

## Chapitre 6. Effort tranchant

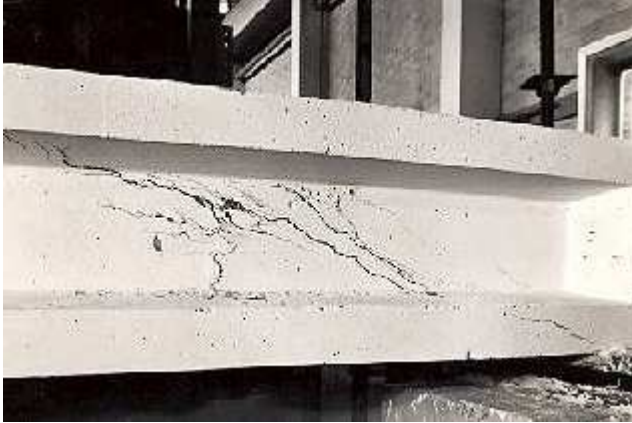
(source : Calcrete : the Concrete Centre)

### 6.1 Ruptures par effort tranchant

Nous avons vu jusqu'à présent le comportement du béton en flexion pure. En pratique, les éléments en béton armé doivent résister, en plus de la flexion, à d'autres sollicitations comme l'effort tranchant.

#### 6.1.1 Poutre

La figure suivante montre une rupture de poutre par effort tranchant près de l'appui :



#### 6.1.2 Dalle

Des efforts concentrés, comme près des colonnes, peuvent provoquer une rupture de la dalle par poinçonnement :

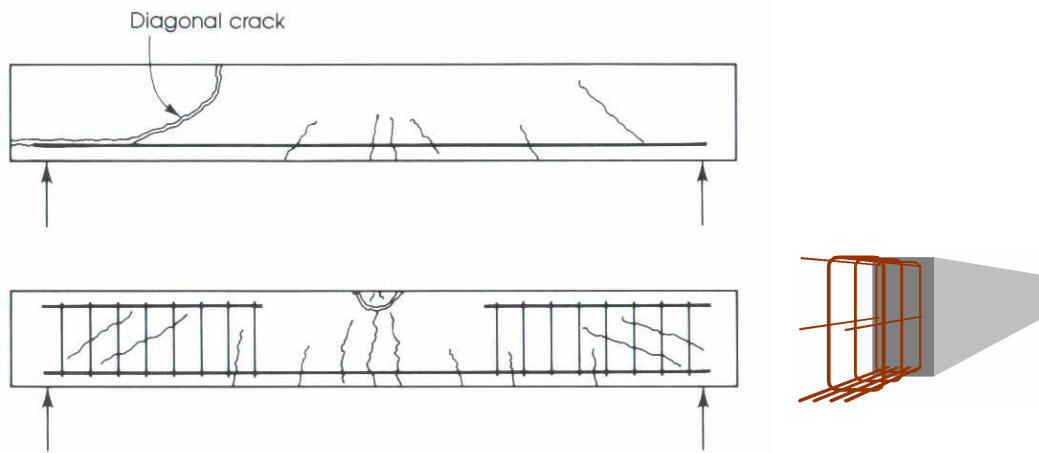


### 6.2 Effet des armatures d'effort tranchant (étriers) sur le type de ruine

La figure suivante montre deux poutres isostatiques semblables mais dont la première ne comporte pas d'armatures d'effort tranchant.

Ces deux poutres ont été soumises à un chargement identique constitué de deux charges concentrées aux  $1/3$  et  $2/3$  de la portée.

On a remarqué, pendant l'essai, que la première poutre s'est ruinée prématurément par fissuration diagonale et décollement du béton situé au-dessus de l'armature de flexion.



Dans la deuxième poutre, on a installé des armatures d'effort tranchant (étriers) et des armatures de construction en partie supérieure. On a constaté que cette poutre s'est bien ruinée en flexion à mi-portée comme prévu.

## 6.3 Résistance du béton armé au cisaillement sans armatures d'effort tranchant (étriers).

### 6.3.1 Introduction

Avant d'envisager un calcul d'armatures d'effort tranchant, il importe de déterminer l'effort tranchant que le béton est susceptible de supporter seul.

En effet, pour un niveau de contraintes particulièrement faible, ce qui est souvent le cas dans les dalles qui ont une "largeur d'âme" importante, les expériences ont montré que le béton était capable de reprendre sans armature spéciale une certaine quantité d'effort tranchant.

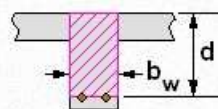
### 6.3.2 Lecture : DOC5 (Source : Calcrete, The Concrete Centre)

It is generally regarded that there are 3 factors which contribute to the resistance of a reinforced concrete member which has **NO shear reinforcement** :-

- the area of concrete in **compression**,
- the **dowel** action of the longitudinal tensile reinforcement,
- the interlocking nature of the **aggregate**.

A fully developed plastic theory exists, backed-up by experiments, to determine the shear behaviour of reinforced concrete beams **without shear reinforcement**. However, the theory is very complicated, and it was decided to adopt a traditional, empirical approach in the Code.

This assumes that the shear resistance,  $V_{Rd,c}$  is derived from a **shear capacity (stress)**,  $\tau_c$  acting uniformly over the effective area of the section, thus:

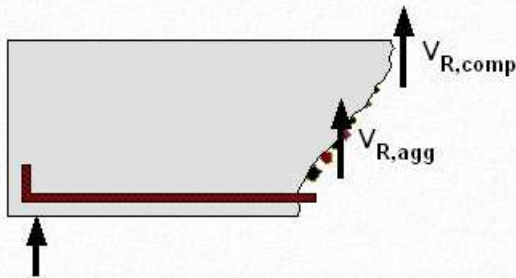


$$V_{Rd,c} = \tau_c b_w d$$

There is a contribution from the un-cracked concrete in the compression zone -

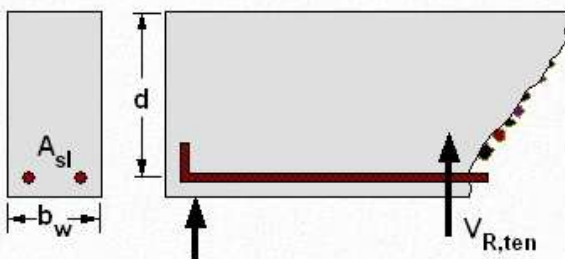
- and from the interlocking nature of the aggregate across the crack.

Increasing the concrete compressive strength increases the shear capacity of the section - ( tests show by about the cube root of  $f_{ck}$  ).



The tensile reinforcement provides a resistance to the shear force by dowel action with the concrete, provided it is fully anchored beyond the point at which it intersects the crack.

Partly by this dowel action, and partly by its influence on the area of concrete in compression, the reinforcement ratio  $A_{sl} / b_w d$  influences the shear capacity. The tensile strength of the steel has NO influence.



Tests have shown that increasing the reinforcement ratio from 1% to 2%, increases the shear resistance by 20-40%, but any increase above 2% has no effect.

### 6.3.3 Résistance d'une section de béton armé sans armatures d'effort tranchant

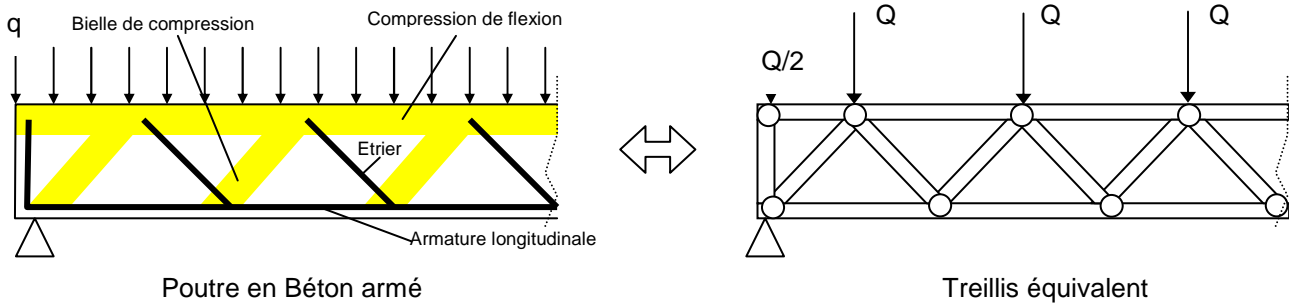
On retrouvera, dans les formules reprises dans le MC au 13.3.2, les 3 facteurs précités.

## 6.4 Résistance du béton armé au cisaillement avec armatures d'effort tranchant (étriers).

### 6.4.1 Analogie de Morsch

Lorsque  $V_{Ed} > V_{Rd,c}$ , des armatures transversales deviennent nécessaires pour assurer la reprise des efforts de traction dus à l'effort tranchant.

Pour établir les équations d'équilibre, on se base sur l'**analogie de Morsch** qui consiste à comparer le fonctionnement d'une poutre en béton armé à celui d'une poutre fictive en treillis.



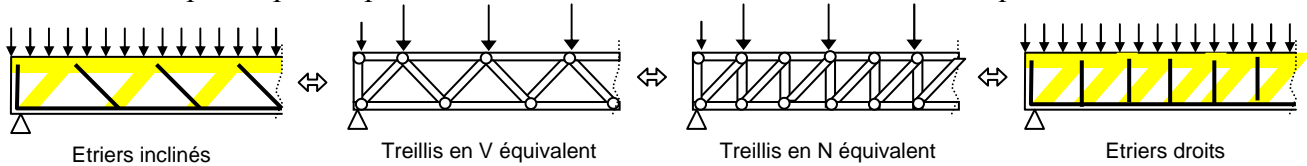
La membrure supérieure de la poutre fictive correspond à la zone de compression dans le béton tandis que la membrure inférieure correspond à l'armature tendue.

Les diagonales comprimées du treillis correspondent aux "bielles" de compression dans l'âme de la poutre en béton et les diagonales tendues correspondent aux armatures d'effort tranchant, appelées « étriers ».

Cette modélisation à partir d'un treillis simple isostatique est sécuritaire pour l'évaluation de la résistance des éléments de structure car elle se fonde sur le théorème statique de la théorie de la plasticité:

*"L'existence d'une distribution interne imaginaire de forces en équilibre avec les forces extérieures donne la certitude que la pièce considérée est capable de supporter des forces supérieures, ou au minimum égales aux forces extérieures considérées."*

Partant de ce théorème, il n'existe pas un treillis unique auquel on doit se référer mais bien une infinité de modèles dépendant de la dimension des diagonales de béton et d'acier, de leur inclinaison, de leur degré d'encastrement ... L'analogie de Morsch se complète notamment par un modèle de treillis en N dont la correspondance de disposition verticale des étriers dans une poutre en béton est plus conventionnelle et tout aussi acceptable pour reprendre l'effort tranchant au vu du théorème statique.



### 6.4.2 Utilisation de l'analogie

La norme propose la méthode dite des **"bielles d'inclinaison variable"** : elle est basée sur le modèle simplifié du treillis, mais, s'inspirant de constatations expérimentales, permet de faire varier l'angle  $\theta$  de la bielle comprimée dans des limites fixées entre  $0,5 < \cot \theta < 2$ . Ce qui correspond à des angles de  $63^\circ > \theta > 27^\circ$ .

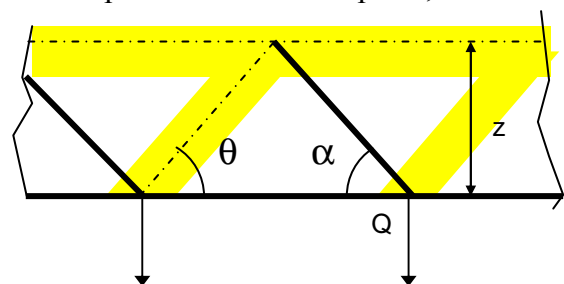
L'inclinaison des étriers peut aussi varier entre  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

La norme n'autorise pas de prendre en compte, dans cette approche la composante  $V_{Rd,c}$  (qui est implicitement exploitée par la variation possible de l'angle de la "bielle" de béton).

Une limitation du pourcentage mécanique d'étrier est également ajoutée.

Sauf cas particulier, le bras de levier "z" entre les membrures peut être pris, par simplification, égal à 90% de la hauteur utile, soit:  $z = 0,9.d$ .

La modélisation de la poutre réelle en béton par un treillis, ne va pas sans poser quelques problèmes de représentation. Ainsi, l'effort externe réparti sur la longueur de la poutre doit être remplacé, dans le treillis, par des charges nodales Q appliquées aux nœuds. En choisissant de charger les nœuds de la membrure inférieure du treillis, on amplifie légèrement l'effet de traction dans les diagonales tendues. Cette hypothèse est plus sécuritaire que celle qui consiste à charger les nœuds supérieurs.

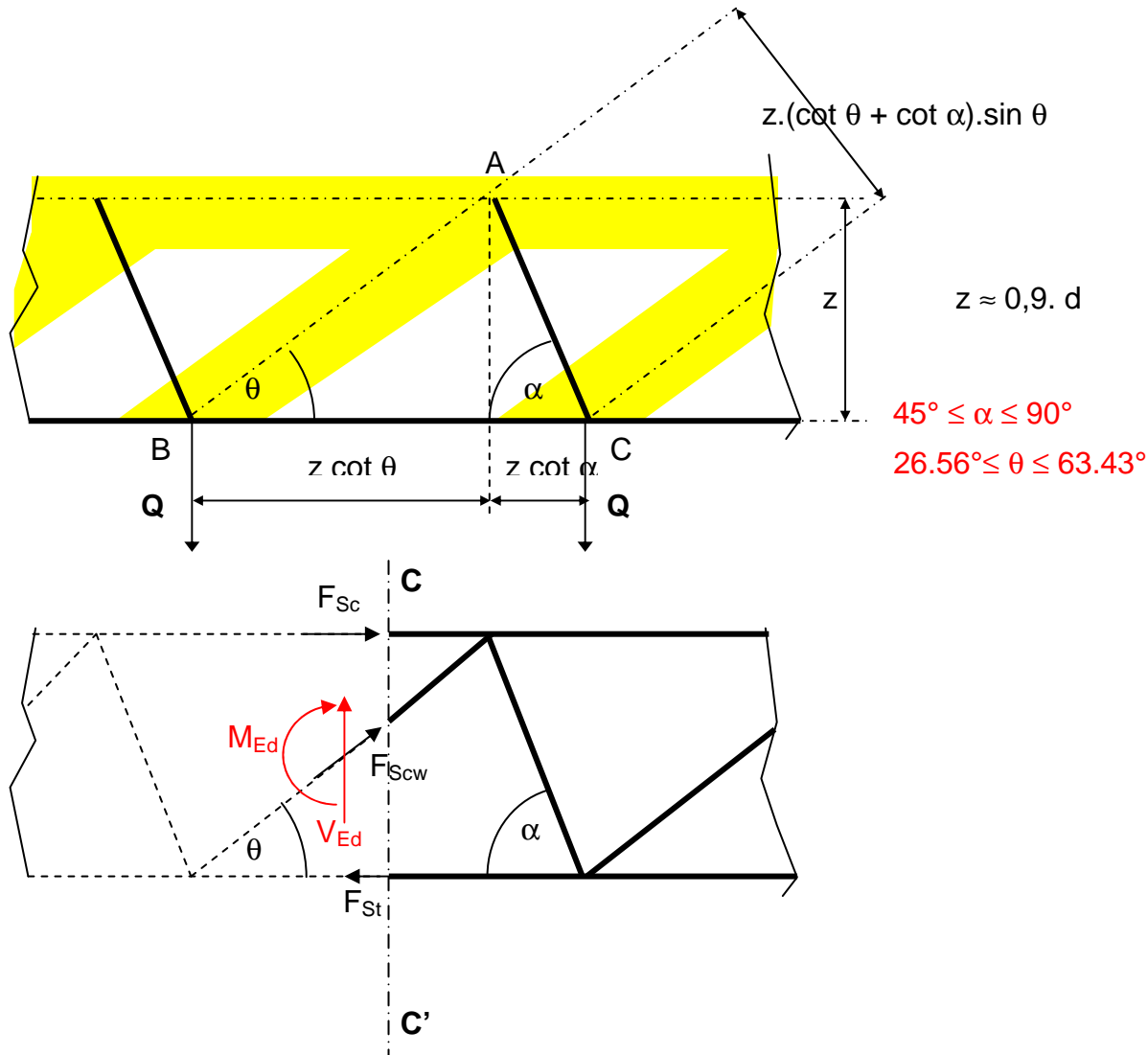


### 6.4.3 Equilibre des forces

Les formules de dimensionnement ou de contrôle sont basées sur l'équilibre des efforts dans l'âme. Nous établirons ces formules dans le cas général d'angles  $\theta$  (inclinaison de la bielle de béton) et  $\alpha$  (inclinaison de l'étrier) quelconques.

#### 6.4.3.1 Vérification de la compression dans la bielle comprimée

Soit le treillis de la figure suivante, dans lequel nous réalisons une coupe à mi-distance des nœuds de la membrure inférieure.



L'équilibre vertical nous donne l'effort de compression dans la bielle de béton comprimée :

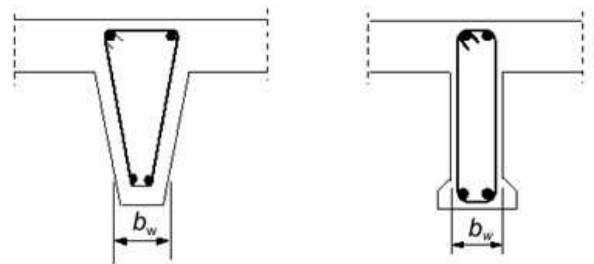
$$F_{Scw} = \frac{V_{Ed}}{\sin \vartheta}$$

Cet effort de compression doit être repris par la bielle de béton inclinée de  $\theta$ . Cette bielle a comme dimensions transversales une largeur  $b_w$  et une hauteur  $= z \cdot (\cot \vartheta + \cot \alpha) \cdot \sin \vartheta$  (voir figure précédente).

La résistance de calcul de la bielle comprimée vaut alors:

$$F_{Rcw} = b_w \cdot z \cdot (\cot \vartheta + \cot \alpha) \cdot \sin \vartheta \cdot v_1 \cdot f_{cd}$$

On notera qu'un coefficient réducteur  $v_1$  corrige la résistance du béton. Il rend compte d'une nette perte de la capacité de résistance de l'âme qui est fissurée.



L'Eurocode propose :  $v_1 = 0,6 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$ .

En exprimant que, pour ne pas avoir de rupture de la bielle, il faut toujours avoir  $F_{Ssw} \leq F_{Rsw}$ , on obtient:

$$\frac{V_{Ed}}{\sin \vartheta} \leq b_w \cdot z \cdot (\cot \vartheta + \cot \alpha) \cdot \sin \vartheta \cdot v_1 \cdot f_{cd}$$

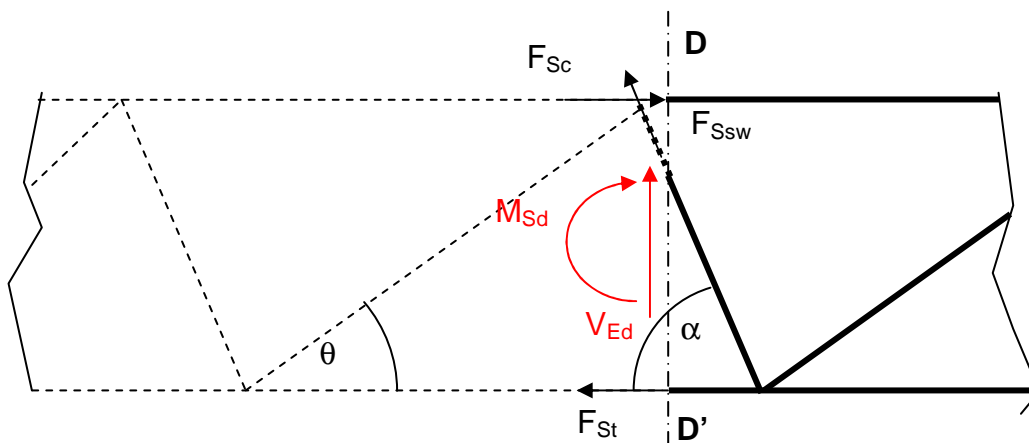
d'où  $V_{Ed} < V_{Rd,max}$  exprimant la capacité de **résistance de la bielle comprimée de béton**.

$$\text{avec } V_{Rd,max} = b_w \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot (\cot \vartheta + \cot \alpha) \cdot \sin^2 \vartheta$$

#### 6.4.3.2 Vérification de la traction dans les étriers

Faisons à présent une coupe dans le treillis en veillant à couper un étrier. L'équilibre vertical nous donne l'effort de traction dans l'étrier :

$$F_{Ssw} = \frac{V_{Ed}}{\sin \alpha}$$



Si  $A_{sw}$  représente la section coupée dans l'étrier (c-à-d, si l'étrier est de forme rectangulaire, la section de 2 brins) et que les étriers sont écartés d'un "pas" ou entre-distance de "s", la section résistante par panneau, soit sur une longueur égale à  $z \cdot (\cot \vartheta + \cot \alpha)$  vaut:  $\frac{A_{sw} \cdot z \cdot (\cot \vartheta + \cot \alpha)}{s}$

La résistance de calcul de la bielle tendue (étrier) vaut donc, si  $f_{ywd}$  est sa limite élastique de calcul:

$$F_{Rsw} = \frac{A_{sw} \cdot z \cdot f_{ywd} \cdot (\cot \vartheta + \cot \alpha)}{s}$$

En exprimant que  $F_{Ssw} \leq F_{Rsw}$ , on obtient:  $\frac{V_{Ed}}{\sin \alpha} \leq \frac{A_{sw} \cdot z \cdot f_{ywd} \cdot (\cot \vartheta + \cot \alpha)}{s}$

d'où

$V_{Ed} \leq V_{Rd,s}$  exprimant la capacité de **résistance de l'étrier**.

$$\text{avec } V_{Rd,s} = \frac{A_{sw} \cdot z \cdot f_{ywd} \cdot (\cot \vartheta + \cot \alpha) \cdot \sin \alpha}{s}$$

Pour assurer une rupture ductile (rupture des étriers avant rupture des bielles de compression), l'EC2 impose de ne pas dépasser un taux maximal d'armatures d'effort tranchant:

$$\frac{A_{sw}}{s} \leq \frac{A_{sw,Max}}{s} = b_w \cdot v_1 \cdot \frac{f_{cd}}{2f_{ywd}}$$

### 6.4.3.3 Résumé

En résumé, il faut respecter deux conditions :

1. la première condition veille à éviter la rupture de la bielle de béton en compression

$$V_{Ed} \leq b_w \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot (\cot \vartheta + \cot \alpha) \cdot \sin^2 \vartheta$$

2. la seconde veille à éviter la rupture par plastification de l'étrier :

$$V_{Ed} \leq \frac{A_{sw} \cdot z \cdot f_{ywd} \cdot (\cot \vartheta + \cot \alpha)}{s} \sin \alpha$$

En pratique, on dispose généralement les étriers verticalement, donc  $\alpha=90^\circ$ , et par conséquent, les deux équations deviennent :

$$V_{Ed} \leq b_w \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot \cot \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta = b_w \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \cdot \sin^2 \vartheta = b_w \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} \cdot \frac{\sin 2\vartheta}{2} \quad \text{et}$$

$$V_{Ed} \leq \frac{A_{sw} \cdot z \cdot f_{ywd} \cdot \cot \vartheta}{s}$$

### 6.4.3.4 Calcul économique des étriers (méthode des bielles d'inclinaison variables)

La solution la plus économique est celle pour laquelle  $\cot \theta$  est maximale tout en respectant  $V_{Ed} \leq V_{Rd,max}$  (rupture de la bielle de béton).

Il faut que la solution vérifie que :  $V_{Ed} \leq V_{Rd,s}$  (rupture des étriers) et  $V_{Ed} \leq V_{Rd,max}$  (rupture de la bielle de béton).

On calcule d'abord  $\theta = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2 \cdot V_{Ed}}{b_w \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd}}\right)$  avec  $v_1 = 0,6 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$  ( $f_{ck}$  en MPa)

La valeur de  $\theta$  retenue doit vérifier  $26,56^\circ < \theta < 63,43^\circ$  (Document d'Application National Belge de l'EC2 :  $0,5 < \cot \theta < 2$ )

On se fixe ensuite  $A_{sw}$  (on se limite en général à des étriers constitués de  $\phi 8$  ou  $\phi 10$ ) et le pas « s » des étriers se déduit par :

$$s = \frac{A_{sw} \cdot z \cdot f_{ywd} \cdot \cot \theta}{V_{Ed}}$$

## 6.4.4 Dispositions constructives des étriers (voir MC 13.3.4)

### 6.4.5 Conséquences du fonctionnement en treillis

Le fonctionnement en treillis de la poutre a deux conséquences :

- L'effort dans la membrure inférieure (c.à.d. les armatures principales) augmente
- La bielle d'about, demande une vérification des efforts concentrés sur appui

#### 6.4.5.1 Effet de l'effort tranchant sur l'effort dans les armatures

Reprenons la figure du 6.4.3.1.

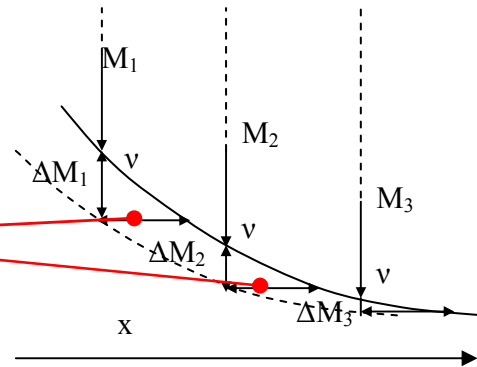
Ecrivons l'équilibre moment par rapport à A

$$F_{St} \cdot z = -M_{Ed} - V_{Ed} \cdot \frac{z}{2} \cdot (\cot \vartheta - \cot \alpha) \quad \text{d'où} \quad F_{St} = -\left(\frac{M_{Ed}}{z} + \frac{V_{Ed}}{2}\right) \cdot (\cot \vartheta - \cot \alpha)$$

On constate donc que, par rapport à l'effort dû au moment seul, l'effort dans l'armature est augmenté de la quantité  $\frac{V_{Ed}}{2} \cdot (\cot \vartheta - \cot \alpha)$ .

On peut montrer que cela équivaut à décaler vers l'extérieur le diagramme des moments d'une distance constante égale à :

$$\Delta x = a_l = \frac{z}{2} (\cot \vartheta - \cot \alpha)$$



Lorsqu'on ne garde pas la même section d'armatures sur toute la longueur d'une poutre, ou d'une dalle, il faudra tenir compte de ce diagramme décalé pour déterminer les endroits où ces armatures peuvent s'arrêter.

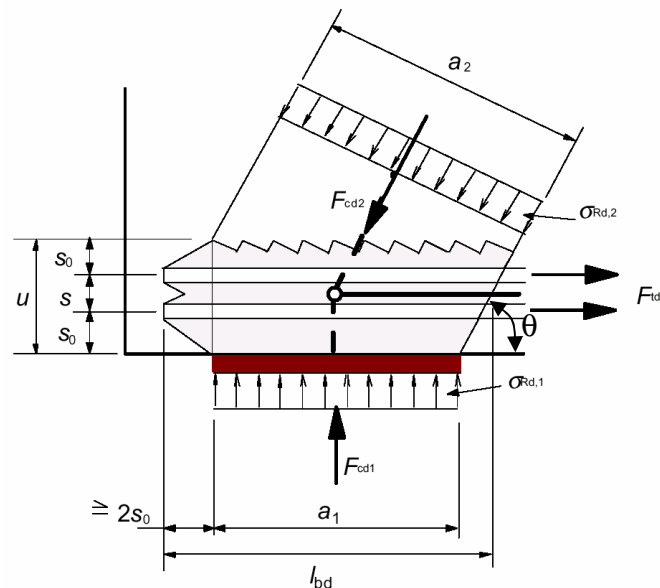
### 6.4.5.2 Vérifications au droit des appuis d'extrémité

Au droit d'un appui d'extrémité, il y a un équilibre de 3 forces :

- La force de compression dans la bielle :  $F_{cd2}$ ,
- La force de traction dans l'armature inférieure :  $F_{td}$
- La réaction venant de l'appui :  $F_{cd1}$ .

Ces trois forces ne doivent pas créer des contraintes excessives dans le béton, ni dans l'acier des armatures, il faut donc vérifier :

- la contrainte de compression sur appui ( $\sigma_{Rd,1}$ ).
- la contrainte de compression dans la bielle d'about ( $\sigma_{Rd,2}$ )
- que les armatures sont suffisantes pour transmettre  $F_{td}$ .



Les armatures longitudinales inférieures doivent équilibrer l'effort tranchant  $V_{ED}$  et être ancrées au-delà du bord de l'appui.

$$F_{td} = \frac{V_{ED}}{\tan \theta}$$

La section de ces armatures doit être au moins égale à :  $A_{s,appui}^{min} = \frac{F_{td}}{f_{yd}} = \frac{V_{ED,appui}}{f_{yd} \cdot \tan \theta}$

De plus, (EC2 6.5.4) on doit vérifier que, dans le béton, ni la contrainte de compression de la bielle de compression ni la contrainte de compression sur l'appui ne dépasse pas la valeur limite :

$$\max(\sigma_{Rd,1}, \sigma_{Rd,2}) \leq 0.85 \nu' f_{cd}$$

avec  $\nu' = 1 - f_{ck} / 250$  ( $f_{ck}$  en MPa)



Si la contrainte dans la bielle d'about était trop importante, il faudrait élargir la bielle, soit en élargissant l'appui, soit en plaçant des armatures supplémentaires, en forme d'épingles, comme indiqué dans les deux figures suivantes :

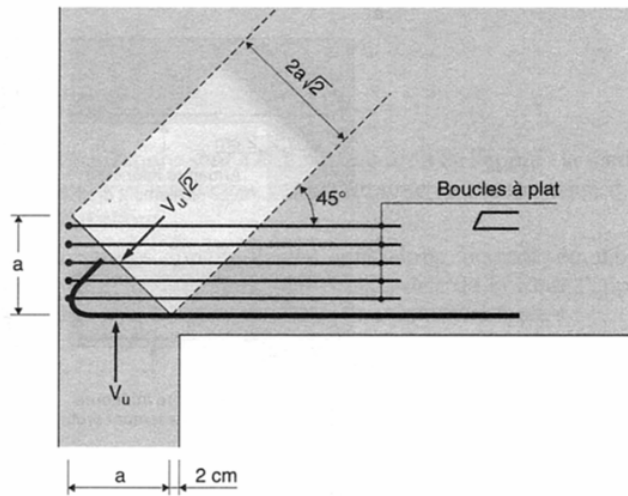


Figure 129 : Équilibre par bielle unique élargie.

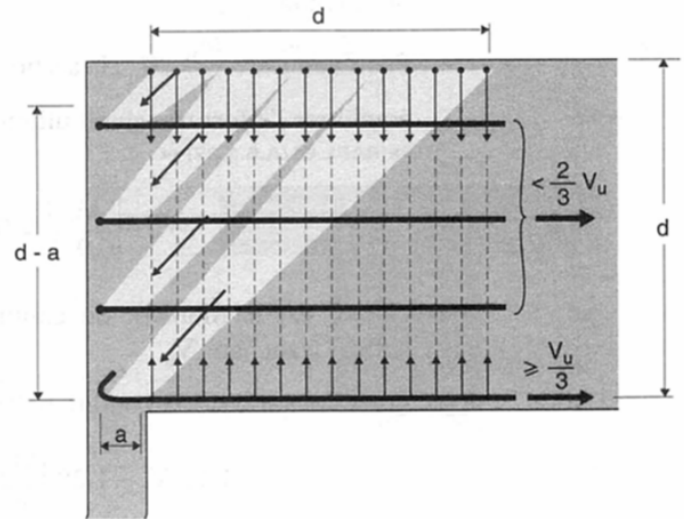


Figure 130 : Équilibre par bielles multiples.