Université de Gabès, Faculté des Sciences de Gabès.

Départements de Mathématiques.

Algèbre II Lfma2

2015-2016

présenté par

Hedi Regeiba

Faculté des Sciences de Gabès, cité Erriadh 6072 Zrig Gabès Tunisie.

Contents

Chapter 1

Formes bilinéaires symetriques. Formes quadratiques.

1.1 Formes bilinéaires.

1.1.1 Généralites.

Définition 1.1.1. *Soit E un R-e-v et* $f: \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ *une application, on dit que f est une forme bilinéaire si les applications* $f_x: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ *et* $f_y: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ *sont linéaires.*

Proposition 1.1.2. $f: E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *est bilinéaire si et seulement si*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (x,y,z)\in E^3\ f(\alpha x+z,y)=\alpha f(x,y)+f(z,y).$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (x,y,z)\in E^3\ f(x,\alpha y+z)=\alpha f(x,y)+f(x,z).$

Définition 1.1.3. *Soit f une forme bilinéaire sur un $\mathbb{R}$-e-v E. On dit que*

1. *f est symétrique si $f(x,y)=f(y,x)$.*
2. *f est antisymétrique si $f(x,y)=-f(y,x)$.*

Notations 1.1.4. *Soit E un $\mathbb{R}$-e-v.*

1. *L'ensemble de forme bilinéaires sur E est noté $\mathcal{L}^2(E)$.*
2. *L'ensemble de forme bilinéaires symétriques sur E est noté $\mathcal{S}^2(E)$.*
3. *L'ensemble de forme bilinéaires antisymétrique sur E est noté $\mathcal{A}^2(E)$.*

Proposition 1.1.5. *Soit E un $\mathbb{R}$-e-v, alors*

1. *$\mathcal{L}^2(E)$ est un $\mathbb{R}$-e-v.*

2. $\mathcal{L}^2(E) = \mathcal{S}^2(E) \bigoplus \mathcal{A}^2(E)$.

Proof.

1. Facile.

2. Soit $f \in \mathcal{S}^2(E) \cap \mathcal{A}^2(E)$,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} f(x,y) = f(y,x) \\ f(x,y) = -f(y,x) \end{cases} \\
&\Rightarrow f(x,y) = -f(x,y) \\
&\Rightarrow 2f(x,y) = 0 \\
&\Rightarrow f(x,y) = 0, \ \forall x,y \in E \\
&\Rightarrow \mathcal{S}^2(E) \cap \mathcal{A}^2(E) = \{0\}
\end{aligned}$$

Soit $f \in \mathcal{L}^2(E)$, $f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$ $\forall (x,y) \in E^2$, avec

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} g(x,y) = f(x,y) + f(y,x) \\ h(x,y) = f(x,y) - f(y,x) \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} g(x,y) = g(y,x) \\ h(x,y) = -h(y,x) \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} g \in \mathcal{S}^2(E) \\ h \in \mathcal{A}^2(E) \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}^2(E) = \mathcal{S}^2(E) \bigoplus \mathcal{A}^2(E)$.

□

Exemples 1.1.6.

1. $$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$$

2. $$\begin{array}{llll} f: & \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (A,B) & \mapsto & f(A,B) = tr(AB) \end{array}$$ *est une forme bilinéaire symétrique.*

3. Soit $E = C([a,b],\mathbb{R})$ *on note* $$\begin{array}{llll} f: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & f(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt \end{array}$$

1.1.2 Matrice d'une forme bilinéaire.

Soit E un $\mathbb{R}$-e-v $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}^2(E)$. Soit $x, y \in E$

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i y_j f(e_i, e_j)$$

Définition 1.1.7. *La matrice $A = (a_{i,j})$ où $a_{i,j} = f(e_i, e_j)$ est appelée la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$*

$$M(f,\ \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2) & \dots & f(e_1,e_n) \\ f(e_2,e_1) & f(e_2,e_2) & \dots & f(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n,e_1) & f(e_n,e_2) & \dots & f(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

Exemple 1.1.8. *Soient* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$ *et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors $f(e_i,e_j) = \delta_{i,j} \Rightarrow a_{i,j} = \delta_{i,j}$. Par suite*

$$Mat(f,\ \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Proposition 1.1.9. *Soient E un $\mathbb{R}$-e-v de dim finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $f \in \mathcal{L}^2(E)$, $A = Mat(f, \mathcal{B})$ et $x, y \in E$. Alors*

1. *$f(x,y) = {}^t x A y$.*
2. *f est symétrique si et seulement A est symétrique (c.à.d ${}^tA = A$).*
3. *f est antisymétrique si et seulement A est antisymétrique (c.à.d ${}^tA = -A$).*

Proof.

1.
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{1 \le i,j \le n} x_i y_j a_{i,j} \\ &= (x_1, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= {}^t x A y, \text{ où } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. On suppose que f est symétrique alors $f(x,y) = f(y,x),\ \forall x, y \in E$. On a

$$\begin{aligned} & {}^t x A y = \underbrace{{}^t y A x}_{\in \mathbb{R}},\ \forall x, y \in E \\ \iff\ & {}^t x A y = {}^t({}^t y A x),\ \forall x, y \in E \\ \iff\ & {}^t x A y = {}^t x {}^t A y,\ \forall x, y \in E \\ \iff\ & {}^t x (A - {}^t A) y = 0,\ \forall x, y \in E \\ \iff\ & A - {}^t A = 0,\ (\text{ voir TD }) \\ \iff\ & A = {}^t A \end{aligned}$$

3. De même si f est antisymétrique si et seulement si A est antisymétrique.

□

Proposition 1.1.10 (Changement de bases).
Soient E un $\mathbb{R}$-e-v, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, $f \in \mathcal{L}^2(E)$, $A = M(f, \mathcal{B})$ et $A' = M(f, \mathcal{B}')$. Alors

$$A' = {}^tPAP.$$

Proof. Soit $x \in E$ alors

$$\begin{cases} x &= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \longrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) \\ x &= \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i e'_i \quad \longrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \begin{cases} x' &= P^{-1}x \;\Rightarrow\; x = Px' \\ y' &= P^{-1}y \;\Rightarrow\; y = Py' \end{cases} \\
&\Longrightarrow {}^t(Px')APy' = {}^tx'A'y' \text{ (car } f(x,y) = {}^txAy = {}^tx'A'y') \\
&\Longrightarrow {}^tx'^tPAPy' = {}^tx'A'y' \\
&\Longrightarrow A' = {}^tPAP.
\end{aligned}$$

□

Définition 1.1.11. *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont congurentes s'il existe $P \in GL(n, \mathbb{R})$ telque $A = {}^tPBP$.*

Remarque 1.1.12. *Soit A et B deux matrices congurentes. Si A est symétrique (resp. antisymétrique) alors B est symétrique (resp. antisymétrique).*
<u>En effet:</u> Supposons que A est symétrique alors

$$B = {}^tPAP \Rightarrow {}^tB = {}^t({}^tPAP) = {}^tP^tAP = {}^tPAP = B.$$

1.2 Formes quadratiques.

1.2.1 Généralites.

Définition 1.2.1. *Soit f une forme bilinéaire sur $E \times E$. On appelle forme quadratique associée à f l'application, souvent notée q de E dans $\mathbb{R}$ définie par:*

$$\forall\ x \in E,\ q(x) = f(x,x).$$

Proposition 1.2.2. *Soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique*

1. $q(0) = 0$.

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$.

3. $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall(x,y)\in E^2\ q(\alpha x+\beta y)=\alpha^2q(x)+2\alpha\beta f(x,y)+\beta^2q(y)$. *En particulier*

$$\forall(x,y)\in E^2,\ q(x+y)=q(x)+2f(x,y)+q(y).$$

4. $\forall(x,y)\in E^2,\ f(x,y)=\frac{1}{4}(q(x+y)-q(x-y))$.

5. $\forall(x,y)\in E^2,\ q(x+y)+q(x-y)=2(q(x)+q(y))$. *L'identité du parallelogramme.*

Proof.

1. On a $q(0)=f(0,0)=2f(0,0)\Rightarrow q(0)=0$.

2. Soient λ et $x\in E$ on a

$$\begin{aligned} q(\lambda x) &= f(\lambda x,\lambda x)\\ &= \lambda^2 f(x,x)=\lambda^2 q(x). \end{aligned}$$

3. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $(x,y)\in E^2$ on a

$$\begin{aligned} q(\alpha x+\beta y) &= f(\alpha x+\beta y,\alpha x+\beta y)\\ &= \alpha^2 f(x,x)+\alpha\beta f(y,x)+\alpha\beta f(x,y)+\beta^2 f(y,y)\\ &= \alpha^2 q(x)+2\alpha\beta f(x,y)+\beta^2 q(y). \end{aligned}$$

4. Soient $x,y\in E$ on a

$$\begin{aligned} & q(x+y)-q(x-y)=q(x)+2f(x,y)+q(y)-q(x)+2f(x,y)-q(y)\\ \Longrightarrow\ & f(x,y)=\frac{1}{4}(q(x+y)-q(x-y)). \end{aligned}$$

5. Soient $x,y\in E$ on a

$$\begin{aligned} & q(x+y)+q(x-y)=q(x)+2f(x,y)+q(y)+q(x)-2f(x,y)+q(y)\\ \Longrightarrow\ & q(x+y)+q(x-y)=2(q(x)+q(y)). \end{aligned}$$

□

Définition 1.2.3. *Soit $q:E\longrightarrow\mathbb{R}$ une application. On dit que q est une forme quadratique si et seulement s'il existe une forme bilinéaire symétrique $f:E\times E\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que q soit la forme quadratique associée à f.*
f est appelée la forme polaire de q.

1.2.2 Matrice d'une forme quadratique.

Soient E un $\mathbb{R}$-e-v de dim finie, $\mathcal{B}$ une base de E, q une forme quadratique, f sa forme polaire associée, $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ et $A=M(f,\mathcal{B})$. On sait que

$$\begin{aligned} & f(x,y)=\ {}^txAy\\ \Longrightarrow\ & q(x)=f(x,x)=\ {}^txAy. \end{aligned}$$

La matrice A est appelée aussi la matrice de la forme quadratique q. Donc

$$\mathrm{M}(q,\ \mathcal{B}) = \mathrm{M}(f,\ \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} q(e_1) & f(e_1,e_2) & \ldots & f(e_1,e_n) \\ f(e_2,e_1) & q(e_2) & \ldots & f(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n,e_1) & f(e_n,e_2) & \ldots & q(e_n) \end{pmatrix}.$$

1.2.3 Epression de $q(x)$.

Soient E un $\mathbb{R}$-e-v de dim n, $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, q une forme quadratique et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
Alors,

$$\begin{aligned} q(x) &= q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\ &= \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j \underbrace{f(e_i,e_j)}_{=a_{i,j}}, \quad \text{avec } \forall 1 \le i,j \le n \ a_{i,j} = a_{j,i} \\ &= \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j a_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1\le i\neq j\le n} a_{i,j} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j} x_i x_j. \end{aligned}$$

Donc q est un polynôme homogéne de dégre 2 en les composantes $x_1, \cdots, x_n$.
Inversement, soit

$$\phi(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} b_{i,j} x_i x_j$$

un polynôme homogéne de dégre 2 en les composantes $x_1, \cdots, x_n$. Montrer que ϕ est une forme quadratique.
<u>En effet:</u> Soit $A = a_{i,j}$ définie par

$$\begin{cases} a_{i,i} &= b_{i,i}, \quad \forall 1 \le i \le n, \\ a_{i,j} &= \frac{1}{2} b_{i,j}, \quad \text{si } i < j, \\ a_{i,j} &= a_{j,i}, \quad \text{si } i > j. \end{cases}$$

On remarque que A est une matrice symétrique et $\phi(x_1, \cdots, x_n) = {}^t x A x$. Posons $\varphi(x,y) = {}^t x A y$ peut on vérifier que φ est une forme bilinéaire et on $\phi(x) = \varphi(x,x)$.

1.3 Formes positives, Formes définies positives.

Définition 1.3.1. *Soit f une forme bilinéaire symétrique. On dit que*

1. *f est positive si et seulement si $\forall\ x \in E,\ f(x,x) \geq 0$.*
2. *f est définie si et seulement si $f(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.*
3. *f est définie positive si et seulement si $\forall\ x \in E|\{0\},\ f(x,x) > 0$.*

Définition 1.3.2. *Soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique, on dit que*

1. *q est positive si et seulement si $\forall\ x \in E,\ q(x) \geq 0$.*
2. *q est définie si et seulement si $q(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.*
3. *q est définie positive si et seulement si $\forall\ x \in E|\{0\},\ q(x) > 0$.*

Exemples 1.3.3.

1. *La forme* $q_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & q_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \end{array}$ *est une forme définie positive.*

2. *La forme* $q_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & q_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy \end{array}$ *est une forme positive mais q_2 n'est pas définie. En effet On a $q_2(x,y,z) = (x-y)^2 + z^2 \geq 0$ alors q_2 est positive et $q_2(1,1,0) = 0$ alors q_2 n'est pas définie.*

Théorème 1.3.4 (Inégalité de Cauchy Schwartz)**.**
Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique positive alors

$$|f(x,y)| \leq \sqrt{f(x,x)}\sqrt{f(y,y)}.$$

Si de plus f est définie on a l'égalité si et seulement si x et y sont liés.

Proof. Soient $x, y \in E$

$$\begin{aligned} & f(tx+y, tx+y) \geq 0\ \forall\ t \in \mathbb{R} \\ \Longrightarrow\ & t^2 f(x,x) + 2t f(x,y) + f(y,y) \geq 0\ \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Posons $P(t) = t^2 f(x,x) + 2tf(x,y) + f(y,y)$
1^{er} cas si $f(x,x) \neq 0$: On a P est un polynôme de seconds dégrée et garde une signe constante donc

$$\begin{aligned} & \Delta = 4f^2(x,y) - 4f(x,x)f(y,y) \leq 0 \\ \Longrightarrow\ & |f(x,y)| \leq \sqrt{f(x,x)}\sqrt{f(y,y)} \end{aligned}$$

2^{eme} Cas si $f(x,x) = 0$: alors $P(t) = 2tf(x,y) + f(y,y)$. Montrer que $f(x,y) = 0$. Supposons que $f(x,y) \neq 0$, on a P est un polynôme de premier dégrée qui garde une signe constante (absurde) alors $f(x,y) = 0$ □

1.3.1 Formes non dégénérées.

Définition 1.3.5. *Soient E un $\mathbb{R}$-e-v et $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. On dit que f est non dégénérée si*

$$f(x, y) = 0,\ \forall y \in E \Rightarrow x = 0.$$

On dit que f est dégénérée dans le cas contraire.

Proposition 1.3.6. *Si f est définie, alors f est non dégénérée*

Proof. Soit $x \in E$ tel que $f(x, y) = 0\ \forall y \in E$ en particulier pour $y = x$ on a $f(x, x) = 0$. Alors $x = 0$ car f est définie. Donc f est non dégénérée. □

Proposition 1.3.7. *Soit E un $\mathbb{R}$-e-v et $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique alors f non dégénérée si et seulement si $M(f, \mathcal{B})$ est inversible où $\mathcal{B}$ est une base de E.*

Proof. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Posons $A = M(f, \mathcal{B})$ avec f est non dégénérée

$$\begin{aligned}
&\iff f(x, y) = 0,\ \forall\ y \in E \Longrightarrow x = 0 \\
&\iff {}^t xAy = 0,\ \forall\ y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \Longrightarrow x = 0 \\
&\iff {}^t xA = 0,\ \Longrightarrow x = 0 \\
&\iff {}^t Ax = 0,\ \Longrightarrow x = 0 \\
&\iff {}^t A \text{ est injective} \\
&\iff {}^t A \text{ est inversible} \\
&\iff A \text{ est inversible}
\end{aligned}$$

□

Remarque 1.3.8. *Soit $x \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ${}^t xy = 0\ \forall y \in M_{n,1} \iff x = 0$.*

1.4 Décomposition en somme de carrés par la méthode de Gauss.

Théorème 1.4.1. *Soient E un $\mathbb{R}$-e-v de dim n et q une forme quadratique. Alors il existe r formes linéaires $\ell_1, \cdots, \ell_r$ indépendantes et r scalaires non nuls $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ tels que*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \ell_i^2(x).$$

En outre, on a rang$(q) = r$ et

$$ker(q) = \{x \in \mathbb{R}^n |\ \ell_1(x) = \cdots = \ell_n(x) = 0\}$$

Proof. On raisonne par récurrence sur la dimension de E.
Pour $n = 1$. Soit $\{e_1\}$ une base de E, tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = x_1 e_1$, donc $q(x) = q(e_1)x_1^2$ et alors $q(e_1) = \lambda_1 \neq 0$ car $q \neq 0$. On choisit dans ce cas

$$\begin{array}{rccc}
\ell_1 : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& x_1 e_1 & \mapsto & x_1
\end{array}$$

Soit $n \geq 2$, supposons le résultat vrai pour toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimesion $r \leq n-1$ et soit q une forme quadratique de E. Soit $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E, on sait que

$$\forall x \in E,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Premier cas: S'il existe i_0 tel que $a_{i_0,i_0} \neq 0$: pour fixer les idées, supposons que $a_{1,1} \neq 0$. Le principe est de regrouper tous les termes contenant x_1 et faire apparaître un début de carré.

$$q(x) = a_{1,1} x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_1 x_j + \sum_{i=2}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Notons par $q_1(x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=2}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$. Remarquons que c'est une forme quadratique en $x_2, \cdots, x_n$. On a

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{1,1} \left(x_1^2 + \frac{2}{a_{1,1}} \sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_1 x_j \right) + q_1(x_2, \cdots, x_n) \\ &= a_{1,1} \left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1,j} x_j}{a_{1,1}} \right)^2 - \frac{1}{a_{1,1}} \left(\sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_j \right)^2 + q_1(x_2, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

Soit alors $a_1 = a_{1,1}$ et $\ell_1 : (x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow \left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1,j} x_j}{a_{1,1}} \right)$

$$q_2 : (x_2, \cdots, x_n) \longrightarrow q_1(x_2, \cdots, x_n) - \frac{1}{a_{1,1}} \left(\sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_j \right)^2$$

est une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension $n-1$, on lui applique alors l'hypothèse de récurrence. Les formes linéaires récupérées en utilisant l'hypothèse de récurrence sont nécessairement libres avec ℓ_1 vu qu'elles n'ont pas de composantes suivant x_1.

Deuxième cas: Cas où tous les $a_{i,i}$ sont nuls, la forme quadratique s'écrit alors sous la forme

$$q(x) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j,\ \forall x \in E.$$

Sans perte de généralité, supposons que $a_{1,2} \neq 0$. L'idée est de regrouper tous les termes contenant x_1 et x_2.

$$q(x) = 2 a_{1,2} x_1 x_2 + 2 \sum_{j=3}^{n} a_{1,j} x_1 x_j + 2 \sum_{j=3}^{n} a_{2,j} x_2 x_j + 2 \sum_{3 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Posons,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{j=3}^{n} a_{1,j} x_j, \\ \psi(x) &= \sum_{j=3}^{n} a_{2,j} x_j, \\ \theta(x) &= 2 \sum_{3 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j, \end{aligned}$$

Remarquons que θ est un polynôme homogène de degré 2 en $x_3, \cdots, x_n$. Une fois que c'est fait, on regroupe ces formes de la façon suivante:

$$\begin{aligned} q(x) &= 2a_{1,2}x_1x_2 + 2x_1\varphi(x) + 2x_2\psi(x) + \theta(x) \\ &= \frac{2}{a_{1,2}}\left(a_{1,2}^2x_1x_2 + x_1\varphi(x) + x_2\psi(x)\right) + \theta(x) \\ &= \frac{2}{a_{1,2}}\left(a_{1,2}x_1 + \psi(x)\right)\left(a_{1,2}x_2 + \varphi(x)\right) - \frac{2}{a_{1,2}}\varphi(x)\psi(x) + \theta(x) \end{aligned}$$

$q_1 : (x_3, \cdots, x_n) \longrightarrow \theta(x) - \frac{2}{a_{1,2}}\varphi(x)\psi(x)$ est une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension $n-2$. En effet, le produit de deux formes linéaires est une forme quadratique.
En utilisant la relation $ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$, on obtient

$$q(x) = \frac{1}{2a_{1,2}}\left[(a_{1,2}x_1 + a_{1,2}x_2 + \varphi(x) + \psi(x))^2 - (a_{1,2}x_1 - a_{1,2}x_2 - \varphi(x) + \psi(x))^2\right] + q_1(x_3, \cdots, x_n).$$

Posons $a_1 = \frac{1}{2a_{1,2}}$, $a_2 = \frac{1}{2a_{1,2}}$

$$\begin{aligned} \ell_1 &: (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto a_{1,2}x_1 + a_{1,2}x_2 + \varphi(x) + \psi(x) \\ \ell_2 &: (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto a_{1,2}x_1 - a_{1,2}x_2 - \varphi(x) + \psi(x). \end{aligned}$$

Les formes ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires indépendantes de $\mathbb{R}^n$ et q_1 est une forme quadratique à qui on applique l'hypothèse de récurrence. $\square$

Proposition 1.4.2. *Soient E un $\mathbb{R}$-e-v de dim n et $\ell_1, \cdots, \ell_r \in E^*$. Alors $\{\ell_1, \cdots, \ell_r\}$ est libre si et seulement si $dim(\bigcap_{i=1}^{r} ker(\ell_i)) = n - r$*

Définition 1.4.3. *Soient $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une base bilinéaire symétrique et $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E.*

1. *On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale pour q ou $q-$orthogonale si $f(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$.*
2. *On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale ou $q-$orthonormale si $f(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$.*

Proposition 1.4.4. *Soient E un $\mathbb{R}$-e-v, $\mathcal{B}$ une base de E et $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique alors*

1. *$\mathcal{B}$ est une base $q-$orthogonale si et seulement si $M(q, \mathcal{B})$ est diagonale.*
2. *$\mathcal{B}$ est une base $q-$orthonormale si et seulement si $M(q, \mathcal{B}) = I_n$.*

Proof. 1. Soit $\mathcal{B}$ une base $q-$orthogonale si et seulement si $f(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$.

$$\iff a_{i,j} = 0, \ \forall\, i \neq j$$

$$\iff M(q, \mathcal{B}) \text{ est diagonale et } M(q, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} q(e_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(e_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q(e_n) \end{pmatrix}$$

$$\iff q(x) = \sum_{j=1}^{n} q(e_j)x_j^2.$$

2. Soit $\mathcal{B}$ est $q-$orthonormale si et seulement si $f(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad a_{i,j} = \delta_{i,j},\ \forall\ i, j \\
&\Longleftrightarrow \quad M(q, \mathcal{B}) = I_n, \quad \text{et } M(q, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad q(x) = {}^t x I_n x = \sum_{j=1}^{n} x_j^2.
\end{aligned}$$

□

Exemple 1.4.5. *Soient* $q : \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto q(x) = 3\sum_{j=1}^{n} x_j^2.$$

et $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$*. On a* $M(q, \mathcal{B}) = 3I_n \neq 3I_n$*, donc* $\mathcal{B}$ *est une base* $q-$*orthogonale et non* $q-$*orthonormale.*

Théorème 1.4.6. *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-e-v* $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme quadratique, alors*

1. *E admet une base $q-$orthogonale.*
2. *Si q définie positive alors E admet une base $q-$orthonormale.*

Proof.

1. D'après la décomposition de Gauss il existe $\ell_1, \cdots, \ell_r$ r formes linéaires indépendantes (libre) et r scalaires non nuls $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ tels que $q(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ell_k(x)^2$.
2. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base $q-$orthogonale. Par hypothèse q est définie positive alors $q(x) > 0$ et q non dégénérée alors $M(q, \mathcal{B})$ est inversible d'où $\mathrm{rg}(q) = n$.

   Posons $e'_k = \frac{e_k}{\sqrt{q(e_k)}}$, $\forall 1 \leq k \leq n$. Montrer $\mathcal{B}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ est une base $q-$orthonormale. En effet,

$$\begin{aligned}
f(e'_i, e'_j) &= f\left(\frac{e_i}{\sqrt{q(e_i)}}, \frac{e_j}{\sqrt{q(e_j)}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{q(e_i)}\sqrt{q(e_j)}} f(e_i, e_j)
\end{aligned}$$

   - Si $i \neq j$ on a $f(e_i, e_j) = 0 \Longrightarrow f(e'_i, e'_j) = 0$.
   - Si $i = j$, $f(e_i, e_j) = \frac{f(e_i, e_i)}{q(e_i)} = 1$.

   Donc, $f(e'_i, e'_j) = \delta_{i,j}$. Ainsi $\mathcal{B}'$ est une base $q-$orthonormale.

□

Proposition 1.4.7. *Toute matrice réelle symétrique est congurente à une matrice diagonale c-à-d ($\forall A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$, $\exists P \in GL(n, \mathbb{R})$ et $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ une matrice diagonale tel que $A = {}^tPDP$.)*

Théorème 1.4.8 (d'inertie de Sylvester)**.**
Soient E un $\mathbb{R}$-e-v de dim n, $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique de rang r et $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base $q-$orthogonale alors il existe un entier $0 \leq s \leq r$ tel que

$$\begin{aligned} s &= card\{1 \leq i \leq n |\ q(e_i) > 0\} \\ r - s &= card\{1 \leq i \leq n |\ q(e_i) < 0\}. \end{aligned}$$

Le couple $(s, r-s)$ est indépendant à la base $q-$orthogonale il dépend uniquement de la forme quadratique q, le couple $(s, r-s)$ est appelé la signature des q.

Proposition 1.4.9. *Soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique de rang r et de signature $(s, r-s)$, alors il existe une base $q-$orthogonale de E dans la quelle la matrice de q est sous la forme*

$$M(q,\ \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc|ccc} & s & & & r-s & & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

et $q(x) = \sum_{k=1}^{s} x_k^2 - \sum_{k=s+1}^{r} x_k^2$.

Proof. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base $q-$orthogonale $q(x) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k^2$ avec $\lambda_k = p(e_k),\ \lambda_k \neq 0$ et

$$M(q, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&& 0 \\ & \ddots &&&& \\ && \lambda_r &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& \ddots & \\ 0 &&&&& 0 \end{pmatrix}$$

q est de signature $(s, r-s)$. On peut supposer que $q(e_k) > 0$, $\forall\ 1 \leq k \leq s$ et $p(e_k > 0$, $\forall s+1 \leq k \leq r$. Posons $e'_k = \frac{e_k}{\sqrt{q(e_k)}}$ si $1 \leq k \leq r$ et $e'_k = e_k$ si $r+1 \leq k \leq n$. Posons $\mathcal{B}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$. Calculer $f(e'_i, e'_j)$.

- 1^{er} cas: si $i \neq j$ alors $f(e'_i, e'_j) = f(e_i, e_j) = 0$ car $\mathcal{B}$ est $q-$orthogonale
- 2^{eme} cas: si $i = j$

– Si $1 \leq i \leq s$ alors

$$\begin{aligned} f(e'_i, e'_j) &= f\left(\frac{e_i}{\sqrt{q(e_i)}}, \frac{e_i}{\sqrt{q(e_i)}}\right) \\ &= \frac{f(e_i, e_i)}{q(e_i)} = 1 \end{aligned}$$

– Si $r + 1 \leq i \leq r$ alors

$$\begin{aligned} f(e'_i, e'_i) &= f\left(\frac{e_i}{\sqrt{-q(e_i)}}, \frac{e_i}{\sqrt{-q(e_i)}}\right) \\ &= \frac{f(e_i, e_i)}{-q(e_i)} = -1 \end{aligned}$$

– Si $r + 1 \leq i \leq n$ alors $f(e'_i, e'_i) = f(e_i, e_i) = 0$.

$\square$

Proposition 1.4.10. *Soient E un $\mathbb{R}$-e-v de dim n et $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique de rang r et de signature (s, t) alors*

1. *$s + t = r$.*
2. *q est positive si et seulement si $(s, t) = (r, 0)$ et $p(x) = \sum_{k=1}^{r} x_k^2$.*
3. *q est négative si et seulement si $(s, t) = (0, r)$ et $p(x) = -\sum_{k=1}^{r} x_k^2$.*
4. *q est définie positive si et seulement si $(s, t) = (n, 0)$ et $p(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.*
5. *q est définie négative si et seulement si $(s, t) = (0, n)$ et $p(x) = -\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.*
6. *q est non dégénérée si et seulement si $(s, t) = (s, n - s)$ et $q(x) = \sum_{k=1}^{s} x_k^2 - \sum_{k=s+1}^{n} x_k^2$.*

Remarque 1.4.11. *Si q non dégénérée et positive alors elle est définie positive et $r = n$.*

Chapter 2

Espaces préhilbertiens réels.

2.1 Produit scalaire, norme et distance.

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2.1.1 Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 2.1.1. *Soit f une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E est une « forme bilinéaire symétrique définie positive » c-à-d elle vérifie les propriétés suivantes:*

1. *l'application f est bilinéaire.*
2. *pour tous vecteurs u et v de E, on a $f(u, v) = f(v, u)$ (on dit que f est symétrique).*
3. *pour tout vecteur u de E, on a : $f(u, u) \geq 0$ (on dit que f est positive).*
4. *pour tout vecteur u de E, on a: $f(u, u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ (on dit que f est définie).*

Définition 2.1.2.

1. *Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est dit préhilbertien réel.*
2. *Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.*

Notations 2.1.3. *Plutôt que de noter $f(u, v)$, on note souvent $< u, v >$, ou $u.v$, ou $(u|v)$.*
Avec la notation $(.|.)$, que nous utiliserons, la définition d'un produit scalaire devient:

$$\forall (u, u', v, v') \in E^4,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \left\{ \begin{array}{lcc} (\alpha u + \beta u'|v) & = & \alpha(u|v) + \beta(u'|v) \\ (u|\alpha v + \beta v') & = & \alpha(u|v) + \beta(u|v') \\ (u|v) = (v|u) & & (u|u) \geq 0 \text{ et } (u|u) = 0 \Leftrightarrow u = 0. \end{array} \right.$$

Proposition 2.1.4 (produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.)**.**
Soient $u = (x_1, \cdots, x_n)$ et $v = (y_1, \cdots, y_n)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^n$. En posant $(u|v) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On l'appelle le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Proof. Voir TD. □

Notation matricielle.
Si on note $[u]$ la matrice-colonne associée à tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, alors $(u|v) = {}^t[u][v]$.

Proposition 2.1.5. *Soit $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$. En posant $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$, on définit un produit scalaire sur E.*

Proof. Voir TD. □

2.1.2 Norme et distance associée.

Définition 2.1.6. *Soit E un espace préhilbertien réel.*

1. *Pour tout vecteur u de E, on appelle norme de u la quantité $||u|| = \sqrt{(u|u)}$.*
2. *Pour tous vecteurs u, v on appelle distance de u à v la quantité $d(u,v) = ||u-v||$.*

Les applications « norme » et « distance » sont dites associées au produit scalaire sur E.

Définition 2.1.7. *Soit E un espace préhilbertien réel. Un vecteur u de E est dit unitaire (ou encore normé) si $||u|| = 1$.*

Proposition 2.1.8. *Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous vecteurs u, v de E, on a l'inégalite dite « de Cauchy-Schwarz » $|(u,v)| \leq ||u||||v||$.*
Il y a égalité dans ce résultat si et seulement si u et v sont liés.

Exemples 2.1.9.

1. *On se place dans $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique. Pour tout vecteur $u = (x_1, \cdots, x_n)$, on a $||u|| = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Pour tous $\left\{\begin{array}{rcl} u & = & (x_1,\cdots,x_n) \\ v & = & (y_1,\cdots,y_n) \end{array}\right.$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit:*
$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right).$$
2. *On se place dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$. Alors $||f|| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$. Dans ce cas, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit*
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2 dt\right)$$

Proposition 2.1.10. *Soit E un espace préhilbertien réel.*

1. *Pour tout vecteur u de E, on a l'inégalité $\|u\| \geq 0$, et l'équivalence $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.*
2. *Pour tout vecteur u de E, et pour tout réel λ, on a: $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$.*
3. *Pour tous vecteurs u, v de E, on a l'inégalité triangulaire $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.*

   Cette inégalité est une égalité si et seulement si u et v sont « positivement liés ».

Remarque 2.1.11.

- *L'expression « positivement liés » signifie l'existence de* λ *dans* $\mathbb{R}_+$ *tel que* $v = \lambda u$ *ou* $u = \lambda v$.
- *pour tous vecteurs* u *et* v *de* E, *on a l'encadrement :* $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u \pm v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
- *Si* u *est non nul, les vecteurs* $\pm\frac{u}{\|u\|}$ *sont les seuls vecteurs unitaires de la droite* $\mathbb{R}u$.

Proposition 2.1.12. *Soit* E *un espace préhilbertien réel. On note* $d(u, v)$ *la distance associée. Alors*

1. *Pour tous vecteurs* u *et* v *de* E, *on a* $d(u, v) = d(v, u)$.
2. *Pour tous vecteurs* u *et* v *de* E, *on a l'inégalité* $d(u, v) \geq 0$ *et l'équivalence* $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.
3. *Pour tous vecteurs* u, v, w *de* E *on a* $d(u, v) = d(u + w, v + w)$ *(la distance est invariante par translation).*
4. *Pour tous vecteurs* u, v, w *de* E, *on a l'inégalité triangulaire:* $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.
   Il y a égalité dans ce résultat si et seulement si il existe λ *dans* $[0, 1]$ *tel que* $w = \lambda u + (1 - \lambda)v$.

Remarque 2.1.13. *La notion de distance est surtout utilisée dans le cadre de la géométrie affine. On parle alors de la distance* $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ *entre deux points* A *et* B. *Avec ces notations,* $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ *(égalité si et seulement si* C *est sur le segment* $[A, B]$*).*

Proposition 2.1.14. *Soit* E *un espace préhilbertien réel. Pour tous* u, v *de* E, *et tous réels* α, β *on a:*

$$\|\alpha u + \beta v\|^2 = \alpha^2\|u\|^2 + 2\alpha\beta(u|v) + \beta^2\|v\|^2.$$

En particulier, $\begin{cases} \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2 \\ \|u-v\|^2 &= \|u\|^2 - 2(u|v) + \|v\|^2. \end{cases}$
Par addition, on en déduit: $\forall (u, v) \in E^2,\ \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$. *Cette égalité est connue sous le nom d'identité du parallélogramme.*

Proposition 2.1.15. *Soit* E *un espace préhilbertien réel. Pour tous vecteurs* u, v *de* E, *on a*

$$(u|v) = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right).$$

2.2 Orthogonalité.

2.2.1 Vecteurs orthogonaux.

Définition 2.2.1. *Soit* E *un espace préhilbertien réel. Deux vecteurs* u *et* v *de* E *sont dits orthogonaux et noté* $x \perp y$, *s'ils vérifient* $(u|v) = 0$.

Remarque 2.2.2.

- *La définition de l'orthogonalité est symétrique car* $(u|v) = (v|u)$.
- *Le seul vecteur* u *qui est orthogonal à lui-même est le vecteur nul.*
- *Le seul vecteur* u *qui est orthogonal à tous les vecteurs de* E *est* $u = 0$.

Définition 2.2.3. *Soit* E *un espace préhilbertien réel.*

- *On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est orthogonale si les u_i sont orthogonaux deux à deux.*
- *Si de plus ils sont unitaires, alors la famille est dite orthonormale (ou orthonormée).*
  La famille $(u_i)_{i\in I}$ est orthonormale $\Leftrightarrow\ \forall (i,j)\in I^2,\ (u_i|u_j)=\delta_{i,j}$.

Exemples 2.2.4.

1. *La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique.*
2. *On se place dans $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g)=\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.*
   La famille des $f_n : x \longrightarrow \cos(nx)$, avec n dans $\mathbb{N}$, est une famille orthogonale pour ce produit scalaire.

Proposition 2.2.5. *Soit E un espace préhilbertien réel. Si une famille $(u_i)_{i\in I}$ est orthogonale et formée de vecteurs non nuls, alors c'est une famille libre.*
En particulier, si dim$(E)=n\geq 1$, une famille orthonormale de n vecteurs est une base orthonormale.

Proposition 2.2.6. *Soit E un espace préhilbertien réel. Si la famille $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ est orthogonale, alors*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} u_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|u_k\|^2.$$

Attention, la réciproque n'est vraie que si $n=2$. Ainsi : $(u|v)=0\Leftrightarrow \|u+v\|=\|u\|+\|v\|$.

2.2.2 Orthogonal d'une partie.

Définition 2.2.7. *Soit E un espace préhilbertien réel et X une partie non vide de E. L'orthogonal de X, noté $X^\perp$, est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de X c-à-d*

$$X^\perp=\{y\in E|\ \forall x\in X,\ (x|y)=0\}.$$

Définition 2.2.8. *Soient E un espace préhilbertien réel et X,Y deux parties non vides de E. On dit que les parties X et Y sont orthogonales si : $\forall u\in X,\ \forall v\in Y,\ (u|v)=0$.*
Cela équivaut à l'inclusion $Y\subset X^\perp$ (ou bien sûr à l'inclusion $X\subset Y^\perp$).

Remarque 2.2.9. *Si $F\perp G$ alors $G\subset F^\perp$.*

Proposition 2.2.10. *Soit E un $\mathbb{R}$-e-v*

1. *L'orthogonal $X^\perp$ de X est toujours un sous-espace vectoriel de E, même si X n'en est pas un.*
2. *$E^\perp=\{0\}$.*
3. *$\{0\}^\perp=E$.*
4. *Si X et Y deux parties telles que $X\subset Y$ alors $Y^\perp\subset X^\perp$.*
5. *Si X est une partie non vide de E, alors $X^\perp=$ Vect$(X)^\perp$.*
   En particulier, si $X=$ Vect$\{u_j, j\in J\}$, alors: $v\in X^\perp\Leftrightarrow \forall\ j\in J,\ (v|u_j)=0$.

6. *Pour toute partie non vide de E, on a l'inclusion $X \subset X^{\perp\perp}$ (X est inclus dans son double orthogonal). Cette inclusion peut être stricte, notamment si X n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*

   Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique (et en notant e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique) : Si $X = \{e_1, e_2\}$, alors $X^\perp = \mathbb{R}e_3$, puis $X^{\perp\perp} = \mathbb{R}e_1 \bigoplus \mathbb{R}e_2$.

7. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \cap F^\perp = \{0\}$: la somme $F + F^\perp$ est donc directe.*

   La proposition suivante généralise ce résultat :

Proposition 2.2.11. *Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $(F_j)_{j\in J}$ une famille de sous-espaces de E, orthogonaux deux à deux.*
Alors la somme $G = \sum F_j$ est directe, et on notera $G = \overset{\perp}{\bigoplus} F_j$ (on parle de somme directe orthogonale).

2.2.3 Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.

Proposition 2.2.12. *Soit $\{v_1, \cdots, v_p\}$ une famille libre d'un espace euclidien E et $F = \{v_1, \cdots, v_p\}$ le sous-espace engendré. Alors, par un procédé standard, on peut alors construire une base orthonormée de F à partir de $\{v_1, \cdots, v_p\}$.*
En particulier, à toute base de E on peut associer une base orthonormée de E.

Proof. La méthode consiste à construire d'abord, par récurrence, une base orthogonale $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p\}$ de F et ensuite à la normaliser $\left(e_i = \frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|}\right)$.
Pour cela on pose: $\begin{cases} \varepsilon_1 = v_1 \\ \varepsilon_2 = v_2 + \lambda\varepsilon_1 \quad \text{avec } \lambda \text{ tel que } \varepsilon_2 \perp \varepsilon_1. \end{cases}$
En imposant cette condition, on trouve:

$$0 = \langle v_2 + \lambda\varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle = \langle v_2, \varepsilon_1\rangle + \lambda\|\varepsilon_1\|^2.$$

Comme $\varepsilon_1 \neq 0$, on obtient $\lambda = -\frac{\langle v_2, \varepsilon_1\rangle}{\|\varepsilon_1\|^2}$. Notons que, puisque

$$\begin{cases} v_1 = \varepsilon_1 \\ v_2 = \varepsilon_2 - \lambda\varepsilon_1 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}.$$

Une fois construit ε_1 on construit ε_2 en posant:

$$\varepsilon_3 = v_3 + \mu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2, \quad \text{avec } \mu \text{ et } \nu \text{ tels que } \varepsilon_3 \perp \varepsilon_1 \text{ et } \varepsilon_3 \perp \varepsilon_2.$$

Ceci donne

$$\begin{cases} 0 = \langle v_3 + \mu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2, \varepsilon_1\rangle = \langle v_3, \varepsilon_1\rangle + \mu\|\varepsilon_1\|^2 \\ 0 = \langle v_3 + \mu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2, \varepsilon_2\rangle = \langle v_3, \varepsilon_2\rangle + \nu\|\varepsilon_2\|^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = -\frac{\langle v_3, \varepsilon_1\rangle}{\|\varepsilon_1\|^2} \\ \nu = -\frac{\langle v_3, \varepsilon_2\rangle}{\|\varepsilon_2\|^2}. \end{cases}$$

Comme,

$$\begin{cases} v_1 = \varepsilon_1 \\ v_2 = \varepsilon_2 - \lambda\varepsilon_1 \\ v_3 = \varepsilon_3 - \mu\varepsilon_1 - \nu\varepsilon_2. \end{cases}$$

On a $\text{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} = \text{Vert}\{v_1, v_2, v_3\}$ c'est-à-dire $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est une base othogonale de l'espace engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$.
On voit bien maintenant le procédé de récurrence. Supposons avoir construit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{k-1}$ pour $k < p$; on pose :

$$\varepsilon_k = v_k + \lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_{k-1}\varepsilon_{k-1} \text{ avec les conditions } \varepsilon_k \perp \varepsilon_i, \text{ pour } i = 1, \cdots, k-1.$$

Sont équivalentes à:

$$\lambda_i = -\frac{\langle v_k, \varepsilon_i \rangle}{\|\varepsilon_i\|^2}.$$

Puisque $v_k = \varepsilon_k - \lambda_1 \varepsilon_1 - \cdots - \lambda_{k-1}\varepsilon_{k-1}$, on voit facilement par récurrence que $\text{Vect}\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\} = \text{Vect}\{v_1, \cdots, v_k\}$, aussi $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\}$ est une base orthogonale de $\text{Vect}\{v_1, \cdots, v_k\}$. □

Proposition 2.2.13. *Soit E un espace euclidien (c'est-à-dire un espace préhilbertien réel de dimension finie). Alors, dans l'espace vectoriel E, il existe des bases orthonormales.*

Proposition 2.2.14. *Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, et soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormale de E. Pour tout vecteur u de E, on a : $u = \sum_{k=1}^{n} (u|e_k)e_k$.*

Tout vecteur u de E est donc entièrement déterminé par ses produits scalaires sur les vecteurs de $\mathcal{B}$. Les applications coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont les applications $u \longmapsto (u|e_k)$.

Proposition 2.2.15. *Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, et soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormale de E. Pour tous vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $x = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ on a*

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \quad \textit{et } \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Si la base $\mathcal{B}$ de E est quelconque, alors on a $(x|y) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_k y_j (e_k|e_j)$. On peut alors écrire: $(x|y) = {}^t x M y$ où M est la matrice des $(e_i|e_j)_{1 \leq i,j \leq n}$.

2.2.4 Produit mixte.

Définition 2.2.16. *On oriente un espace vectoriel réel E en choisissant arbitrairement une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ qu'on déclare directe. Les bases $\mathcal{B}$ telles que $det(Pass(\mathcal{B}_0, \mathcal{B})) > 0$ sont dites directes, les autres sont dites indirectes.*

Dans cette section on se place dans un espace vectoriel euclidien orienté E.

Définition 2.2.17. *Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthormée de E, et soit $v = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n vecteurs de E. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de la famille v dans la base $\mathcal{B}$. Alors $a_{i,j} = (e_i|v_j)$ pour tous i, j.*

Remarque 2.2.18. *Si on note $\mathcal{B}$ la base orthonormée obtenue à partir d'une base quelconque $\mathcal{E}$ de E par l'algorithme de Schmidt, alors les matrices de passage $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ (de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$) et $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ (de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{E}$, inverse de la matrice précédente) sont triangulaires supérieures avec coefficients diagonaux strictement positifs.*

Proposition 2.2.19. *Soit $u_1, \cdots, u_n$ une famille de n vecteurs d'un espace euclidien orienté E de dimension n. Le déterminant $det_{\mathcal{B}}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ est le même dans toute base orthonormale directe $\mathcal{B}$. Ce déterminant est appelé produit mixte de $u_1, u_2, \cdots, u_n$ et il est noté $[u_1, u_2, \cdots, u_n]$.*

Remarque 2.2.20.

- *L'application « produit mixte » est une forme n-linéaire alternée sur E.*
- *Si $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ forment une base orthonormale directe, alors $[e_1, e_2, \cdots, e_n] = 1$.*
- *Si $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ forment une base orthonormale indirecte, alors $[e_1, e_2, \cdots, e_n] = -1$.*
- *Soit $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E.*
  - *On a évidemment $[u_1, u_2, \cdots, u_n] \neq 0$ si et seulement si les $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ forment une base de E.*
  - *Si la base $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ est directe (resp. indirecte) alors $[u_1, u_2, \cdots, u_n] > 0$ (resp. < 0)*

Proposition 2.2.21. *Soit $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de l'espace euclidien orienté E. Pour tout endomorphisme f de E, on a : $[f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)] = det(f)[u_1, u_2, \cdots, u_n]$. En particulier, si $det(f) = 1$, on a $[f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)] = [u_1, u_2, \cdots, u_n]$. On peut donc dire que les applications linéaires de déterminant 1 conservent le produit mixte.*

2.2.5 Interprétation du produit mixte.

Interprétation du produit mixte dans un plan orienté.
Soit u, v deux vecteurs d'un plan euclidien orienté E_2. Alors $[u, v]$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur les vecteurs u et v. L'aire orientée du triangle formé sur u et v est $\frac{1}{2}[u, v]$.
Interprétation du produit mixte en dimension 3.
On se place dans un espace euclidien orienté E_3 de dimension 3. On identifie ici les éléments de E_3 avec des points de l'espace.
On se donne un parallélépipède dont les arêtes issues de A sont AB, AC, et AD. Son volume orienté est $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$. Celui du tétraèdre $ABCD$ est $\frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$
On a représenté ci-dessous le parallélépipède. Ici la base $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ est directe, donc le produit mixte $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$ est positif. Le procédé de Schmidt transforme $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ en une base orthonormale directe $e = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$.
On peut alors écrire $\overrightarrow{AB} = be_1,\ \overrightarrow{AC} = ce_1 + ce_2,\ \overrightarrow{AD} = de_1 + de_2 + de_3$.
Alors $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \det_e\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\} = bcd$: c'est bien le volume du parallélépipède.

2.2.6 Supplémentaire orthogonal.

Définition 2.2.22. *Soit E un espace préhilbertien réel. Soient F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et p la projection de E sur F dans la direction G. On dit que p est un projecteur orthogonal de E si : $G = F^{\perp}$.*

Proposition 2.2.23 (Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie)**.** *Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors $E = F \bigoplus F^{\perp}$. Le sous-espace $F^{\perp}$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F.*

Proposition 2.2.24 (Dimension du supplémentaire orthogonal en dimension finie)**.** *Soit E un espace euclidien, donc de dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors*

$$dim(F^{\perp}) = n - dim(F).$$

On a l'égalité $F = F^{\perp\perp}$. Ainsi F est lui-même le supplémentaire orthogonal de $F^{\perp}$.

Remarque 2.2.25. *Si on est en dimension finie, on pourra donc dire des sous-espaces F et $F^{\perp}$ qu'ils sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.*

Proposition 2.2.26 (Supplémentaire orthogonal et bases orthonormées.)**.**
Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien E. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de F et si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de $F^{\perp}$, alors $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ (obtenue par juxtaposition) est une base orthonormale de E.
Réciproquement, si on complète une base orthonormale $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_p\}$ de F en une base orthonormale $\{e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n\}$ de E, alors $\{e_{p+1}, \cdots, e_n\}$ est une base orthonormale de $F^{\perp}$.

Exemple 2.2.27. *Plaçons nous dans un espace euclidien E de dimension 3.*
Ici, le plan vectoriel P et la droite vectorielle D sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre. Si $\{e_1, e_2\}$ est une base de P et si e_3 est une base de D, alors la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base orthonormale de E si et seulement si $\{e_1, e_2\}$ est une base orthonormale de P et e_3 est unitaire.

2.3 Hyperplans affines d'un espace euclidien.

2.3.1 Vecteur normal à un hyperplan d'un espace euclidien.

Définition 2.3.1.

1. *Étant donné un espace vectoriel V sur un corps $\mathbb{K}$, un espace affine de direction V est un ensemble non vide E muni d'une application φ qui à chaque bipoint (A, B) de E, associe un élément de V, noté $\overrightarrow{AB}$ vérifiant les deux propriétés suivantes:*
   (a) $\forall\ (A, B, C) \in E^3,\ \varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$ *c.à.d* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
   (b) $\forall\ A \in E, \forall\ \vec{v} \in V,\ \exists!\ B \in E,\ \varphi(A, B) = \vec{v}$ *c.à.d* $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
2. *Soit E un espace affine de direction V. Une partie non vide F de E est un sous-espace affine de E (ou variété linéaire affine, et parfois simplement variété affine), s'il existe un point A de F tel que l'ensemble $W = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de V. En d'autres termes, les sous-espaces affines de E passant par A sont les sous-espaces vectoriels de E_A, la structure vectorielle d'origine A sur E. On dit alors que F est le sous-espace affine de E de direction W passant par A. Le sous-espace vectoriel W est donc la direction de l'espace affine F, et la dimension d'un sous-espace affine est la dimension de sa direction.*

Exemples 2.3.2. *On a vu que tout espace vectoriel pouvait être muni d'une structure d'espace affine par l'opération de soustraction vectorielle. Les exemples suivants sont des cas particuliers.*
Le plan affine réel est le plan $\mathbb{R}^2$ de direction lui-même en tant qu'espace vectoriel, avec l'opération

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \longmapsto & (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \end{array}.$$

L'espace affine réel de dimension 3 se définit de façon analogue :

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) & \longmapsto & (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \end{array}.$$

Définition 2.3.3.

1. *Soient E un espace vectoriel et H un sous-espace. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

   (a) *H est un hyperplan de E.*

   (b) *Il existe dans E une droite vectorielle supplémentaire de H.*

   (c) *Toute droite vectorielle de E engendrée par un vecteur n'appartenant pas à H est un supplémentaire de H.*

   (d) *H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*

   (e) *H est défini par une équation linéaire homogène non triviale.*

2. *Soit E un espace affine de direction V. Les sous-espaces affines de E dont la direction est un hyperplan (vectoriel) de V sont appelés les hyperplans (affines) de E.*

   Étant donné un hyperplan H de V, une partie F de E est donc un hyperplan de direction H si et seulement s'il existe un point A tel que

   $$H = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in F\}.$$

   Un tel point A appartient alors nécessairement à F, et tout autre point de F vérifie la même propriété.

Définition 2.3.4. *Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'un espace euclidien E, de direction un hyperplan vectoriel H. On appelle vecteur normal à $\mathcal{H}$ tout vecteur non nul de la droite vectorielle $D = H^\perp$.*

Proposition 2.3.5. *Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'un espace euclidien E. Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{H}$. Soit A un point de $\mathcal{H}$. Alors on a l'équivalence : $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}|\vec{n}) = 0$.*

Remarque 2.3.6. *Un hyperplan affine $\mathcal{H}$ est donc déterminé par la donnée d'un point A et d'un vecteur normal $\vec{n}$.*

Définition 2.3.7. *Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul d'un espace euclidien E. Soit A un point quelconque de E. On considère l'application f définie sur E par $f(M) = (\overrightarrow{AM}|\vec{n})$.*
On appelle lignes de niveau de f les ensembles $\mathcal{H}_\lambda = \{M \in E, f(M) = \lambda\}$. En particulier $\mathcal{H}_0$ est l'hyperplan de vecteur normal $\vec{n}$ et qui passe par A.

Proposition 2.3.8. *Les lignes de niveau de f sont les hyperplans affines de vecteur normal $\vec{n}$.*

2.3.2 Équations d'un hyperplan dans une base orthonormale.

Proposition 2.3.9. *Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E, de direction H, et soit $\vec{n} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ un vecteur non nul de E. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le vecteur $\vec{n}$ est normal à l'hyperplan vectoriel H (à l'hyperplan affine $\mathcal{H}$).*
2. *Une équation de H est $(a|u) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$.*
3. *Une équation de $\mathcal{H}$ est $(a|u) = \lambda$, avec λ réel, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \lambda$.*

Exemples 2.3.10.

1. *On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, avec son produit scalaire canonique.*
   (a) *La normale à la droite vectorielle d'équation $2x + 5y = 0$ est dirigée par $\vec{n} = (2, 5)$. Soit $\mathcal{D}$ la droite affine orthogonale au vecteur $\vec{n} = (2, 5)$ et passant par $M(4, 1)$. La droite $\mathcal{D}$ a pour équation $2(x - 4) + 5(y - 1) = 0$, donc $2x + 5y = 13$.*
   (b) *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites affines de $\mathbb{R}^2$, de directions respectives D et D'. On dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si $D^\perp = D$, c'est-à-dire si la direction de chaque droite affine est le supplémentaire orthogonal de la direction de l'autre.*
   Cela équivaut aussi à dire que les vecteurs normaux à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonaux.
   Supposons que les équations de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient $\begin{cases} ax + by = \lambda \\ a'x + b'y = \mu. \end{cases}$
   Alors les droites affines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.
2. *On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, avec son produit scalaire canonique.*
   (a) *La normale au plan vectoriel d'équation $2x + 5y - 3z = 0$ est dirigée par $\vec{n} = (2, 5, -3)$.*
   Soit $\mathcal{P}$ le plan affine orthogonal au vecteur $\vec{n} = (1, 3, -2)$ et passant par $M(4, -5, -7)$.
   Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $(x - 4) + 3(y + 5) - 2(z + 7) = 0$, donc $x + 3y - 2z = 3$.
   (b) *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans affines de $\mathbb{R}^3$, de directions P et P'. On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si $P^\perp \subset P'$, c'est-à-dire si $(P')^\perp \subset P$.*
   Cela signifie que la direction de chacun des deux plans contient un vecteur normal à l'autre.
   Cela équivaut aussi à dire que leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
   Supposons que les équations de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ soient $\begin{cases} ax + by + cz = \lambda \\ a'x + b'y + c'z = \lambda'. \end{cases}$
   Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' + cc' = 0$.

2.3.3 Calcul de la distance à un hyperplan affine.

Définition 2.3.11. *Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'un espace euclidien E. Soit A un point de $\mathcal{H}$, et soit $\vec{n}$ un vecteur normal unitaire à $\mathcal{H}$. Pour tout point M de E, on a : $d(M, \mathcal{H}) = \left| \left(\overrightarrow{AM} | \vec{n} \right) \right|$.*

Remarque 2.3.12. *Si le vecteur $\vec{n}$ n'est pas unitaire, alors la distance de M à $\mathcal{H}$ s'écrit :*

$$d(M,\mathcal{H}) = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\left|\left(\overrightarrow{AM}|\vec{n}\right)\right|.$$

Exemples 2.3.13.

1. *Distance à une droite affine dans $\mathbb{R}^2$.: On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, avec son produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{D}$ une droite affine d'équation $ax+by=h$. Soit $M(x_0,y_0)$ un point quelconque.*

   Alors la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ est donnée par : $d(M,\mathcal{D}) = \frac{|ax_0+by_0-h|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2. *Distance à un plan affine dans $\mathbb{R}^3$.: On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, avec son produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine d'équation $ax+by+cz=h$. Soit $M(x_0,y_0,z_0)$ un point quelconque.*

   Alors la distance du point M au plan $\mathcal{P}$ est donnée par : $d(M,\mathcal{P}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0-h|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

2.4 Isométries vectorielles d'un espace euclidien.

Définition 2.4.1. *Soit E un espace euclidien. Soit f une application de E dans lui-même. On dit que f est une isométrie vectorielle (ou encore : un automorphisme orthogonal) si f est linéaire et si elle « conserve la norme », c'est-à-dire si : $\forall\ u \in E\ \|f(u)\| = \|u\|$.*

Remarque 2.4.2. *Toute isométrie vectorielle f de E est effectivement un automorphisme de E. Soit f un automorphisme orthogonal et soit u un vecteur non nul de E: s'il existe un réel λ tel que $f(u) = \lambda u$, alors nécessairement λ est dans $\{-1,1\}$.*

Proposition 2.4.3. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application f est une isométrie vectorielle (c'est-à-dire elle conserve la norme).*
2. *L'application f conserve le produit scalaire : $\forall\ (x,y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = (x|y)$.*
3. *L'application f transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale de E.*

Remarque 2.4.4.

- *Les applications Id et $-Id$ sont des automorphismes orthogonaux de E.*
- *Le composé de deux automorphismes orthogonaux de E est un automorphisme orthogonal de E.*
- *Enfin, si f est un automorphisme orthogonal alors f^{-1} est un automorphisme orthogonal. On peut résumer ces propriétés de la façon suivante:*

Proposition 2.4.5. *Soit E un espace euclidien. On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E. Alors $O(E)$ est un groupe pour la composition des applications, appelé groupe orthogonal de E.*

2.4.1 Symétries vectorielles orthogonales.

Définition 2.4.6. *Soit E un espace euclidien, et soit F un sous-espace vectoriel de E. La symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelée symétrie orthogonale par rapport à F, c.à.d*

$$\forall\ x \in E, s_F(x) = p_F(x) - p_{F^{\perp}}(x).$$

Si F est un hyperplan, on dit que f est la réflexion par rapport à F.
Si F est une droite, on dit que f est le demi-tour (ou retournement) d'axe F.

Remarque 2.4.7.

1. *Pour $F = \{0\}$, on a $s_F = -Id$ et pour $F = E$, $s_F = Id$. On supposera a priori que F distinct de $\{0\}$ et de E (F est un sous-espace vectoriel propre de E).*

2. *On a $p_F + p_{F^{\perp}} = Id$, on déduit que s_F est aussi définie par:*

$$\forall\ x \in E,\ \ s_F(x) = 2p_F(x) - x = x - 2p_{F^{\perp}}(x).$$

3. *Si $D = \mathbb{R}a$ est une droite vectorielle, on a alors:*

$$s_D(x) = 2p_D(x) - x = 2\frac{(x|a)}{\|a\|^2}a - x.$$

4. *Si $H = D^{\perp}$ est un hyperplan, on a alors :*

$$s_H(x) = 2p_H(x) - x = x - 2\frac{(x|a)}{\|a\|^2}a.$$

Exemple 2.4.8. *On se place ici dans un espace euclidien de dimension 3.*
La droite D et le plan P sont orthogonaux.
La droite D est dirigée par le vecteur unitaire k.
On a représenté la réflexion s par rapport au plan vectoriel P et la projection orthogonale p sur P.
On a $p(u) = u - (u|k)k$, et $s(u) = u - 2(u|k)k$.
L'application $-s$ est la symétrie orthogonale par rapport à D.

Théorème 2.4.9. *Soit F un sous espace vectoriel de E.*

1. *Pour $x \in E$, on a $x \in F$ si et seulement si, $s_F(x) = x$ et $x \in F^{\perp}$ si et seulement si, $s_F(x) = -x$.*

2. *$s_F \circ s_F = Id$ (s_F est involutive). Une symétrie orthogonale est donc un automorphisme de E avec $s_F^{-1} = s_F$.*

3. *Pour tous x, y dans E on a:*
$$(s_F(x)|y) = (x|s_F(y)).$$

4. *Pour tous x, y dans E, on a:*
$$(s_F(x)|s_F(y)) = (x|y).$$

5. *On a $s_F + s_{F^{\perp}} = 0$ et $s_F \circ s_{F^{\perp}} = s_{F^{\perp}} \circ s_F = -Id$.*

2.4.2 Matrices orthogonales.

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de colonnes $C_1, \cdots, C_n$. Alors le terme général de $A = {}^tMM$ est $a_{i,j} = C_iC_j$.

Définition 2.4.10. *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- *La matrice M vérifie ${}^tMM = I_n$.*
- *La matrice M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$.*
- *Les vecteurs-colonne de M forment une famille orthonormale.*

Si ces conditions sont réalisées, on dit que M est une matrice orthogonale.

Remarque 2.4.11. *Si M est une matrice orthogonale, il en est de même de ${}^tM$ (car ${}^tM = M^{-1}$). Une matrice M est donc orthogonale si et seulement si ses lignes forment une famille orthonormale.*

Exemples 2.4.12.

1. *Les matrices* $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ *et* $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ *sont orthogonales.*

   On verra plus loin que ce sont les seules les matrices orthogonales d'ordre 2.

2. *Les matrices* $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) & -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) & \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & 0 & -\cos(\theta_2) \end{pmatrix}$

   sont orthogonales.

Proposition 2.4.13. *On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n. C'est un groupe pour le produit des matrices (donc un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$). On l'appelle le groupe orthogonal d'indice n.*

Proposition 2.4.14. *Soit M la matrice d'un endomorphisme f dans une base orthonormale de l'espace euclidien E. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *L'application f est un automorphisme orthogonal de E (c'est-à-dire un élément du groupe $O(E)$).*
2. *La matrice M est une matrice orthogonale (c'est-à-dire un élément du groupe $O(n)$).*

Remarque 2.4.15. *On peut interpréter la proposition précédente en disant que les matrices orthogonales sont les matrices des automorphismes orthogonaux dans les bases orthonormales.*
Si on se place dans $\mathbb{R}^n$ (avec son produit scalaire canonique), une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme f canoniquement associé à M est une isométrie vectorielle.

Proposition 2.4.16. *Soit E un espace euclidien, muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$. Soit $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ une famille de n vecteurs, et soit M la matrice de la famille $\mathcal{E}$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors la famille $\mathcal{E}$ est une base orthonormale de E si et seulement si la matrice M est orthogonale.*

2.4.3 Matrices orthogonales positives ou négatives.

Proposition 2.4.17. *Si M est une matrice orthogonale, alors det(M) est égal à 1 ou à -1.*

Remarque 2.4.18. *Attention la réciproque est fausse!! Considérer par exemple la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 2.4.19. *Soit M une matrice orthogonale d'ordre n.*

1. *Si det$(M) = 1$, on dit que M est une matrice orthogonale positive.*

2. *Si det$(M) = -1$, on dit que M est une matrice orthogonale négative.*

Remarque 2.4.20.

1. *Si on échange deux colonnes (ou deux lignes) d'une matrice orthogonale positive, on obtient une matrice orthogonale négative (et réciproquement).*

2. *C'est la même chose si on remplace une colonne (ou une ligne) par son opposée.*

3. *Il existe des matrices orthogonales positives (considérer par exemple I_n).*

4. *Il existe des matrices orthogonales négatives (changer un coefficient diagonal de I_n en -1).*

5. *Pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on sait que det$(-M) = (-1)^ndet(M)$: il en résulte que si M est orthogonale, les matrices M et $-M$ ont la même « orientation » si n est pair, et sont d'orientation contraire sinon.*

Définition 2.4.21. *On note $SO(n)$, ou $SO_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices orthogonales positives d'ordre n.*

Proposition 2.4.22. *L'ensemble $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$, appelé groupe spécial orthogonal d'indice n.*

Remarque 2.4.23.

- *L'ensemble des matrices orthogonales négatives (le complémentaire de $SO(n)$ dans $O(n)$) n'est pas un groupe : non seulement il ne contient pas le neutre I_n, mais il n'est pas stable : en effet si M et N sont orthogonales négatives, alors MN est orthogonale positive.*

- *L'inverse d'une matrice orthogonale négative est encore orthogonale négative.*

- *La matrice I_n est orthogonale positive, alors que la matrice $-I_n$ n'est dans $SO(n)$ que si n est pair.*

2.4.4 Isométries positives, négatives.

Définition 2.4.24. *Si f est une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E, alors $det(f)$ est égal à 1 ou à -1.*
Si $det(f) = 1$, on dit que f est une isométrie positive.
Si $det(f) = -1$, on dit que f est une isométrie négative.

Définition 2.4.25. *Soit E un espace euclidien. On note $SO(E)$ l'ensemble des isométries positives de E.*

Proposition 2.4.26. *L'ensemble $SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$, appelé groupe spécial orthogonal de E.*

Exemples 2.4.27.

1. *L'application Id est dans $SO(E)$. Mais $-Id$ est dans $SO(E)$ si et seulement si $dim(E)$ est paire.*

2. *La réflexion s par rapport à un hyperplan vectoriel est toujours un automorphisme orthogonal négatif.*

Proposition 2.4.28. *Soit f une isométrie vectorielle positive d'un espace euclidien orienté E. Alors pour tous vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_n$ de E, on a : $[f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)] = [u_1, u_2, \cdots, u_n]$.*

2.5 Isométries en dimension 2.

Théorème 2.5.1. *Soit $A \in O(2)$, une matrice orthogonale de taille 2×2.*

- *Si* $\det A = +1$, *alors il existe un réel θ tel que:* $A = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

- *Si* $\det A = -1$, *alors il existe un réel θ tel que:* $A = S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

Proof. Notons: $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O(2)$. Alors dans tous les cas : $a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1$, et : $ac+bd = 0$, puisque les vecteurs colonnes de A constituent une base orthonormale de muni de son produit scalaire canonique. Donc il existe θ et θ' réels tels que : $a = \cos(\theta),\ b = \sin(\theta),\ c = \sin(\theta'),\ d = \cos(\theta')$. De plus, on a aussi : $\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta') = 0 = \sin(\theta+\theta')$, soit : $\theta + \theta' = k\pi$, avec : $k \in \mathbb{Z}$.
On peut donc écrire: $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -(-1)^k \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & (-1)^k \cos(\theta) \end{pmatrix}$
Enfin:

- Si $\det A = +1$, alors $(-1)^k = +1$ et $A = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

- Si $\det A = -1$, alors $(-1)^k = -1$ et $A = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

□

Remarque 2.5.2. *Si on identifie E au plan complexe $\mathbb{C}$, en représentant des vecteurs par leur affixe, alors la rotation vectorielle d'angle θ est représentée par l'application : $z \to z.e^{i\theta}$.*

Théorème 2.5.3. *Soit $(E, (.|.))$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2, orienté. Soit u un automorphisme orthogonal de E et A la matrice de u dans une base: $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, orthonormale directe de E.*

- *Si $\det A = +1$, alors il existe un réel θ tel que: $A = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ Si u n'est pas l'identité de E, u est la rotation de E d'angle θ, θ étant donné par : $2\cos(\theta) = tr(u)$.*

- *Si $\det A = -1$, alors il existe un réel θ tel que: $A = S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$*

  u est alors la symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'équation: $x\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - y\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$ et l'angle de D avec la droite dirigée par e_1 est égal à $\frac{\theta}{2}$.

Proof. Si u est un automorphisme orthogonal de E alors sa matrice représentative A dans une base orthonormale de E est alors orthogonale et on se trouve dans l'un des deux cas précédents. De plus, si:

- Si $\det(u) = +1$, alors : $\det(A) = +1$, et il existe un réel θ tel que: $A = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

  Distinguons alors deux cas. Si : $\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, alors u est l'identité de E sinon u est une rotation de E d'angle θ, et on obtient par: $tr(A) = 2\cos(\theta) = tr(u)$.

- Si $\det(u) = -1$, alors : $\det(A) = -1$, et il existe un réel θ tel que: $A = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$
  Puisque A est symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses valeurs propres (réelles) λ_1 et λ_2 vérifient, en utilisant trace et déterminant : $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et : $\lambda_1\lambda_2 = -1$. Donc λ_1 et λ_2 valent 1 et -1.

  La matrice de u dans une base de vecteurs propres est alors $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $u^2 = Id$.

  u est donc bien une symétrie vectorielle. Comme enfin, les espaces propres de u sont orthogonaux, c'est une symétrie orthogonale. La droite par rapport à laquelle s'opère cette symétrie est l'ensemble des vecteurs invariants de u donnés par

$$\begin{cases} (\cos(\theta) - 1)x + \sin(\theta)y = 0 \\ \sin(\theta)x - (\cos(\theta) + 1)y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y\right] = 0 \\ \\ 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y\right] = 0 \end{cases}$$

  Comme enfin, soit le sinus, soit le cosinus mis en facteur est non nul, on en déduit bien que la droite invariante est la droite D dont l'équation dans la base $\mathcal{B}$ est bien celle annoncée. Le vecter $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$ est alors directeur de D et l'angle de ce vecteur avec e_1 est bien $\frac{\theta}{2}$.

$\square$

Théorème 2.5.4. *Le groupe $SO(2)$ est commutatif. Si E est un espace vectoriel euclidien de dimension 2, le groupe $SO(E)$ est commutatif.*
En particulier, deux matrices orthogonales de déterminant 1 commutent, tout comme deux rotations dans un plan euclidien.

Proof. Si A et A' sont deux matrices de rotation d'angle θ et θ', alors :

$$\begin{aligned} AA' &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \\ &= A'A. \end{aligned}$$

Si R et R' sont deux rotations de E, de matrices respectives A et A' dans une base orthonormale directe de E, alors $R \circ R'$ est la rotation d'angle $\theta + \theta'$.

□

2.6 Projection orthogonale.

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie de E.

Théorème 2.6.1. *Pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique vecteur y dans F tel que:*

$$\|x-y\| = d(x,F) = \inf_{z \in F} \|x-z\|.$$

Ce vecteur est également l'unique vecteur appartenant à F tel que $x - y \in F^{\perp}$. Son expression dans une base orthonormée $(e_i)_{1 \le i \le n}$ de F est donnée par:

$$y = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k,$$

et on a:

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2.$$

Proof. Soit $(e_i)_{1 \le i \le n}$ une base orthonormée de F (le théorème de Gram–Schmidt nous assure l'existence d'une telle base). Pour x dans E, on définit le vecteur $y \in F$ par:

$$y = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k.$$

On a alors $(x - y|e_j) = 0$ pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, c'est-à-dire que $x - y \in F^{\perp}$. Le théorème de Pythagore donne alors, pour tout $z \in F$:

$$\begin{aligned} \|x-z\|^2 &= \|(x-y)+(y-z)\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \\ &\ge \|x-y\|^2 \end{aligned}$$

et on a bien $\|x-y\| = d(x,F)$.
S'il existe un autre vecteur $u \in F$ tel que $\|x-u\| = d(x,F) = \delta$, on a:

$$\delta^2 = \|x-u\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-u\|^2 = \delta^2 + \|y-u\|^2$$

on déduit alors que $\|y-u\| = 0$ et $y = u$.
On sait déjà que le vecteur $y \in F$ est tel que $x - y \in F^\perp$. Supposons qu'il existe un autre vecteur $u \in F$ tel que $x - u \in F^\perp$, pour tout $z \in F$, on a alors:

$$\begin{aligned} \|x-z\|^2 &= \|(x-u)+(u-z)\|^2 \\ &= \|x-u\|^2 + \|u-z\|^2 \\ &\geq \|x-u\|^2 \end{aligned}$$

donc $\|x-u\| = d(x,F)$ et $u = y$ d'après ce qui précède.
La dernière égalité se déduit de :

$$\|x\|^2 = \|(x-y)+y\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Définition 2.6.2. *Si x est un vecteur de E, alors le vecteur y de F qui lui est associé dans le théorème précédent est la meilleure approximation de x dans F. En considérant la caractérisation géométrique $x - y \in F^\perp$, on dit aussi que y est la projection orthogonale de x sur F.*
On note $y = p_F(x)$ et on dit que l'application p_F est la projection orthogonale de E sur F. On a donc :

$$(y = p_F(x)) \Leftrightarrow (y \in F \text{ et } x - y \in F^\perp) \Leftrightarrow (y \in F \text{ et } \|x-y\| = d(x,F)).$$

Proposition 2.6.3 (Inégalité de Bessel). *Pour tout vecteur $x \in E$, on a:*

$$\|p_F(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2 \leq \|x\|^2.$$

Exemple 2.6.4. *Si $D = \mathbb{R}a$ est une droite vectorielle, une base orthonormée de D est $\left\{\frac{a}{\|a\|}\right\}$ et pour tout $x \in E$, on a $p_D(x) = \frac{(x|a)}{\|a\|^2}a$.*

2.7 Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

Définition 2.7.1. *On dit qu'une famille orthonormée $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans E si le sous espace vectoriel de E engendré par B est dense dans $(E, \|.\|)$.*
Dire que la famille orthonormée $\mathcal{B}$ est totale dans E équivaut à dire que pour tout x dans E et pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un $(n+1)$-uplet $(c_0, c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que:

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{n} c_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

Théorème 2.7.2. *Avec les notations qui précédent, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *La famille orthonormée $\mathcal{B}$ est totale.*
2. *Pour tout x dans E, on a :*
$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} (x|e_k)e_k.$$
(série convergente dans $(E, \|.\|)$)
3. *Pour tous x, y dans E, on a :*
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x|e_k)(y|e_k) = (x|y).$$
(égalité de Parseval).
4. *Pour tout x dans E, on a :*
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x|e_k)^2 = \|x\|^2.$$
(égalité de Parseval).

2.8 Adjoint d'un endomorphisme.

Proposition 2.8.1. *Pour tout $x \in E$, on note φ_x la forme linéaire $y \in E \longrightarrow (x|y)$. L'application $x \longrightarrow \varphi_x$ est bijective de E dans son dual E^*, ensemble des formes linéaires sur E.*

Proposition 2.8.2. *Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ il existe un unique endomorphisme noté u^* tel que*
$$\forall (x, y) \in E^2, (x|u(y)) = (u^*(x)|y).$$
u^* est appelé adjoint de u.

Proof. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$. L'application $y \in E \longrightarrow (x|u(y))$ est une forme linéaire sur E, donc par la proposition précédente, il existe un unique $x^* \in E$ tel que $\forall y \in E, (x|u(y)) = \varphi_{x^*}(y) = (x^*|y)$. On définit donc de manière unique l'application $u^* : E \longrightarrow E, x \longrightarrow x^*$. Reste à vérifier que u^* est un endomorphisme. Pour tout $(x, x') \in E^2$, pour tout $\lambda \in K$, pour tout $y \in E$:
$$\begin{aligned} (u^*(\lambda x + x')|y) &= (\lambda x + x'|u(y)) = \lambda(x|u(y)) + (x'|u(y)) \\ &= \lambda(u^*(x)|y) + (u^*(x')|y) \\ &= (\lambda u^*(x) + u^*(x')|y) \end{aligned}$$
Ceci étant vrai pour tout $y \in E$, il vient $u^*(\lambda x + x') - \lambda u^*(x) + u^*(x') \in E^\perp = \{0\}$, d'où
$$u^*(\lambda x + x') = \lambda u^*(x) + u^*(x')$$
et u^* est linéaire.

□

Proposition 2.8.3. *On a les propriétés suivantes:*

1. *$(u^*)^* = u$ pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$;*

2. *$Id^* = Id$.*

3. *$(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$ pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E)$.*

4. *L'application $u \longrightarrow u^*$ est bijective de $\mathcal{L}(E)$ sur lui-même et linéaire.*

Proposition 2.8.4. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est inversible, alors $u^* \in \mathcal{L}(E)$ est inversible et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.*

Proof. Si u est inversible, $u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}$ et $u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}$, et par la propriété de composition des adjoints on a : $(u^{-1})^* \circ u^* = \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$ et $u^* \circ (u^{-1})^* = \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$.

□

Proposition 2.8.5. *Supposons E de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. On a:*

$$Mat(u, \mathcal{B}) = (e_i | u(e_j))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}.$$

Proof. $u(e_j)$ est la j-ème colonne de $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ et $(e_i | u(e_j))$ sont i-ème élément. □

Proposition 2.8.6. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, on a*

$$Mat(u^*, \mathcal{B}) = {}^t Mat(u, \mathcal{B}).$$

Proposition 2.8.7. *Soit F un sous-espace vectoriel de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*.*

Proof. Supposons F stable par u, i.e. $u(F) \subset F$. Soit $x \in F^\perp$. On a pour tout $y \in F$:

$$(u^*(x) | y) = (x | u(y)) = 0,$$

donc $u^*(x) \in F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par u^*. Ceci montre également la réciproque puisque $(u^*)^* = u$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

□

2.8.1 Endomorphismes autoadjoints (Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien).

Définition 2.8.8. *On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si $u^* = u$, i.e. si*

$$\forall \ (x, y) \in E^2, \ (x | u(y)) = (u(x) | y).$$

Si E est euclidien, on parle aussi d'endomorphisme symétrique.

Proposition 2.8.9. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint (i.e. u symétrique). Si E est euclidien, alors $Mat(u, \mathcal{B}) = {}^t Mat(u, \mathcal{B})$, et la matrice est dite symétrique.*

Définition 2.8.10 (Endomorphisme autoadjoint défini positif.)**.** *On dit qu'un endomorphisme autoadjoint u est dit:*

1. *positif si pour tout* $x \in E$, $(x|u(x)) \geq 0$;

2. *défini positif si* ($(x|u(x)) = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

Définition 2.8.11 (Matrice définie positive). *Une matrice carrée réelle* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est dite:*

1. *positive si pour tout* $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXAX \geq 0$;

2. *définie positive si* ${}^tXAX = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

Proposition 2.8.12. *Soit une base orthonormée* $\mathcal{B}$. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme autoadjoint.* u *est positif (resp.défini positif) si et seulement si* $Mat(u, \mathcal{B})$ *est positive (resp. définie positive).*

Proof. Il suffit de remarquer que si $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ et si X est le vecteur représentant $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$, on a dans le cas euclidien:

$$(x|u(x)) = {}^tXAX.$$

□

2.8.2 Réduction des endomorphismes symétriques.

Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien de dimension n.

Proposition 2.8.13. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Si* u *est symétrique, alors toutes ses valeurs propres sont réelles.*

Proof. u est scindé puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u, et $x \in E$ un vecteur propre non nul associé à λ. On a:

$$\begin{aligned}
(\lambda - \bar{\lambda})\|x\|^2 &= (\lambda - \bar{\lambda})(x|x) \\
&= \lambda(x|x) - \bar{\lambda}(x|x) \\
&= (x|\lambda x) - (\lambda x|x) \\
&= (x|u(x)) - (u(x)|x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

puisque u est autoadjoint. x étant non nul il vient $\bar{\lambda} = \lambda$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Proposition 2.8.14. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$, E *euclidien. Si* u *est symétrique, alors* u *est scindé sur* $\mathbb{R}$.

Proof. Soit $\mathcal{B}$ une base de E euclidien. Alors la matrice $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ est une matrice réelle symétrique. C'est aussi une matrice complexe hermitienne, donc l'endomorphisme $X \longrightarrow AX$ de $\mathbb{C}^n$ est hermitien toutes ses valeurs propres sont réelles. Donc u est scindé sur $\mathbb{R}$. □

Proposition 2.8.15. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Si* u *est autoadjoint, i.e. symétrique, alors ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*

Proof. Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de u, et x_1 (resp. x_2) un vecteur propre associé à λ_1 (resp. λ_2). On a:

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1|x_2) &= \lambda_1(x_1|x_2) - \lambda_2(x_1|x_2) \\
&= (\bar{\lambda}_1 x_1|x_2) - (x_1|\lambda_2 x_2) \\
&= (\lambda_1 x_1|x_2) - (x_1|\lambda_2 x_2) \\
&= (u(x_1)|x_2) - (x_1|u(x_2)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que λ_1 et λ_2 sont réelles puis que u est autoadjoint. λ_1 et λ_2 étant distinctes, on a nécessairement $(x_1|x_2) = 0$. Les vecteurs x_1 et x_2 étant quelconques, les sous-espaces propres sont orthogonaux. □

Théorème 2.8.16 (Théorème spectral)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est symétrique alors u est diagonalisable à valeurs propres réelles, et E est la somme directe orthogonale de ses sous-espaces propres.*

Proof. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Soit F la somme de ses sous-espaces propres. F est stable par u, donc $F^\perp$ est stable par $u^* = u$. Supposons $F^\perp \neq \{0\}$ et considérons la restriction $u|_{F^\perp}$ de u à $F^\perp$. $u|_{F^\perp}$ est un endomorphisme autoadjoint de $F^\perp$, donc il est scindé à valeurs propres réelles. Si λ est une valeur propre de $u|_{F^\perp}$, elle est aussi valeur propres de u, et alors le sous-espace propre associé est inclus dans F, ce qui contredit $F \cap F^\perp = \{0\}$. On obtient donc $F^\perp = \{0\}$, d'où $F = E$, et u est diagonalisable à valeurs propres réelles. Donc la somme des sous-espaces propres est orthogonale. □

Corollaire 2.8.17. *Soit un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. u est autoadjoint (i.e. symétrique) si et seulement si il existe une base orthonormée de E dans laquelle sa matrice est diagonale réelle.*
Soit une matrice carrée réelle d'ordre n. A est symétrique si et seulement si il existe une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale réelle.

Proof. Soit u autoadjoint. Supposons que u admette p valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, et notons $\mathcal{B}_i,\ i = 1, \cdots, p$ une base orthonormée du i-ème espace propre. Alors la concaténation $\mathcal{B}$ des $\mathcal{B}_i,\ i = 1, \cdots, p$ est une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
Pour le second point, si A est symétrique, alors l'endomorphisme associé $X \longrightarrow AX$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$, donc par le premier point il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que sa matrice soit diagonale réelle. Alors que la matrice de passage de la base canonique à la base orthonormée $\mathcal{B}$ est orthogonale. □

Proposition 2.8.18. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme autoadjoint, alors:*

1. *u est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.*
2. *u est défini positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.*

Soit A est une matrice carrée symétrique ou hermitienne, alors:

1. *A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.*
2. *A est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.*

Proof. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormée de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ réels. Si u est positif, alors $\lambda_i = (e_i|u(e_i) \geq 0$. Si u est défini positif, $e_i \neq 0$ entraîne $\lambda_i = (e_i|u(e_i)) > 0$.
Réciproquement, pour tout $x \in E$, de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a:

$$(x|u(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$$

donc si toutes les valeurs propres λ_i sont positives, alors u est positif. Si toutes les valeurs propres λ_i sont strictement positives, alors $(x|u(x)) = 0 \Leftrightarrow \forall\, i = 1, \cdots, n,\ x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et u est bien défini positif. □

2.8.3 Réduction d'une isométrie vectorielle.

Lemme 2.8.19. *Soit $u \in O(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u alors $F^\perp$ l'est aussi.*

Proof. On suppose F stable par u et donc $u(F) \subset F$. Or u est bijective donc conserve la dimension et par conséquent $u(F) = F$. Soit $x \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$, on peut écrire $y = u(a)$ avec $a \in F$ et alors

$$(u(x)|y) = (u(x)|u(a)) = (x|a) = 0.$$

Ainsi $u(x) \in F^\perp$. □

Lemme 2.8.20. *Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel réel de dimension finie non nulle alors il existe au moins une droite vectorielle ou un plan stable par u.*

Proof. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire annulateur de u (par exemple, son polynôme caractéristique ou minimal). On peut écrire $P = P_1 P_2 \cdots P_m$ avec P_k polynômes unitaires irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
Puisque $P(u) = 0$, on a $P_1(u) \circ P_2(u) \circ \cdots \circ P_m(u) = 0$ et par conséquent, au moins l'un des endomorphismes composés n'est pas injectif. Supposons que ce soit celui d'indice k. Le polynôme P_k est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, il est donc de l'une des deux formes suivantes:
Cas $P(X) = X - \lambda$
λ est alors valeur propre de u et tout vecteur propre associé engendre une droite vectorielle stable.
Cas $P(X) = X^2 + pX + q$ avec $\Delta = p^2 - 4q < 0$.
Soit $x \in \ker(P(u))$. On a $u^2(x) + pu(x) + qx = 0_E$ et donc $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u. Dans les deux cas, u admet une droite ou un plan stable. □

Théorème 2.8.21. *Soit $u \in O(E)$ alors il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de blocs diagonaux de la forme*

$$(1),\ (-1) \quad et \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad avec\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, l'espace E est la somme directe orthogonale de $E_1(u)$, $E_{-1}(u)$ et de plans sur lesquels u opère comme une rotation.

Proof. Par récurrence sur la dimension de E.
Cas $n = 1$: u est une isométrie d'une droite et peut donc être représentée en base orthonormale par (1) ou (-1).
Cas $n = 2$: u est une isométrie du plan et peut donc être représentée en base orthonormale par

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Supposons la propriété établie jusqu'au rang n avec $n \geq 2$.
Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$ et $u \in O(E)$. Il existe une droite ou un plan F stable par u et $F^\perp$ est alors aussi stable par u. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale de $F^\perp$ telle que la matrice de u dans celle-ci soit de la forme voulue. Par l'étude initiale, il existe une base orthonormale de F telle que la matrice de u dans celle-ci soit de la forme voulue. En accolant ces deux, on forme une base orthonormale de E comme voulue. Récurrence établie. □

2.8.4 Réduction des isométries positives en dimension 3.

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

Orientation induite.

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace E et $D = \mathcal{P}^\perp$ sa droite normale.
Il n'existe pas a priori d'orientation préférentielle ni sur $\mathcal{P}$, ni sur D. Choisissons une orientation sur D et soit u vecteur unitaire direct de D: on dit alors que D est un axe.
Complétons u en une base orthonormale directe (u, v, w) de E. La famille (v, w) est une base orthonormale de $\mathcal{P}$. En choisissant celle-ci pour base orientée de référence, on dit qu'on a muni le plan $\mathcal{P}$ de l'orientation induite de celle de D. En effet, on peut montrer que cette orientation est indépendante de la manière dont on a complété u en une base orthonormée directe.

Remarque 2.8.22. *Si l'on inverse l'orientation sur D, l'orientation induite sur $\mathcal{P}$ est, elle aussi, inversée.*

Rotation de l'espace.

Une isométrie positive f de E autre que l'identité peut être représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormale (u, v, w). Quitte à changer en son opposé le premier vecteur de base, on peut supposer la base orthonormale (u, v, w) directe.
On introduit alors la droite $D = \mathrm{Vect}(u)$ et le plan $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(v, w)$ orienté par le vecteur normal u. Pour $x \in E$, on peut écrire

$$x = p_D(x) + p_{\mathcal{P}}(x) \text{ avec } p_D(x) \in D \text{ et } p_{\mathcal{P}}(x) \in \mathcal{P}$$

et alors

$$f(x) = p_D(x) + \mathrm{Rot}_\theta(p_{\mathcal{P}}(x)).$$

Définition 2.8.23. *On dit alors que f est la rotation d'axe dirigé et orienté par u et d'angle θ. On la note $Rot_{u,\theta}$.*

Proposition 2.8.24.

1. $\forall\theta,\ \theta' \in \mathbb{R},\ Rot_{u,\theta} = Rot_{u,\theta'} \Leftrightarrow\ \theta = \theta'[2\pi]$.
2. $\forall\theta,\ \theta' \in \mathbb{R},\ Rot_{u,\theta} \circ Rot_{u,\theta'} = Rot_{u,\theta+\theta'} = Rot_{u,\theta'} \circ Rot_{u,\theta}$.
3. $\forall\theta \in \mathbb{R},\ Rot_{u,\theta}^{-1} = Rot_{u,-\theta}$.

Exemple 2.8.25. *Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Déterminons l'endomorphisme f de E de matrice dans $\mathcal{B}$.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est orthogonale et $detA = 1$ donc f est une rotation autre que l'identité.
Axe D:
L'axe D est formé des vecteurs invariants par f. Pour $u = xi + yj + zk$, on a

$$f(u) = u \Leftrightarrow x = y = z.$$

Par suite $D = Vect(i + j + k)$. Orientons D par le vecteur $u = i + j + k$. Angle θ de la rotation : On a $tr(f) = 2\cos\theta + 1$ or $tr(f) = tr(A) = 0$ donc $\cos\theta = -\frac{1}{2}$.
Pour conclure, il reste à déterminer le signe de $\sin\theta$.
Soit $x = \alpha u + \beta v + \gamma w \notin D$. On a

$$[u, x, f(x)] = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta & \beta\cos(\theta) - \gamma\sin(\theta) \\ 0 & \gamma & \beta\sin(\theta) + \gamma\cos(\theta) \end{vmatrix} = (\beta^2 + \gamma^2)\sin(\theta)$$

Ainsi, le signe de $\sin(\theta)$ est celui de

$$[u, x, f(x)]$$

En pratique, on détermine le signe de $\sin(\theta)$ en étudiant celui de

$$[u, i, f(i)].$$

Ici

$$[u, i, f(i)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Donc

$$\theta = \frac{2\pi}{3}[2\pi].$$

Finalement, f est la rotation d'axe D dirigé et orienté par $u = i + j + k$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.