

# Chapitre II: EQUILIBRE

# I. INTRODUCTION

- **Objectif de la statique:** établir les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'état d'équilibre aux ouvrages du génie.

- **Conditions nécessaires et suffisantes pour assurer l'équilibre:** Quand un corps est en équilibre, le torseur résultant des forces extérieures qui agissent sur lui est nul. Donc, la force résultante et le moment résultant sont nuls.

$$[\mathbf{T}_{\text{Forces extérieures}}] = \left[ \begin{array}{l} \vec{\mathbf{R}} = \sum \vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{0}} \\ \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = \sum \overrightarrow{\mathbf{OA}}_i \wedge \vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{0}} \end{array} \right]$$

Remarque: si  $\vec{\mathbf{R}}$  et  $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}$  alors  $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{0}}$  quelque soit le point  $\mathbf{P}$  de l'espace affine.

- Pour la suite, on traitera d'abord l'équilibre des corps soumis à un système de forces à deux dimensions avant de considérer le cas des forces tridimensionnelles.

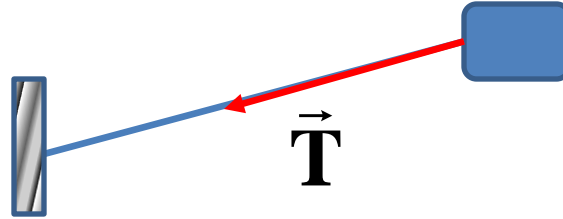
## II. ISOLATION DES SYSTEMES MECANIQUES

- **Systemes mécaniques:** Corps unique ou un ensemble de corps qu'il est possible de dissocier de tous les corps environnant.  
Pour l'application des équations de l'équilibre, il est essentiel de définir avec précision le système mécanique analysé afin de pouvoir représenter clairement et complètement toutes les force extérieures qui agissent sur lui.
- **Isolation du système mécanique:**
  - Choisir le système à isoler (pour la détermination d'une ou plusieurs inconnues)
  - Isoler ce système en traçant un schéma qui correspond à la frontière extérieure complète
  - Les forces extérieures sont ensuite appliquées aux endroits sur le schéma du corps isolé
  - Choisir un système d'axes et les dimensions appropriées et les préciser sur le diagramme

## II. CONDITIONS D'EQUILIBRE 2D

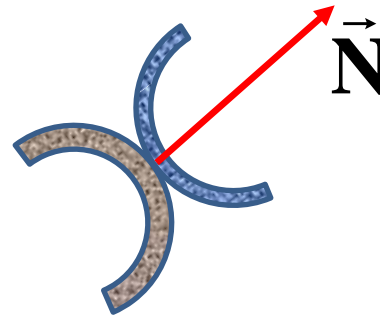
a) Modélisation de l'action des forces d'appui

a-1/ Action d'un câble, d'une courroie, d'une corde ou d'une chaîne flexible sur un corps.



T: portée par le câble  
constante si le fil  
est inextensible

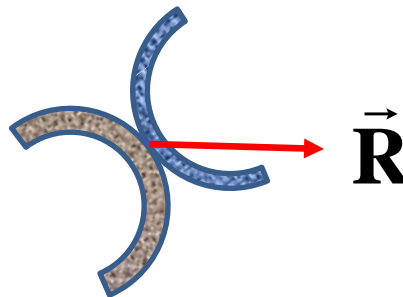
a-2/ surfaces lisses



N: Composante normale à  
la surface de contact

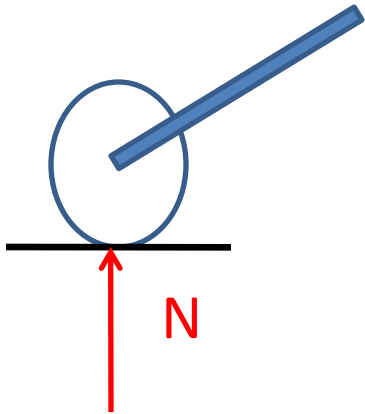
a-3/ surfaces rugueuse:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

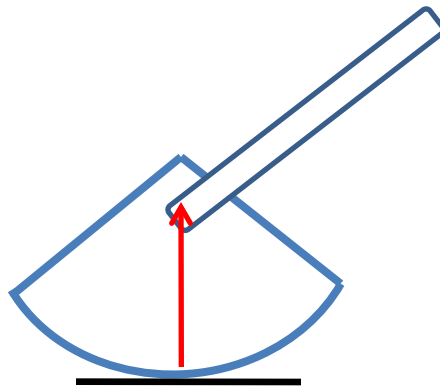


T: Composante  
tangentielle (force de  
frottement) opposée au  
mouvement

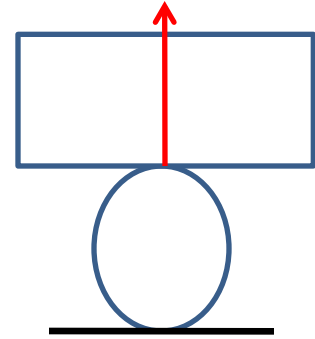
## a-4/ Appuis mécaniques:



Rouleau



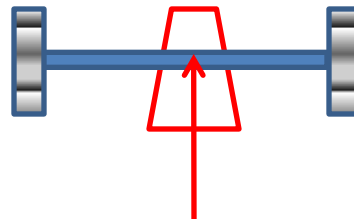
Bascule



Bille

Les appuis transmettent des forces de compression normales aux surfaces porteuses

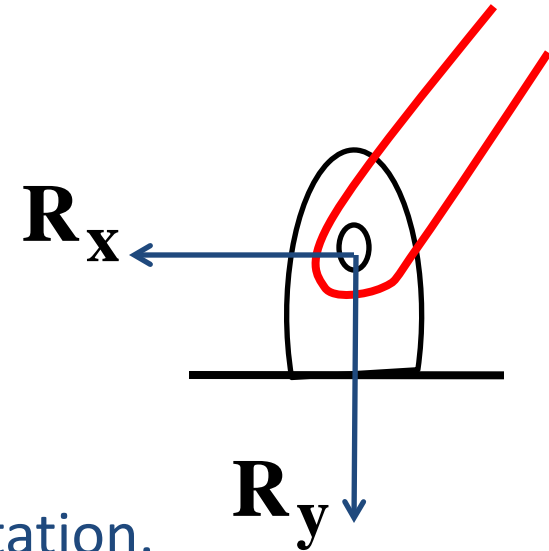
## a-5/ Guide coulissant:



Le guide glisse sur la glissière lisse, la réaction est normale à la glissière.

## a-6/ Articulation:

- Une liaison de cette nature oppose une force (une résistance) à tout mouvement normal à l'articulation. Le sens de  $\mathbf{R}_x$  et  $\mathbf{R}_y$  dépend de la charge appliquée.
- Si l'articulation ne tourne pas librement, Il faut tenir compte d'un couple résistant.



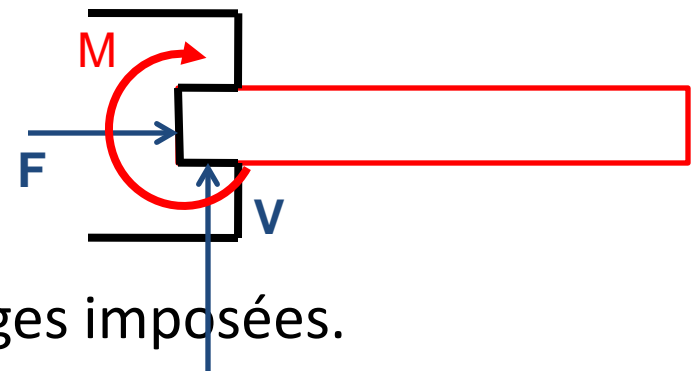
## a-7/ Encastrement:

Cette liaison ne permet ni déplacement ni rotation.

F: Force axiale

V: Force transversale

M: Couple à moment fléchissant



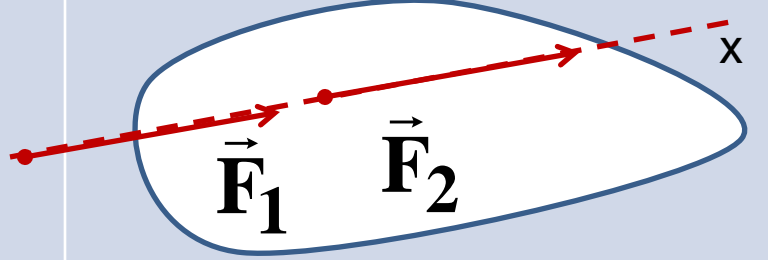
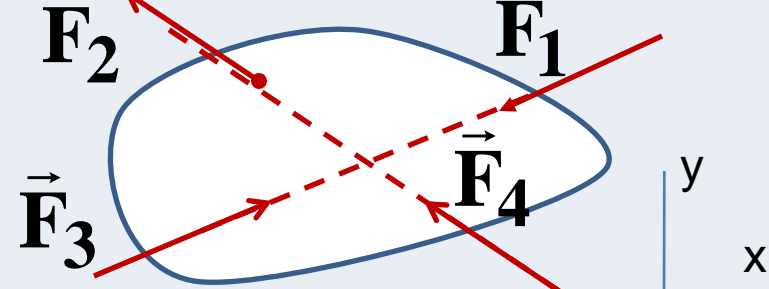
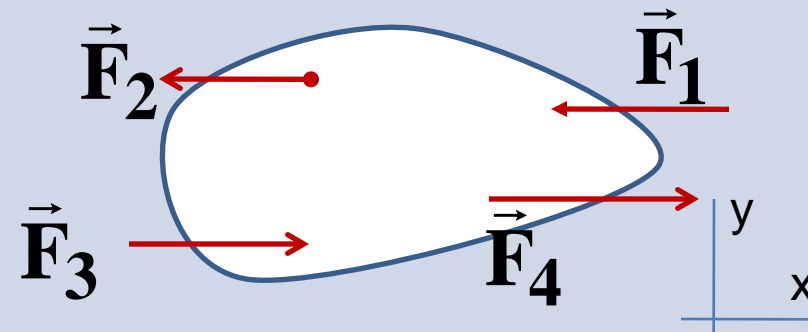
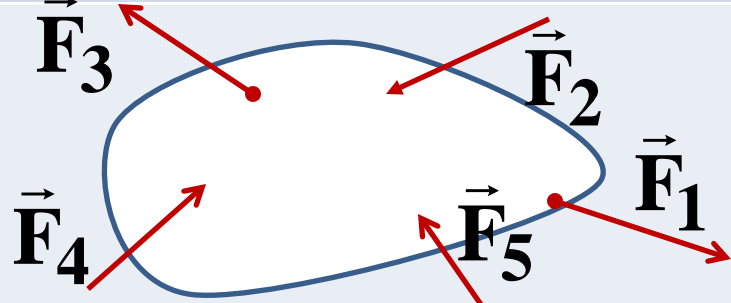
Les valeurs de F, V et M dépendent des charges imposées.

## b) Cas particulier de l'équilibre à deux dimensions

$$\sum \mathbf{F}_x = \mathbf{0}$$

$$\sum \mathbf{F}_y = \mathbf{0}$$

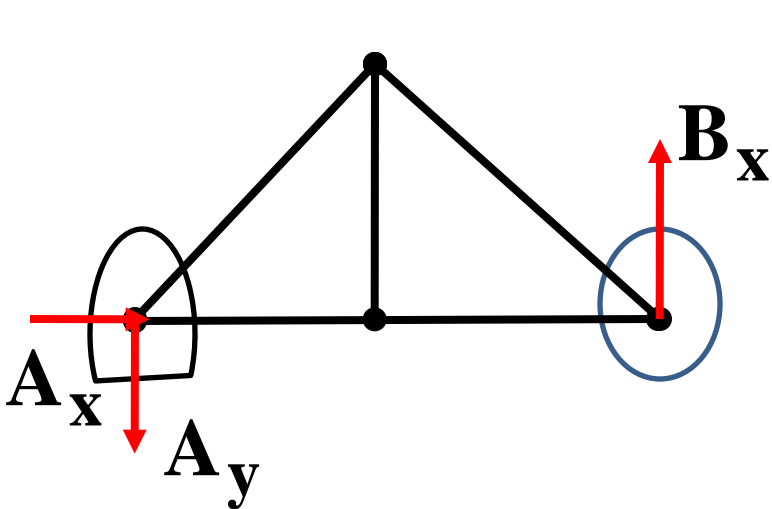
$$\sum \mathbf{M}_z = \mathbf{0}$$

Système de forces	Schéma du corps isolé	Equations indépendantes
1. Forces Colinéaires	 <p>The diagram shows an irregularly shaped body with two red arrows representing forces, <math>\vec{F}_1</math> and <math>\vec{F}_2</math>, acting along the same horizontal line. A dashed red line extends through the body, and an 'x' label is at the end of this line.</p>	$\sum F_x = 0$
2. Forces Concourantes	 <p>The diagram shows a body with four red arrows representing forces, <math>\vec{F}_1</math>, <math>\vec{F}_2</math>, <math>\vec{F}_3</math>, and <math>\vec{F}_4</math>, all meeting at a single point inside the body. A coordinate system with 'x' and 'y' axes is shown to the right.</p>	$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$
3. Forces parallèles	 <p>The diagram shows a body with four red arrows representing forces, <math>\vec{F}_1</math>, <math>\vec{F}_2</math>, <math>\vec{F}_3</math>, and <math>\vec{F}_4</math>, all acting parallel to each other. A coordinate system with 'x' and 'y' axes is shown to the right.</p>	$\sum F_x = 0$ $\sum M_z = 0$
4. Forces quelconques	 <p>The diagram shows a body with five red arrows representing forces, <math>\vec{F}_1</math>, <math>\vec{F}_2</math>, <math>\vec{F}_3</math>, <math>\vec{F}_4</math>, and <math>\vec{F}_5</math>, acting at different points and in different directions. A coordinate system with 'x' and 'y' axes is shown to the right.</p>	$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_z = 0$

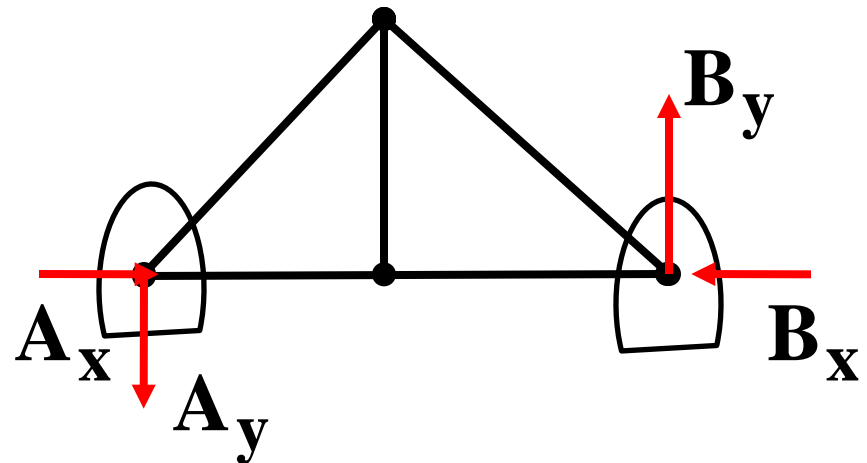


### c) Restriction de mouvement et détermination statique

Les équations d'équilibre sont nécessaires et suffisantes pour assurer l'équilibre d'un corps. Cependant elles ne donnent pas toute l'information indispensable à la détermination de toutes les forces inconnues qui peuvent agir sur un corps en équilibre. Ceci est conditionné par les caractéristiques des restrictions de mouvement imposés au corps par les appuis.



Systeme isostatique



Systeme hyperstatique  
Redondance – 4 inconnues

### III. L'EQUILIBRE 3D

#### a) Conditions de l'équilibre

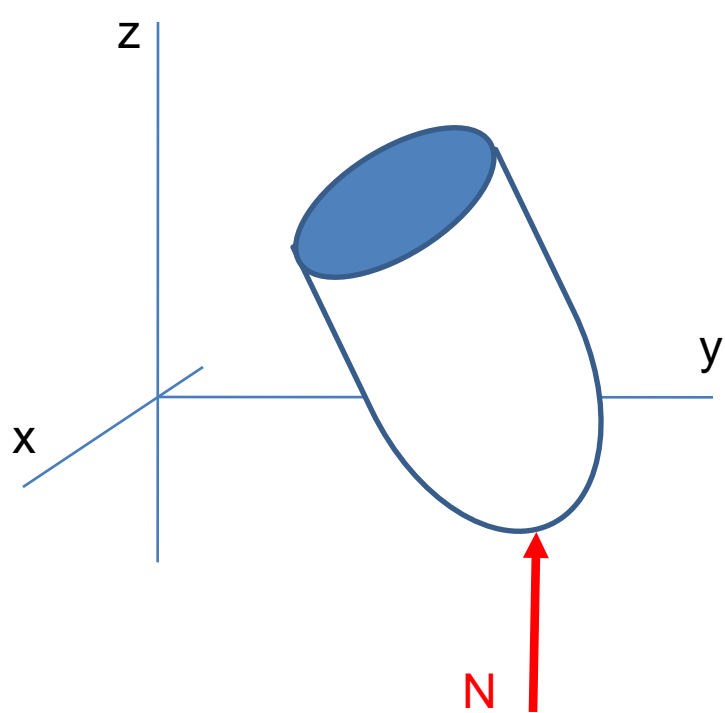
$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

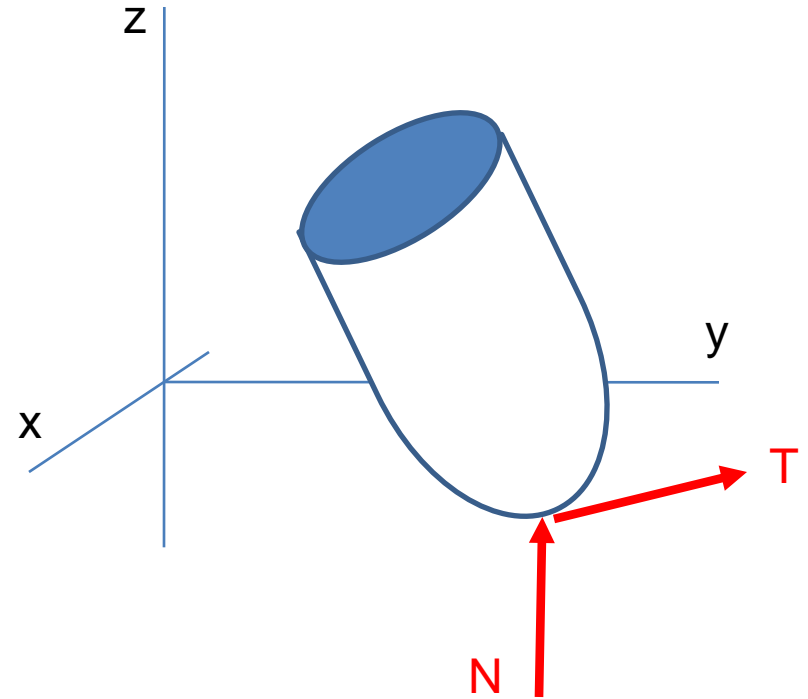
La démarche à suivre pour expliciter qu'un système mécanique est en équilibre est analogue à celle présentée pour le cas 2D.

- 1) Isoler le système
- 2) Tracer le D.C.L
- 3) Représenter aux endroits pertinents du D.C.L, toutes les forces extérieures
- 4) Préciser le choix des axes et des dimensions
- 5) Ecrire le système des équations à l'équilibre et le résoudre

## b) Modélisation de l'action des forces d'appui en analyse tridimensionnelle



b.1/ Élément de contact avec une surface lisse



b.2/ Élément de contact avec surface rugueuse

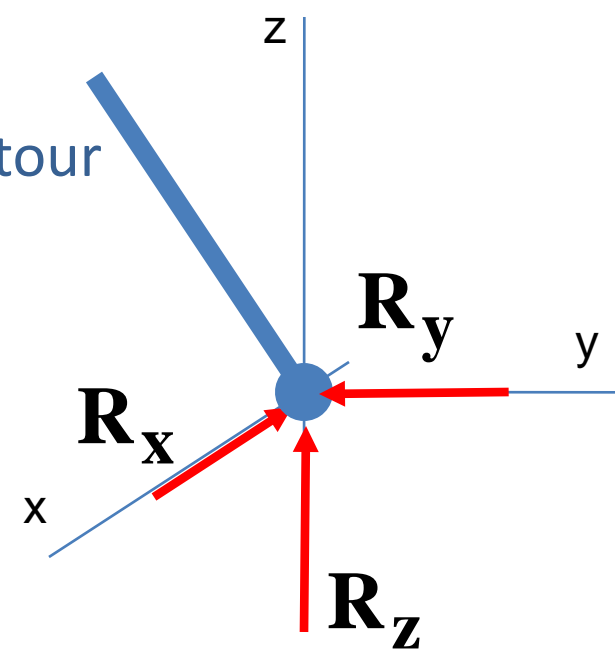
N : Composante normale à la surface d'appui

T : Composante tangentielle à la surface d'appui

### b.3/ Une articulation à rotule

Une articulation à rotule libre de pivoter autour du centre de la bille reprend une force d'appui ayant les trois composantes.

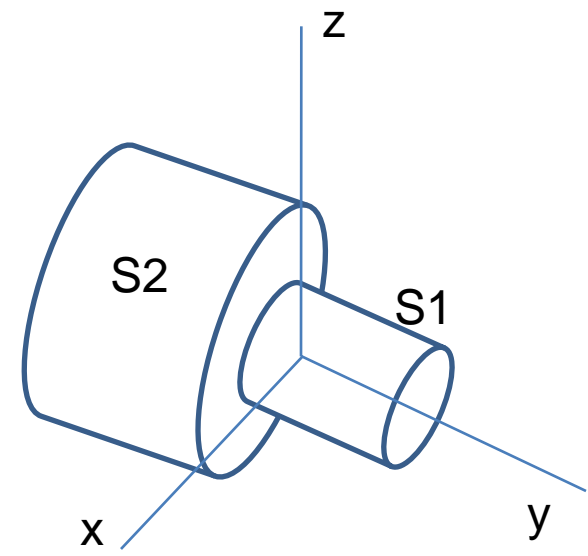
$$\mathbf{R}_x$$



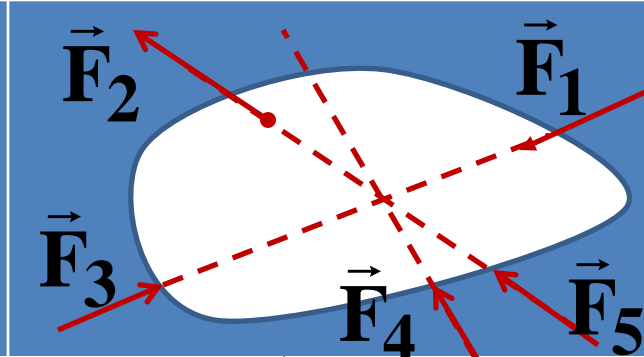
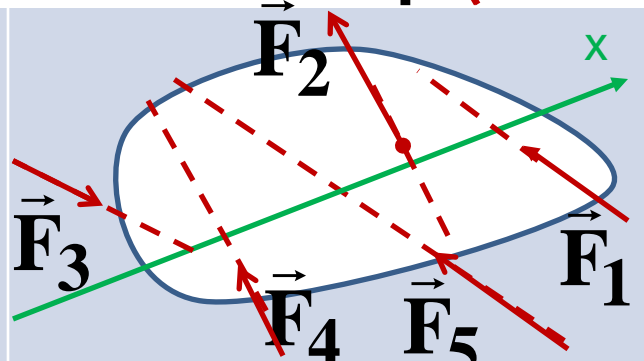
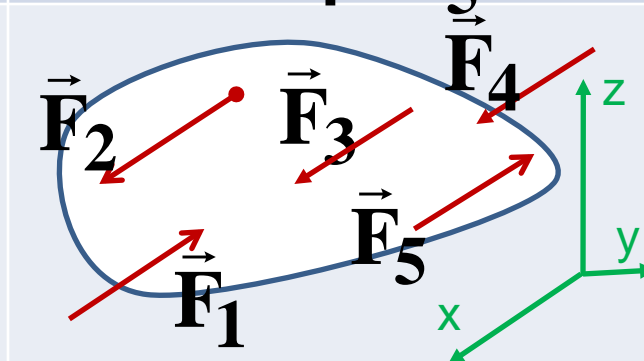
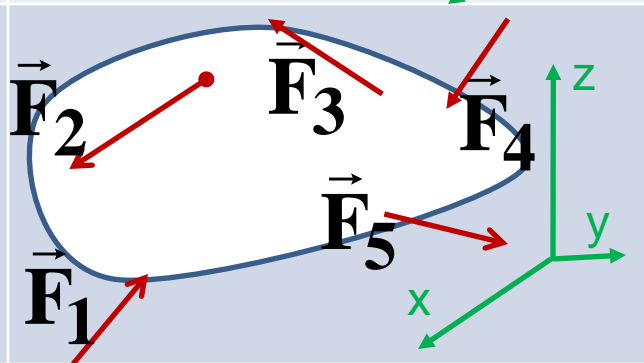
### b.4/ Palier à charge axiale et radiale

Les seuls mouvements possibles de S1 / S2 sont des rotations autour de l'axe Oy : les composantes de liaison sont:

- Rx, Ry, Rz
- Mx, Mz



### c) Cas particulier de l'équilibre à trois dimensions

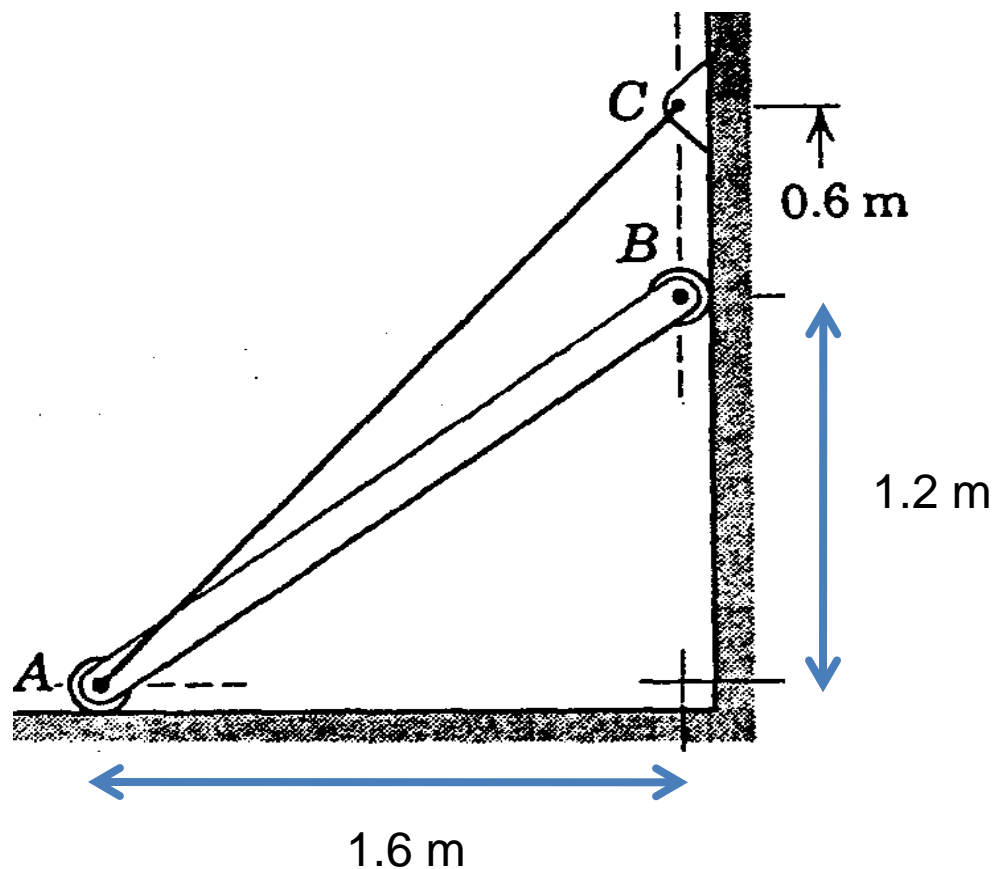
<p>1. Forces concourantes en un point</p>		$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum F_z = 0$
<p>2. Forces concourantes à une droite</p>		$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum F_z = 0$ $\sum M_y = 0$ $\sum M_z = 0$
<p>3. Forces parallèles à l'axe Ox</p>		$\sum F_x = 0$ $\sum M_y = 0$ $\sum M_z = 0$
<p>4. Système de forces quelconques</p>		$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum F_z = 0$ $\sum M_x = 0$ $\sum M_y = 0$ $\sum M_z = 0$

## d) Restriction de mouvement et détermination statique:

Ces équations scalaires, bien que nécessaires et suffisantes pour réaliser l'équilibre, elles ne produisent pas toutes l'information indispensable à la détermination des forces inconnues dans une situation 3D. Ceci dépend des caractéristiques des restrictions de mouvement introduites par les appuis

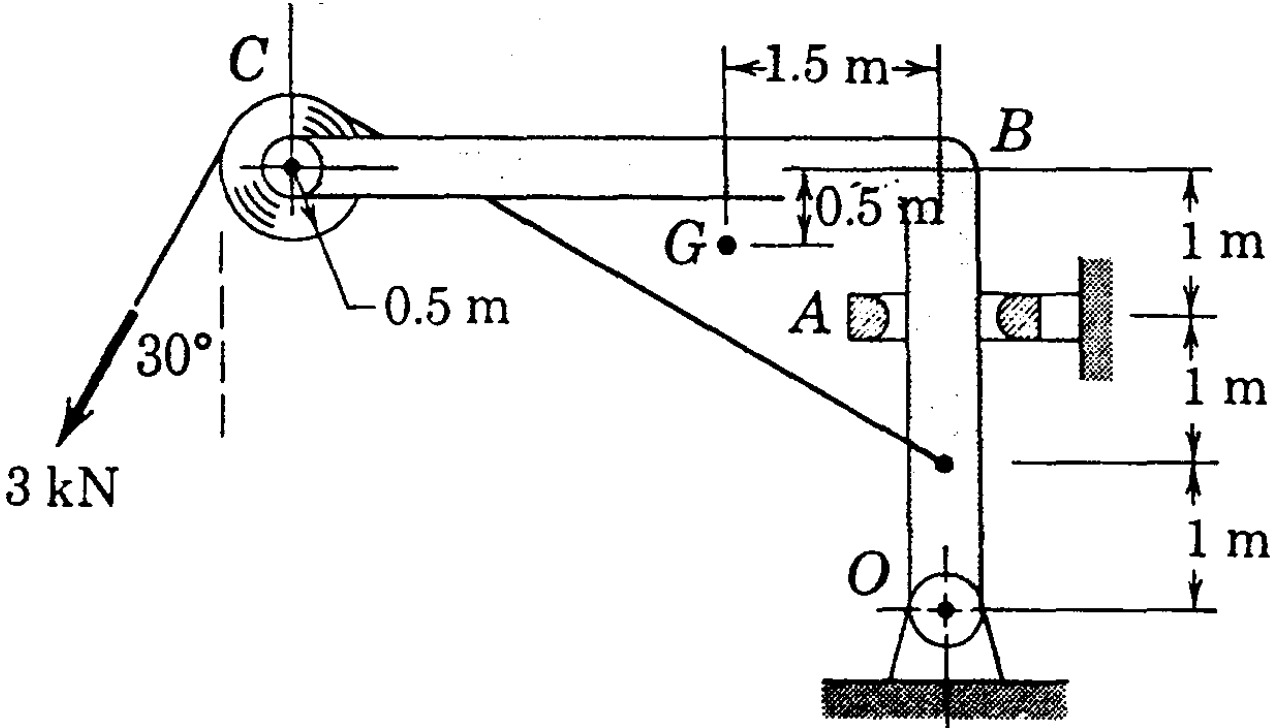
## Exercice:

La tige uniforme de 30 Kg avec des appuis à roulement est supportée par les surfaces horizontale et verticale ainsi que le câble AC. Calculez la tension  $T$  dans le câble et les forces sur les appuis en A et B.



**Exercice:**

Le système OBC et la poulie C possède une masse de 500 Kg avec son centre de masse en G. Calculez le module de la force supportée en O. Notez que le collier en A exerce une force horizontale seulement.





**Exercice:**

Deux poulies légères sont solidaires et forment un mécanisme complet. Elles ne peuvent tourner autour de leur palier en O à cause d'un câble Enroulé rigidement autour de la petite poulie et fixé au point A. Calculer la grandeur R de la force agissant sur le palier en O

