Chapitre3 : Variables aléatoires

HDHIRI I.

Généralités

On appelle variable aléatoire (v.a en abgégé) tout nombre réel aléatoire, c'est-à-dire dont la valeur dépend du résultat d'une expérience aléatoire.
Par convention, les variables aléatoires sont en général notées avec des lettres capitales (X, Y, T, $etc.$).

Exemple : On lance un dé *parfait*. Soit X le résultat obtenu. Ici X est une variable aléatoire et les valeurs possibles de X sont 1; 2; 3; 4; 5; 6.
On considère les événements

$$''X = 1''; \; ''X = 2''; \; \ldots ; ''X = 6''.$$

On a

$$P(''X = 1'') = P(''X = 2'') = \ldots = P(''X = 6'') = \frac{1}{6}.$$

Pour noter les événements relatifs à une variable aléatoire X, on utilise souvent des crochets : $[X = 1]$; $\mathbb{P}[X \geq 2]$ ou encore des parenthèses $\mathbb{P}(X = 1) \ldots$

Support d'une v.a.

Le support d'une variable aléatoire est l'ensemble des ses valeurs possibles. On le notera $X(\Omega)$ ou $S(X)$.
Exemple 1 : X est le résultat d'un lancer de dé. Le support de X est $X(\Omega) = \{1, 2, \ldots 6\}$.
Exemple 2 : X le nombre de clients à un guichets. On a $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots\} = \mathbb{N}$.
Exemple 3 : X est la moyenne d'un étudiant de LFSI 2 choisi au hazard. On a $X(\Omega) = [0, 20]$.
$\Rrightarrow$ On a trois types de support : fini, infini dénombrable et infini non dénombrable.

Fonction de répartition d'une v. a.

Definition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ par : $\forall t \in \mathbb{R}$,

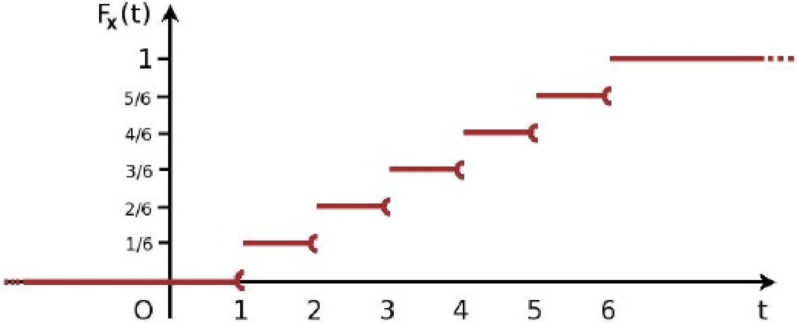
$$F_X(t) = P(X \leq t).$$

Autrement dit, c'est la probabilité de l'événement "la valeur de X est inférieure ou égale à t".

Proposition

La fonction F_X est une fonction croissante qui vérifie $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.

Exercice : Tracer la fonction de répartition de la v.a. X associée au lancer d'un dé parfait.


$F_X(t)$
1
5/6
4/6
3/6
2/6
1/6
O
1
2
3
4
5
6
t

I- Variables aléatoires discrètes (v.a.d. en abrégé)

Definition

Une v.a. est dite discrète si son support est fini ou dénombrable.

Loi d'une variable discrète. Donner la loi d'une variable aléatoire discrète X revient à calculer les probabilités $P(X = x)$ pour tous les x appartenant au support de X.

Exemple: Soit X la v.a. associée au résultat du lancer d'un dé parfait. La loi de X est donnée par le tableau suivant:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Cas équiprobable

Lorsque toutes les probabilités formant la loi de X sont égales, comme dans l'exemple du dé, on parle de loi uniforme. C'est l'exemple le plus simple de variable aléatoire.

Definition

On dit que la variable X suit la loi uniforme sur $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ lorsque $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ et que $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Les événements élémentaires

Les événements $[X = x]$ considérés pour tous les x appartenant à $X(\Omega)$, forment une partition de Ω. Par conséquent la somme totale des $P(X = x)$ doit toujours être égale à 1, ce qui s'écrit, en notant S le support de X,

$$\sum_{x \in S} P(X = x) = 1.$$

De plus ces événements $[X = x]$ sont les événements élémentaires de la variable X, au sens où tout événement relatif à X s'exprime comme une union de ces événements, et sa probabilité est la somme des $P(X = x)$ correspondants.

Exemple Soit X la v.a. associée au résultat du lancer d'un dé parfait
On pose A:'Obtenir un nombre pair' et B:'obtenir un nombre plus grand que 4'.
On a : $A = [X = 2] \cup [X = 4] \cup [X = 6]$ et
$P(A) = P[X = 2] + P[X = 4] + P[X = 6] = \frac{3}{6}$
et $B = [X = 5] \cup [X = 6]$ et $P(B) = P[X = 5] + P[X = 6] = \frac{2}{6}$

Rappel

- Une série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est dite convergente si les sommes $\sum_{n=0}^{N} a_n$ convergent lorsque N tend vers $+\infty$, et on note alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

- Une série$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est dite absolument convergente si $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ est une série convergente. Dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente, et de plus il est permis de sommer les termes *an* dans n'importe quel ordre :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0+a_1+a_2+a_4+\ldots = a_3+a_{10}+a_8+a_4+a_7+\ldots$$

.

L'indice utilisé sous la somme est "muet". On peut donc le remplacer par n'importe quelle autre lettre : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i$

Décalage d'indices :

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ (on prend } k = i+1)$$

D'où

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i+1} = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i.$$

Serie géométrique:

- Si $x \neq 1$; $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
- Si $|x| < 1$; $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Espérance d'une v.a.d

Definition

L'espérance ou la moyenne d'une v.a.d. X est donnée par

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} xP[X = x],$$

si la dernière serie est absolument convergente

Si $Y = h(X)$, alors $\mathbb{E}[Y] = \sum_{x \in X(\Omega)} h(x)P[X = x]$.

Definition

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.Les moments centrés d'ordre k d'une v.a.d X (s'ils existent) sont définis par

$$\mathbb{E}[X^k] = \sum_{x \in X(\Omega)} x^k P[X = x]$$

Propriétés de l'éspérance

Soient X, Y deux v.a.d. et $a, b \in \mathbb{R}$. On a

- $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}[a] = a$
- $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$
- Si $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$

Variance

Definition

La variance d'une v.a.d. X (si elle existe) est donnée par

$$Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Exemple : $X(\Omega) = \{0, 1\}$, $P[X = 1] = p$ et $P[X = 0] = 1 - p$, avec $0 < p < 1$.
On a

$$\mathbb{E}[X] = 0.P[X = 0] + 1.P[X = 1] = p$$

,

$$\mathbb{E}[X^2] = 0^2.P[X = 0] + 1^2.P[X = 1] = p$$

D'où $Var(X) = p - p^2 = p(1 - p)$.

I- Variables aléatoires continues

Definition

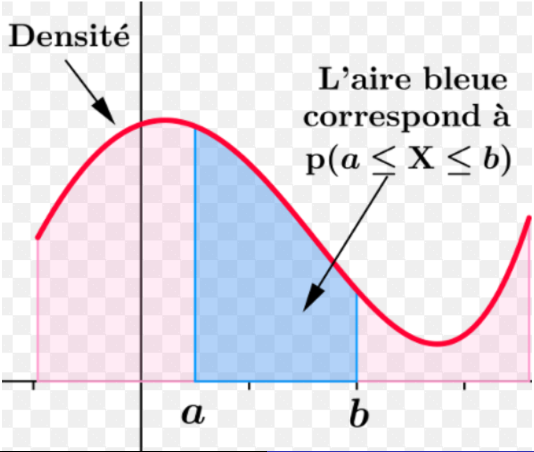
Une variable aléatoire X est dite continue ou à densité lorsqu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie : pour tous $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a \leq b$, on a

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

La fonction f est dite densité de la v.a. X.

Remarque

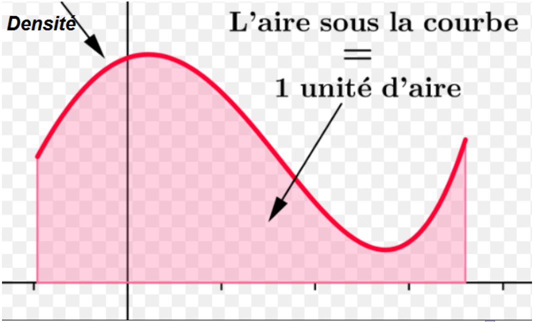
La probabilité $P(a \leq X \leq b)$ correspond à l'aire du domaine situé sous le graphe de f entre les abscisses a et b.



.

Remarque

- *Déterminer la loi d'une variable à densité revient à calculer sa densité.*
- *On a* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$



Proposition

On a pour toute v.a. à densité X et tout réel a,

$$P[X = a] = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Ainsi $P[X \leq a] = P[X < a]$

Loi uniforme continue

Exercice: Soit X une v.a. de densité

$$f(x) = \begin{cases} k, & \text{si } x \in [a, b] \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $a < b$ et k une constante réelle. Déterminer la valeur de k

- La fonction f est positive, alors $k \geq 0$
- On a $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = k[b-a]$.
  D'où $k = \frac{1}{b-a}$.

On dit que X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ et on note $X \sim \mathcal{U}[a, b]$.

Fonction de répartition d'une v.a. à densité: Soit X une v.a. de densité f, sa f.d.r. est définie par

$$F_X(t) = P[X \leq t] = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx; \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi F_X est la primitive de f ou f est la dérivée de F_X.
Exemple: Si $X \sim \mathcal{U}[a, b]$, alors

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Espérance d'une v.a. continue: Soit X une v.a. de densité f.

Definition

L'éspérance de$X$ est définie par :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

lorsque la dernière quantité a un sens.

Pour une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a:

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)dx$$

Definition

La variance de X est définie par

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

Soient X, Y deux v.a.continues et $a, b \in \mathbb{R}$. On a

- $\mathbb{E}[a] = a$
- $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$
- Si $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$
- Var(a)=0
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

On s'intéresse au calcul de probabilités d'événements faisant intervenir plusieurs variables aléatoires qui ne sont pas nécessairement indépendantes. L'idée fondamentale est qu'il ne suffit pas de connaître les lois de toutes les variables pour calculer de telles probabiltés.

Definition

Le support d'un couple aléatoire $(X; Y)$ est l'ensemble des valeurs prises par le couple $(X; Y)$, c'est-à-dire l'ensemble des couples de valeurs prises par X et Y . On le note $S(X; Y)$, et il est donc égal à $S(X) \times S(Y)$.

Loi d'un couple de v.a.discrètes. :

Definition

La loi jointe du couple (X, Y) est la donnée $S(X; Y)$ et pour chacune des valeurs x de X et y de Y la donnée de la probabilité $P\left(X = x \cap Y = y\right) = P\left(X = x, Y = y\right)$

Les loi de X et Y sont dites lois marginales.

Proposition

Les loi marginales de X et Y sont respectivement données par:

- $\forall x \in X(\Omega),\ P[X = x] = \sum_{y \in Y(\Omega)} P\left(X = x, Y = y\right)$
- $\forall y \in Y(\Omega),\ P[Y = y] = \sum_{x \in X(\Omega)} P\left(X = x, Y = y\right)$.

on utilise le fait que $[Y = y]_{y \in Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements (partition de Ω) ainsi $[X = x]_{x \in X(\Omega)}$.

Definition

Les v.a. X et Y sont dites indépendantes si pour tous $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ dont indépendants.

Dans ce cas, on a :

$$P[X = x, Y = y] = P[X = x]P[Y = y].$$

Definition

- La loi conditionnelle de X sachant que $Y = y$ est donnée par: $\forall x \in X(\Omega)$,
$$P_{[Y=y]}[X = x] = P[X = x|Y = y] \text{ si } P[Y = y] > 0.$$
- La loi conditionnelle de Y sachant que $X = x$ est donnée par: $\forall y \in Y(\Omega)$,
$$P_{[X=x]}[Z = y] = P[Y = y|X = x] \text{ si } P[X = x] > 0.$$

Remarque

- $(X = Y) = \bigcup_{i \in I} (X = i, Y = i)$ *l'ensemble* I *étant déterminé par la double contrainte que* $(X = i)$ *et* $(Y = i)$ *soient simultanément possibles.*
- $[X + Y = k] = \bigcup_{i \in I} [X = i, Y = k - i]$ *avec comme contraintes :* $i \in X(\Omega)$ *et* $k - i \in Y(\Omega)$
- $[X \leq Y] = \bigcup_{i \in I} (X = i, Y \geq i)$ *avec* $i \in X(\Omega)$ *et* $k - i \in Y(\Omega)$

Exemple: Soient (X, Y) un couple de v.a. vérifiant $S(X,Y) = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ et

$$\begin{aligned} P[X=0, Y=0] &= P[X=1, Y=0] = \frac{1}{8} \\ P[X=0, Y=1] &= P[X=1, Y=1] = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

1. Donner les loi marginales de X et Y.
2. Calculer $P[X=Y]$, $P[X<Y]$ et $P[X \geq Y]$
3. Les v.a. X et Y sont elles indépendantes?
4. Calculer $E[XY]$

Calcul d'éspérance: Soit f une fonction à valeur réelle, l'éspérance de $f(X,Y)$ si elle existe est donnée par:

$$E[f(X,Y)] = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x,y) P(X = x, Y = y).$$

Definition

- La covariance de X et Y est donnée par :

$$Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))] = E[XY]-E[X]E[Y].$$

- Le coefficient de corrélation entre X et Y est donné par :

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

- Si X et Y sont indépendantes, alors on a $E[XY] = E[X]E[Y]$, ce qui implique que $Cov(X,Y) = 0$.
- Le coefficient de corrélation est toujours compris entre -1 et 1.
- V(X+Y) = Var(X) + Var(Y)+2 Cov(X,Y).