Chapitre I: SYSTEMES DE FORCES

I. INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est de présenter les propriétés des divers types de forces qui agissent sur les différentes structures et machines.

II. FORCES

- Action d'un corps A sur un corps B. Il s'agit d'une grandeur vectorielle caractérisée par:

- Son point d'application
- Son intensité (ou module) en N
- Sa direction
- Son Sens

- La totalité des forces agissant sur un corps peut être divisée en deux groupes:

- Les forces intérieures
- Les forces extérieures

Une autre classification des forces consiste à distinguer:

- Les forces de contact
- Les forces de masses (à distance)

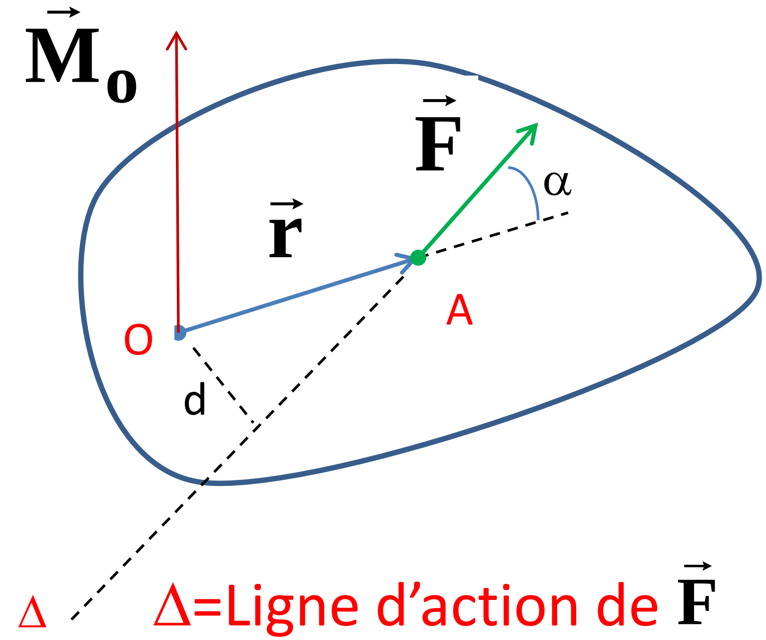
• Enfin les forces peuvent être concentrées, ou réparties à densités, cette répartition peut être

-Linéique
-Surfacique
-Volumique

REMARQUE: L'action d'une force est toujours accompagnée de l'apparition d'une réaction égale et de sens opposée à $\vec{\mathbf{F}}$.

III. MOMENT

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{o}} = \vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{F}}$$



Δ=Ligne d'action de $\vec{F}$

- Vecteur lié au point O
- $\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F}$

-Vecteur lié au point O

- $\left|\vec{M}_o\right| = r\,F\,\sin(\alpha)$ (N.m)

- $(\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}_o)$ Trièdre direct

-Remarque1 : sin(α) = d/r Mo = F d (N.m)

Remarque2 :

• Le moment en O de $\vec{F}$ reste invariant lorsqu'on déplace $\vec{F}$ sur sa ligne d'action:

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA'} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} + \underbrace{\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{F}}_{=\vec{O}}$$

• Le moment de $\vec{F}$ en un point de sa ligne d'action est nul.

Conséquences

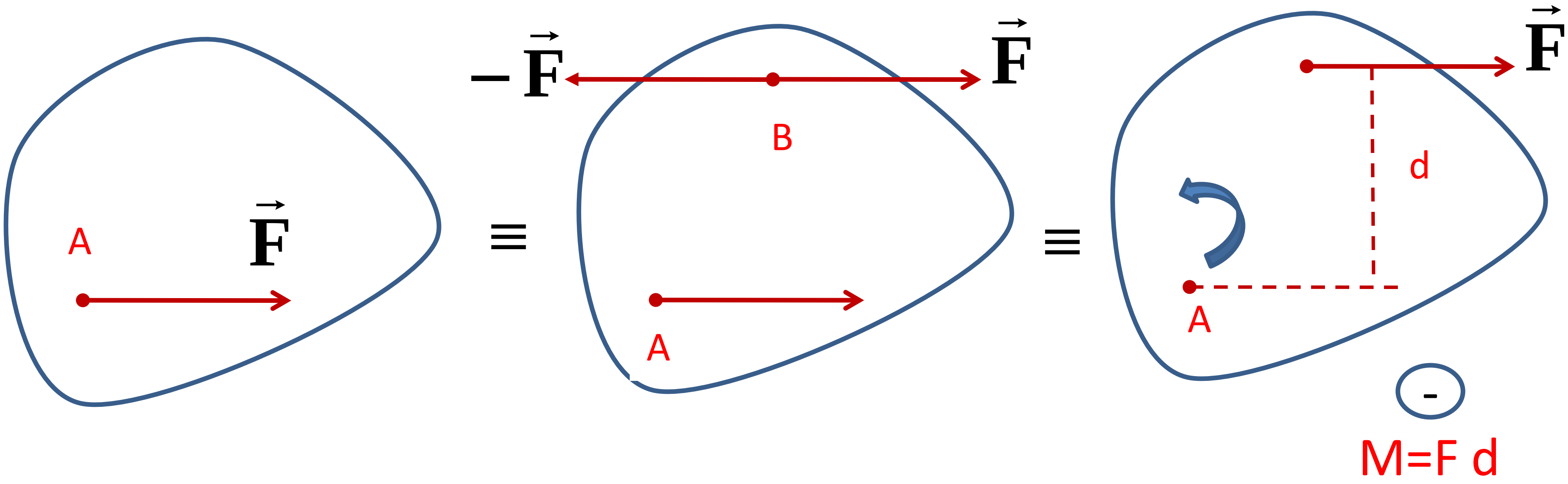
• L'effet d'une force $\vec{F}$ agissant sur un corps peut donc être réduit à une tendance à:

-Déplacer le corps selon sa direction

-Faire tourner le corps autour d'un axe qui ne coupe pas sa ligne d'action

La représentation de ce double effet est souvent plus facile à visualiser si on remplace une force donnée par :

- Une force parallèle et de même grandeur
- Un couple qui représente le moment de la force initiale



$$[T_{\vec{F}}]_A = \begin{bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_A = \vec{0} \end{bmatrix} \dashrightarrow [T_{\vec{F}}]_B = \begin{bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_B = F\,d\,\vec{k} \end{bmatrix}$$

Le torseur associée à $\vec{F}$ est donc un glisseur. Une force est donc un vecteur glissant (Pour les corps rigides):

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{k} \perp \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \vec{k} \perp \vec{F}$$

Superposition d'une force appliquée en B et d'un couple.

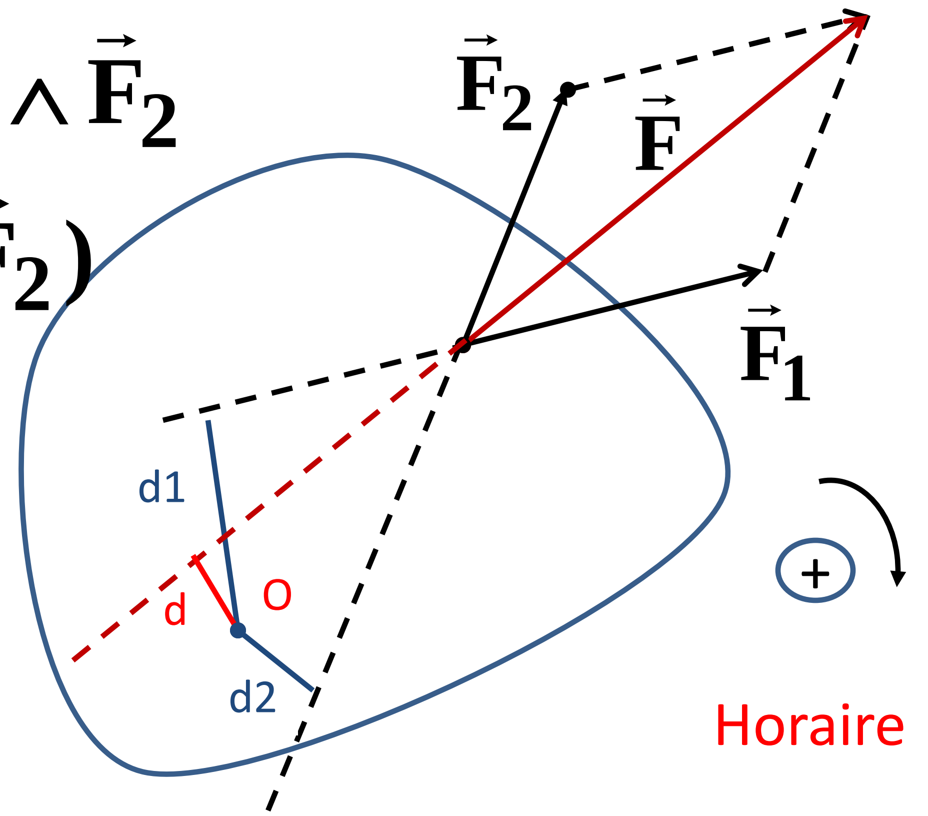
Théorème de Varignon: Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point est égal à la somme des moments des composantes de cette force par rapport au même point:

$$\vec{M}_o = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{M}_o(\vec{F}_1) + \vec{M}_o(\vec{F}_2)$$



$M_o = d\,F = d_1\ F_1\ -\ d_2\ F_2$

d_i : Bras de levier de la force F_i

PRINCIPE DES MOMENTS: Soit $(A_i, \vec{F}_i)$ une distribution distinctes de forces et soit **G** un point de la ligne d'action de $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ alors

$$\sum \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{F}_i = \overrightarrow{OG} \wedge \sum \vec{F}_i = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{R}$$

En effet (i=1, 2)

$$\vec{M}_G(\vec{R}) = \vec{M}_G(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{M}_G(\vec{F}_1) + \vec{M}_G(\vec{F}_2) = \vec{O}$$

$$\vec{M}_G(\vec{F}_i) = \vec{M}_O(\vec{F}_i) + \vec{F}_i \wedge \overrightarrow{OG}$$

Soit en remplaçant:

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}_2$$

$$= \overrightarrow{OG} \wedge \vec{R}$$

IV. COUPLES

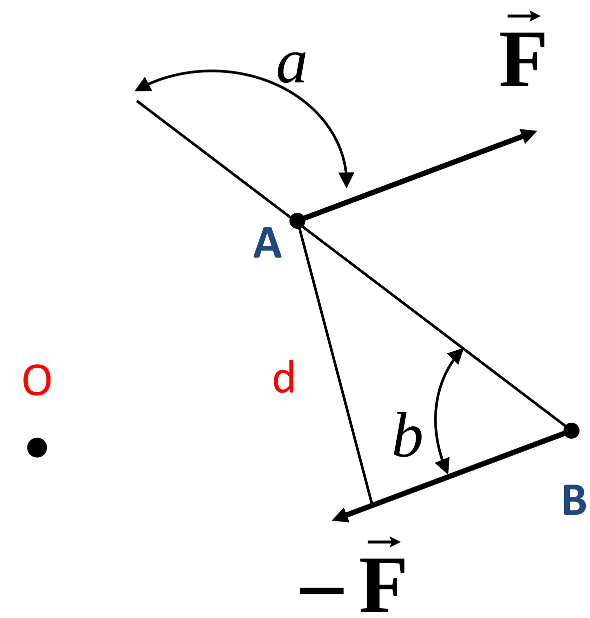
C'est le moment produit par deux forces égales et de sens opposées.

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} - \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

$$\left|\vec{M}_O\right| = F\ AB \left|\sin(\overrightarrow{BA}, \vec{F})\right|$$

$$= F\ AB\left|\sin(\alpha)\right|$$

$$= F\ AB\left|\sin(\beta)\right| = F\ \ d$$

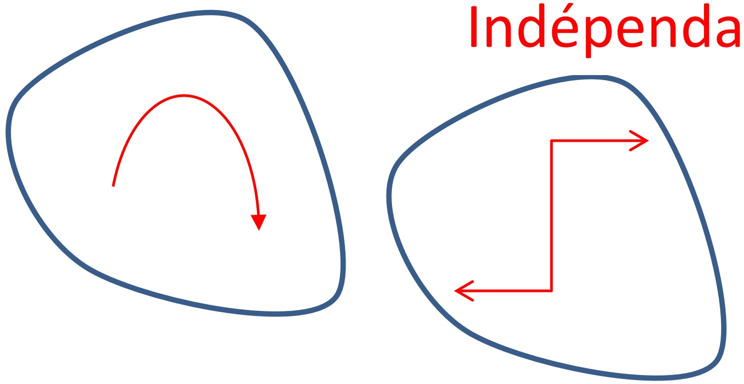


$$\sin(\beta) = d / AB$$

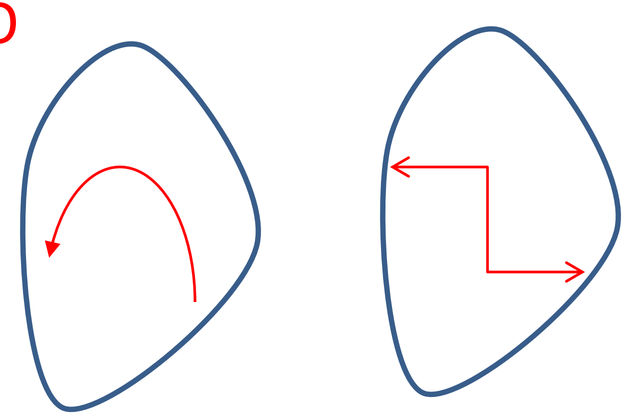
b=p-a

M = F d (N.m)

Indépendant du point O



Couple horaire

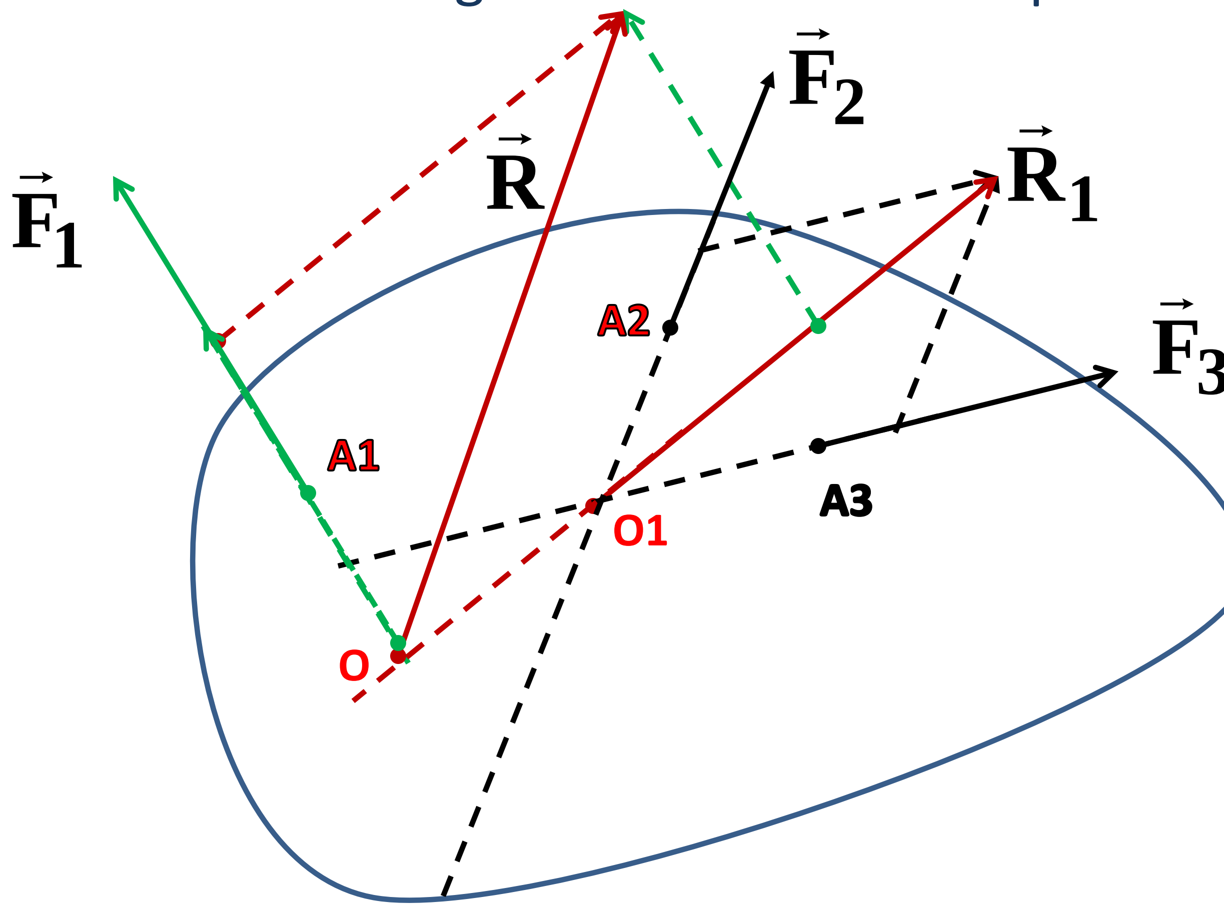


Couple Antihoraire

V. RESULTANTES: ELEMENTS DE REDUCTION RESULTANTS

Dans la majorité des problèmes rencontrés en mécanique, on doit manipuler des systèmes de forces quelconques. Pour étudier leur effet, on est souvent amené à les remplacer par des systèmes plus simples

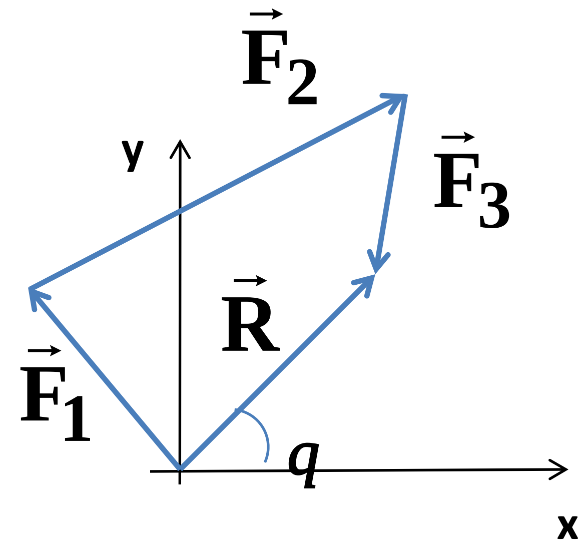
1^er CAS: Forces coplanaires: Ceci constitue le cas le plus courant en mécanique; toutes les forces agissent dans le même plan:



Dans cet exemple, on a déterminé la ligne d'action de la résultante en utilisant le principe de glissement d'une force sur sa ligne d'action. Par ailleurs la construction du polygone des forces permet de fixer le module de cette résultante et sa direction.

$$R = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{\sum F_y}{\sum F_x}\right)$$



Pour un point O quelconque, on a:

$$\left[T_{Forces}\right] = \begin{bmatrix} \vec{R} = \sum \vec{F}_i \\ M_O = \sum \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{F}_i \end{bmatrix}$$

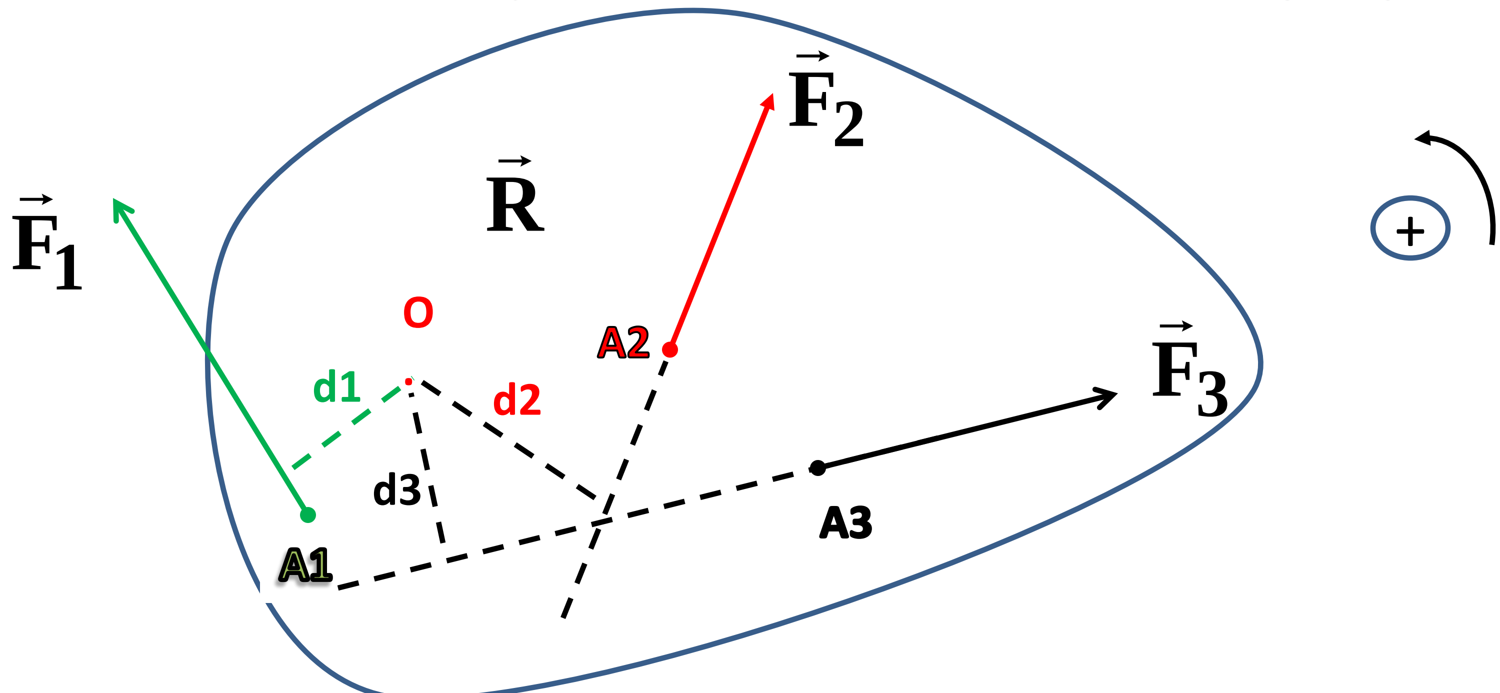
Pour déterminer la ligne d'action de la résultante, on peut alors appliquer le principe des moments qui stipule que:

$$\sum \overrightarrow{\mathbf{OA_i}} \wedge \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{i} = \overrightarrow{\mathbf{OG}} \wedge \sum \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{i} = \overrightarrow{\mathbf{OG}} \wedge \vec{\mathbf{R}}$$

G appartient à la ligne d'action de la résultante :

1°) On calcule le moment au point O:

$$\mathbf{M_o} = \left[-\mathbf{d_1}\ \mathbf{F_1} + \mathbf{d_2}\ \mathbf{F_2} + \mathbf{d_3}\ \mathbf{F_3}\right]$$

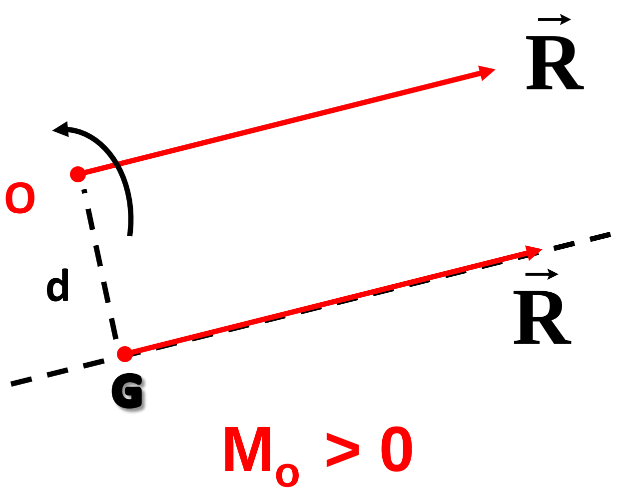


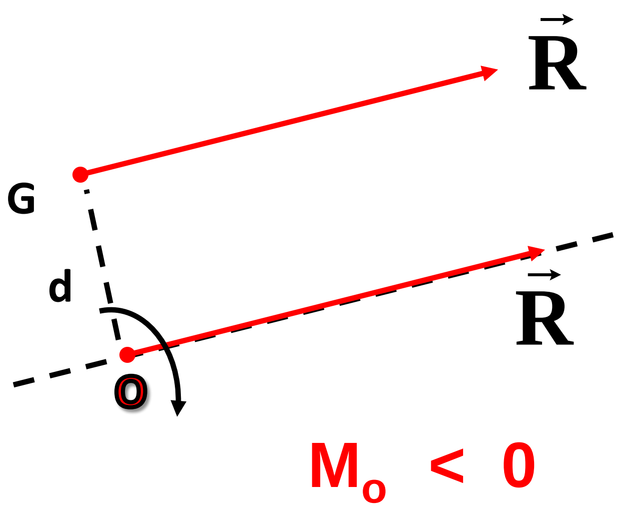
$M_o > 0$: sens antihoraire

$M_o < 0$: sens horaire

Si $M_o = 0$ alors O apparient à la ligne d'action

Si $M_o \neq 0$, on peut déterminer la ligne d'action de la résultante en appliquant la relation: $M_o = R\ d$ (d: distance OG ù G est un point de la ligne d'action)





2ème CAS: Distribution de forces (3D)

-Composantes rectangulaires: très souvent les problèmes en mécanique se déroulent en trois dimensions:

$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$$

$$F_x = F\cos(\theta_x), \quad F_y = F\cos(\theta_y), \quad F_z = F\cos(\theta_z)$$

où $\cos(\theta_x),\ \cos(\theta_y),\ \cos(\theta_z)$ Sont les cosinus directeurs

de $\vec{F}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Remarque: $[\cos(\theta_x)]^2 + [\cos(\theta_y)]^2 + [\cos(\theta_z)]^2 = 1$

$$\vec{F} = F\,\vec{n} \quad \text{où} \quad \vec{n} = \cos(\theta_x)\vec{i} + \cos(\theta_y)\vec{j} + \cos(\theta_z)\vec{k}$$

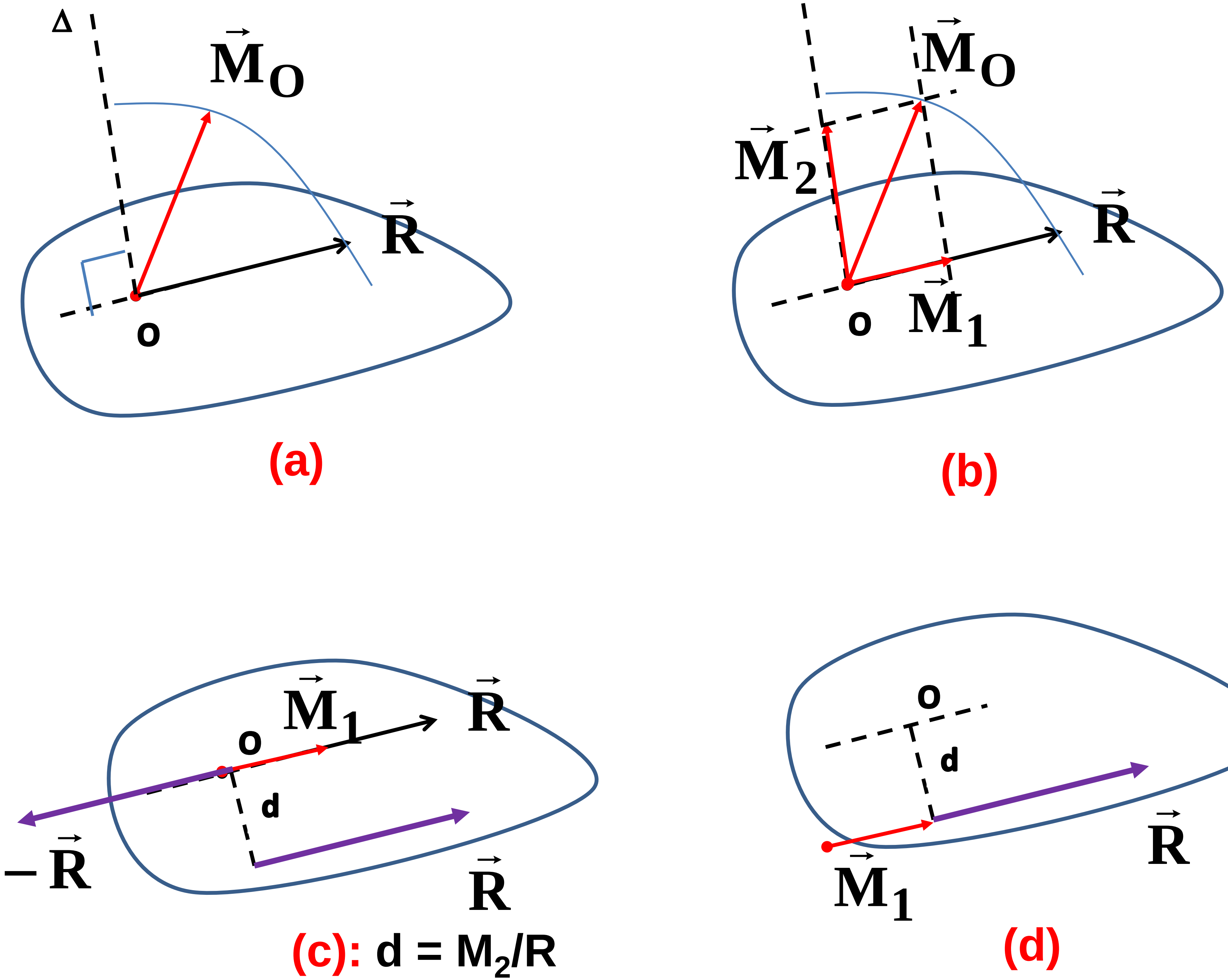
• Pour résoudre des problèmes en 3D, on doit généralement trouver les composantes scalaires des forces données ou inconnues. Pour ce faire, on rappelle que la direction d’une force se détermine au moyen de:

a) Deux points A et B sur la ligne d’action
b) Deux angles la ligne d’action

• Par ailleurs, on appelle axe du torseur équivalent l’axe:

$$\Delta = \left\{ \mathbf{P\ \text{à}\ l'espace\ affine\ de\ dim\ 3} \,/\, \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}} \,//\, \vec{\mathbf{R}} \right\}$$

Si l’on excepte le cas des couples, l’axe du torseur équivalent existe toujours et est unique.



Δ
$\vec{M}_O$
$\vec{R}$
o
(a)
$\vec{M}_O$
$\vec{M}_2$
$\vec{R}$
o
$\vec{M}_1$
(b)
$\vec{M}_1$
$\vec{R}$
o
d
$-\vec{R}$
$\vec{R}$
(c): d = M_2/R
o
d
$\vec{R}$
$\vec{M}_1$
(d)

Axe central: $\Delta = \left\{\mathbf{P\ à\ l'espace\ affine\ de\ dim\ 3} / \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}} \,//\, \vec{\mathbf{R}}\right\}$

$$\left(\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}}\right)_{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\left(\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}}\right)_{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}} - \left(\frac{\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{R}}}{\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|}\right)\frac{\vec{\mathbf{R}}}{\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|} = \vec{\mathbf{0}}$$

$$= \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} + \overrightarrow{\mathbf{PO}} \wedge \vec{\mathbf{R}} - \left(\frac{\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{R}}}{\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|}\right)\frac{\vec{\mathbf{R}}}{\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|} = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} \wedge \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} - \left(\frac{\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{R}}}{\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|}\right)\frac{\vec{\mathbf{R}}}{\left\|\vec{\mathbf{R}}\right\|} = \vec{\mathbf{0}}$$

Torseur Résultant:

Soit $(A_i, \vec{F}_i)$ une distribution discrète de forces s'exerçant sur un système S. Le torseur résultant en un point O quelconque admet pour éléments de réduction:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{F}_i$$

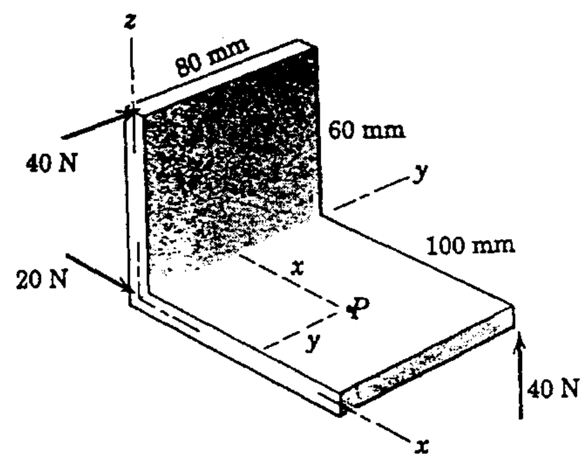
Remarque: le point O peut être choisi arbitrairement, mais la grandeur et la direction du moment résultant $\vec{M}_O$ sont fonction de sa position. Par contre la grandeur et la direction de la force résultante $\vec{R}$ sont les mêmes quel que soit le point choisit.

Exercice:

Déterminez le torseur des trois forces agissant sur la cornière.

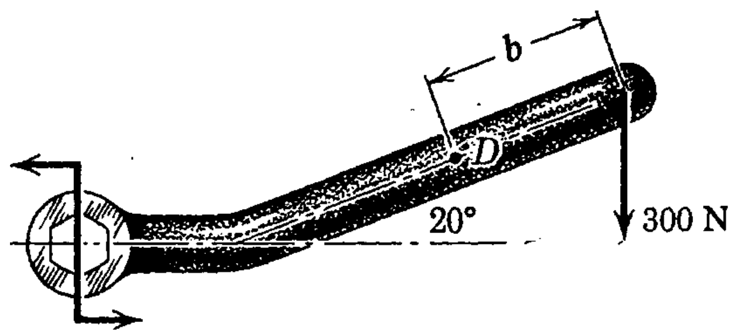
Calculez les coordonnées du point P dans le plan x-y par lequel passe la force résultante du torseur.

Trouvez également la grandeur du couple M du torseur.



Exercice:

Remplacez la force et le couple, C= 60 N.m, agissant sur la clé par une simple force équivalente appliquée en D. Déterminez b.



Exercice:

Les pistons d'un système mécanique appliquent deux forces FA et FB sur un arbre à manivelles.

Les cosinus directeurs de FA

Sont:

cos ex = - 0.182, cos e_y = 0.818 et cos e_z = 0.545

Le module de FA est de 4KN.

Les cosinus directeurs de FB sont : cos ex = 0.182, cos e_y = 0.818 et cos e_z = - 0.545 et son module est de 2KN. Calculez le moment par rapport au point O.