- Pour les armatures inférieures :
 - Commencer par les armatures de la nappe la plus haute
 - Dans chaque nappe arrêter d'abord les barres les plus proches du plan moyen
- Pour les armatures supérieures : même règle en commençant par la nappe la plus basse.



3) **Moment maximal admissible ou moment résistant**

Le moment résistant d'un groupe de barres de section A_i est calculé comme suit :

En état limite ultime :

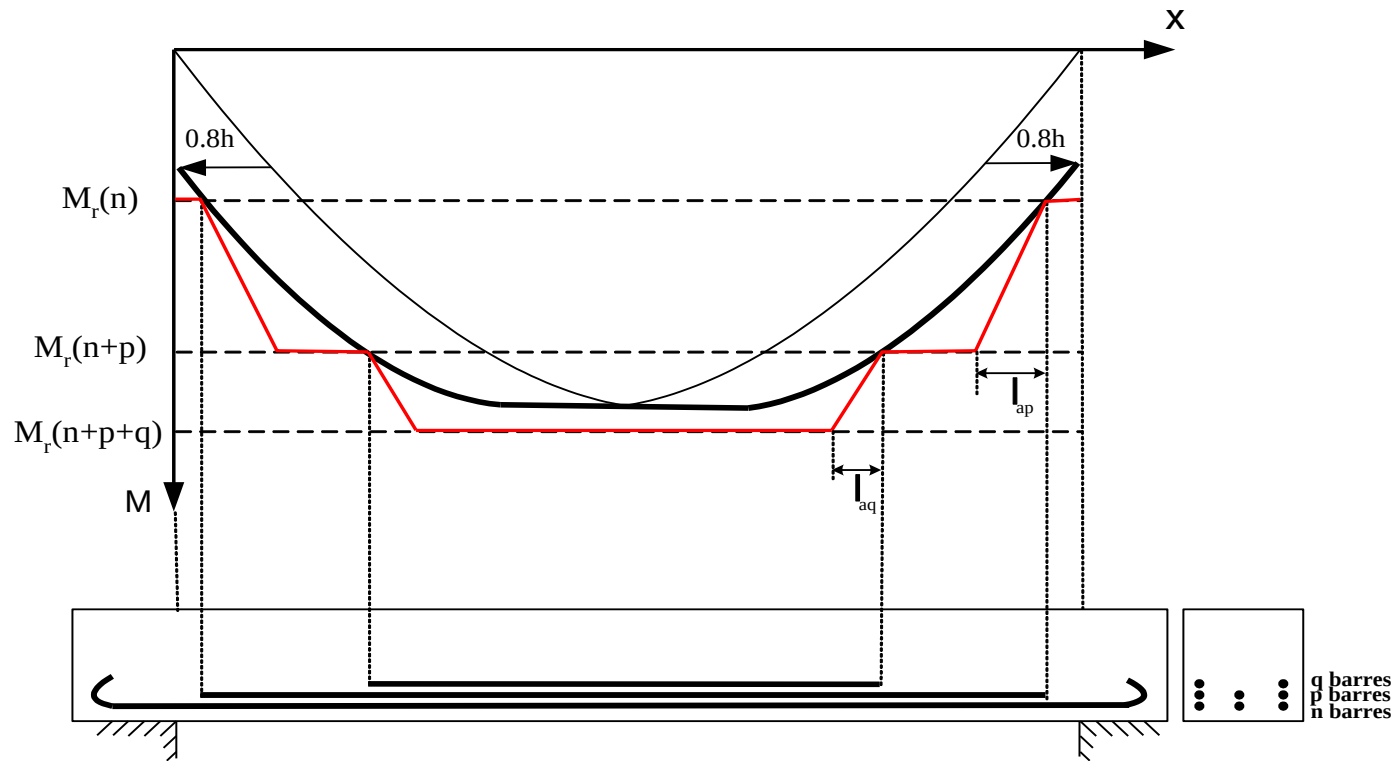
$$M_{rult} = A_i \cdot f_e / \gamma_s \cdot z_b$$

On suppose que z_b trouvée lors du calcul de la section d'armatures équilibrant le moment maximal (sur appui ou en travée) est constante sur la longueur de la poutre (cette simplification va dans le sens de la sécurité)

En état limite de service :

$$M_{rser} = A_i \cdot \bar{\sigma}_s \cdot \bar{z}_b \quad \text{avec} \quad \bar{z}_b = d_i \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_s}{3} \right)$$

4) Diagramme des moments admissibles



Exercice n°20 : Calcul d'une poutre

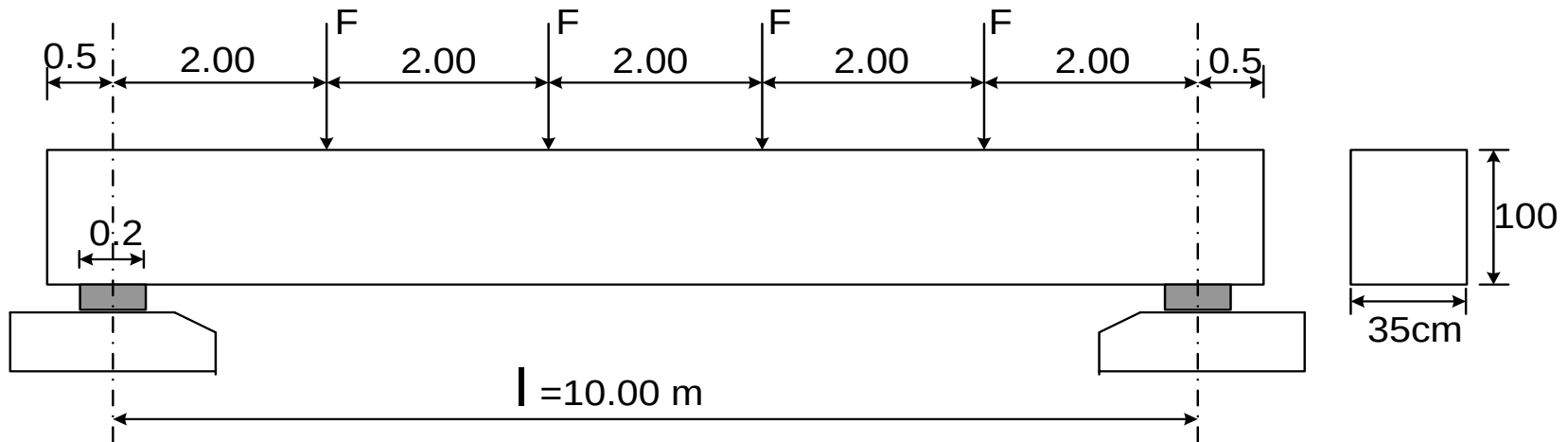
Déterminer le ferrailage de la poutre à section rectangulaire représentée sur la figure ci-dessous et qui reçoit quatre charges égales F se décomposant chacune en :

- une charge permanente : $F_g = 30 \text{ KN}$
- une charge d'exploitation : $F_q = 73 \text{ KN}$ de durée d'application > 24 heures

Les armatures sont en acier $F_e E 400$

Le béton a une résistance $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ ($c_g = 2 \text{ cm}$)

la fissuration est peu préjudiciable



Compression simple

1) Définition

Une pièce en béton armé est soumise à la **compression simple** lorsque les forces agissants sur une section droite se réduisent à **un effort normal N de compression appliqué au centre de gravité de la section.**

2) Effort normal résistant

Une section en béton armé d'aire B contenant une section d'acier A résiste théoriquement à un effort normal ultime :

$$N_{uth} = B f_{bu} + A \sigma_s (2\text{‰})$$

3) Poteaux soumis à une compression centrée

Pratiquement, les **charges** transmises aux poteaux ne sont **jamais parfaitement centrées** (imperfections d'exécution, moments transmis par les poutres, dissymétrie de chargement etc...)

Réglementairement (Art. B.8.4), un poteau est **réputé** soumis à une "compression centrée" si :

- l'excentricité de l'effort normal est faible (inférieure à la moitié de la dimension du noyau central).
- l'imperfection géométrique du poteau est estimée au plus égale à $\max(1\text{cm}, \ell_o/500)$ avec ℓ_o = la longueur libre du poteau.
- l'élancement mécanique " λ " du poteau est inférieur ou égal à 70.

4) Elancement et longueur de flambement d'un poteau

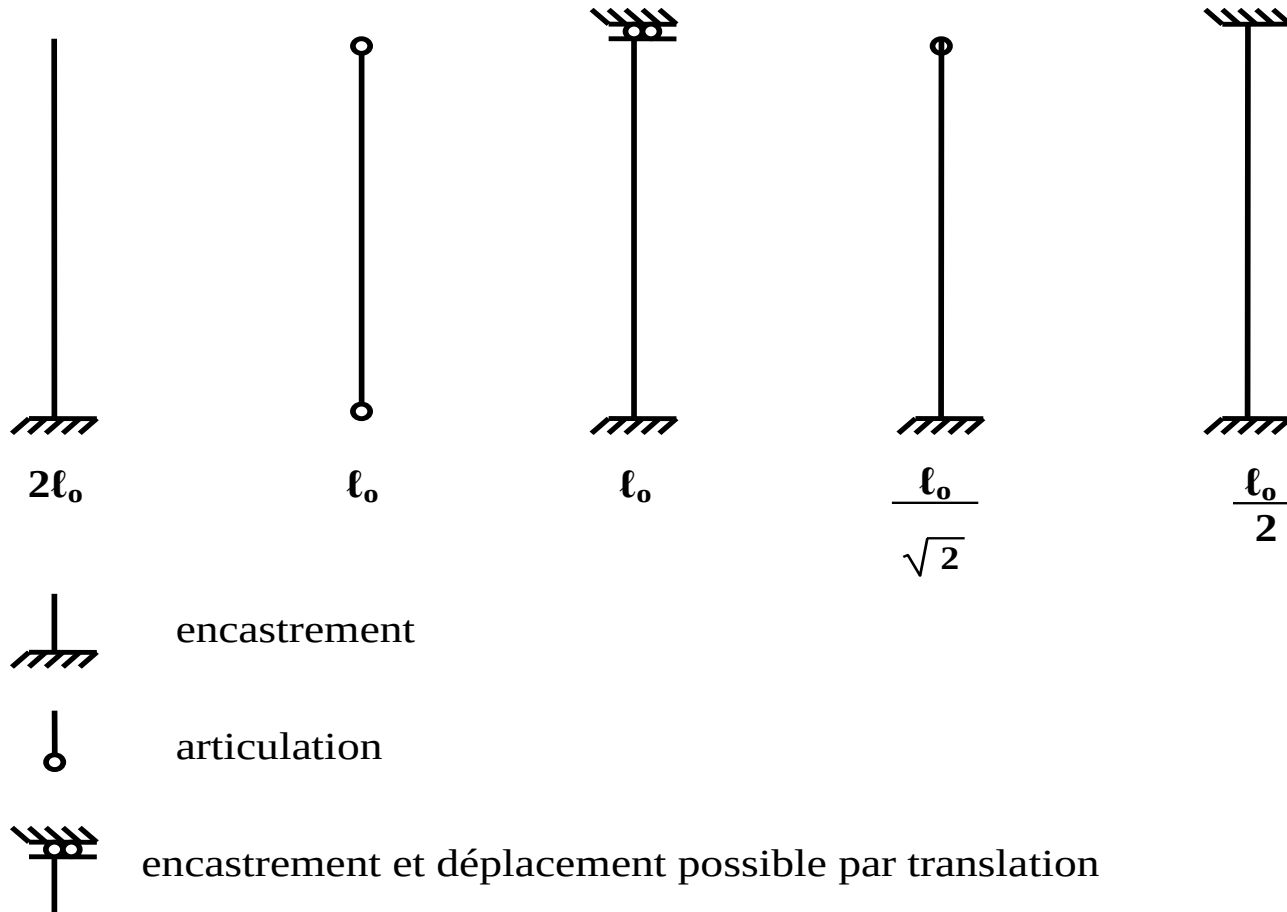
a) Elancement mécanique

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_f = \text{longueur de flambement du Poteau} \\ i = \sqrt{\frac{I}{B}} = \text{rayon de giration} \\ I = \text{moment d'inertie de la section transversale de béton} \\ \quad \text{seul dans le plan de flambement.} \\ B = \text{aire de la section transversale de béton} \end{array} \right.$$

b) Longueur de flambement

✓ Cas d'un poteau isolé :

La longueur de flambement dépend des liaisons d'extrémité :



✓ **Poteau d'un bâtiment courant :**

Pour les bâtiments à étages contreventés par des pans verticaux (murs, voile, cage d'escaliers etc...) avec continuité des poteaux et de leur section, la longueur de flambement " ℓ_f " est prise égale à :

- $0.7\ell_o$ si le poteau est à ses extrémités :
 - + soit encastré dans un massif de fondation
 - + soit assemblé à des poutres de plancher ayant au moins la même raideur que le poteau dans le sens considéré et le traversant de part en part .
- ℓ_o dans les autres cas

ℓ_o = longueur libre du poteau

La longueur libre d'un poteau de bâtiment (Art. B8.3,1) est comptée entre faces supérieures de deux planchers consécutifs ou de sa jonction avec la fondation à la face supérieure du premier plancher.

5) Evaluation forfaitaire de l'effort normal résistant

- L'étude du flambement suivant les prescriptions de l'article A4.4 du BAEL étant compliquée, on a été amené, dans le cas des poteaux soumis à une "compression centrée", à considérer des **règles forfaitaires** simples.
- L'effort normal résistant ultime (ou force portante) du poteau est obtenu par correction de la formule théorique comme suit (Art. B8.4) :

$$\overline{N}_u = \frac{\alpha}{k} \left[\frac{B_r \cdot f_{c28}}{0.9\gamma_b} + A \frac{f_e}{\gamma_s} \right]$$

avec

- B_r = section réduite du poteau obtenue en déduisant 1cm d'épaisseur de béton sur toute sa périphérie.
- A = section d'armatures comprimées prises en compte dans le calcul.
- $\gamma_b = 1.5$
- $\gamma_s = 1.15$
- α = coefficient fonction de l'élancement mécanique λ du poteau

$$\alpha = \frac{0.85}{1 + 0.2 \left(\frac{\lambda}{35} \right)^2} \quad \text{pour } \lambda \leq 50$$

$$\alpha = 0.60 \left(\frac{50}{\lambda} \right)^2 \quad \text{pour } 50 < \lambda \leq 70$$

$$k = \begin{cases} 1.1 & \text{si plus de la moitié des charges est appliquée avant 90 jours .} \\ 1.2 & \text{si la majeure partie des charges est appliquée avant 28 jours, et on} \\ & \text{prend la contrainte } f_{cj} \text{ au lieu de } f_{c28}. \\ 1 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

6) Calcul des armatures longitudinales

$$N_u \leq \bar{N}_u \quad \Rightarrow \quad N_u \leq \frac{\alpha}{k} \left[\frac{B_r \cdot f_{c28}}{0.9\gamma_b} + A \frac{f_e}{\gamma_s} \right]$$

$$\Rightarrow \quad A \geq \left[\frac{kN_u}{\alpha} - \frac{B_r \cdot f_{c28}}{0.9\gamma_b} \right] \frac{\gamma_s}{f_e}$$

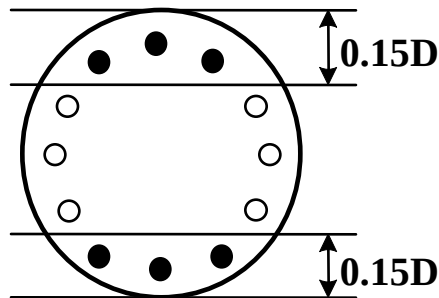
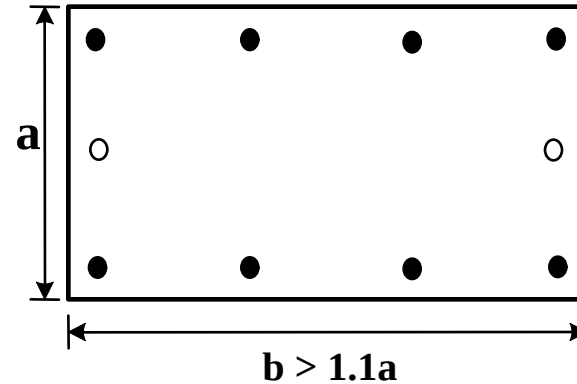
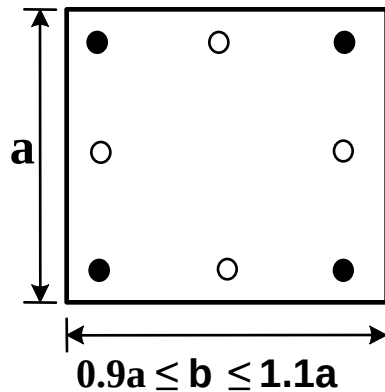
7) Sections extrêmes

L'article A8.1,21 préconise $A_{\min} \leq A \leq A_{\max}$

$$\text{avec } \begin{cases} A_{\min} = \max \begin{cases} 4 \text{ cm}^2 / \text{m de périmètre} \\ 0.2 \frac{B}{100} \end{cases} \\ A_{\max} = 5 \frac{B}{100} \end{cases}$$

8) Armatures longitudinales prises en compte dans les calculs de résistance

Si $\lambda > 35$: seules, sont à prendre en compte dans les calculs, les armatures augmentant le plus efficacement la rigidité dans le plan de flambement (Art. B8.4,1).

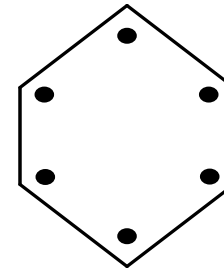
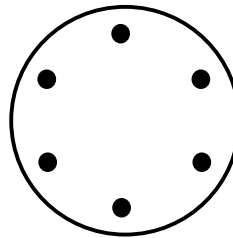
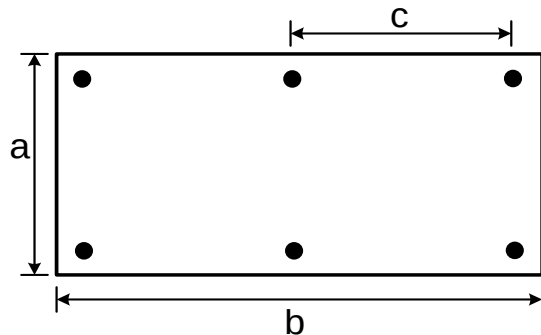


- Barres prises en compte dans les calculs
- Barres non prises en compte

9) Dispositions des armatures longitudinales

Les armatures (Art.A8.1,22) doivent être réparties le long des parois.

- pour les sections rectangulaires ($a < b$) la distance maximale "c" de deux barres voisines doit respecter la condition : $c \leq \min [(a+10 \text{ cm}) ; 40 \text{ cm}]$
- pour les sections circulaires, on place au moins 6 barres régulièrement espacées
- pour les sections polygonales, on place au moins une barre dans chaque angle.



10) Armatures transversales

a) **Diamètre :** $\frac{\varnothing_\ell}{3} \leq \varnothing_t \leq 12 \text{ mm}$

b) **Espacement :**

- En zone courante : $s_t \leq \min (40\text{cm} ; a+10\text{cm} ; \varnothing_{\ell_{\min}})$

a = plus petite dimension transversale de la section ou son diamètre

- En zone de recouvrement :

Dans les zones où il y a plus de la moitié des barres en recouvrement, on dispose au moins 3 nappes d'armatures transversales sur ℓ_r avec $\ell_r = 0.6 \ell_s$ dans les cas courants et $\ell_r = \ell_s$ pour les pièces soumises aux chocs.

c) **Remarque :**

Les armatures transversales doivent maintenir :

- toutes les barres prises en compte dans les calculs de résistance
- les barres de diamètre $\geq 20 \text{ mm}$ même celles non prises en compte dans les calculs.

11) Coffrage

- La condition de résistance donne

$$B_r \geq \frac{\frac{kN_u}{\alpha}}{\frac{f_{c28}}{0.9 \gamma_b} + \frac{A}{B_r} \frac{f_e}{\gamma_s}}$$
- On peut adopter par exemple $\frac{A}{B_r} = 1 \%$ d'où

$$B_r \geq \frac{\frac{kN_u}{\alpha}}{\frac{f_{c28}}{0.9 \gamma_b} + \frac{f_e}{100 \gamma_s}}$$
- On peut aussi chercher à atteindre $\lambda = 35$ pour que toutes les armatures participent à la résistance.

Exercice n°21

Déterminer le ferrailage d'un poteau soumis en ELU à un effort de compression centré $N_u = 1000$ KN.

Données :

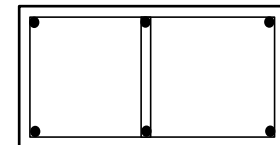
- $f_{c28} = 27$ MPa
- $f_e = 400$ MPa
- charges appliquées après 90 jours
- longueur de flambement : $\ell_f = 3$ m
- section du poteau : $B = 20 \times 40$ cm²

Exercice n°22

Calculer la force portante d'un poteau de bâtiment de section 20×30 cm² armé de 6HA12 en acier FeE 400.

Données :

- $f_{c28} = 25$ MPa
- 60% des charges sont appliquées avant 90 jours
- longueur de flambement : $\ell_f = 3.2$ m
- $A_t = 4$ HA6 ; $s_t = 18$ cm



Traction simple – Tirants

1) Introduction

Une pièce en béton armé est sollicitée en **traction simple** lorsque les forces agissant sur toute section droite se réduisent à **un effort normal** de traction "N" appliqué au centre de gravité de la section.

2) Dimensionnement des armatures longitudinales

Le béton tendu étant négligé, la totalité de l'effort de traction est supportée par les armatures.

$$\text{✕ En E.L.U : } A_u \geq \frac{N_u}{f_e/\gamma_s}$$

$$\text{✕ En E.L.S : } A_{ser} \geq \frac{N_{ser}}{\bar{\sigma}_s}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \bar{\sigma}_s = \min\left(\frac{2}{3} f_e; 110\sqrt{\eta f_{tj}} \text{ MPa}\right) & \text{si fissuration préjudiciable} \\ \bar{\sigma}_s = \min\left(\frac{f_e}{2}; 90\sqrt{\eta f_{tj}} \text{ MPa}\right) & \text{si fissuration très préjudiciable} \end{cases}$$

✕ Condition de non fragilité Art. A.4.2) :

$$A f_e \geq B f_{tj}$$

$$\text{d'où } A \geq A_{\min} = B \frac{f_{tj}}{f_e}$$

La section d'armatures longitudinales est donc : $A = \max (A_u ; A_{\text{ser}} ; A_{\min})$

3) Armatures transversales

Dans les pièces tendues, les armatures transversales ne jouent plus que le rôle de barres de montage sauf si les armatures longitudinales comportent des recouvrements.

- **En zone courante**

$s_t \leq a$ avec a = plus petite dimension transversale de la poutre.

- **En zone de recouvrement**

Soit "m" barres de même diamètre se recouvrant avec "m" autres barres de part et d'autre d'un même plan P. La somme des armatures transversales rencontrées sur la longueur ℓ_s doit être telle que :

$$\sum (s_t \cdot f_{et}) = m \cdot A \cdot f_e$$

4) Coffrage

La section B de béton est obtenue en satisfaisant :

- la condition de non fragilité
- le bon enrobage des aciers
- les conditions de jonction par recouvrement des barres

Exercice n°23

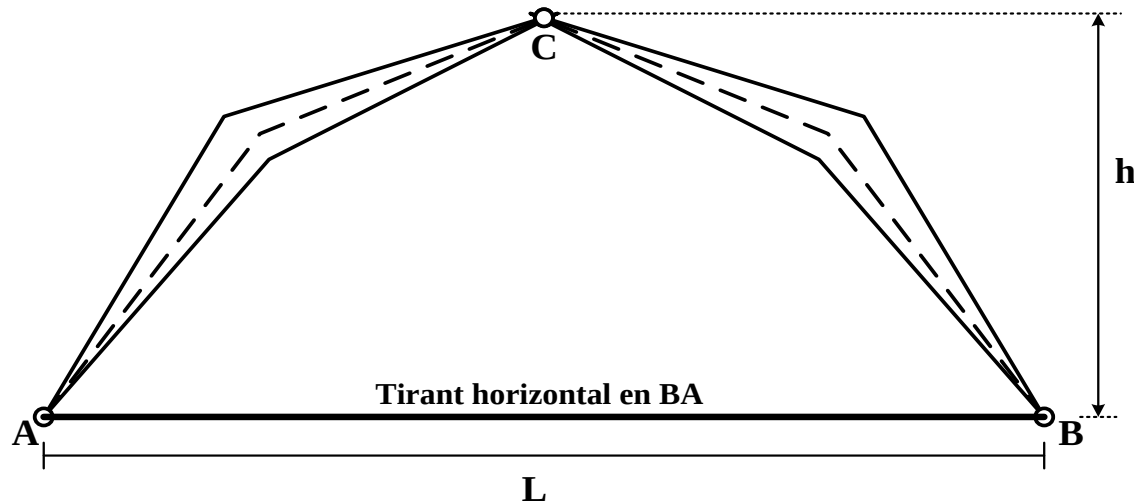
Une charpente en BA est constituée de :

- Un arc à trois articulations
- Un tirant de section $30 \times 20 \text{ cm}^2$ reliant les appuis A et B

Déterminer les armatures du tirant AB, soumis à un effort normal de traction simple.

Données :

- à l'ELUR : $N_u = 0.77 \text{ MN}$
- à l'ELS : $N_{\text{ser}} = 0.54 \text{ MN}$
- acier FeE 400 ; $\gamma_s = 1.15$; $\eta = 1.6$
- béton : $f_{c28} = 18 \text{ MPa}$
- fissuration peu nuisible



Exercice n°24

Un tirant de section 18x18 cm² est destiné à maintenir la poutraison d'un plancher de manière à libérer l'espace au niveau inférieur

Déterminer les armatures du tirant en considérant la structure symétrique et les charges uniformément réparties sur la surface du plancher.

Données :

charge permanente sur le plancher : $g = 4 \text{ KN/m}^2$

charge d'exploitation : $q = 1.75 \text{ KN/m}^2$

surface du plancher agissant sur le tirant : $S = 18 \text{ m}^2$

hauteur du tirant : $H = 2.80 \text{ m}$

acier FeE 400 ; $\gamma_s = 1.15$; $\eta = 1.6$

béton : $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$

fissuration préjudiciable

enrobage $\geq 2 \text{ cm}$

