100% CONCOURS PRÉPAS

EL-HAJ LAAMRI • PHILIPPE CHATEAUX • GÉRARD EGUETHER
ALAIN MANSOUX • DAVID RUPPRECHT • LAURENT SCHWALD

TOUS LES EXERCICES D'ANALYSE PC-PSI

Pour assimiler le programme, s'entraîner et réussir son concours

- Rappels de cours et exercices d'assimilation
- Plus de 300 exercices dont la majorité est issue d'oraux de concours récents
- Solutions complètes et détaillées

EdiScience

TOUS LES EXERCICES D'ANALYSE PC-PSI

Pour assimiler le programme, s'entraîner
et réussir son concours

TOUS LES EXERCICES D'ANALYSE PC-PSI

Pour assimiler le programme, s'entraîner et réussir son concours

El-Haj Laamri
Agrégé en mathématiques et maître de conférences à Nancy-Université

Philippe Chateaux
Agrégé en mathématiques et professeur en MP au Lycée Henri Poincaré à Nancy

Gérard Eguether
Maître de conférences à Nancy-Université

Alain Mansoux
Agrégé en mathématiques et professeur en PC au Lycée Henri Poincaré à Nancy

David Rupprecht
Agrégé de Mathématiques et professeur en PSI au Lycée Henri Loritz à Nancy

Laurent Schwald
Agrégé en mathématiques et professeur en CPGE au lycée Henri Poincaré à Nancy

EdiScience

Consultez nos parutions sur dunod.com

Couverture : *Claude Lieber*

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

ISBN 978-2-10-053963-5

Présentation de la série « Tous les exercices de mathématiques »

L'évolution récente de l'enseignement des disciplines scientifiques dans les C.P.G.E s'est concrétisée par la définition d'un nouveau programme de première année en 2003 et de deuxième année en 2004. Un des objectifs de cette évolution a été de combler le fossé grandissant entre la classe de terminale et les classes préparatoires. La progression est explicitement imposée par le nouveau programme qui prévoit notamment « un programme de début de l'année », qui exclut la présentation abstraite des concepts au profit d'une démarche fondée sur l'exemple comme point de départ de la conceptualisation, qui préconise l'approche algorithmique en complément de l'approche démonstrative et qui légitime la démarche expérimentale en mathématiques par l'utilisation des logiciels Maple ou Mathematica, logiciels systématiquement utilisés dans de nombreux concours, notamment dans le concours commun « Centrale - Supelec ». Mais les programmes des classes préparatoires ne sont pas les seuls à avoir évolué, les programmes de l'enseignement secondaire ont fait l'objet d'une évolution préalable. Enfin, l'attitude nouvelle des élèves face aux disciplines scientifiques rend inefficace l'approche axiomatique et leur appropriation grandissante de l'outil informatique nécessite d'intégrer cet outil à la pédagogie. L'ensemble de ces changements rend impérative la rédaction de nouveaux ouvrages.

On constate que c'est davantage la structure, l'ordre des thèmes abordés, l'esprit du programme qui ont évolué, le fond étant resté relativement stable. Sur ce fond, que nous n'avons pas la prétention de renouveler, il existe déjà une abondante et excellente littérature ; nous revendiquons une continuité par rapport à nos illustres prédécesseurs et nous nous sommes largement inspirés de leurs écrits pour y puiser exercices et sujets en nous efforçant de les présenter en parfaite cohérence avec l'esprit du programme actuel. Car cette nouvelle collection répond à une nécessité : entièrement rédigée après la parution des nouveaux programmes et le début de leur mise en oeuvre, elle garantit une parfaite compatibilité entre la rédaction des ouvrages et les préconisations du programme… ce que n'aurait pu assurer sans risque d'anomalies une simple remise en forme d'une rédaction antérieure. Tous les ouvrages de cette collection sont écrits trois ans après l'apparition des nouveaux programmes et en respectent scrupuleusement l'esprit.

Les rédacteurs, ont enseigné et interrogé dans le cadre de l'ancien et du nouveau programme. Ils perçoivent donc parfaitement l'importance de l'évolution. Leur expérience de l'enseignement en classes préparatoires et à l'Université, leur intervention régulière en « colles », leur participation aux concours comme interrogateurs à l'oral et/ou correcteurs à l'écrit permettent d'affirmer qu'il s'agit d'équipes très

« professionnelles ». L'équilibre entre la pluralité des approches qui enrichit le fond et la cohérence de la forme qui renforce l'efficacité est le résultat d'un véritable travail collaboratif, d'une maîtrise d'oeuvre rigoureuse et de sources d'inspiration précieuses… citons particulièrement pour les exercices d'oral la Revue de Mathématiques Spéciales, l'Officiel de la Taupe et les Archives des Professeurs de Spé du Lycée Henri Poincaré de Nancy en particulier celles constituées par Walter APPEL.

Cette collection a l'ambition de faire bénéficier le lecteur de l'expertise professionnelle des rédacteurs, chaque ouvrage est donc rédigé avec un souci de rigueur et de clarté au service de la pédagogie, souci qui s'exprime dans quelques principes :

– La qualité de rédaction aboutie exigée des élèves nécessite que les auteurs soient eux-mêmes exemplaires dans leur rédaction, aussi bien celle des énoncés que celle des corrigés. Un soin tout particulier est apporté à l'écriture des éléments « logiques » : précis et sans ambiguïté , le style traduit explicitement les connexions logiques, implication, nécessité, suffisance, etc. dans un souci permanent de rendre explicite ce qui, ailleurs, reste parfois implicite.

– Les corrigés proposés sont toujours complets et commentés quand il le faut, en privilégiant les solutions méthodiques et raisonnables aux approches « astucieuses » et « miraculeuses ». L'expérience prouve en effet qu'un corrigé trop « brillant » inquiète l'élève qui se sent incapable de la même performance et ne lui apprend rien de la démarche constructive qui peut amener à une solution lorsqu'on possède une maîtrise suffisante des concepts. L'expérience montre aussi la vertu du contre-exemple… il en est fait un usage courant.

– La présence de rappels de cours synthétiques est nécessaire pour replacer les exercices dans leur contexte théorique sans avoir à quitter l'ouvrage en cours de lecture, pour fixer aussi quelques notations choisies parmi les standards. Mais ces éléments de cours ne se substituent en rien à l'enseignement magistral ou aux ouvrages de référence, ils constituent seulement un « minimum conceptuel » immédiatement disponible pour aider la compréhension des exercices qui restent la matière essentielle de l'ouvrage.

– La volonté de respecter l'esprit des nouveaux programmes privilégie la présentation de sujets récents (de 2003 à 2006) en respectant scrupuleusement la forme de leur rédaction : aucun toilettage rédactionnel ne doit en masquer l'originalité, voire la difficulté. Le respect du lecteur exige sa mise en situation réelle de concours. Toutefois ces énoncés sont commentés et expliqués pour rassurer le lecteur en lui montrant que sous des traits parfois déroutants on peut retrouver des « visages connus ». Certains exercices proposés aux concours avant 2003 figurent également dans cette collection en raison de leur intérêt ; ils sont alors rédigés sous une forme compatible avec le programme actuel.

Si ces principes généraux sont respectés dans l'ensemble de la collection, la plus grande maturité des élèves de deuxième année justifie quelques différences entre les ouvrages de première et de deuxième année. L'élève de première année peut avoir des difficultés à choisir seul, avec discernement, des sujets d'écrits dans les annales. Les ouvrages de première année présentent donc une sélection d'extraits de problèmes d'écrits. L'élève de deuxième année, plus mûr, est capable de trouver lui-même des sujets d'écrit, les ouvrages de deuxième année n'en présentent donc pas. Cette plus grande maturité explique aussi le choix qui a été fait de présenter en deuxième année un bon tiers des exercices d'oral dans leur rédaction d'origine, sans commentaires explicatifs, pour placer l'élève au plus près de la situation réelle du concours ; bien entendu, le corrigé est toujours rédigé clairement, avec toutes les indications et tous les commentaires que nécessite leur compréhension. L'objectif essentiel est le respect des élèves que l'on met dans une situation proche de celles des concours tout en les guidant dans la correction. Il semble également que des ouvrages spécifiques suivant les programmes (MP-MP*, PC-PC* et PSI-PSI*) soient justifiés en Mathématiques Spéciales alors qu'ils ne le sont pas en premier semestre de Mathématiques Supérieures. Mais, quels que soient les ouvrages, les auteurs ont réalisé un travail de sélection important parmi la multitude d'exercices disponibles pour proposer ceux qu'ils considèrent comme les plus significatifs : certains sont sélectionnés pour leur intérêt pédagogique, leur généralité, leurs déclinaisons possibles etc., d'autres sont présentés essentiellement pour donner une idée fidèle de « l'état de l'art actuel » des exercices d'oral et faire l'objet de commentaires au profit des futurs candidats.

On aura compris que les ouvrages de cette collection sont avant tout au service des élèves pour lesquels elle constitue un véritable outil pédagogique d'apprentissage et d'entraînement en vue des concours. Ces ouvrages devraient également convaincre les élèves de l'étendue des points abordés dans les sujets d'oral et d'écrit, qui couvrent réellement les programmes de première et de deuxième année. Mais les enseignants des C.P.G.E pourront aussi utiliser cette collection comme support de travaux dirigés et comme référence. Enfin, les examinateurs disposeront avec cette collection d'exemples de vrais sujets d'oraux donnés récemment ; les commentaires qui en sont faits pourront inspirer leur propre démarche pour une évaluation efficace et progressive des candidats.

Pour conclure cette présentation, on me pardonnera d'utiliser un ton plus personnel. Maître de conférences et agrégé en Mathématiques, j'ai souhaité partager plusieurs années d'expérience en assurant la maîtrise d'oeuvre des ouvrages de cette collection. Quinze années de participation à différents concours en tant que correcteur d'écrit et examinateur d'oral, m'ont permis de bien connaître la littérature existante et de bien observer l'évolution de l'attitude des élèves qui sont soumis, toujours davantage, à des sollicitations nombreuses et diverses, sollicitations qui ne facilitent pas la concentration et peuvent, parfois, les gêner dans la maîtrise de l'ensemble des techniques. La nécessité ressentie d'ouvrages adaptés, l'enthousiasme face à l'idée de les rédiger, l'impossibilité de réaliser seul un tel travail, m'ont conduit à réunir des équipes de rédaction et à assurer la maîtrise d'oeuvre du projet tout en participant activement à l'écriture. Au delà de l'ambition de réaliser un travail de qualité, il s'agit d'une expérience humaine inoubliable.

Trois personnes ont contribué à la réalisation de ce projet et je souhaite, au sens propre, leur donner le dernier mot : merci.

Merci à Eric d'Engenières, responsable d'édition chez Dunod, qui m'a accordé sa confiance, a su m'encourager par la qualité de nos échanges et a pu me guider par des conseils et suggestions toujours formulés de manière chaleureuse.

Merci à Hervé Coilland, directeur de l'I.U.T Nancy-Charlemagne et Vice-Président de l'Université Nancy 2 qui a toujours trouvé le temps pour des discussions amicales au cours desquelles se précisent les objectifs, s'échangent les idées et s'affinent quelques points de rédaction.

Merci, infiniment, à Nezha, ma femme, qui accepte que beaucoup de temps soit consacré à ce projet, qui préserve autour de moi le calme nécessaire à une entreprise rédactionnelle, qui m'encourage et me conseille dans les phases les plus critiques et dont l'amour est un soutien permanent.

Nancy, le 15 février 2007
El-Haj LAAMRI

Avant-propos

Ce livre couvre le programme d'Analyse de deuxième année PC et PSI et poursuit la démarche rédactionnelle entamée avec les ouvrages de première année. Comme pour l'ensemble de la collection, le respect du programme officiel est un principe que nous avons suivi à la lettre. Ainsi, chaque exercice et chaque rappel de cours faisant appel à une notion qui n'est pas commune aux programmes de PC et PSI sont signalés de façon explicite. Par ailleurs, le programme prévoit la reprise et l'approfondissement en deuxième année de certains points abordés en première année : suites numériques, fonctions réelles d'une variable réelle, intégration sur un segment. Nous avons mis à profit cette possibilité pour que le présent ouvrage, tout en étant sans ambiguïté destiné aux élèves de deuxième année, présente trois chapitres utilisables en première lecture dès le deuxième semestre de première année et pour les « révisions estivales » entre la première et la deuxième année.

Les premiers chapitres traitent des suites numériques et des fonctions réelles d'une variable réelle. Ces notions déjà détaillées dans l'ouvrage de première année sont complétées ici par des exercices d'oral de 2007 et par des sujets nécessitant une maturité qu'on ne peut attendre au premier semestre de la première année. L'intégration sur un segment présente un large choix d'exemples de calculs d'intégrales ainsi que la mise en œuvre des propriétés de l'intégrale (essentiellement les inégalités) et l'étude de fonctions définies par une intégrale. Ce chapitre permet de réviser et d'approfondir le programme de première année tout en donnant une vue réaliste des exercices donnés à l'oral. Dans les chapitres sur les séries numériques, séries de fonctions, séries entières, séries de Fourier, nous insistons sur les méthodes et non sur les solutions astucieuses… souvent peu reproductibles. De même dans les chapitres concernant l'intégration sur un domaine non compact, nous avons privilégié la méthode et la comparaison des outils. Par la ressemblance de leurs conclusions (mais non de leurs conditions d'application) certains théorèmes sont source de confusion : convergence uniforme, convergence normale, convergence dominée et corollaire, convergence des séries entières. Exemples et contre-exemples posent des points de repères pour éviter les confusions. Ensuite, dans la présentation des espaces vectoriels normés, nous avons tenu compte de l'appréhension, voire du malaise, que l'expérience nous a fait constater chez les élèves. Nous avons abordé ces notions en les mettant en œuvre dans un contexte familier et bien maîtrisé par les élèves (espaces de matrices et espaces de fonctions numériques continues sur un segment). Les équations différentielles linéaires constituent un chapitre très riche qui fait appel à un ensemble de connaissances débordant largement le cadre du chapitre. La partie consacrée à l'assimilation propose une révision puis un inventaire technique avec des exercices de mise en œuvre directe. La synthèse et l'approfondissement font le lien avec la technique et l'ouverture vers des notions plus étendues et plus générales. Clarification et points de repères nous ont semblé, là aussi, nécessaires. Enfin, même si les sujets concernant les équations différentielles non linéaires proviennent essentiellement des concours les plus « prestigieux », nous avons fait un effort particulier de rédaction pour les rendre abordables à tous les élèves et donner une occasion d'entraînement à l'écrit. Dans le chapitre consacré au calcul différentiel, nous avons tout d'abord rappelé les définitions essentielles, puis nous avons présenté de nombreux exemples d'application à la recherche d'extrema et à la résolution d'équations aux dérivées partielles. Le dernier chapitre est consacré aux calculs d'intégrales multiples et curvilignes, nous avons notamment insisté sur l'importance du paramétrage du domaine d'intégration et sur les techniques de changement de variables.

Les premiers chapitres, par leur contenu et leur structure, marquent la transition entre les principes rédactionnels et pédagogiques propres aux ouvrages de première année et ceux utilisés pour les ouvrages de deuxième année. En première année, nous avions choisi de présenter et d'illuster de façon linéaire chaque nouvelle notion l'une après l'autre. Nous nous adressions alors à des lecteurs sortant des classes terminales et encore peu autonomes dans leur approche. En deuxième année, nous avons choisi de présenter globalement l'essentiel des notions d'un chapitre puis de progresser par étapes vers une compréhension et une maîtrise de plus en plus approfondies. Chaque chapitre (sauf les deux premiers) est donc constitué de trois parties :

– une présentation synthétique de l'essentiel du cours suivie d'exercices d'assimilation immédiate, dans lesquels chaque nouvelle notion est testée, sans complication inutile à ce niveau, dans un contexte qui permet d'identifier clairement une et une seule difficulté et de la résoudre, en respectant une sorte de « règle des trois unités » : un exercice, une difficulté, une solution ;
– des exercices d'entraînement dont la rédaction progressive et le découpage en questions ont pour objectif d'amener le lecteur à la compréhension en le confrontant de façon progressive aux difficultés propres à la notion étudiée ;
– des exercices d'approfondissement destinés à mettre l'élève en situation de concours , avec la nécessité pour lui de faire preuve de compréhension, d'initiative, d'intuition et de maîtrise technique.

La lecture d'un tel chapitre n'est donc plus nécessairement linéaire. La structure est parfaitement adaptée à des lecteurs de niveaux variés qui pourront éventuellement passer directement à une forme d'auto-évaluation en se concentrant sur les exercices d'approfondissements ou, au contraire, progresser pas à pas avec les exercices d'assimilation.

Si les élèves de deuxième année ont pu gagner en autonomie, il n'en reste pas moins que leurs niveaux de compétence et de compréhension restent très hétérogènes. Ainsi, entre des « 3/2 » qui découvrent le programme pour la première fois et n'ont encore été confrontés à aucun concours, des « 5/2 » qui ont déjà étudié le programme mais ont échoué à leur première expérience et des « 5/2 » déjà admis à des concours mais dont l'ambition les amène à viser encore plus haut, les différences sont très fortes. Ce sont ces différences, constatées en particulier lors des séances de « colles », qui nous ont amenés à cette rédaction permettant plusieurs niveaux de lecture et d'utilisation de l'ouvrage.

Entre les chapitres eux-mêmes, le programme de deuxième année n'impose pas d'ordre ni de découpage, contrairement au programme de première année. Cette liberté nous a permis de choisir une progression qui nous semblait la plus adaptée et la plus équilibrée. Chaque étape présente un nombre de notions nouvelles acceptable pour une perception d'ensemble compatible avec la structure des chapitres. Il n'y a pas que la hauteur des étages qui fait la difficulté d'un escalier : la hauteur acceptable des marches et leur régularité peut faciliter l'ascension... Nous avons donc retenu une progression qui nous semble adaptée, sans affirmer pour autant que d'autres progressions sont à rejeter. Notre diversité d'expérience, avantage de la rédaction collective, nous amène d'ailleurs à utiliser différentes progressions dans nos pratiques d'enseignement. Il reste ensuite le choix le plus difficile : face à l'infinité d'exercices possibles et au temps fini dont disposent les élèves pour préparer les concours, que proposer ? Quelques principes ont guidé notre sélection :

– respecter le parti-pris de progressivité en donnant des exercices qui permettent d'assimiler, puis de s'entraîner et enfin d'approfondir ;
– donner une vue précise et réaliste d'exercices qui « tombent à l'oral » en s'appuyant en particulier sur une veille attentive des sujets donnés à l'oral dans plusieurs concours depuis plusieurs années ;
– privilégier les exercices « génériques » dont la maîtrise donne les clefs de nombreux exercices (comme il avait déjà été annoncé en avant-propos des ouvrages de première année : habituer les élèves à reconnaître les « visages connus » sous leurs différentes apparences) ;
– profiter du « nomadisme » des exercices constaté entre des concours différents et ne pas hésiter à proposer un sujet de MP si son intérêt pédagogique le justifie, sachant que ce même sujet peut apparaître plus tard en PC ou PSI...
– convaincre les élèves que les oraux couvrent tout le programme des deux années (le théorème des accroissements finis, par exemple, pose beaucoup de problèmes aux élèves qui doivent l'utiliser à l'oral).

Pour éviter l'arbitraire des préférences personnelles lors d'une rédaction collective, une référence incontestable et « objective » est nécessaire : nous avons choisi pour référence la réalité des exercices donnés à l'oral, principalement depuis 2004, date d'application du nouveau programme. Mais ces exercices ont pour objectif le « classement » des élèves et non leur formation. Dans un ouvrage d'apprentissage quotidien, certaines retouches se sont avérées nécessaires : lorsqu'ils utilisent ce livre, les élèves sont en cours de formation et pas encore en concours ! Notre expérience d'enseignants d'abord, de « colleurs » ensuite, d'examinateurs enfin, nous a permis d'observer en situation réelle, dans différentes classes, les élèves face à ces exercices... ce qui nous a convaincus de la nécessité d'en faire évoluer la rédaction pour qu'ils passent du statut d'exercice d'oral au statut d'exercice pédagogique. Notre expérience nous a permis cette adaptation sans, en aucune manière, dénaturer ces exercices. La rédaction retouchée de certains exercices répond à la fois à un objectif pédagogique et psychologique. Objectif pédagogique de guider l'élève par une rédaction détaillée qui fasse apparaître de façon explicite les difficultés et les techniques à maîtriser. Objectif psychologique de rassurer l'élève en l'amenant à résoudre seul une majorité de questions en favorisant ainsi le développement de son autonomie. Si un sujet a été donné à plusieurs concours, nous avons toujours choisi la version qui nous semblait la plus pédagogique, la plus détaillée. Nous avons également regroupé certains énoncés d'oral qui nous semblaient complémentaires ou permettaient de donner un aperçu des sujets régulièrement abordés à l'écrit. Quant aux éléments de cours, chacun sait que ce qui est élégamment écrit dans un cours à la rédaction parfaite n'est pas toujours aussi clair dans l'esprit des élèves... et nous n'avons pas hésité, parfois, à sacrifier l'élégance de la rédaction à la redondance lorsque cette dernière nous permettait de rendre explicites des notions souvent restées implicites.

C'est en premier lieu aux élèves des classes préparatoires MP, MP*, PC1, PC2 et PC* du Lycée Henri Poincaré et PSI et PSI* du Lycée Henri Loritz de Nancy que nous adressons, collectivement, nos remerciements. Ils ont en effet largement contribué par leurs réactions, leurs questions, leurs erreurs et leur compréhension à guider nos efforts de présentation des exercices, de clarification des questions, de simplification des corrigés.

Toujours aussi enthousiasmante cette aventure rédactionnelle est aussi une aventure humaine dans laquelle nous avons été aidés.
Aidés matériellement par l'Institut Elie Cartan de Nancy qui nous a permis d'utiliser ses moyens informatiques et ses ressources documentaires.
Aidés par l'IREM qui nous a donné un accès privilégié à ses ressources documentaires, ainsi que par l'I.U.T Nancy-Charlemagne dont la bibliothèque nous a toujours reçus avec sourire et efficacité.
Aidés également par le Lycée Henri Poincaré de Nancy qui nous a accueillis chaque samedi matin, de septembre à mars, dans une salle équipée de moyens informatiques.

Aidés aussi par deux collègues de l'Institut Elie Cartan, Julien Chenal et Yannick Privat, qui ont lu une partie du manuscrit.

Aidés enfin par trois collègues du Lycée Henri Poincaré, Gilles Demeusois, Michel Eguether et Edouard Lebeau qui nous ont lus en détail et dont les remarques ont sensiblement amélioré le présent ouvrage.
Que tous soient sincèrement remerciés.

Il est inévitable que certaines erreurs aient échappé à la vigilance de tous ceux qui ont lu cet ouvrage. Nous en assumons seuls la responsabilité et nous espérons que ceux qui en découvriront voudront bien nous faire part de leurs remarques à l'adresse suivante Elhaj.laamri@iecn.u-nancy.fr.

Enfin, si dans cette aventure humaine certaines personnes nous ont aidés, il en est sans qui rien n'aurait été possible. Nos compagnes, par leur infinie patience, leur soutien sans faille et leur attentive présence ont joué un rôle essentiel dans l'aboutissement de ce projet. Au moment de mettre un point final à cet ouvrage c'est vers elles que nos pensées se tournent.

Nancy le 15 avril 2008

El-Haj Laamri, Philippe Chateaux, Gérard Eguether,
Alain Mansoux, David Rupprecht, Laurent Schwald

Les exercices qui nous ont semblé les plus difficiles sont signalés par un ou deux symboles K.

Table des matières

Chapitre 1. Suites Numériques **1**

Chapitre 2. Fonctions réelles d'une variable réelle **16**

2.1 Exercices d'entraînement 16

2.2 Exercices d'approfondissement 28

Chapitre 3. Intégration sur un segment **36**

3.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation 36

3.2 Exercices d'entraînement 44

3.3 Exercices d'approfondissement 54

Chapitre 4. Séries numériques **63**

4.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation 63

4.2 Exercices d'entraînement 75

4.3 Exercices d'approfondissement 83

Chapitre 5. Espaces vectoriels normés **94**

5.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation 94

5.2 Exercices d'entraînement 118

5.3 Exercices d'approfondissement 121

Chapitre 6. Suites et séries de fonctions **126**

6.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation 126

6.2 Exercices d'entraînement 136

6.3 Exercices d'approfondissement 144

Chapitre 7. Séries entières **149**

7.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation 149

7.2 Exercices d'entraînement 172
7.3 Exercices d'approfondissement 179

Chapitre 8. Intégration sur un intervalle quelconque 186
8.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation 186
8.2 Exercices d'entraînement 195
8.3 Exercices d'approfondissement 204

Chapitre 9. Théorème de convergence dominée et applications 208
9.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation 208
9.2 Exercices d'entraînement 214
9.3 Exercices d'approfondissement 228

Chapitre 10. Intégrales dépendant d'un paramètre 231
10.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation 231
10.2 Exercices d'entraînement 238
10.3 Exercices d'approfondissement 246

Chapitre 11. Séries de Fourier 252
11.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation 252
11.2 Exercices d'entraînement 260
11.3 Exercices d'approfondissement 270

Chapitre 12. Équations différentielles linéaires 282
12.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation 282
12.2 Exercices d'entraînement 294
12.3 Exercices d'approfondissement 306

Chapitre 13. Équations différentielles non linéaires 313
13.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation 313
13.2 Exercices d'entraînement 316
13.3 Exercices d'approfondissement 319

Chapitre 14. Calcul différentiel 325
14.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation 325
14.2 Exercices d'entraînement 335
14.3 Exercices d'approfondissement 345

Chapitre 15. Intégrales doubles et curvilignes **353**
15.1 L'essentiel du cours et exercices d'assimilation 353
15.2 Exercices d'entraînement 358
15.3 Exercices d'approfondissement 363

Suites Numériques 1

Ce chapitre, comme celui des fonctions d'une variable réelle, a déjà été étudié en première année mais est très fréquemment abordé aux concours. Avant la rentrée en deuxième année, ce chapitre sera l'occasion d'éprouver la maturité acquise en première année. Avant les oraux, il fournira une excellente occasion de révision et d'entraînement.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 1.1

Centrale PSI 2005

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, $u_n = \left(5\sin\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{5}\cos n\right)^n$.

Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est naturel de commencer par majorer $|u_n|$. Sachant que $\left|\sin 1/n^2\right| \leqslant 1$ et $|\cos n| \leqslant 1$, on a alors d'après l'inégalité triangulaire

$$\left|5\sin\frac{1}{n^2} + \frac{1}{5}\cos n\right| \leqslant 5\left|\sin\frac{1}{n^2}\right| + \frac{1}{5}|\cos n| \leqslant 5 + \frac{1}{5}$$

soit $|u_n| \leqslant \left(5 + \dfrac{1}{5}\right)^n$. Mais $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(5 + \dfrac{1}{5}\right)^n = +\infty$, ce qui ne permet pas d'aboutir. Affinons cette première approche en constatant que c'est le nombre 5 qui nous empêche de conclure. On va donc majorer et minorer plus finement. Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sin(1/n^2) = 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant N$, on ait $-\dfrac{1}{5} \leqslant 5\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \leqslant \dfrac{1}{5}$. Donc, pour tout $n \geqslant N$,

$$-\frac{2}{5} \leqslant 5\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{5}\cos n \leqslant \frac{2}{5},$$

d'où $\left|5\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \dfrac{1}{5}\cos n\right| \leqslant \dfrac{2}{5}$. On en déduit enfin que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ et comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 1.2

CCP MP et PC 2006

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Par hypothèse, les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, notons a, b et c leurs limites respectives.
La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle converge donc vers $a = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$. Mais c'est aussi une suite extraite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle converge donc vers $c = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n}$. Il en résulte que $a = c$.
La suite $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ car $6n+3 = 2(3n+1)+1$. Elle converge donc vers $b = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$. Mais c'est aussi une suite extraite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle converge donc vers c. Il en résulte que $b = c$.
On a donc $a = b$, et comme les suites des termes de rang pair et de rang impair convergent vers la même limite, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette limite commune.

Remarque

Il arrive que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. C'est le cas par exemple de la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

Exercice 1.3

CCP PSI 2005, diverses écoles MP 2007

1) Montrer que : $\forall n \geqslant 4$, $\forall k \in \{2,\dots,n-2\}$, $\displaystyle\binom{n}{k} \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$.

2) En déduire que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$ converge et déterminer sa limite ℓ.

3) *Question de la rédaction :* Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1) On a, pour tout $n \geqslant 4$ et tout $k \in \{2,\dots,n-2\}$,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\\ &= \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\prod_{j=3}^{k}\frac{n-k-2+j}{j} \geqslant \frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

2) Écrivons tout d'abord, pour tout $n \geqslant 4$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Il en résulte d'après la question précédente

$$u_n \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)} = 2 + \frac{2}{n} + \frac{2(n-3)}{n(n-1)}.$$

On obtient ainsi l'encadrement $2+\frac{2}{n} \leqslant u_n \leqslant 2+\frac{2}{n}+\frac{2(n-3)}{n(n-1)}$. D'où $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 2$.

3) Soit $n \geqslant 4$. Posons $v_n = u_n - 2 = \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}$ et cherchons un équivalent de la suite $(v_n)_{n\geqslant 4}$. On a pour tout $n \geqslant 6$,

$$v_n = \frac{2}{n} + \frac{4}{n(n-1)} + \sum_{k=3}^{n-3} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

D'autre part, pour tout $k \in \{3, \dots, n-3\}$, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \prod_{j=4}^{k} \frac{n-k-3+j}{j} \geqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

d'où $0 \leqslant v_n - \frac{2}{n} \leqslant \frac{4}{n(n-1)} + \frac{6}{(n-1)(n-2)}$. Ainsi $v_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc $u_n - 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

Exercice 1.4

CCP MP 2005

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \sum\limits_{\substack{i+j=n \\ i\geqslant 1,\ j\geqslant 1}} \frac{1}{ij}$.

Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\,.$$

Or $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$ (voir exercice 2.3 page 9 dans notre livre d'Analyse de Première année) et par conséquent $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2\ln n}{n}$.

Exercice 1.5

CCP MP 2006, très proche de CCP MP 2007

1) Montrer que deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, équivalentes en $+\infty$, sont de même signe à partir d'un certain rang.

2) Quel est le signe de $u_n = \sin\dfrac{1}{n} - \operatorname{th}\dfrac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$?

1) *Il s'agit d'un résultat à garder présent à l'esprit.*
Par hypothèse, il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que, pour tout n supérieur à un certain entier n_0, on a $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$. En particulier pour $\varepsilon = 1/2$, il existe un entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $-1/2 \leqslant \varepsilon_n \leqslant 1/2$, ce qui implique que $1/2 \leqslant 1+\varepsilon_n \leqslant 3/2$, et par conséquent, u_n et v_n sont de même signe pour tout $n \geqslant n_1$.

2) En utilisant les développements limités on sait que, au voisinage de 0,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

d'où $\sin x - \operatorname{th} x = \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{6}$. Par conséquent,

$$u_n = \sin\frac{1}{n} - \operatorname{th}\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3} > 0\,.$$

On déduit de la première question, que u_n est positive à partir d'un certain rang.

Exercice 1.6

Centrale PSI 2006, Polytechnique MP 2006 et 2007

Soit la suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \exp(-u_n)$.

1) Etudier cette suite selon $u_0 \in \mathbb{R}$.

2) On suppose $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer un équivalent de u_n.

On pourra commencer par déterminer α réel tel que $v_n = u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ ait une limite finie non nulle, puis appliquer le théorème de Cesàro à cette suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

N.B. : Le théorème de Cesàro n'est au programme ni de PC ni de PSI. Néanmoins beaucoup d'examinateurs de PC et de PSI le supposent connu ou demandent de l'utiliser puis de le démontrer, nous l'avons introduit dans notre livre d'Analyse de première année voir exercice 10.14 pages 162-163.

1) La fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $f(x)$ est du signe de x. Puisque $e^{-x} - 1$ est du signe de $-x$, on a toujours $f(x) - x \leqslant 0$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n, on en déduit que u_n est décroissante, donc a une limite, finie ou $-\infty$. D'autre part, le seul point fixe de f est 0, donc si u_n converge, sa limite est 0.
• Si $u_0 < 0$, alors par décroissance de (u_n), on a pour tout n, $u_n \leqslant u_0 < 0$, donc (u_n) ne peut tendre vers 0, et par conséquent, elle a pour limite $-\infty$.
• Si $u_0 > 0$, comme l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par f, la suite (u_n) est décroissante positive, donc converge, et sa limite est nulle.
• Si $u_0 = 0$, alors (u_n) est la suite nulle.

2) Cherchons α pour que $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ ait une limite finie non nulle. On a

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha(e^{-\alpha u_n} - 1)\,.$$

Puisque (u_n) converge vers 0, en utilisant l'équivalent $e^u - 1 \underset{u \to 0}{\sim} u$, on obtient $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} -\alpha u_n^{\alpha+1}$. La suite $(\alpha u_n^{\alpha+1})$ admet une limite finie non nulle si et seulement si $\alpha = -1$. La suite $(v_n) = \left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right)$ converge alors vers 1. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}\right).$$

Le théorème de Cesàro entraîne que la suite (S_n) converge vers 1. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{1}{nu_n}\right)$ converge vers 1, et donc que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 1.7

Centrale PSI 2005

Avec Maple : soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \ln|x|$.

1) Donner l'allure de f, le signe de $f(x) - x$, le signe de $f(x) + x$.

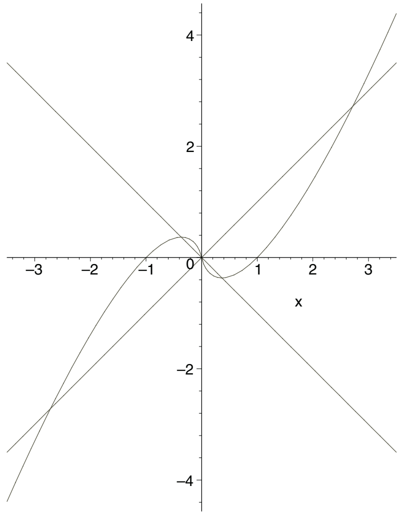
2) Etudier la suite définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $U_0 = 3$.

3) Donner le signe de $f \circ f(x) - x$.

4) Etudier la suite définie par $W_{n+1} = f(W_n)$ avec $W_0 = 1/4$.

1) Remarquons que la fonction f est impaire et se prolonge par la valeur 0 en 0. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et l'on a $f'(x) = \ln|x| + 1$. Sur $]0, +\infty[$, la fonction f' est du signe de $x - e^{-1}$. Elle admet donc un minimum local en $1/e$ et $f(1/e) = -1/e$.

Remarquons aussi que $f(x)/x$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0. La fonction f n'est pas dérivable en 0 et y admet une tangente verticale.



Si $x \neq 0$, on a $f(x) - x = x(\ln|x| - 1)$, d'où
$\{x \in \mathbb{R}^* \mid f(x) - x > 0\} =]-e,\ 0[\cup]e,\ +\infty[$.

De plus $f - \mathrm{Id}$ s'annule en e et $-e$ et se prolonge en 0 par la valeur 0. Les nombres e, $-e$ et 0 sont donc les trois points fixes de f.

On a aussi $f(x) + x = x(\ln|x| + 1)$, d'où

$\{x \in \mathbb{R}^* \mid f(x) + x > 0\} =]-1/e,\ 0[\cup]1/e,\ +\infty[$.

De plus $f + \mathrm{Id}$ s'annule en $-1/e$, $1/e$ et se prolonge en 0 par la valeur 0.

2) L'intervalle $I = [e,\ +\infty[$ est stable par f et contient U_0. Sur l'intervalle I, la fonction f vérifie $f(x) > x$, il en résulte que la suite (U_n) est croissante. Si elle admettait une limite finie ce serait un point fixe de f dans l'intervalle $[U_0,\ +\infty[$, ce qui n'est pas possible. Donc la suite (U_n) admet $+\infty$ pour limite.

3) Si $x > 0$, on a $f \circ f(x) - x = f(x \ln x) - x = x \ln x \ln|x \ln x| - x = x \ln x g(\ln x)$, où l'on a posé $g(u) = u + \ln|u| - 1/u$.
La fonction g est croissante sur $]-\infty,\ 0[\cup]0,\ +\infty[$ et s'annule en -1 et en 1.
Il en résulte que $\{u \in \mathbb{R} \mid g(u) > 0\} =]-1,\ 0[\cup]1,\ +\infty[$,
puis que $\{x > 0 \mid g(\ln x) > 0\} =]1/e,\ 1[\cup]e,\ +\infty[$
et finalement que $\{x > 0 \mid f \circ f(x) - x > 0\} =]0,\ 1/e[\cup]e,\ +\infty[$.
Enfin, puisque $f \circ f - \mathrm{Id}$ est impaire,
$\{x \in \mathbb{R} \mid f \circ f(x) - x > 0\} =]-e,\ -1/e[\cup]0,\ 1/e[\cup]e,\ +\infty[$.
De plus $f \circ f - \mathrm{Id}$ s'annule en e, $-e$, $1/e$ et $-1/e$ et se prolonge en 0 par la valeur 0.
Les nombres e, $-e$, $1/e$, $-1/e$ et 0 sont donc les points fixes de $f \circ f$.

4) L'intervalle $J =]0,\ 1/e[$ est stable par $f \circ f$ et contient W_0. Sur cet intervalle $f \circ f(x) > x$. Alors la suite (W_{2n}) est une suite croissante majorée de $[W_0,\ 1/e]$ et converge vers un point fixe de $f \circ f$ dans cet intervalle. La limite est donc $1/e$. Mais, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_{2n+1} = f(W_{2n})$, la suite (W_{2n+1}) converge vers $f(1/e) = -1/e$. Il en résulte que la suite (W_n) n'a pas de limite.

L'exercice suivant est un classique qu'on trouve chaque année dans plusieurs concours.

Exercice 1.8

Centrale MP 2006, Polytechnique PC 2005 et MP 2007 K

Montrer que la suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 \in \mathbb{C}^*$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n+|u_n|)$, converge et trouver sa limite suivant u_0.

On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{2}(z+|z|)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $u_{n+1} = f(u_n)$.

• Si $u_0 \in \mathbb{R}^-$, alors pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 0$.
• Si $u_0 \in \mathbb{R}^+$, alors pour tout n, $u_n = u_0$.
• Si $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: on remarque d'abord que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$ tel que $z = re^{i\theta}$. On a alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\left(re^{i\theta}+r\right) = \frac{r}{2}\left(e^{i\theta}+1\right) = \frac{r}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= \frac{r}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\cdot 2\cos\frac{\theta}{2} = r\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

En écrivant u_n sous la forme $u_n = r_n e^{i\theta_n}$, on obtient $u_{n+1} = r_{n+1}e^{i\theta_{n+1}}$ avec $r_{n+1} = r_n \cos\dfrac{\theta_n}{2}$ et $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$.

Ainsi, si on pose $u_0 = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$, on vérifie par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_n = \dfrac{\theta}{2^n}$ et $r_n = r\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}$. On en déduit que

$$r_n = r\prod_{k=1}^{n}\frac{2\sin\frac{\theta}{2^k}\cdot\cos\frac{\theta}{2^k}}{2\sin\frac{\theta}{2^k}} = r\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{\theta}{2^{k-1}}}{2\sin\frac{\theta}{2^k}} = r\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}.$$

D'où $u_n = r\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}\cdot e^{i\frac{\theta}{2^n}}$. Sachant que $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a $2^n\sin\dfrac{\theta}{2^n} \underset{n\to\infty}{\sim} 2^n\cdot\dfrac{\theta}{2^n} = \theta$ et par conséquent $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = r\frac{\sin\theta}{\theta}$.

Exercice 1.9

Extrait de Centrale PC 2006

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 > 0, u_1 > 0$ et

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n u_{n-1}}.$$

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et trouver sa limite.
2) En considérant $1/u_n^2$, trouver un équivalent de u_n.
Indication de l'examinateur : Appliquer le théorème de Cesàro.

Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.

1) Soit $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 u_{n-1}}{1 + u_n u_{n-1}} < 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$. En passant à la limite dans la relation $(*)$ on obtient $\ell = \dfrac{\ell}{1+\ell^2}$, d'où $\ell = 0$.

2) Le théorème de de Cesàro a été introduit comme exercice dans le livre d'Analyse de première année voir exercice 10.14 pages 162 et 163.

Soit $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} = \dfrac{1 + 2u_n u_{n-1} + u_n^2 u_{n-1}^2}{u_n^2}$, d'où $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2} = 2\dfrac{u_{n-1}}{u_n} + u_{n-1}^2$,

Par ailleurs, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{1 + u_n u_{n-1}}$. Il en résulte que la suite (u_{n+1}/u_n) converge vers 1 (on a en particulier $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$) et la suite $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}\right)$ converge vers 2. En appliquant le théorème de Cesàro, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) = 2\,.$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{nu_n^2} = 2$, d'où $u_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ et donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

Exercice 1.10

Centrale PSI 2005, CCP MP 2006

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

1) Déterminer le nombre des racines réelles de f_n pour $n = 0, 1, 2$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f_{2n} n'admet pas de racine réelle et que f_{2n+1} admet une unique racine réelle qu'on note r_n.
3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-(2n+3) < r_n < 0$. En déduire que la suite (r_n) décroit vers $-\infty$.

1) Il est clair que les fonctions $f_0 : x \mapsto f_0(x) = 1$, $f_2 : x \mapsto f_2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!}$ n'ont pas de racine réelle et $f_1 : x \mapsto f_1(x) = 1 + x$ a pour unique racine réelle -1.

2) Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante : f_{2n} n' a pas de racine réelle, f_{2n+1} a une unique racine réelle qui est simple. On a montré dans la question précédente que la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie et montrons que la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

• Montrons que $f_{2n+2} > 0$.

On a $f'_{2n+2} = f_{2n+1}$. L'hypothèse de récurrence entraîne alors que la fonction f_{2n+2} décroît sur l'intervalle $]-\infty, r_n]$ et croît sur $[r_n, +\infty[$. La fonction f_{2n+2} atteint donc son minimum en r_n. Déterminons le signe de $f_{2n+2}(r_n)$. Puisque r_n est racine de f_{2n+1}, on a

$$f_{2n+2}(r_n) = f_{2n+1}(r_n) + \frac{r_n^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{r_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \geqslant 0\,.$$

Par ailleurs, $f_{2n+1}(0) = 1$, le nombre réel r_n n'est donc pas nul, et par conséquent, $f_{2n+2}(r_n) > 0$. Ainsi, $f_{2n+2} > 0$.

• Montrons que f_{2n+3} admet une et une seule racine réelle et que cette racine est simple.

Comme $f'_{2n+3} = f_{2n+2} > 0$, la fonction f_{2n+3} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En outre, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et varie de $-\infty$ à $+\infty$, il existe donc un réel unique r_{n+1} tel que $f_{2n+3}(r_{n+1}) = 0$. Cette racine n'est pas une racine multiple de f_{2n+3}, sinon elle serait aussi racine de la dérivée $f'_{2n+3} = f_{2n+2}$.

La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Le principe de récurrence assure qu'elle est vraie pour tout entier n.

3) • Montrons que $-(2n+3) < r_n < 0$. La fonction f_{2n+1} étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour montrer que $-2n-3 < r_n < 0$, il suffit d'établir que $f_{2n+1}(-(2n+3)) < 0 = f_{2n+1}(r_n) < f_{2n+1}(0)$. Comme $f_{2n+1}(0) = 1$, on a immédiatement $r_n < 0$. D'autre part, en écrivant $f_{2n+1}(x)$ sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$, on obtient

$$f_{2n+1}\big(-(2n+3)\big) = -2\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n+3)^{2k}}{(2k+1)!}(n+1-k) < 0$$

• Montrons que la suite $(r_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f_{2n+3}(r_n) &= f_{2n+1}(r_n) + \frac{r_n^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{r_n^{2n+3}}{(2n+3)!} \\ &= 0 + \frac{r_n^{2n+2}}{(2n+3)!}(2n+3+r_n) > 0 = f_{2n+3}(r_{n+1}). \end{aligned}$$

Puisque f_{2n+3} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a alors $r_n \geqslant r_{n+1}$.

• Montrons enfin que (r_n) tend vers $-\infty$.

Si ce n'était pas le cas, étant décroissante, elle aurait une limite finie $\alpha < 0$. Comme f_{2n+1} est croissante, on aurait $\forall n,\ f_{2n+1}(\alpha) \leqslant f_{2n+1}(r_n) = 0$. Or $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2n+1}(\alpha) = e^{\alpha}$, d'où par passage à la limite dans l'inégalité précédente, $e^{\alpha} \leqslant 0$: contradiction.

Exercice 1.11

CCP PSI 2005

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que sur $]0, 1[$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera u_n.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite 0.
3. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, au voisinage de $+\infty$,

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $[0, 1]$ avec $f_n'(x) = 5x^4 + n > 0$ et par conséquent f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$. Ainsi f_n est une bijection de l'intervalle $[0, 1]$ sur son image $f_n([0, 1]) = [f_n(0), f_n(1)] = [-1, n]$. Puisque $0 \in f_n(]0, 1[)$, il existe alors $u_n \in]0, 1[$ unique tel que $f_n(u_n) = 0$ c'est-à-dire $(*)\quad u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.

2) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^5 + (n+1)u_n - 1 = u_n^5 + nu_n - 1 + u_n = u_n > 0 = f_{n+1}(u_{n+1}).$$

La croissance de la fonction f_{n+1} entraîne que $u_{n+1} \leqslant u_n$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.
• Minorée par 0 et décroissante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite $\ell \in [0, 1]$. On a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(1-u_n^5) = 1-\ell^5$. Or pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{1}{n}(1-u_n^5)$. On en déduit $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$.

3) On déduit de la relation (*) que la suite (nu_n) converge et que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} nu_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty}(1-u_n^5) = 1,$$

d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. En outre, $nu_n - 1 = -u_n^5 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{n^5}$ d'où $nu_n = 1 - \dfrac{1}{n^5} + o\left(\dfrac{1}{n^5}\right)$ et finalement $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^6} + o\left(\dfrac{1}{n^6}\right)$.

Exercice 1.12

Centrale PC 2006

1) Montrer, si $n \in \mathbb{N}^*$, que l'équation $x^n + x^2 = 1$ admet une unique solution réelle positive que l'on notera x_n.
2) Donner une valeur approchée de x_n pour différentes valeurs de n avec Maple.
3) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite ℓ.
4) Montrer que $\ell - x_n$ est équivalent à une expression de la forme $\ln^\alpha n/n^\beta$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n, définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n + x^2 - 1$, est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. C'est une bijection de $[0, +\infty[$ sur l'intervalle $[f_n(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)[= [-1, +\infty[$. Il existe donc une valeur unique x_n dans $[0, +\infty[$ telle que $f_n(x_n) = 0$.
On peut remarquer, puisque $f_n(1) = 1$, que l'on a en fait $0 < x_n < 1$.

2) En utilisant la commande MAPLE

```
fsolve(x^n+x^2-1,x,x=0..+infinity);
```

on obtient

$x_3 = 0.7548776662,\qquad x_4 = 0.7861513778,\qquad x_{10} = 0.8688369618,$

$x_{100} = 0.9715897359\,,\quad x_{500} = 0.9918037085\,.$

3) Les calculs précédents laissent supposer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1. On peut déjà montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. En effet, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n^2 - 1 = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$$

d'où $x_n < x_{n+1}$, puisque f_{n+1} est strictement croissante. Etant croissante et majorée par 1, la suite (x_n) est convergente.

Montrons, comme le laisse supposer les simulations numériques qu'elle a 1 pour limite. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On a $f_n(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n + (1-\varepsilon)^2 - 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^2 - 1 < 0$. On en déduit qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $f_n(1-\varepsilon) < 0$ et donc $(1-\varepsilon) < x_n$ car f_n est strictement croissante. Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$, on a $1-\varepsilon < x_n < 1+\varepsilon$. Ce qui montre que (x_n) converge vers 1.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\alpha_n = 1 - x_n$. La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers 0. En partant de la relation $(1-\alpha_n)^n = 1 - (1-\alpha_n)^2 = 2\alpha_n - \alpha_n^2$, on déduit $n\ln(1-\alpha_n) = \ln\alpha_n + \ln(2-\alpha_n)$ et donc $-n\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\alpha_n$.

Supposons que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^\alpha n/n^\beta$. Alors $\ln\alpha_n = \alpha\ln\ln n - \beta\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\beta\ln n$, et donc $-n^{1-\beta}\ln^\alpha n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\beta\ln n$. Cette relation n'est possible qu'en ayant $\alpha = \beta = 1$. On va donc montrer que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n/n$ en encadrant α_n par deux suites équivalentes à $\ln n/n$. Prenons tout d'abord $s_n = \ln n/n$. En remarquant que $n\ln(1-\ln n/n) = -\ln n + O((\ln n)^2/n) = -\ln n + o(1)$, on obtient

$$\begin{aligned} f(1-s_n) &= e^{n\ln(1-\ln n/n)} + \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 - 2\frac{\ln n}{n} \\ &= e^{-\ln n + o(1)} - 2\frac{\ln n}{n}\left(1 - \frac{\ln n}{2n}\right) \\ &= -2\frac{\ln n}{n}\left(1 - \frac{\ln n}{2n} - \frac{e^{o(1)}}{2\ln n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -2\frac{\ln n}{n}\,. \end{aligned}$$

Cette expression est négative à partir d'un certain rang et on en déduit que $\alpha_n \geqslant s_n$ à partir d'un certain rang.

Prenons ensuite $t_n = s_n + \dfrac{\ln(3\ln n)}{n}$. On remarque que $\dfrac{\ln(3\ln n)}{n} = o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$, donc $t_n = s_n + o(s_n)$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} f(1-t_n) &= e^{n\ln(1-\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln(3\ln n)}{n})} - 2s_n + o(s_n) \\ &= e^{-\ln n + \ln(3\ln n) + o(1)} - 2s_n + o(s_n) \\ &= \frac{3\ln n}{n}e^{o(1)} - \frac{2\ln n}{n} + o(\ln n/n) \\ &= \frac{\ln n}{n}\left(3e^{o(1)} - 2 + o(1)\right) \sim \frac{\ln n}{n}. \end{aligned}$$

Cette expression est positive à partir d'un certain rang et on en déduit que $\alpha_n \leqslant t_n$ à partir d'un certain rang. Alors puisque $s_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$ et $s_n \leqslant \alpha_n \leqslant t_n$, on en déduit que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} s_n$.

Exercice 1.13

Centrale PC 2006

1) Montrer que, sur chaque intervalle $[k\pi, (k+1/2)\pi[$ où $k \in \mathbb{N}$, l'équation $x\tan(x) = 1$ admet une unique solution notée ω_k.
2) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_k = 1 + \sin^2(\omega_k)$. Montrer que $\alpha_k = (2+\omega_k^2)/(1+\omega_k^2)$.
3) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1]$, on pose $v_k(x) = \dfrac{\cos(\omega_k x)}{\sqrt{\alpha_k}}$. Calculer

$$I_{m,n} = \int_{-1}^{1} v_m(x)v_n(x)dx.$$

1) La fonction f définie sur $]k\pi, (k+1/2)\pi[$ par $f(x) = x - \operatorname{cotan} x$ est dérivable sur I et $f'(x) = 2 + \operatorname{cotan}^2 x > 0$. Elle est donc strictement croissante. Comme $\lim_{x\to k\pi^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to(k+1/2)\pi^-} f(x) = (k+1/2)\pi$ la fonction f est une bijection de $]k\pi, (k+1/2)\pi[$ sur $f(]k\pi, (k+1/2)\pi[) =]-\infty, (k+1/2)\pi[$. En particulier, il existe ω_k unique dans $]k\pi, (k+1/2)\pi[$ tel que $f(\omega_k) = 0$. Alors ce nombre est l'unique solution de l'équation $x\tan x = 1$ dans $]k\pi, (k+1/2)\pi[$ et comme $k\pi$ n'est pas solution, c'est l'unique solution de l'équation $x\tan x = 1$ dans $[k\pi, (k+1/2)\pi[$.

2) On a $\alpha_k = \dfrac{2+\omega_k^2}{1+\omega_k^2} = 1 + \dfrac{1}{1+\omega_k^2} = 1 + \dfrac{1}{1+\operatorname{cotan}^2\omega_k} = 1 + \sin^2\omega_k$.

3) Si $m \neq n$, on intègre facilement en utilisant la formule de transformation $\cos(\omega_m x)\cos(\omega_n x) = \dfrac{1}{2}(\cos(\omega_m+\omega_n)x + \cos(\omega_m-\omega_n)x)$. On obtient,

$$\int_{-1}^{1}\cos(\omega_m x)\cos(\omega_n x)\,dx = \frac{\sin(\omega_m+\omega_n)}{(\omega_m+\omega_n)} + \frac{\sin(\omega_m-\omega_n)}{(\omega_m-\omega_n)}.$$

Mais $\omega_m + \omega_n = \dfrac{\cos\omega_m}{\sin\omega_m} + \dfrac{\cos\omega_n}{\sin\omega_n} = \dfrac{\cos\omega_m \sin\omega_n + \cos\omega_n \sin\omega_m}{\sin\omega_m \sin\omega_n}$. On en déduit $\omega_m + \omega_n = \dfrac{\sin(\omega_m + \omega_n)}{\sin\omega_m \sin\omega_n}$. De la même manière $\omega_m - \omega_n = \dfrac{\sin(\omega_n - \omega_m)}{\sin\omega_m \sin\omega_n}$.

Alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} \cos(\omega_m x)\cos(\omega_n x)\,dx = \sin\omega_m \sin\omega_n - \sin\omega_m \sin\omega_n = 0$. On a donc $I_{m,n} = 0$. Par ailleurs $\displaystyle\int_{-1}^{1} \cos^2(\omega_m x)\,dx = \int_0^1 (1+\cos(2\omega_m x))\,dx = 1 + \frac{\sin 2\omega_m}{2\omega_m}$.

Donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} \cos^2(\omega_m x)\,dx = 1 + \sin\omega_m \cos\omega_m \tan\omega_m = 1 + \sin^2\omega_m = \alpha_m$. Finalement on obtient $I_{n,n} = 1$.

Remarque

On vient de montrer que les fonctions définies pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1]$ par $f_m(x) = \cos(\omega_m x)$ forment un système orthonormal pour le produit scalaire défini sur $\mathscr{C}^0([-1, 1]), \mathbb{R})$ par $< f \mid g >= \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$.

Exercice 1.14

CCP PC 2006

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^{2n+1} - x^{n+1} - 1$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in]1, +\infty[$.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

3) Montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1$.

Indication : on pourra remarquer que $u_n^n(u_n^n - 1) = \dfrac{1}{u_n}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n^n$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge et a pour limite $(1+\sqrt{5})/2$.

5) Déterminer un équivalent simple de $u_n - 1$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = (2n+1)x^{2n} - (n+1)x^n = x^n\big((2n+1)x^n - (n+1)\big)$. Ainsi pour tout $x \geqslant 1$, $f_n'(x) \geqslant 0$. On en déduit que f_n réalise une bijection de l'intervalle $[1, +\infty[$ sur son image $[f_n(1), \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f_n(x)[= [-1, +\infty[$. Comme $0 \in]-1, +\infty[$, il existe $u_n \in]1, +\infty[$ unique tel que $f_n(u_n) = 0$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la relation $u_n^{2n+1} = u_n^{n+1} + 1$, on obtient

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= u_n^{2n+3} - u_n^{n+2} - 1 = u_n^{n+3} + u_n^2 - u_n^{n+2} - 1 \\ &= u_n^{n+2}(u_n - 1) + (u_n - 1)(u_n + 1) \\ &= (u_n - 1)(u_n^{n+2} + u_n + 1) > 0. \end{aligned}$$

Comme $f_{n+1}(1) = -1$ et $f_{n+1}(u_n) > 0$, l'unique solution de l'équation $f_{n+1}(x) = 0$, à savoir u_{n+1}, se trouve dans l'intervalle $]\,1,\ u_n\,[$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc strictement décroissante.

3) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 1 donc elle converge et sa limite, notée ℓ, vérifie $\ell \geqslant 1$. Montrons que $\ell = 1$.
De la définition de u_n, on déduit que $(*)\quad u_n^n(u_n^n - 1) = 1/u_n$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \geqslant 1$, on déduit de l'égalité précédente que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a $u_n^n(u_n^n - 1) \leqslant 1$. L'étude des variations de la fonction $g : x \mapsto x(x-1)$ sur $[\,1,\ +\infty\,[$, montre que : $x(x-1) \leqslant 1$ entraîne $x \leqslant 2$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a donc $1 \leqslant u_n^n \leqslant 2$. On en déduit $0 \leqslant \ln u_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n}$, ce qui montre que (u_n) converge vers 1.

4) Montrons que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminons sa limite.
L'égalité $(*)$ est équivalente à $g(v_n) = \dfrac{1}{u_n}$. On vérifie aisément que la fonction g est une bijection de $[\,1,\ 2\,]$ sur $[\,0,\ 2\,]$ et que g^{-1} est continue sur $[\,0,\ 2\,]$. Ainsi, la suite de terme général $v_n = g^{-1}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ converge et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = g^{-1}\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{u_n}\right) = g^{-1}(1) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

5) Déterminons un équivalent simple de $u_n - 1$.
Puisque $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n^n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on a $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} n\ln u_n = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, d'où $\displaystyle\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Par ailleurs, $\ln u_n = \ln(1 + u_n - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - 1$.
Ainsi $\displaystyle u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Exercice 1.15

Mines-Ponts MP 2006, Polytechnique-ESPCI PC 2006 K

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. On pose pour tout $n > 0$,

$$y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}.$$

1) Etudier la convergence de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque $x_n = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ où $a > 0$.
2) Même question lorsque $x_n = ab^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec $b > 0$.
3) Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $(x_n^{2^{-n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on note f_k la fonction définie sur $[\,0,\ +\infty\,[$ par $f_k(x) = \sqrt{x_k + x}$. Les fonctions f_k sont continues, croissantes et positives sur $[\,0,\ +\infty\,[$, et pour tout $n \geqslant 1$ on a alors $y_n = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n(0)$.

1) Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n = a$, alors les fonctions f_k sont toutes égales à la même fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+a}$, et $y_n = f^n(0)$.
On est donc ramené à l'étude de la suite définie par $y_0 = 0$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = f(y_n)$.
La fonction f est croissante sur $[\,0,\, +\infty\,[$ et, dans cet intervalle, admet un seul point fixe $\ell = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, c'est l'unique racine positive du trinôme $x^2 - x - a$. Comme $y_1 = \sqrt{a} > y_0$ et la fonction f est croissante, la suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est alors croissante. Par ailleurs, l'intervalle $[\,0,\, \ell\,]$ est stable par f. La suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée. Elle converge donc vers ℓ.

2) Si $k \geqslant 1$ et $x \geqslant 0$, notons $f_k(x) = \sqrt{x + ab^{2^k}}$ et $f(x) = \sqrt{x+a}$.
On constate que pour tout $k \geqslant 0$ et tout $x \geqslant 0$, on a $f_k(xb^{2^k}) = b^{2^{k-1}} f(x)$. On en déduit alors par une récurrence descendante que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a la relation $f_k \circ \ldots \circ f_n(0) = b^{2^{k-1}} f^{n-k+1}(0)$.
En effet, si cette relation est vraie pour un rang k, on a alors

$$f_{k-1} \circ f_k \circ \cdots \circ f_n(0) = f_{k-1}(b^{2^{k-1}} f^{n-k+1}(0)) = b^{2^{k-2}} f^{n-k+2}(0)\ ,$$

et la relation est vraie au rang $k-1$. Il en résulte qu'elle est vraie au rang 1, et donc que $y_n = bf^n(0)$. Donc, d'après 1) la suite (y_n) converge vers $b\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

3) Supposons que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Elle est majorée par une constante M. Mais, en minorant $x_1 \ldots x_{n-1}$ par 0, on obtient, puisque la fonction racine carrée est croissante,

$$y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}} \geqslant x_n^{1/2^n} = x_n^{2^{-n}}\ .$$

Il en résulte que $0 \leqslant x_n^{2^{-n}} \leqslant M$. La suite $(x_n^{2^{-n}})$ est donc bornée.

Réciproquement, supposons la suite $(x_n^{2^{-n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornée. Il existe M tel que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on ait $x_n^{2^{-n}} \leqslant M$, donc $x_n \leqslant M^{2^n}$.
Nous allons montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée.
• La suite (y_n) est croissante. En effet, la composée de fonctions croissantes étant une fonction croissante, il en résulte que, pour tout $n \geqslant 1$, la fonction $f_1 \circ \cdots \circ f_n$ est croissante, et puisque $\sqrt{x_{n+1}} \geqslant 0$, on en déduit $f_1 \circ \cdots \circ f_n(\sqrt{x_{n+1}}) \geqslant f_1 \circ \cdots \circ f_n(0)$ c'est-à-dire $y_{n+1} \geqslant y_n$.
• La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. En effet, puisque la fonction racine carrée est croissante, on a

$$y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}} \leqslant \sqrt{M^2 + \sqrt{M^{2^2} + \cdots + \sqrt{M^{2^n}}}}\ .$$

Mais d'après la question 2), la suite $\left(\sqrt{M^2 + \sqrt{M^{2^2} + \cdots + \sqrt{M^{2^n}}}}\right)$ converge. Elle est donc majorée, et il en résulte que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est également majorée.
Conclusion : la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

2 Fonctions réelles d'une variable réelle

Les fonctions à valeurs réelles ou complexes d'une variable réelle ont déjà été étudiées dans le livre de première année. L'objectif est ici d'en consolider les acquis, ce chapitre faisant l'objet de nombreuses questions aux concours. Les exercices sélectionnés ici ont été ordonnés selon leur difficulté et leur ensemble constitue un excellent moyen de **préparation** pour l'élève désireux d'aborder sereinement l'entrée en deuxième année et un excellent support de **révision** pour les lecteurs au moment de la préparation aux épreuves orales.

2.1 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 2.1

CCP PC 2006

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x < y < z$. Montrer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 1 & y & e^y \\ 1 & z & e^z \end{vmatrix} > 0$.

Question de la rédaction : Montrer que le résultat ci-dessus reste vrai lorsqu'on remplace la fonction exponentielle par toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement convexe.

Notons L_1, L_2 et L_3 les trois lignes du déterminant.

• En remplaçant L_3 par $L_3 - L_2$ puis L_2 par $L_2 - L_1$, on obtient

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 0 & y-x & e^y - e^x \\ 0 & z-y & e^z - e^y \end{vmatrix} = (y-x)(e^z - e^y) - (z-y)(e^y - e^x).$$

Puisque la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, il existe, d'après le théorème des accroissements finis, $c \in]\,x,\ y\,[$ tel que $e^y - e^x = (y-x)e^c$ et $d \in]\,y,\ z\,[$ tel que $e^z - e^y = (z-y)e^d$. Il en résulte, puisque $c < y < d$, que

$$\Delta = (y-x)(z-y)(e^d - e^c) > 0.$$

• Puisque $y \in]\,x,\ z\,[$, il existe $\lambda \in]\,0,\ 1\,[$ tel que $y = \lambda x + (1-\lambda)z$. En remplaçant L_2 par $L_2 - (\lambda L_1 + (1-\lambda)L_3)$, on obtient

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & 0 & f(y) - (\lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} = (z-x)(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(z) - f(y)).$$

Il en résulte, en vertu de la stricte convexité de f, que $\Delta > 0$.

Exercice 2.2

Saint-Cyr MP 2006, CCP PC 2005

Soit I un intervalle non vide et soit $f : I \to \mathbb{R}$. On pose

$$A = \{x \in I \mid f \circ f(x) = x\} \text{ et } B = \{x \in I \mid f(x) = x\}.$$

1) Montrer que si f est strictement croissante sur I, alors $A = B$.
2) *Question de la rédaction :* Montrer, par un exemple, que le résultat de 1) est faux lorsque f est strictement décroissante sur I.
3) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $\exp(ae^{ax}) = x$, où $a > 0$.

1) • Sans hypothèse sur f, si x est dans B, alors $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x) = x$ et x est dans A. Donc $B \subset A$.
• Si x n'est pas dans B, alors $f(x) \neq x$. Ou bien $f(x) < x$ et comme f est strictement croissante, on a $f(f(x)) < f(x)$ d'où $f \circ f(x) < x$.
Ou bien $f(x) > x$ et comme f est strictement croissante, on a $f(f(x)) > f(x)$ d'où $f \circ f(x) > x$. Dans les deux cas $f \circ f(x) \neq x$. Il en résulte que x n'est pas dans A. Donc $I \setminus B \subset I \setminus A$ et alors $A \subset B$. D'où $A = B$.

2) Soit f la fonction définie sur $I = [\,0,\ 1\,]$ par $f(x) = 1 - x$. Dans ce cas, $A = [\,0,\ 1\,]$ et $B = \{1/2\}$.

3) Pour $x \in \mathbb{R}$ posons $f(x) = e^{ax}$. La fonction f est strictement croissante lorsque $a > 0$ et les ensembles A et B sont égaux. Comme $f(x) > 0$, ils sont inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x \geqslant 0$, posons $g(x) = f(x) - x$ et étudions les variations de g. On a $g'(x) = f'(x) - 1 = ae^{ax} - 1$.
Lorsque $a \geqslant 1$, on a $g'(x) \geqslant 0$ et g est croissante. Son minimum est atteint en 0 et vaut $g(0) = 1$. Donc g ne s'annule pas et $A = B = \varnothing$.

Lorsque $0 < a < 1$, la fonction g' s'annule en $x_0 = -\dfrac{\ln a}{a}$, et le minimum de g est atteint en ce point. Il vaut $m = \dfrac{1 + \ln a}{a}$.
La fonction g décroît de 1 à m lorsque x varie de 0 à x_0 et croît de m à $+\infty$ lorsque x varie de x_0 à $+\infty$. Donc
– lorsque $m > 0$ c'est-à-dire pour $a \in \,]\,1/e,\ 1\,[$, la fonction g ne s'annule pas et de nouveau $A = B = \varnothing$,

– lorsque $m < 0$ c'est-à-dire pour $a \in \,]\,0,\ 1/e\,[$, la fonction g s'annule une fois et une seule dans chacun des intervalles $]\,0,\ m\,[$ et $]\,m,\ +\infty\,[$, et donc les ensembles A et B contiennent deux éléments.

– lorsque $m = 0$, c'est-à-dire pour $a = 1/e$, la fonction g est nulle en e uniquement et $A = B = \{e\}$.

Exercice 2.3

Centrale PC 2005

Une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est contractante si elle est $\lambda-$lipschitzienne avec $0 \leqslant \lambda < 1$.

1) Soit f une application contractante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que f admet un unique point fixe α, qui est la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2) Une application $1-$lipschitzienne admet-elle un point fixe ?
3) Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f' pour que f soit contractante sur $\mathbb{R}$.
4) Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n^2+2}{1+u_n^2}$. Montrer que (u_n) converge vers un réel ℓ.

1) Soit $g = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc g également. Montrer que f admet un point fixe revient à montrer que g s'annule.

• **Existence du point fixe**. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a $|f(x)-f(a)| \leqslant \lambda|x-a|$ donc $f(a) - \lambda|x-a| \leqslant f(x) \leqslant f(a) + \lambda|x-a|$.
Pour tout $x > a$, on a $g(x) \leqslant f(a) - \lambda a - (1-\lambda)x$. Comme $1-\lambda > 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(a) - \lambda a - (1-\lambda)x) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Par ailleurs, pour tout $x < a$, on a $g(x) \geqslant f(a) - \lambda a - (1-\lambda)x$, et on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(a) - \lambda a - (1-\lambda)x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$. Il résulte alors du théorème des valeurs intermédiaires que g s'annule au moins une fois dans $\mathbb{R}$. La fonction f admet bien un point fixe.

• **Unicité du point fixe**. Si α_1 et α_2 sont deux points fixes de f, alors

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |f(\alpha_1) - f(\alpha_2)| \leqslant \lambda|\alpha_1 - \alpha_2|.$$

Or, $\lambda < 1$, donc ceci n'est possible que si $|\alpha_1 - \alpha_2| = 0$. Le point fixe est alors unique.

Remarque 1

On aurait pu montrer que l'application g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ en montrant que g est strictement décroissante.

• **Convergence de la suite (u_n) vers le point fixe**

Puisque $f(\alpha) = \alpha$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \lambda|u_n - \alpha|$, c'est-à-dire $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \lambda|u_n - \alpha|$, et l'on en déduit par récurrence que

$|u_n - \alpha| \leqslant \lambda^n |u_0 - \alpha|$. Comme la suite (λ^n) converge vers 0, il résulte du théorème d'encadrement que la suite (u_n) converge vers α.

Remarque 2

Les résultats ci-dessus restent vrais si l'on remplace $\mathbb{R}$ par un intervalle **fermé** I tel que $f(I) \subset I$.

2) L'exemple de l'application $x \mapsto x+1$ qui est $1-$lipschitzienne montre qu'une telle application peut ne pas avoir de point fixe.

3) Si f est λ lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, on a alors, pour tout $(x, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, l'inégalité $\left|\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant \lambda$.

Lorsque f est dérivable, $|f'(x)| = \lim\limits_{h \to 0} \left|\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant \lambda$. On en déduit que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| \leqslant \lambda < 1$.

Réciproquement, supposons f dérivable telle que $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| < 1$. Soient x et y réels. Il résulte de l'inégalité des accroissements finis que $|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)|$.

La fonction f est donc lipschitzienne de rapport $\lambda = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)|$, et puisque $\lambda < 1$, la fonction f est contractante.

Conclusion : lorsque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est contractante si et seulement si la fonction f' est bornée avec $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| < 1$.

Mise en garde : il existe des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| < 1$ mais $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| = 1$. Bien entendu, f n'est pas contractante dans ce cas. Pour un exemple, prenez la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sqrt{t^2 + 1}$.

4) La fonction $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

Comme f' est dérivable, on étudie ses variations en calculant $f''(x) = 2\dfrac{1 - 3x^2}{(x^2 + 1)^3}$.

Sur $[0, +\infty[$, la fonction f' est positive et atteint son maximum pour $1/\sqrt{3}$. Alors, puisque f' est impaire, on a $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| = f'(1/\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} < 1$. La fonction f est donc contractante. Elle admet un unique point fixe ℓ et la suite (u_n) converge vers ℓ.

Remarque

En utilisant un logiciel de calcul formel, par exemple avec Maple

```
f:=x->(3*x^2+2)/(1+x^2);x:=1.;
for i from 1 to 10 do x:=f(x) od;
```

On obtient comme valeur approchée de ℓ le nombre 2,89328919. On remarquera que la constante de contraction étant « petite » (proche de 0,65), la convergence vers ℓ est très rapide.

Exercice 2.4

Centrale MP 2007

1) Montrer que l'application $\psi : x \in [1, e] \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ est une contraction sur $[1, e]$.
2) Calculer $\inf\{x \in \mathbb{R}^{+*}, (x+1)^x \leqslant x^{x+1}\}$.

1) Etudions les variations de ψ sur $I = [1, +\infty[$.
La fonction ψ est dérivable sur I, et l'on a $\psi'(x) = \psi(x)g(x)$, où l'on a posé $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$. La fonction g est dérivable sur I et l'on a $g'(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)^2}$. Donc g est décroissante sur I. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ on a, sur I, l'encadrement $0 \leqslant g(x) \leqslant g(1) = \ln 2 - 1/2$. Donc $\psi'(x) > 0$ et la fonction ψ est croissante. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = e$. Il en résulte que, si $x \in I$, on a $\psi(x) \leqslant e$, et donc $0 < \psi'(x) \leqslant e(\ln 2 - 1/2) \approx 0,52 < 1$.
De plus $\psi(1) = 2$ et on en déduit que $\psi([1, e]) \subset [1, e]$, et que $\sup\limits_{x\in[1,e]} |\psi'(x)| < 1$.
Donc la fonction ψ est contractante sur $[1, e]$.
On remarque également que sur I, la fonction $x \mapsto \psi(x) - x$ a une dérivée négative. Elle est donc strictement décroissante sur I.

2) Soit $E = \{x \in \mathbb{R}^{+*}, (x+1)^x \leqslant x^{x+1}\}$. On a également $E = \{x \in \mathbb{R}^{+*}, \psi(x) \leqslant x\}$. Lorsque $x \in]0, 1[$, on a $(x+1)^x > 1 > x^{x+1}$ et x n'appartient pas à E. Sur I la fonction $x \mapsto \psi(x) - x$ est strictement décroissante et varie de 1 à $-\infty$. Comme elle est continue elle s'annule en un point ℓ et un seul. Il en résulte que $\inf E = \ell$ et ℓ est l'unique point fixe de ψ.
Il résulte des résultats de l'exercice précédent, que, quel que soit le point $x_0 \in [1, e]$, la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \psi(x_n)$ converge vers cet unique point fixe ℓ. Un calcul effectué avec Maple donne $2,293166$ comme valeur approchée de ℓ.

Exercice 2.5

CCP PC 2006, Mines-Ponts MP 2006

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
1) Montrer que f est dérivable en 0.

2) Montrer que f une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3) En admettant que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0, déterminer les cinq premiers termes du développement limité de f^{-1} au voisinage de 0.

1) Montrons que f est dérivable en 0. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$. Comme $\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} 1$, on a alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 1$.
Donc, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a $f'(x) = \dfrac{(2x^2-1)e^{x^2}+1}{x^2}$. La fonction f' est du même signe sur $\mathbb{R}^*$ que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (2x^2-1)e^{x^2}+1$.
Cette fonction u est dérivable et l'on a $u'(x) = 2x(2x^2+1)e^{x^2}$. On en déduit que $u'(x)$ est du signe de x. Alors u est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et puisque $u(0) = 0$, on en déduit que u, et donc également f', sont strictement positives sur $\mathbb{R}^*$. En outre $f'(0) > 0$. On en conclut que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Conclusion : la fonction f est une application bijective de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[= \mathbb{R}$.
3)

Remarque
On peut montrer que f est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en utilisant les séries entières.

Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 et que $f'(0) \neq 1$, alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de $f(0) = 0$, donc admet des développements limités de tous ordres. Par ailleurs, la fonction f est impaire, donc f^{-1} est également impaire. La fonction f^{-1} admet donc un développement limité au voisinage de 0 de la forme $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$.
On a facilement le développement limité de f à l'ordre 5. En effet, puisque $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, on obtient

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6), \quad \text{d'où} \quad f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5).$$

En effectuant le développement limité de $f^{-1} \circ f$ à l'ordre 5 au voisinage de 0, on obtient

$$(f^{-1} \circ f)(x) = af(x) + bf(x)^3 + cf(x)^5 + o(x^5).$$

Par ailleurs

$$(f(x))^3 = x^3 + \frac{3x^5}{2} + o(x^5), \quad \text{et} \quad (f(x))^5 = x^5 + o(x^5).$$

D'où
$$(f^{-1} \circ f)(x) = ax + \left(\frac{a}{2} + b\right) x^3 + \left(\frac{a}{6} + \frac{3b}{2} + c\right) x^5 + o(x^5)\,.$$

D'autre part, pour tout x réel, $f^{-1} \circ f(x) = x$. Ainsi, par unicité du développement limité, on obtient le système $a = 1$, $\frac{a}{2} + b = \frac{a}{6} + \frac{3b}{2} + c = 0$ d'où l'on tire $b = -1/2$ et $c = 7/12$.

On a finalement $f^{-1}(x) = x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{7x^5}{12} + o(x^5)\,.$

Exercice 2.6

CCP PC 2006

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, et soit $f \in \mathscr{C}^3(I, \mathbb{R})$ où $I =]\,a - r,\ a + r\,[$.
Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h)$, où

$$\varphi(h) = \frac{1}{h^3}\big(f(a + 3h) - 3f(a + 2h) + 3f(a + h) - f(a)\big)\,.$$

On va appliquer la formule de Taylor-Young. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $]\,a - r,\ a + r\,[$, on a, pour h assez petit, les relations

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(a) + o(h^3)\,.$$

$$f(a + 2h) = f(a) + 2hf'(a) + 2h^2 f''(a) + \frac{4h^3}{3} f^{(3)}(a) + o(h^3)\,.$$

$$f(a + 3h) = f(a) + 3hf'(a) + \frac{9h^2}{2} f''(a) + \frac{9h^3}{2} f^{(3)}(a) + o(h^3)\,.$$

D'où $\quad f(a + 3h) - 3f(a + 2h) + 3f(a + h) - f(a) = h^3 f^{(3)}(a) + o(h^3)\,.$
Alors $\varphi(h) = f^{(3)}(a) + o(1)$ et donc $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = f^{(3)}(a)$.

Exercice 2.7

Centrale PC 2005

Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^{x^x}}{x^x - 1}\,.$

Rappelons que x^{x^x} désigne $x^{(x^x)}$ et non $(x^x)^x$. Nous allons déterminer un équivalent du numérateur (resp. dénominateur), au voisinage de 0^+.
Soit $x \in]\,0, +\infty\,[$, on a par définition $x^x = e^{x \ln x}$. Sachant que $x \ln x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+, on peut alors écrire $x^x = 1 + x \ln x + o(x \ln x)$. Ainsi, au voisinage de 0^+, on obtient $x^x - 1 = x \ln x + o(x \ln x) \sim x \ln x\,.$

On a ensuite $x^{x^x} = e^{x^x \ln x} = e^{\ln x + x(\ln x)^2 + o(x(\ln x)^2)} = x e^{x(\ln x)^2 + o(x(\ln x)^2)}$. Comme $x(\ln x)^2$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+, on en déduit que, au voisinage de 0^+, on a $x^{x^x} \sim x$. Finalement $\dfrac{x^{x^x}}{x^x - 1} \sim \dfrac{1}{\ln x}$, et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^{x^x}}{x^x - 1} = 0$.

Exercice 2.8

Navale PSI 2005

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et positives sur $]0, +\infty[$, avec f' décroissante et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et $g \underset{x \to +\infty}{=} o(f/f')$.

Montrer que $f(x + g(x)) \underset{x \to +\infty}{\sim} f(x)$.

Remarquons que les hypothèses impliquent que f est strictement croissante et positive sur $]0, +\infty[$ donc est strictement positive.

Nous allons montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x + g(x))}{f(x)} = 1$.

Soit $x \in]0, +\infty[$. Comme $g(x) \geqslant 0$, on a $x \leqslant x + g(x)$. Si $g(x) > 0$ alors, en appliquant le théorème des accroissements finis, il existe $c(x)$ dans $]x, x + g(x)[$ tel que $f(x + g(x)) - f(x) = g(x) f'(c(x))$. Mais f' est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc $f'(c(x)) \leqslant f'(x)$. En utilisant également la croissance de f, on en déduit l'encadrement

$$0 \leqslant \frac{f(x + g(x))}{f(x)} - 1 = \frac{f(x + g(x)) - f(x)}{f(x)} \leqslant \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}.$$

Ces inégalités restent vraies si $g(x) = 0$.

Sachant que par hypothèse $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x) f'(x)}{f(x)} = 0$, on a le résultat en vertu du théorème d'encadrement.

Exercice 2.9

Saint Cyr PSI 2005

A l'aide de Maple, faire l'étude locale au voisinage de $1/2$ de la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 1) \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2x - 1}$: tangentes, demi-tangentes, position de la courbe ; étude des branches infinies.

Les calculs peuvent être faits « à la main », en voici le détail.

- Posons $u = x - 1/2$. On a $f(x) = \left(u^2 + u - \dfrac{3}{4}\right) \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2u}$. Pour $u > 0$, on a $\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2u} = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(2u) = \dfrac{\pi}{2} - 2u + o(u^2)$.

D'où $f(u) = -\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi+3}{2}u + \dfrac{\pi-4}{2}u^2 + o(u^2)$. La courbe admet donc une demi-tangente à droite d'équation $y = -\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi+3}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$, et puisque $f(x) - \left(-\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi+3}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right) \sim \dfrac{\pi-4}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 < 0$, la courbe est localement située au-dessous de sa demi-tangente.

Pour $u < 0$, on a $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2u} = -\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(2u) = -\dfrac{\pi}{2} - 2u + o(u^2)$.

D'où $f(u) = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{-\pi+3}{2}u + \dfrac{-\pi-4}{2}u^2 + o(u^2)$. La courbe admet donc une demi-tangente à gauche d'équation $y = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{-\pi+3}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$, et puisque $f(x) - \left(\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{-\pi+3}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right) \sim \dfrac{-\pi-4}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 < 0$, la courbe est de nouveau située localement au-dessous de sa demi-tangente.

• Posons $u = 1/(2x-1)$. On a $u = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)$ et

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{u}+\frac{1}{u^2}\right)-1\right)\operatorname{Arctan} u\\
&= \left(\frac{1}{4u^2}+\frac{1}{2u}-\frac{3}{4}\right)\left(u-\frac{u^3}{3}+o(u^3)\right)\\
&= \frac{1}{u}\left(\frac{1}{4}+\frac{u}{2}-\frac{3u^2}{4}\right)\left(1-\frac{u^2}{3}+o(u^2)\right)\\
&= \frac{1}{u}\left(\frac{1}{4}+\frac{u}{2}-\frac{5u^2}{6}+o(u^2)\right) = \frac{1}{4u}+\frac{1}{2}-\frac{5u}{6}+o(u)\\
&= \frac{x}{2}+\frac{1}{4}-\frac{5}{6(2x-1)}+o\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

La courbe admet comme asymptote la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$, et puisque $f(x) - \left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\right) \sim -\dfrac{5}{6(2x-1)}$, la courbe est au-dessus de son asymptote lorsque x tend vers $-\infty$ et au-dessous lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 2.10

Mines-Ponts PC 2005

On définit une fonction f par $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$.

1) Déterminer le domaine de définition de cette fonction.

2) Montrer que f est prolongeable en une fonction dérivable au point 0. On note $\mathscr{C}_f$ le graphe de la fonction ainsi prolongée.

3) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, et déterminer la position locale de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.

4) *Questions de la rédaction :* Etudier les variations de f ainsi que le comportement de f en $+\infty$ et en -1.

1) La fonction est définie lorsque $1+x > 0$ et $x \neq 0$, donc $\mathscr{D}_f =]-1,\, 0[\, \cup\,]0,\, +\infty[$.

2) et 3) Ces deux questions se traitent en effectuant un développement limité de f au voisinage de 0. Il faut un développement d'ordre 1 pour obtenir la dérivabilité et l'équation de la tangente en 0. Pour obtenir la position de la courbe par rapport à sa tangente, on poursuivra le développement limité jusqu'à obtenir un terme non nul. Ici l'ordre 2 suffira.

Faisons donc un développement limité à l'ordre 2 en 0. En réduisant f au même dénominateur, on obtient $f(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$ et au voisinage de 0, on a $x\ln(1+x) \sim x^2$. En raison de la division par x^2, il faut donc partir d'un développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 4. On obtient

$$f(x) = \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)} - 1\right).$$

En utilisant ensuite le développement limité $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$, on trouve celui de $g(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}$

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}\right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{8} + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} + o(x^3). \end{aligned}$$

Alors $f(x) = \dfrac{g(x) - 1}{x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{12} + \dfrac{x^2}{24} + o(x^2)$.

On peut donc répondre aux questions posées :

• La fonction f se prolonge en 0 par la valeur $1/2$.

• La fonction f prolongée est dérivable en 0 et $f'(0) = -1/12$. L'équation de la tangente en 0 est $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{12}$.

• La position de la courbe par rapport à sa tangente est donnée par le signe de la différence $f(x) - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{12}\right) = \dfrac{x^2}{24} + o(x^2) \sim \dfrac{x^2}{24}$ et ce signe est positif au voisinage de 0. La courbe est donc au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

4) La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{0\}$, on a

$$f'(x) = \frac{-x^2 + (1+x)(\ln(1+x))^2}{(1+x)x^2(\ln(1+x))^2},$$

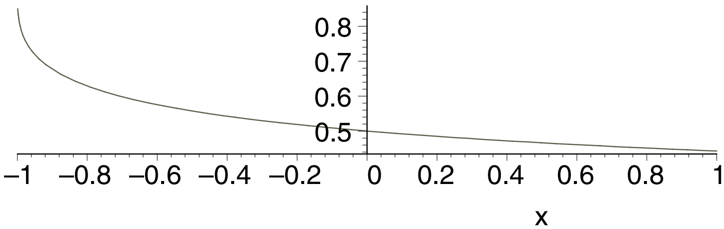
et $f'(x)$ est du signe de $g(x) = -x^2 + (1+x)(\ln(1+x))^2$. On étudie les variations de g. Cette fonction est deux fois dérivable et l'on a successivement $g'(x) = -2x + (\ln(1+x))^2 + 2\ln(1+x)$ puis $g''(x) = 2\,\dfrac{\ln(1+x) - x}{1+x}$. Enfin en étudiant $h(x) = \ln(1+x) - x$ qui est dérivable, on a $h'(x) = -\dfrac{x}{1+x}$.

Donc $h'(x)$ est du signe de $-x$. Il en résulte que h atteint son maximum en 0. Comme $h(0) = 0$, on en déduit que h, donc g'', est négative.

Alors g' est décroissante et s'annule en 0. Il en résulte que $g'(x)$ est du signe de $-x$ et que g atteint son maximum en 0. Comme $g(0) = 0$ on en déduit que g et donc f' sont négatives. Alors f est décroissante sur $]-1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Comme f est continue sur $]-1, +\infty[$, on déduit des résultats précédents que f est décroissante sur $]-1, +\infty[$.

On obtient facilement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc l'axe Ox est asymptote horizontale.

On a également $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 1$ donc f se prolonge par continuité en -1 par la valeur 1. Etudions si f se prolonge en une fonction dérivable en -1. On a $\dfrac{f(x)-1}{x+1} = \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)} - \dfrac{1}{x}$ et cette expression tend vers $-\infty$ en -1. La fonction f ne se prolonge pas en une fonction dérivable en -1, mais sa courbe représentative aura une demi-tangente verticale en ce point.



Exercice 2.11

CCP PC 2005

Soit $\mathscr{G}$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'identité

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x+y) + g(x-y) = 2[g(x) + g(y)]. \qquad (*)$$

Soit $g \in \mathscr{G}$.

1) Montrer que $g(0) = 0$ et que g est paire.

2) Montrer que, pour tout $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on a $g(nx) = n^2 g(x)$.

3) En déduire que, pour tout $(x,r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, on a $g(rx) = r^2 g(x)$.

4) En déduire quels sont les éléments de l'ensemble $\mathscr{G}$.
5) Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ vérifiant l'identité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)f(x-y) = [f(x)f(y)]^2. \qquad (**)$$

Déduire de la question précédente quels sont les éléments de l'ensemble $\mathscr{F}$.

1) En prenant $x = y = 0$ dans $(*)$, on obtient $2g(0) = 4g(0)$ et donc $g(0) = 0$. En choisissant à présent $x = 0$ et y quelconque dans $(*)$ et sachant que $g(0) = 0$, on obtient $g(y) + g(-y) = 2g(y)$, donc $g(-y) = g(y)$ et g est alors paire.

2) Pour établir l'égalité $g(nx) = n^2 g(x)$, pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on procède par récurrence. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. L'égalité recherchée est clairement vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons la vérifiée jusqu'à l'ordre $n \geqslant 1$. On a alors, en remplaçant x par nx et y par x dans $(*)$,

$$g(nx + x) + g(nx - x) = 2[g(nx) + g(x)],$$

soit, en appliquant l'hypothèse de récurrence,

$$g((n+1)x) + (n-1)^2 g(x) = 2[n^2 g(x) + g(x)].$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} g((n+1)x) &= g(x)[2n^2 + 2 - (n-1)^2] \\ &= g(x)[n^2 + 2n + 1], \end{aligned}$$

d'où $g((n+1)x) = (n+1)^2 g(x)$ qui est l'égalité cherchée à l'ordre $n+1$. Donc, par récurrence, l'égalité est toujours vraie.

3) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On a $x = q \cdot \dfrac{x}{q}$, donc $g(x) = q^2 g\left(\dfrac{x}{q}\right)$, d'où $g\left(\dfrac{x}{q}\right) = \dfrac{1}{q^2} g(x)$.

Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. On a $rx = p \cdot \dfrac{x}{q}$, donc $g(rx) = p^2 g\left(\dfrac{x}{q}\right) = \dfrac{p^2}{q^2} g(x) = r^2 g(x)$.

4) On en déduit que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $g(r) = r^2 g(1)$. Soit g_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_1(x) = x^2 g(1)$. Les fonctions g et g_1 sont continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$. Or, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc g et g_1 coïncident sur $\mathbb{R}$ et par conséquent $g(x) = Ax^2$, avec $A = g(1)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, une fonction du type $x \longmapsto Ax^2$, avec $A \in \mathbb{R}$ quelconque, vérifie l'identité $(*)$.
Conclusion : $\mathscr{G} = \left\{x \longmapsto Ax^2 \ ; \ A \in \mathbb{R}\right\}$.

5) Soit $f \in \mathscr{F}$; comme l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}^*$. Par conséquent, ou bien $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{+*}$ ou $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{-*}$. Dans les deux cas, $|f|$ est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$ et l'on a alors l'équivalence $f \in \mathscr{F} \iff \ln|f| \in \mathscr{G}$. Par conséquent, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln|f(x)| = Ax^2$, d'où $|f(x)| = e^{Ax^2}$ et $f(x) = \varepsilon e^{Ax^2}$, avec $\varepsilon = \pm 1$.
Conclusion : $\mathscr{F} = \left\{x \longmapsto \varepsilon e^{Ax^2} \ ; \ \varepsilon = \pm 1 \text{ et } A \in \mathbb{R}\right\}$.

2.2 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 2.12

TPE PC 2006 K

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln x$.
1) En appliquant la formule de Leibniz, calculer $f_n^{(n)}$.

2) Etablir que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Indication de la rédaction : on pourra écrire, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1} dx$.

3) En déduire un équivalent de $f_n^{(n)}(1/n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \mapsto g_n(x) = x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout entier $k \leqslant n$, on a $g_n^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k}$.
Pour $x > 0$, posons $h(x) = \ln x$. On démontre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $h^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$. En appliquant la formule de Leibniz, on aura donc $f^{(n)} = (g_n h)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)} g_n^{(n-k)}$, d'où, en isolant le premier terme,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= n!\ln x + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \frac{n!}{k!} x^k \\ &= n! \left(\ln x + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right). \end{aligned}$$

2) L'expérience montre que sans l'indication proposée cette question est difficile.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1} dx$.

On obtient alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} x^{k-1} \right) dx$.

Mais, pour $x > 0$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{-1}{x} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k$.
On déduit alors de la formule du binôme de Newton

$$\frac{-1}{x} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{-1}{x} \left((-x+1)^n - 1\right) = \frac{1-(1-x)^n}{x}.$$

En appliquant l'identité remarquable $1-u^n=(1-u)(1+u+\cdots+u^{n-1})$, on obtient $\dfrac{1-(1-x)^n}{x}=\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1}(1-x)^\ell$, puis, on intègre sur $[0,\ 1]$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{\ell=0}^{n-1}\int_0^1(1-x)^\ell dx=\sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{(1-x)^{\ell+1}}{\ell+1}\right]_0^1=\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{\ell+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

ce qui donne finalement l'égalité voulue.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $f_n^{(n)}(1/n)=n!\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$.

Sachant que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$ converge vers la constante d'Euler γ (voir par exemple notre livre d'Analyse de première année), on obtient

$$f_n^{(n)}(1/n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\gamma n!.$$

Exercice 2.13

Mines-Ponts PC 2006 et 2007 KK

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par la relation

$$f(x)=x^2\frac{\sin(\pi/x^2)}{\sin(\pi/x)}$$

Montrer que f se prolonge par continuité à $\mathbb{R}$.

Indication de la rédaction On pourra introduire la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ par $g(u)=\dfrac{\sin(\pi u^2)}{u\sin(\pi u)}$.

• La fonction f n'est pas définie pour $x=0$, et pour toutes les valeurs annulant $\sin(\pi/x)$ c'est-à-dire pour $x\in\{1/p\mid p\in\mathbb{Z}^*\}$.

• Etudions la fonction f en ces points.

Puisque f est impaire, il suffit de prolonger f aux points $1/n$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En remarquant que $f(x)=xg(1/x)$, où g est définie, sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ par $g(u)=\dfrac{\sin(\pi u^2)}{u\sin(\pi u)}$, il suffit d'étudier le comportement de $g(u)$ lorsque u tend vers l'entier n. En posant $u=n+h$, on a

$$g(n+h)=\frac{\sin(\pi(n+h)^2)}{(n+h)\sin(\pi(n+h))}=\frac{\sin(\pi(h^2+2nh))}{(n+h)\sin(\pi h)}.$$

On en déduit $g(n+h)\underset{h\to0}{\sim}\dfrac{\pi 2nh}{n\pi h}=2$. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{x\to1/n}f(x)=2/n$.

La fonction f se prolonge par continuité au point $1/n$ en posant $f(1/n)=2/n$.

• Il reste à étudier le comportement de f en 0. Revenons à la fonction g. Lorsque u tend vers 0, on a $g(u) \sim \dfrac{\pi u^2}{u\pi u} = 1$ donc g se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1. Comme elle se prolonge aussi en 1 par la valeur 2, c'est une fonction continue sur le segment $[0,\ 1]$ et elle est bornée. Soit M la borne supérieure de $|g|$ sur cet intervalle. On a donc $M \geqslant g(1) = 2$.

Nous allons montrer que M est alors la borne supérieure de $|g|$ sur $\mathbb{R}^+$. Soit $u \in]0, +\infty[$ et soit n sa partie entière. Alors $u - n$ appartient à $[0,\ 1]$ et $|g(u-n)| \leqslant M$, donc

$$|\sin(\pi(u-n)^2)| \leqslant M(u-n)|\sin(\pi(u-n))| = M(u-n)|\sin(\pi u)|\,.$$

Alors, en écrivant $u^2 = (u-n)^2 + 2nu + n^2$, on obtient $\sin(\pi u^2) = \sin[\pi(u-n)^2]\cos(2un\pi) + \cos[\pi(u-n)^2]\sin(2un\pi)$, et donc

$$|\sin(\pi u^2)| \leqslant M(u-n)|\sin(\pi u)| + |\sin(2un\pi)|\,.$$

Mais on démontre facilement par récurrence, que, quel que soit u réel et $n \in \mathbb{N}$, on a $|\sin(nu\pi)| \leqslant n|\sin(u\pi)|$ et comme $M \geqslant 2$ on en déduit

$$|\sin(\pi u^2)| \leqslant M(u-n)|\sin(u\pi)| + 2n|\sin(u\pi)| \leqslant Mu|\sin(\pi u)|\,.$$

Il en résulte que g est majorée par M sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que pour tout x réel positif on a $|f(x)| \leqslant Mx$, et donc $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. On peut donc prolonger f par continuité en 0 par $f(0) = 0$.

Exercice 2.14

Centrale PSI 2006 K

La première question de cet exercice utilise un résultat sur les séries entières.

Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{1-4t}} - \dfrac{1}{t}$ pour $t \in]-\infty,\ 1/4[\,\setminus\{0\}$.

1) Montrer que f admet un prolongement en 0 qui la rend $\mathscr{C}^\infty$.
2) Dresser le graphe de f. Etudier sa convexité.

1) En utilisant la série du binôme (voir chapitre « Séries entières »), la fonction $t \mapsto (1-4t)^{-1/2}$ admet un développement en série entière de rayon $1/4$ de la forme $(1-4t)^{-1/2} = 1+2t+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n$. Alors si $t \neq 0$, on obtient $f(t) = 2+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n t^{n-1}$. La fonction f se prolonge en 0 par la valeur 2, et comme elle admet un développement en série entière au voisinage de 0, le prolongement est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0. Comme la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty,\ 1/4[\,\setminus\{0\}$, le prolongement sera $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty,\ 1/4[$.

2) Les calculs suivants peuvent se faire à la main, on peut aussi préférer utiliser un des logiciels de calcul formel disponibles à l'oral de Centrale.

• Sur $]-\infty, 1/4[\setminus\{0\}$, on a successivement $f'(t) = \dfrac{6t - 1 + (1-4t)^{3/2}}{t^2(1-4t)^{3/2}}$, puis

$$f''(t) = 2\,\frac{30t^2 - 10t + 1 - (1-4t)^{5/2}}{t^3(1-4t)^{5/2}}.$$

Pour étudier le signe de f'', posons $u = \sqrt{1-4t}$, c'est-à-dire $t = (1-u^2)/4$, avec $u \geqslant 0$. On obtient alors

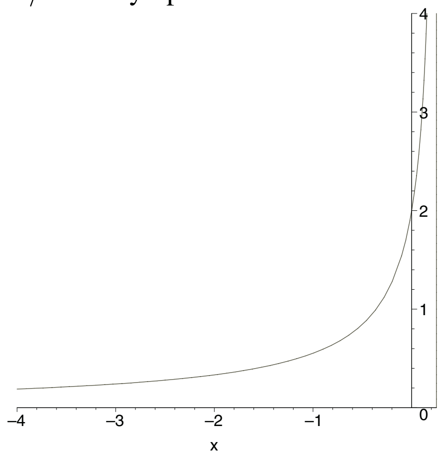
$$30t^2 - 10t + 1 - (1-4t)^{5/2} = -u^5 + \frac{15u^4}{8} - \frac{5u^2}{4} + \frac{3}{8} = \frac{(8u^2+9u+3)(1-u)^3}{8},$$

donc $f''(t) = 16\,\dfrac{(8u^2+9u+3)(1-u)^3}{u^5(1-u^2)^3} = 16\,\dfrac{(8u^2+9u+3)}{u^5(1+u)^3}$. Alors f'' est positive et la fonction f est convexe. Il en résulte que f' est croissante, Et puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$, on en déduit que f' est positive. Donc f est croissante.

Remarque

On pourrait étudier directement le signe de f' en utilisant encore le changement de variable $u = \sqrt{1-4t}$.

• On complète l'étude de la fonction f avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, donc l'axe Ox est asymptote horizontale de la courbe représentative de f, et $\lim\limits_{x\to 1/4} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1/4$ est asymptote verticale.



Exercice 2.15

Centrale PSI 2007 KK

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant \pi/2} |xt - \sin t|$.

Exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles en distinguant trois cas : d'une part $x \leqslant 0$, d'autre part $1 \leqslant x$ et enfin $0 < x < 1$.
Tracer le graphe de f à l'aide de Maple.

• Soit x un réel, exprimons $f(x)$ de façon simple.

La fonction g_x, définie sur $[0, \pi/2]$ par $g_x(t) = xt - \sin t$, est dérivable sur $[0, \pi/2]$ et $g_x'(t) = x - \cos t$.

– Lorsque $x \geqslant 1$, $g_x'(t)$ est positif, et g_x croit de 0 à $x\pi/2-1$, donc $f(x) = x\pi/2-1$.

– Lorsque $x \leqslant 0$, $g_x'(t)$ est négatif, et g_x décroit de 0 à $x\pi/2 - 1$, donc $f(x) = 1 - x\pi/2$.

– Lorsque $x \in]0, 1[$, la dérivée g_x' s'annule en $t = \operatorname{Arccos} x$. Elle est négative sur $[0, \operatorname{Arccos} x]$ et la fonction g_x décroît de 0 à $g_x(\operatorname{Arccos} x)$. Ce nombre est donc négatif.

La dérivée g_x' est positive sur $[\operatorname{Arccos} x, \pi/2]$ et la fonction g_x croît de $g_x(\operatorname{Arccos} x)$ à $x\pi/2 - 1$.
Sachant que, pour $y \in [0, \pi]$, on a

$$\sin(\operatorname{Arccos} y) = \sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{Arccos} y)} = \sqrt{1 - y^2},$$

on en déduit alors que $g_x(\operatorname{Arccos} x) = x \operatorname{Arccos} x - \sqrt{1 - x^2}$.
Lorsque x appartient à l'intervalle $]0, 2/\pi]$, on a alors

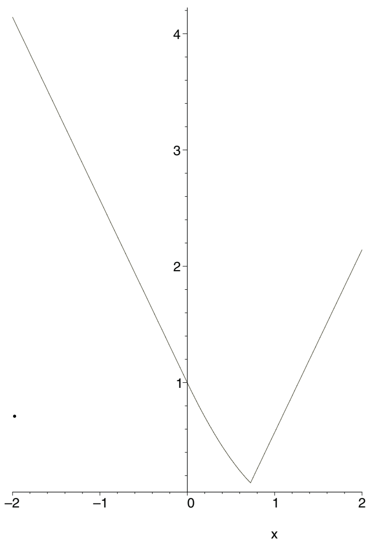
$$f(x) = -g_x(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1 - x^2} - x \operatorname{Arccos} x .$$

Lorsque x appartient à l'intervalle $]2/\pi, 1[$, on a

$$f(x) = \max(\sqrt{1 - x^2} - x \operatorname{Arccos} x, \frac{x\pi}{2} - 1).$$

En étudiant sur $]2/\pi, 1[$ la fonction φ définie par $\varphi : x \mapsto x\dfrac{\pi}{2} - 1 + x \operatorname{Arccos} x - \sqrt{1 - x^2}$ dont la dérivée $\varphi' : x \mapsto \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{Arccos} x$ est strictement positive, on constate que φ est strictement croissante et qu'elle s'annule en une valeur et une seule x_0. Un logiciel de calcul formel donne $0,7246113538$ comme valeur approchée de x_0 et $0,1382168528$ comme valeur approchée de $f(x_0)$.
En résumé

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\pi}{2} - 1 & \text{si } x \in [x_0, +\infty[\\ \sqrt{1 - x^2} - x \operatorname{Arccos} x & \text{si } x \in]0, x_0] \\ 1 - \dfrac{x\pi}{2} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases} .$$



Ci-contre la courbe représentative de f.

Exercice 2.16

Centrale PSI 2005

On considère l'espace vectoriel E des fonctions $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0) = f(1)$.

1) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall f \in E$, $\exists x \in [0,1]$, $f(x) = f(x + 1/p)$.

2) Pour $f(x) = \sin(2\pi x)$, déterminer l'ensemble A des $a \in [0,1]$ tels qu'il existe $x \in [0,1]$ vérifiant $f(x) = f(x+a)$.

3) *Question de la rédaction :* Soit c un réel dans $]0,1]$ qui n'est pas l'inverse d'un entier. Montrer qu'il existe une fonction f continue sur $[0,1]$, telle que $f(0) = f(1)$ et telle que $f(x+c) - f(x)$ ne s'annule pas sur $[0, 1-c]$. On pourra chercher f sous la forme $x \mapsto \cos(\alpha x) + \beta x$.

1) Soit p fixé dans $\mathbb{N}^*$ et soit $f \in E$. Introduisons la fonction g définie sur $[0, 1-1/p]$ par $g(x) = f(x) - f(x+1/p)$. La fonction g est continue sur $[0, 1-1/p]$ et l'on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} g(k/p) = f(0) - f(1) = 0$. Il en résulte que les nombres $g(k/p)$ pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$ ne peuvent être tous strictement positifs ou tous strictement négatifs. Il existe donc deux entiers k_1 et k_2 tels que $g(k_1/p) \geqslant 0$ et $g(k_2/p) \leqslant 0$. Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe x compris entre k_1/p et k_2/p, donc appartenant à $[0,1]$, tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(x) = f(x+1/p)$.

2) Soit $a \in [0,1]$. Résolvons l'équation $\sin(2\pi(x+a)) = \sin(2\pi x)$. Il y a deux possibilités :

ou bien $2\pi(x+a) = 2\pi x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ce qui donne $a = k$ avec x quelconque. On a donc uniquement $a = 0$ ou $a = 1$,

ou bien $2\pi(x+a) = \pi - 2\pi x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $x = \dfrac{1-2a+2k}{4}$.

Cherchons quand x appartient à $[0,1]$. On obtient que $0 \leqslant x \leqslant 1$ est équivalent à $-3/2 + k \leqslant a \leqslant 1/2 + k$. En particulier ces inégalités sont vérifiées pour tout a de $[0,1]$ en prenant $k = 1$.

Il en résulte que pour tout a de $[0,1]$, il existe x dans $[0,1]$ tel que $f(x+a) = f(x)$. Il suffit de prendre $x = (3-2a)/4$. On a donc $A = [0,1]$.

3) Cherchons une telle fonction sous la forme proposée dans l'énoncé. La première condition $f(0) = f(1)$ impose $\beta = 1 - \cos\alpha$.

On a alors $f(x+c) - f(x) = \cos(\alpha(x+c)) - \cos(\alpha x) + c(1-\cos\alpha)$. Si $\alpha c = 2\pi$, on a alors $f(x+c) - f(x) = c(1-\cos(\alpha)) = c(1-\cos(2\pi/c))$. Comme c n'est pas l'inverse d'un entier cette quantité est non nulle pour tout x dans $[0, 1-c]$. La fonction $f : x \mapsto \cos(2\pi x/c) + x(1-\cos(2\pi/c))$ remplit bien les conditions proposées.

Exercice 2.17

Mines-Ponts PC 2005

Soit $n \geqslant 2$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. Montrer que si P a n racines réelles distinctes, alors $Q = P^2 + 1$ a $2n$ racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

Soient $a_1, \ldots, a_n$ les racines réelles distinctes de P avec $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. L'application du théorème de Rolle dans chacun des $n-1$ intervalles $[\,a_i,\, a_{i+1}\,]$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, montre que P' possède $n-1$ racines réelles distinctes, et comme il est de degré $n-1$ il n'a pas d'autres racines complexes.
Le polynôme Q est de degré $2n$ et possède donc $2n$ racines complexes, comptées avec leur ordre de multiplicité. Supposons par l'absurde que Q possède une racine multiple α. Alors $P^2(\alpha) = -1$, donc $P(\alpha) = \pm i$ n'est pas réel, et puisque P appartient à $\mathbb{R}[X]$, il en résulte que α ne peut pas être réel.
Mais α est aussi racine de $Q' = 2PP'$, et comme α n'est pas racine de P c'est nécessairement une racine non réelle de P', ce qui n'est pas possible. Il en résulte que les racines de Q sont simples, et Q possède $2n$ racines complexes distinctes.

Remarque

Ce résultat est encore vrai pour tout polynôme $Q = P^2 + \omega^2$, où ω appartient à $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2.18

Mines-Ponts PSI 2005 K

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant |f(x)|$.
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant |f(0)|e^{|x|}$.
Indication de la rédaction Montrer que s'il existe un réel a tel que $f(a) = 0$, alors f est identiquement nulle.

• Supposons que f s'annule en un point a.
– Montrons que f est identiquement nulle sur $[\,a, +\infty\,[$. Soit G la primitive de $|f'|$ qui s'annule au point a. Soit $x \in [\,a, +\infty\,[$. Sachant que $f(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt$, on a $|f(x)| \leqslant \displaystyle\int_a^x |f'(t)|\,dt = G(x)$. Or, $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$ d'où $G'(x) \leqslant G(x)$.
La fonction φ définie sur $[\,a, +\infty\,[$ par $\varphi(x) = e^{-x}G(x)$ est dérivable et l'on a $\varphi'(x) = e^{-x}(G'(x) - G(x))$. Comme $\varphi' \leqslant 0$ sur $[\,a, +\infty\,[$, φ est donc décroissante sur $[\,a, +\infty\,[$. Par ailleurs φ est positive et $\varphi(a) = e^{-a}G(a) = 0$. Il en résulte que $\varphi = 0$ sur $[\,a, +\infty\,[$ et donc $G = 0$ sur $[\,a, +\infty\,[$ d'où $f' = 0$ sur $[\,a, +\infty\,[$ et par conséquent $f = 0$ puisque $f(a) = 0$.

– Pour montrer que f est identiquement nulle sur $]-\infty, a]$, on considère la primitive H de $|f'|$ sur $]-\infty, a]$ qui s'annule au point a et on procède de la même façon.

• Supposons maintenant que f ne s'annule en aucun point. On peut considérer la fonction $g = \ln|f|$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = f'/f$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\ln|f(x)| - \ln|f(0)| = \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt \leqslant \int_0^x \left|\frac{f'(t)}{f(t)}\right| dt \leqslant |x| \text{ d'où } |f(x)| \leqslant |f(0)|e^{|x|}.$$

Exercice 2.19

Polytechnique-ESPCI PC 2006 KK

Calculer $\displaystyle\inf_{\alpha\in]0,\pi/2[}\left(\sup_{p\in\mathbb{Z}}\sin(p\alpha)\right)$.

Remarquons tout d'abord que lorsque $\alpha = \pi/3$, le nombre $\sin(p\alpha)$ ne peut prendre que trois valeurs distinctes, $\pm\sqrt{3}/2$ et 0. Donc dans ce cas $\displaystyle\sup_{p\in\mathbb{Z}}\sin(p\alpha) = \sqrt{3}/2$.

Nous allons montrer que pour tout $\alpha \in]0, \pi/2[$, on a $\displaystyle\sup_{p\in\mathbb{Z}}\sin(p\alpha) \geqslant \sqrt{3}/2$.

Distinguons deux cas :

• $\alpha \in [\pi/3, \pi/2]$

La fonction sinus étant croissante sur cet intervalle, on a

$$\sup_{p\in\mathbb{Z}}\sin(p\alpha) \geqslant \sin\alpha \geqslant \sin\pi/3 = \sqrt{3}/2.$$

• $\alpha \in]0, \pi/3]$ Soit p le plus petit entier naturel tel que $p\alpha \geqslant \pi/3$. On a donc $(p-1)\alpha < \pi/3$ d'où $p\alpha \leqslant \alpha + \pi/3 \leqslant 2\pi/3$. Alors, de l'encadrement $\pi/3 \leqslant p\alpha \leqslant 2\pi/3$ il résulte que $\sin(p\alpha) \geqslant \sin\pi/3 = \sqrt{3}/2$.

Dans tous les cas, on a $\displaystyle\sup_{p\in\mathbb{Z}}\sin(p\alpha) \geqslant \sqrt{3}/2$.

Alors $\displaystyle\inf_{\alpha\in]0,\pi/2[}\left(\sup_{p\in\mathbb{Z}}\sin(p\alpha)\right) \geqslant \sqrt{3}/2$, et la borne inférieure est atteinte pour $\alpha = \pi/3$ d'où l'on déduit finalement $\displaystyle\inf_{\alpha\in]0,\pi/2[}\left(\sup_{p\in\mathbb{Z}}\sin(p\alpha)\right) = \sqrt{3}/2$.

3 Intégration sur un segment

3.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

3.1.1 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Ce qu'il faut savoir

Soit I un intervalle contenant au moins deux points. Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

• Soit $x_0 \in I$. La fonction définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

• Soient J un intervalle contenant au moins deux points, u et v deux fonctions dérivables sur J à valeurs dans I. Alors la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ est dérivable sur J et, pour tout $x \in J$, on a $G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

Exercice 3.1

CCP MP 2006

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 1/2$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) = x_0$.
Indication de la rédaction : considérer une primitive de $x \mapsto f(x) - x$.

On considère la fonction φ définie sur $[0,1]$ par $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - \frac{x^2}{2}$.

Puisque f est continue sur $[0,1]$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0,1]$, donc φ est dérivable sur $[0,1]$ et $\varphi'(x) = f(x) - x$. En outre, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Le théorème de Rolle entraîne alors l'existence d'un réel $x_0 \in]0,1[$ tel que $\varphi'(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) - x_0 = 0$.

Exercice 3.2

ENSEA MP 2005, CCP PSI 2006

Soit la fonction Φ définie par la relation

$$\Phi(x) = \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,dt.$$

1) Montrer que Φ est bien définie sur $\mathbb{R}$, paire et π-périodique.
2) Etablir que Φ est constante.
3) En déduire la valeur des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,dt$.

1) • Les fonctions $g : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\sqrt{x}$ et $h : x \mapsto \operatorname{Arccos}\sqrt{x}$ sont continues sur $[0, 1]$. On note G et H leurs primitives respectives qui s'annnulent en 0. Comme les fonctions $u : x \mapsto \sin^2 x$ et $v : x \mapsto \cos^2 x$ sont à valeurs dans $[0, 1]$, les fonctions $G \circ u$ et $H \circ v$ sont bien définies sur $\mathbb{R}$, donc Φ est bien définie.
• Comme les fonctions u et v sont paires et π-périodiques, Φ l'est aussi.

2) Puisque Φ est paire et π-périodique,il suffit de l'étudier sur le segment $[0, \pi/2]$. En outre Φ est dérivable en tant que somme et composée de fonctions dérivables et l'on a pour tout $x \in [0, \pi/2]$

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= G'(u(x))u'(x) + H'(v(x))v'(x)\\ &= \operatorname{Arcsin}\sqrt{\sin^2 x}\,2\sin x\cos x - \operatorname{Arccos}\sqrt{\cos^2 x}\,2\sin x\cos x.\end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $\sqrt{\sin^2 x} = \sin x$ car $\sin x \geqslant 0$ et donc $\operatorname{Arcsin}(\sqrt{\sin^2 x}) = \operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$. De même $\operatorname{Arccos}(\sqrt{\cos^2 x}) = x$, donc $\forall x \in [0, \pi/2]$, $\Phi'(x) = 0$.
On en déduit que Φ est constante sur $[0, \pi/2]$, puis sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par parité, et enfin sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

3) On remarque que les deux intégrales à calculer sont $\Phi(0)$ et $\Phi(\pi/2)$.
On va calculer la valeur de Φ en $\pi/4$.

$$\begin{aligned}\Phi(\pi/4) &= \int_0^{1/2} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,dt + \int_0^{1/2} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,dt\\ &= \int_0^{1/2} (\operatorname{Arccos}\sqrt{t} + \operatorname{Arcsin}\sqrt{t})\,dt\end{aligned}$$

Mais, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \pi/2$ d'où

$$\Phi(\pi/4) = \int_0^{1/2} \pi/2\,dt = \pi/4\,.$$

Finalement, $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,dt = \int_0^1 \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,dt = \pi/4$.

Remarque 1

Ces intégrales peuvent se calculer à l'aide du changement de variable $u = \operatorname{Arccos}\sqrt{t}$ suivi d'une intégration par parties.

Remarque 2

Les formules suivantes :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad , \quad \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad , \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(1/x) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x$$

ont été démontrées dans le livre d'Analyse de première année exercice 6.6 page 90. Il est très utile de les retenir.

3.1.2 Inégalités et intégrales

Ce qu'il faut savoir

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Voir exercice 3.4 pour étudier le cas d'égalité.

- Si f et g sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si $g \leqslant f$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt$;

en particulier si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.

Remarque très utile dans la pratique

Si f est positive et continue sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors $f = 0$ sur $[a, b]$.

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$\left|\int_a^b \overline{f(t)}g(t)\,dt\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \times \left(\int_a^b |g(t)|^2\,dt\right)^{1/2} .$$

Le cas d'égalité se produit si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Exercice 3.3

CCP MP 2005

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On note M (resp. m) le maximum (resp. le minimum) de f sur $[0,1]$.

Montrer que si $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$, alors $\int_0^1 (f(t))^2\,dt \leqslant -mM$.

Les fonctions $f-m$ et $M-f$ sont positives, donc $\int_0^1 (f(t)-m)(M-f(t))\,dt \geqslant 0$.

En développant, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f(t)-m)(M-f(t))\,dt &= (m+M)\int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^1 (f(t))^2\,dt - mM \\ &= -\int_0^1 (f(t))^2\,dt - mM \geqslant 0,\end{aligned}$$

d'où $\int_0^1 (f(t))^2\,dt \leqslant -mM$.

Exercice 3.4

TPE PC 2007, CCP MP 2006

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ vérifiant

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt\,. \qquad (*)$$

1) Montrer que si f est à valeurs réelles, alors $f = |f|$ ou $f = -|f|$.
2) Montrer que si f est à valeurs complexes, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$ tels que $f = e^{i\theta}g$.
Indication de la rédaction : montrer que $g = e^{-i\theta}f$ où θ est un argument de $\int_a^b f(t)\,dt$.

1) Lorsque f est à valeurs réelles, on a $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$, où $f^+(x) = \sup(f(x),0)$ et $f^-(x) = \sup(-f(x),0)$. En outre, f^+ et f^- sont continues positives sur $[a,b]$ puisque f l'est. Posons $A = \int_a^b f^+(t)\,dt$ et $B = \int_a^b f^-(t)\,dt$. L'égalité $(*)$ s'écrit alors $|A-B| = A+B$, ce qui équivaut à $((A-B = A+B)$ ou $(-A+B = A+B))$ et finalement à $((B=0)$ ou $(A=0))$.
Comme f^- est continue et positive sur $[a,b]$, dire que l'intégrale B est nulle, implique que la fonction f^- est la fonction nulle, et donc que f est positive, ce qui donne $|f| = f$. De même, $A = 0$ équivaut à $f^+ = 0$, c'est-à-dire $|f| = -f$.

2) Lorsque f appartient à $\mathscr{C}^0([a,\, b\,],\mathbb{C})$, il existe $\theta \in\,]-\pi,\ \pi\,]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,dt = e^{i\theta}\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \tag{1}$$

Posons $g = e^{-i\theta} f$. En intégrant sur $[\,a,\, b\,]$, on obtient

$$\int_a^b g(t)\,dt = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,dt = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| .$$

Par ailleurs $\displaystyle\int_a^b |g(t)|\,dt = \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt$. Si f vérifie $(*)$, alors on a

$$\int_a^b |g(t)|\,dt = \int_a^b g(t)\,dt \tag{2}$$

En prenant la partie réelle des deux termes de (2), on obtient

$$\int_a^b |g(t)|\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(g(t))\,dt\,, \quad \text{d'où} \quad \int_a^b \big(|g(t)| - \mathrm{Re}\, g(t)\big)\ dt = 0\,.$$

Mais la fonction $|g| - \mathrm{Re}\, g$ est continue, positive (car $|g|^2 = (\mathrm{Re}\, g)^2 + (\mathrm{Im}\, g)^2$) et son intégrale est nulle, elle est donc identiquement nulle sur $[a, b]$. Il en résulte que $|g| = \mathrm{Re}\, g$, donc $\mathrm{Im}\, g = 0$. Par conséquent, g est réelle, et finalement $|g| = g$. La fonction g est donc dans $\mathscr{C}^0([\,a,\, b\,],\mathbb{R}^+)$, et l'on a bien $f = e^{i\theta} g$. Autrement dit l'argument de f est constant.

Remarque
La réciproque est vraie dans les deux cas précédents.

Exercice 3.5

Centrale MP 2007, CCP PC 2007

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Pour tout $h \in E = \mathscr{C}^0([\,a,\, b\,],\ ]0, +\infty\,[\,)$ on pose $\Phi(h) = \left(\displaystyle\int_a^b h(t)\,dt\right) \times \left(\displaystyle\int_a^b \frac{1}{h(t)}\,dt\right)$.

1) Montrer que Φ est minorée sur E et atteint sa borne inférieure.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction h_n définie sur $[\,a,\, b\,]$ par $h_n(x) = e^{nx}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Phi(h_n)$ et en déduire que Φ n'est pas majorée.

3) Déterminer $\Phi(E)$.

1) Montrons que Φ est minorée et atteint sa borne inférieure.

Soit $h \in E$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $f = \sqrt{h}$ et $g = 1/\sqrt{h}$, on obtient $\left(\displaystyle\int_a^b dx\right)^2 \leqslant \left(\displaystyle\int_a^b h(t)\,dt\right) \times \left(\displaystyle\int_a^b \frac{1}{h(t)}\,dt\right)$ c'est-à-dire $(b-a)^2 \leqslant \Phi(h)$. Ainsi Φ est minorée.

Si on exhibe une fonction $h_0 \in F$ telle que $\Phi(h_0) = (b-a)^2$, on aura alors montré que $(b-a)^2$ est la borne inférieure de Φ et qu'elle est atteinte. On prend par exemple la fonction définie pour tout $x \in [\,a,\, b\,]$ par $h_0(x) = 1$. On a donc $\Phi(E) \subset [\,(b-a)^2, +\infty\,[$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\Phi(h_n) &= \left(\int_a^b e^{nx}\,dx\right)\left(\int_a^b e^{-nx}\,dx\right) = \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_a^b \times \left[\frac{1}{-n}e^{-nx}\right]_a^b \\ &= \frac{e^{nb}-e^{na}}{n} \times \frac{e^{-na}-e^{-nb}}{n} \\ &= \frac{(e^{n(b-a)}-1)(1-e^{-n(b-a)})}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{n(b-a)}}{n^2}.\end{aligned}$$

On déduit du théorème de comparaison des puissances et des exponentielles que $\lim_{n\to+\infty} \Phi(h_n) = +\infty$. Il en résulte que Φ n'est pas majorée.

3) Plus généralement, pour tout $\lambda \geqslant 0$, considérons la fonction h_λ définie sur $[\,a,\, b\,]$ par $h_\lambda(x) = e^{\lambda x}$. Pour $\lambda > 0$, un calcul identique à celui de la question 2, donne, $\Phi(h_\lambda) = \dfrac{(e^{\lambda(b-a)}-1)(1-e^{-\lambda(b-a)})}{\lambda^2}$ et ceci peut encore s'écrire $\Phi(h_\lambda) = 4\dfrac{\operatorname{sh}^2\frac{\lambda(b-a)}{2}}{\lambda^2}$. La fonction $f : \lambda \mapsto \Phi(h_\lambda)$ est alors une fonction continue sur $]\,0, +\infty\,[$. Comme au voisinage de 0, on a $\operatorname{sh} u \sim u$, on en déduit que $\lim_{\lambda\to 0} f(\lambda) = (b-a)^2 = f(0)$, et la fonction f est continue sur $[\,0, +\infty\,[$. Par ailleurs, d'après la question 2, la fonction f n'est pas bornée supérieurement. Alors $\Phi(E) \supset f([\,0, +\infty\,[) \supset [\,(b-a)^2, +\infty\,[$. Comme on a l'inclusion inverse, on obtient finalement $\Phi(E) = [\,(b-a)^2, +\infty\,[$.

3.1.3 Intégration par parties et changement de variable

Ce qu'il faut savoir

• **Formule d'intégration par parties**

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a,\, b\,]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

• **Formule du changement de variable**

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \to \mathbb{C}$ continue et $\varphi : J \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$. Soient α et β appartenant à J. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Remarque

Sur cette formule observons que, pour calculer $\int_a^b f(x)dx$ par le changement de variable $x = \varphi(t)$, on procède à trois modifications :

(i) remplacer x par $\varphi(t)$ dans $f(x)$;

(ii) remplacer dx par $\varphi'(t)dt$;

(iii) remplacer les bornes a et b d'intégration en x par des bornes α et β d'intégration en t : telles que $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$.

Exercice 3.6

CCP MP 2007, Première question Mines-Ponts et Centrale MP 2006

Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on pose $I(p, q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1) Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$, alors $I(p, q) = \frac{p}{1+q} I(p-1, q+1)$.

2) En déduire que $I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

3) *Question de la rédaction* : déduire de ce qui précède la valeur de

$$B(p, q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} t \, \cos^{2q+1} t \, dt.$$

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Effectuons une intégration par parties en posant $u(x) = x^p$ et $v'(x) = (1-x)^q$, on a alors $u'(x) = px^{p-1}$ et $v(x) = -\frac{1}{1+q}(1-x)^{q+1}$ d'où

$$\begin{aligned} I(p, q) &= \int_0^1 x^p(1-x)^q dx \\ &= \left[-\frac{1}{1+q}(1-x)^{q+1} \cdot x^p\right]_0^1 + \frac{1}{1+q}\int_0^1 px^{p-1} \cdot (1-x)^{q+1} dx \\ &= \frac{p}{1+q} I(p-1, q+1). \end{aligned}$$

2) En répétant l'intégration par parties $p-1$ fois, on obtient

$$I(p, q) = \frac{p}{q+1}\frac{p-1}{q+2}\cdots\frac{1}{q+p} I(0, q+p) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(0, q+p).$$

Or, $I(0, q+p) = \int_0^1 (1-x)^{q+p} dx = \frac{1}{p+q+1}$, d'où $I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

3) Effectuons le changement de variable $x = \sin^2 t$. En effet, l'application $\varphi : t \mapsto \sin^2 t$ est une bijection de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, de classe $\mathscr{C}^1$ et l'on a $dx = 2\sin t\ \cos t\, dt$. On obtient alors

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} t\ \cos^{2q+1} t\, dt = \int_0^1 x^p(1-x)^q\, dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

3.1.4 Sommes de Riemann

Ce qu'il faut savoir

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Les sommes $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ et $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ sont appelées **sommes de Riemann** associées à f.

Exercice 3.7

Navale MP 2005, CCP PC 2007

Soit $\alpha > 0$. A l'aide des sommes de Riemann, déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ lorsque $n \to +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = n^\alpha \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha = n^{\alpha+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha.$

Comme la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $[0, 1]$, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}.$$

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\alpha+1}\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$

Remarque
Ce résultat est à retenir. On l'utilise fréquemment.

3.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 3.8

CCP MP 2005, CCP PC 2005, Centrale MP 2007

On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1 + x. \tag{1}$$

1) Soit f une solution de (1).
1.a Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
1.b Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre qu'on déterminera.
1.c Déterminer f.
2) Conclure.

1) Soit f une solution de (1).

1.a La relation (1) s'écrit $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; f(x) = 1 + x - x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x tf(t)\,dt$.

Comme f est continue, les intégrales du membre de droite sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de leur borne supérieure. Il en résulte que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Les intégrales du membre de droite sont alors de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1.b En dérivant deux fois de suite, on obtient pour tout x réel

$$f'(x) = 1 - \int_0^x f(t)\,dt - xf(x) + xf(x) = 1 - \int_0^x f(t)\,dt\,; \tag{2}$$

$$f''(x) = -f(x)\,. \tag{3}$$

1.c Les solutions de l'équation différentielle (3) sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto A\cos x + B\sin x$, où A et B sont des constantes. Mais la relation (1) donne $f(0) = 1$ et la relation (2) donne $f'(0) = 1$. On en déduit alors $A = B = 1$ et donc, pour tout x réel $f(x) = \cos x + \sin x$.
On vient de montrer que si f est solution de (1), alors $f : x \mapsto \sin x + \cos x$.

2) Il reste à vérifier que cette solution convient. Soit $x \in \mathbb{R}$. En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)(\cos t + \sin t)\,dt &= \Big[(x-t)(\sin t - \cos t)\Big]_0^x + \int_0^x (\sin t - \cos t)\,dt \\ &= x - \cos x - \sin x + 1 = -f(x) + x + 1\,. \end{aligned}$$

Conclusion : la fonction $f : x \mapsto \sin x + \cos x$ est l'unique solution de (1).

Exercice 3.9

Mines-Ponts PC 2007, Mines-Ponts MP 2005 K

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante et telle que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

1) On suppose que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(y)\,dy = xf(x)\,. \qquad (*)$$

Indication de la rédaction :

utiliser la fonction $\phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(y)\,dy - xf(x)$.

2) En déduire que pour tout $(a, b) \in [0, +\infty[\times f([0, +\infty[)$, on a

$$\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt \geqslant ab\,. \qquad (**)$$

Etudier les cas d'égalité.

1) Pour $x \in \mathbb{R}^+$, posons $G(x) = \displaystyle\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt$.

La fonction f est continue et strictement croissante, donc f^{-1} est continue sur $f(\mathbb{R}^+)$, donc $y \mapsto \displaystyle\int_0^y f^{-1}(t)\,dt$ est dérivable, et comme f est également dérivable, on en déduit que G est dérivable et que $G'(x) = f'(x)f^{-1}(f(x)) = xf'(x)$. Il en résulte que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et que

$$\phi'(x) = f(x) + f'(x)f^{-1}(f(x)) - f(x) - xf'(x) = 0.$$

Par conséquent, ϕ est constante. Or $\phi(0) = 0$, la fonction ϕ est donc la fonction nulle et $(*)$ est démontrée.

2) Soit b un réel positif fixé, considérons la fonction ψ, qui à tout $a \in [0, +\infty[$, associe $\psi(a) = \displaystyle\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy - ab\,.$

Pour établir l'inégalité $(**)$, on va montrer que $\psi \geqslant 0$.

La fonction ψ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et l'on a pour tout $a \in [0, +\infty[$, $\psi'(a) = f(a) - b$. Comme f est strictement croissante, $\psi'(a) \geqslant 0$ si et seulement si $a \geqslant f^{-1}(b)$, donc la fonction ψ admet un minimum au point $f^{-1}(b)$. Par ailleurs, $\psi\left(f^{-1}(b)\right) = \phi(f^{-1}(b)) = 0$.

L'application ψ est donc positive sur $\mathbb{R}^+$ d'où $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt \geqslant ab$.

Le calcul précédent montre que $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt = ab$ si et seulement si $b = f(a)$.

Exercice 3.10

TPE PSI 2006 et 2007, INT PSI 2006

A l'aide des sommes de Riemann, calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n = \left(\dfrac{n!\prod_{k=n+1}^{2n} k}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ donc

$$\ln u_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Or $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[\,0,\ 1\,]$. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = \int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln 2 - 1$ et en vertu de la continuité de la fonction exponentielle on en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{e}$.

Exercice 3.11

CCP PC 2007

Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $u_{n,p} = \dfrac{1}{p^n}\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\left(1+\frac{k}{p}\right)^{1/n}\right]^n$.

1) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$.

2) On fixe n dans $\mathbb{N}^*$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(1+\frac{k}{p}\right)^{1/n} = \frac{n}{n+1}(2\times 2^{1/n} - 1)$.

3) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} u_{n,p}\right) = \frac{4}{e}$.

4) Déterminer $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} u_{n,p}\right)$.

1) Un calcul classique montre que, pour tout x réel, on a

$$(1)\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^x .$$

Si $x=1$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1/e$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé et soit f_n la fonction définie sur $[\,0,\,1\,]$ par $f_n(x)=(1+x)^{1/n}$.

Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $v_{n,p}=\displaystyle\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f_n\left(\frac{k}{p}\right)$ est une somme de Riemann et on a, en vertu de la continuité de f_n,

$$\lim_{p\to+\infty} v_{n,p} = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \left[\frac{(1+x)^{1+1/n}}{1+\frac{1}{n}}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1}(2^{1+1/n}-1)\,.$$

3) On a $u_{n,p}=(v_{n,p})^n$. Donc par continuité des fonctions puissances, on a $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} u_{n,p} = \left(\lim_{p\to+\infty} u_{v,p}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}(2\times 2^{1/n}-1)\right)^n$. On a alors, en utilisant le développement limité en 0 de la fonction exponentielle,

$$\begin{aligned}(2^{1+1/n}-1)^n = \left(2e^{\ln 2/n}-1\right)^n &= \left[2\left(1+\frac{\ln 2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-1\right]^n\\ &= \left(1+\frac{2\ln 2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n .\end{aligned}$$

Alors en utilisant la formule (1) avec $x=2\ln 2$, on obtient
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(2^{1+1/n}-1)^n = e^{2\ln 2}=4\,.$

Finalement en utilisant 1), on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\lim_{p\to+\infty} u_{n,p}=\frac{4}{e}\,.$

4) Fixons $p\in\mathbb{N}^*$ et posons $\displaystyle w_{n,p}=\sum_{k=1}^{p}\left(1+\frac{k}{p}\right)^n = \sum_{k=1}^{p}\exp\left[\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{p}\right)\right]$.

En utilisant le développement limité de l'exponentielle en 0, on obtient

$$w_{n,p}=\sum_{k=1}^{p}\left(1+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{p}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = p+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\ln\left(1+\frac{k}{p}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'où

$$u_{n,p}=\frac{1}{p^n}(w_{n,p})^n = \left(1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{k}{p}\right)+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n .$$

De nouveau, le résultat rappelé en 1) appliqué avec $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{k}{p}\right)$ donne

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n,p}=\exp\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{k}{p}\right)\right).$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{k}{p}\right)$ est une somme de Riemann et par conséquent

$$\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{k}{p}\right)=\int_0^1\ln(1+x)\,dx=\Big[(1+x)\ln(1+x)-x\Big]_0^1=2\ln 2-1.$$

On obtient alors, en vertu de la continuité de la fonction exponentielle,

$$\lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}u_{n,p}=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}.$$

Exercice 3.12

CCP PC 2007

Dans cet exercice, $\mathbb{E}(x)$ désigne la partie entière de $x\in\mathbb{R}$.
1) Montrer que pour $x\in\mathbb{R},\ \mathbb{E}(x+1)=\mathbb{E}(x)+1$.
2) Vérifier que $\varphi : x\mapsto 4\mathbb{E}(x)-2\mathbb{E}(2x)+1$ est périodique et écrire plus simplement φ sur une période.
3) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue et $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que $\forall p\in\{0,\dots,n-1\}$

$$\int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}}f(x)\varphi(nx)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2n}}\left[f\left(u+\frac{p}{n}\right)-f\left(u+\frac{p}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right]du\,.$$

4) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ $k-$lipschitzienne.
4.a Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4.b Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\,dx=0$.

1) Pour tout x réel, on a $\mathbb{E}(x)\leqslant x<\mathbb{E}(x)+1$ et donc $\mathbb{E}(x)+1\leqslant x+1<\mathbb{E}(x)+2$. Ceci montre que $\mathbb{E}(x)+1$ est la partie entière de $x+1$, donc $\mathbb{E}(x+1)=\mathbb{E}(x)+1$. Alors une récurrence immédiate montre, que pour tout entier naturel n, et tout x réel, on a $\mathbb{E}(x+n)=\mathbb{E}(x)+n$.

2) • Pour tout x réel, on a

$$\begin{aligned}\varphi(x+1)&=4\mathbb{E}(x+1)-2\mathbb{E}(2x+2)+1=4(\mathbb{E}(x)+1)-2(\mathbb{E}(2x)+2)+1\\&=4\mathbb{E}(x)-2\mathbb{E}(2x)+1=\varphi(x).\end{aligned}$$

La fonction φ est donc $1-$périodique.
• Soit p un entier naturel.
Lorsque $x\in[\,p,\,p+1/2\,[$, on a $2x\in[\,2p,\,2p+1\,[$, donc $\mathbb{E}(2x)=2p$ et $\mathbb{E}(x)=p$, d'où $\varphi(x)=1$.
Lorsque $x\in[\,p+1/2,\,p+1\,[$, on a $2x\in[\,2p+1,\,2p+2\,[$, donc $\mathbb{E}(2x)=2p+1$ et $\mathbb{E}(x)=p$, d'où $\varphi(x)=-1$.

3) Il résulte de ce qui précède que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \{0, \cdots, n\}$, on a $\varphi(nx) = 1$ sur $[\frac{p}{n}, \frac{p}{n} + \frac{1}{2n}[$ et $\varphi(nx) = -1$ sur $[\frac{p}{n} + \frac{1}{2n}, \frac{p+1}{n}[$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)\varphi(nx)\,dx &= \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p}{n}+\frac{1}{2n}} f(x)\varphi(nx)\,dx + \int_{\frac{p}{n}+\frac{1}{2n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)\varphi(nx)\,dx\\ &= \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p}{n}+\frac{1}{2n}} f(x)\,dx - \int_{\frac{p}{n}+\frac{1}{2n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

En effectuant les changements de variable $x = u + \frac{p}{n}$ et $x = u + \frac{p}{n} + \frac{1}{2n}$ dans les deux dernières intégrales respectivement, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)\varphi(nx)\,dx &= \int_0^{\frac{1}{2n}} f\left(u + \frac{p}{n}\right)du - \int_0^{\frac{1}{2n}} f\left(u + \frac{p}{n} + \frac{1}{2n}\right)du\\ &= \int_0^{\frac{1}{2n}} \left[f\left(u + \frac{p}{n}\right) - f\left(u + \frac{p}{n} + \frac{1}{2n}\right)\right]du\,.\end{aligned}$$

4) On suppose que f est $k-$lipschitzienne, où $k > 0$.
Rappelons que f est $k-$lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ lorsque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.
4.a Montrons que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, montrons que f est continue en x_0, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $\eta = \varepsilon/k$, si $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ puisque f est $k-$lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
On vient de montrer que toute fonction lipchitzienne sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque

La réciproque est fausse. Examinez par exemple le cas de la fonction $x \mapsto x^2$. Pour d'autres contre-exemples, voir notre livre d'Analyse de Première Année chapitre 11 paragraphe 5.

4.b Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la relation de Chasles

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\,dx &= \sum_{p=0}^{n-1}\int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)\varphi(nx)\,dx\\ &= \sum_{p=0}^{n-1}\int_0^{\frac{1}{2n}} \left[f\left(u + \frac{p}{n}\right) - f\left(u + \frac{p}{n} + \frac{1}{2n}\right)\right]du\,.\end{aligned}$$

D'où

$$\left|\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\,dx\right| \leqslant \sum_{p=0}^{n-1}\int_0^{\frac{1}{2n}} \left|f\left(u + \frac{p}{n}\right) - f\left(u + \frac{p}{n} + \frac{1}{2n}\right)\right|du$$

Puisque f est $k-$lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, on a alors

$$\left|\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\,dx\right| \leqslant \sum_{p=0}^{n-1}\int_0^{\frac{1}{2n}} \frac{k}{2n}\,du = \sum_{p=0}^{n-1}\frac{k}{(2n)^2} = \frac{k}{4n}.$$

Il résulte alors du théorème d'encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\,dx = 0$.

Exercice 3.13

CCP PC 2006

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$.

1) Vérifier que f est impaire.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'on a $f'(x) + 2xf(x) = 1$.

3) Détermination d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

3.a En utilisant la croissance de $t \mapsto e^{t^2}$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2xe^{-x^2}\displaystyle\int_0^{x-1} e^{t^2}dt\right)$.

3.b En écrivant e^{t^2} sous la forme $2te^{t^2}\dfrac{1}{2t}$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2xe^{-x^2}\displaystyle\int_{x-1}^{x} e^{t^2}dt\right)$.

3.c En déduire, si elles existent, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xf(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$, .

3.d Donner un équivalent de f en $+\infty$.

1) Montrons que f est impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition $f(-x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^{-x} e^{t^2}dt$.
En effectuant le changement de variable $t = -y$, on a
$\displaystyle\int_0^{-x} e^{t^2}dt = \int_0^{y} e^{y^2}(-dy) = -\int_0^{y} e^{y^2}dy$. Ainsi $f(-x) = -f(x)$. Donc f est impaire sur $\mathbb{R}$.

2) Comme $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et l'on a, pour tout x réel, $g'(x) = e^{x^2}$. Il en résulte que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout x réel on a
$f'(x) = -2xe^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt + e^{-x^2}e^{x^2} = -2xf(x) + 1$.

3.a Soit $x > 1$. Si $t \in [0, x-1]$, on a alors, en vertu de la croissance de $t \mapsto e^{t^2}$ l'encadrement $1 \leqslant e^{t^2} \leqslant e^{(x-1)^2}$, et donc en intégrant

$$2x(x-1)e^{-x^2} \leqslant 2xe^{-x^2}\int_0^{x-1} e^{t^2}dt \leqslant 2x(x-1)e^{-x^2}e^{(x-1)^2},$$

ce qui donne encore $2x(x-1)e^{-x^2} \leqslant 2xe^{-x^2}\displaystyle\int_0^{x-1} e^{t^2}dt \leqslant 2x(x-1)e^{-2x+1}$.

Il résulte alors du théorème d'encadrement que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2xe^{-x^2}\int_0^{x-1} e^{t^2}dt\right) = 0$.

3.b Soit $x > 1$. Sachant que pour tout $t \in [x-1, x]$ on a $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{x-1}$, on a alors $\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{x-1}^{x} 2te^{t^2}dt \leqslant \int_{x-1}^{x} 2te^{t^2} \times \frac{1}{2t}\,dt \leqslant \frac{1}{2(x-1)}\int_{x-1}^{x} 2te^{t^2}dt$,

c'est-à-dire, $\dfrac{1}{2x}(e^{x^2} - e^{(x-1)^2}) \leqslant \displaystyle\int_{x-1}^{x} e^{t^2}dt \leqslant \frac{1}{2(x-1)}(e^{x^2} - e^{(x-1)^2})$.

Ainsi, en multipliant par $2xe^{-x^2}$,

$$1 - e^{-2x+1} \leqslant 2xe^{-x^2}\int_{x-1}^{x} e^{t^2}dt \leqslant \frac{x}{x-1}(1 - e^{-2x+1}).$$

On déduit alors du théorème d'encadrement que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2xe^{-x^2}\int_{x-1}^{x} e^{t^2}dt\right) = 1$.

3.c On a, en vertu de la relation de Chasles,

$$2xf(x) = 2xe^{-x^2}\int_0^{x-1} e^{t^2}dt + 2xe^{-x^2}\int_{x-1}^{x} e^{t^2}dt, \quad \text{d'où} \quad \lim_{x\to+\infty} 2xf(x) = 1,$$

et puisque $f'(x) = -2xf(x) + 1$ on a également $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

3.d Le résultat précédent montre qu'au voisinage de l'infini $f(x) \sim \dfrac{1}{2x}$.

L'exercice suivant est un grand classique. En voici une version complète et détaillée qui vous aidera à bien comprendre les méthodes mises en jeu.

Exercice 3.14

Air PC 2005, CCP PSI 2005, Mines-Ponts PC 2005 et 2006, Polytechnique-PC 2007

Pour $x \in D =]0, 1[\cup]1, \infty[$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1) Montrer que φ est bien définie sur D.
2) Montrer que φ est dérivable sur D et calculer φ'.
3) Montrer que φ est prolongeable par continuité aux points 0 et 1.

Indication de la rédaction : on pourra remarquer que pour tout $x \in D$, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t} = \ln 2$.

4) En notant ϕ le prolongement de φ sur $[0, +\infty[$, montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

5) Déterminer, si elles existent, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x}$.
Déterminer un équivalent de φ en $+\infty$.

1) Montrons que φ est bien définie sur D.
Puisque la fonction $f : t \mapsto f(t) = \dfrac{1}{\ln t}$ est bien définie et continue sur D, $\varphi(x)$ sera bien définie pour tout réel x tel que $[\,x^2,\, x\,] \subset]\,0,\, 1\,[$ ou $[\,x,\, x^2\,] \subset]\,1,\, +\infty\,[$.
Or, pour $x \in]\,0,\, 1\,[$, on a $0 < x^2 < x < 1$, donc φ est bien définie sur $]\,0,\, 1\,[$.
De même, pour $x \in]\,1,\, +\infty\,[$, on a $1 < x < x^2$, donc φ est bien définie sur $]\,1,\, +\infty\,[$.
2) Soit G une primitive de la fonction continue f sur $]\,0,\, 1\,[$, on a pour tout $x \in]\,0,\, 1\,[$, $\varphi(x) = G(x^2) - G(x)$. Ainsi φ est une somme de composées de fonctions dérivables sur $]\,0,\, 1\,[$, elle est donc dérivable sur cet intervalle et l'on a

$$\varphi'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}\,.$$

On montre de la même façon que φ est dérivable sur $]\,1,\, +\infty\,[$ et l'on a

$$\varphi'(x) = 2xH'(x^2) - H'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x},$$

où H une primitive de la fonction continue f sur $]\,1,\, +\infty\,[$.
Conclusion : la fonction φ est dérivable sur D et pour tout $x \in D$, $\varphi'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$.
3) • Remarquons que $\varphi' > 0$. La fonction φ est donc croissante sur $]\,0,\, 1\,[$ et sur $]\,1,\, +\infty\,[$. Par conséquent, elle admet une limite à droite en 0, une limite à gauche et une limite à droite en 1. Pour que f soit prolongeable par continuité, il faut que la limite soit finie en 0, et que les limites à gauche et à droite de 1 soient égales.
• Montrons que φ est prolongeable par continuité au point 0.
Puisque $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 0$, la fonction f est prolongeable par continuité au point 0, il en résulte que f est bornée sur tout segment $]\,0,\, a\,]$ inclus dans $[\,0,\, 1\,[$. On en déduit alors que pour tout $x \in]\,0,\, 1/2\,]$ on a $|\varphi(x)| \leqslant M(x - x^2)$ où $M = \sup\limits_{t \in]\,0,\, 1/2\,]} |f(t)|$.
En faisant tendre x vers 0, on obtient $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = 0$.
Conclusion : la fonction φ est prolongeable par continuité à droite en 0.
• Montrons que φ est prolongeable par continuité au point 1.
On examine séparément la limite en 1^- et en 1^+.
– Soit $x \in]\,0,\, 1\,[$. Comme $\ln t < 0$, on a pour tout $t \in [\,x^2,\, x\,]$,

$$\frac{x}{t \ln t} \leqslant \frac{t}{t \ln t} \leqslant \frac{x^2}{t \ln t}. \tag{1}$$

En intégrant (1) sur $[\,x^2,\, x\,]$ (bien entendu $x^2 \leqslant x$), on obtient $x^2 \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x \ln 2$.
On déduit alors du théorème d'encadrement que $\lim\limits_{x \to 1^-} \varphi(x) = \ln 2$.

– Soit $x \in]\,1,\,+\infty\,[$. On a pour tout $t \in [\,x,\,x^2\,]$

$$\frac{x}{t\ln t} \leqslant \frac{t}{t\ln t} \leqslant \frac{x^2}{t\ln t}. \tag{2}$$

En intégrant (2) sur $[\,x,\,x^2\,]$ (cette fois $x \leqslant x^2$), on obtient

$$x\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x^2\ln 2. \tag{3}$$

On déduit alors du théorème d'encadrement que $\lim\limits_{x\to 1^+} \varphi(x) = \ln 2$.

Conclusion : la fonction φ est prolongeable par continuité au point 1.

4) Montrons que le prolongement ϕ de φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0,\,+\infty\,[$.
Il est clair que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D (elle est même de classe $\mathscr{C}^\infty$). Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} \varphi'(x) = 1$, le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ entraîne que φ admet sur $[\,0,\,1\,]$ et sur $[\,1,\,+\infty\,[$ un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$. On en déduit que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0,\,+\infty\,[$.

5) Comportement asymptotique de φ en $+\infty$
• On déduit de (3) que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

• Mais (3) ne nous permet pas de déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x}$. On va alors utiliser une minoration plus adaptée. Soit $x > 1$. Puisque $x < x^2$, on obtient en vertu de la décroissance de f, pour tout $t \in [\,x,\,x^2\,]$ l'encadrement $\dfrac{1}{2\ln x} \leqslant \dfrac{1}{\ln t} \leqslant \dfrac{1}{\ln x}$.
Ainsi, en intégrant sur $[\,x,\,x^2\,]$, on obtient $\dfrac{x^2-x}{2\ln x} \leqslant \varphi(x)$. On en déduit $\dfrac{x-1}{2\ln x} \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x}$. En particulier, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = +\infty$. La courbe représentative de φ admet donc une branche parabolique de direction Oy lorsque x tend vers $+\infty$.
• Déterminons maintenant un équivalent de $\varphi(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
Soit $x > 1$. En intégrant par parties où l'on dérive $1/\ln t$ et on intégre 1, on obtient, en posant $R(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dx}{(\ln t)^2}$,

$$\varphi(x) = \left[\frac{t}{\ln t}\right]_x^{x^2} + R(x) = \frac{x^2}{2\ln x} - \frac{x}{\ln x} + R(x) = \frac{x^2}{2\ln x}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2\ln x}{x^2}R(x)\right).$$

Mais, pour tout $x \in]\,1,\,+\infty\,[$, en vertu de la décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(\ln t)^2}$, on a, $0 \leqslant R(x) \leqslant \dfrac{x^2-x}{(\ln x)^2}$. D'où $0 \leqslant \dfrac{2\ln x}{x^2} R(x) \leqslant \dfrac{2}{\ln x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$.

On en déduit alors, en vertu du théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln x}{x^2} R(x) = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2\ln x}{x^2} R(x)\right) = 1$ et donc $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2\ln x}$.

3.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 3.15

CCP PC 2007

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0, 1]$. On suppose qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que : $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,dt$.

1) On considère une primitive F de f sur $[0, 1]$. Exprimer f à l'aide de F. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 1]$.

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{N}^2$, $\forall x \in [0, 1]$ $f^{(n)}(x) = a^{\alpha_n} f(a^{\beta_n} x)$. Exprimer α_n et β_n en fonction de n.

3) Que vaut $f^{(n)}(0)$?

Montrer que : $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{M}{(n+1)!}$.

4) Montrer que f est nulle sur $[0, 1]$.

1) La fonction f est continue sur $[0, 1]$ donc on peut considérer une primitive F de f sur $[0, 1]$. Alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$, et l'on a, pour tout $x \in [0, 1]$, l'égalité (1) $\quad f(x) = F(ax) - F(0)$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$. C'est vrai si $n = 0$. Supposons la propriété vraie au rang n. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0, 1]$ alors F est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0, 1]$ et la relation (1) montre que f est alors de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0, 1]$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$. Il en résulte qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 1]$.

2) On démontre par récurrence l'existence de la suite $(\alpha_n, \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a tout d'abord $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. D'autre part en dérivant la relation (1), on obtient, pour tout $x \in [0, 1]$, la relation $f'(x) = aF'(ax)$, donc (2) $\quad f'(x) = af(ax)$.
Supposons que les nombres a_p et b_p existent pour $0 \leqslant p \leqslant n$. Alors, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f^{(n)}(x) = a^{\alpha_n} f(a^{\beta_n} x)$, et si l'on dérive on obtient $f^{(n+1)}(x) = a^{\alpha_n+\beta_n} f'(a^{\beta_n} x)$, puis, en utilisant (2), on en déduit l'égalité

$$f^{(n+1)}(x) = a^{\alpha_n+\beta_n+1} f(a^{\beta_n+1} x).$$

Donc, en posant $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n + 1$ et $\beta_{n+1} = \beta_n + 1$, on a, pour tout $x \in [0, 1]$, la relation $f^{(n+1)}(x) = a^{\alpha_{n+1}} f(a^{\beta_{n+1}} x)$.
La suite $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme nul, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\beta_n = n$. Alors $\alpha_{n+1} = \alpha_n + n$ donc α_n est la somme des n premiers entiers et vaut $n(n + 1)/2$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$ on a donc $f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$. En particulier $f^{(n)}(0) = a^{n(n+1)/2} f(0) = 0$.

Alors d'après la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, on a

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt$$

et, d'après la question 2), $\quad f(x) = \dfrac{a^{(n+1)(n+2)/2}}{n!} \displaystyle\int_0^x (x-t)^n\, f(a^{n+1}t)\, dt\,.$

On en déduit $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{n!}\|f\|_\infty \displaystyle\int_0^x (x-t)^n\, dt = \dfrac{x^{n+1}}{n!}\|f\|_\infty \leqslant \dfrac{\|f\|_\infty}{(n+1)!}\,.$

4) Par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini dans l'inégalité précédente, il vient $|f(x)| = 0$, et ceci pour tout $x \in [0,\ 1]$. Donc f est l'application nulle.

Exercice 3.16

Mines-Ponts PC 2006

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,\ 1], \mathbb{R}^+)$; pour tout $(x, n) \in [0,\ 1] \times \mathbb{N}^*$.

On pose $u_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(x)$.

Indication de la rédaction : on pourra utiliser la double inégalité

$$\forall x \in [0,\ +\infty[, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x\,.$$

• Les inégalités proposées en indication peuvent se démontrer de plusieurs manières. La méthode la plus élémentaire est de considérer les fonctions f et g définies sur $[0,\ +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$ et $g(x) = \ln(1+x) - x + x^2/2$. Le calcul des dérivées montre que les deux fonctions f et g sont croissantes, et comme elles sont nulles en 0, elles sont positives.

• Pour étudier $u_n(x)$, comme f est positive, il est naturel de passer au logarithme.

Soit $x \in [0,\ 1]$. On a $\ln(u_n(x)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

En appliquant la double inégalité donnée en indication, on a alors pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 \leqslant \ln\left(1 + \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leqslant \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

En faisant la somme de ces inégalités, on obtient,

$$\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 \leqslant \ln u_n(x) \leqslant \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On a d'une part $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$. D'autre part, on déduit de la continuité de f sur $[\,0,\ 1\,]$, l'existence d'un réel $M > 0$ tel que $M = \sup\limits_{x\in[\,0,\,1\,]} |f(x)|$.

Ainsi $0 \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{x^2M^2}{n^2}\,n = \frac{x^2M^2}{2n} \leqslant \frac{M^2}{2n}$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n(x) = x\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

On obtient, en vertu de la continuité de la fonction exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = e^{x\int_0^1 f(t)\,dt}.$$

Exercice 3.17

Inégalités de Hölder et de Minkowski. Mines-Ponts PSI 2006

Soit $(p, q) \in\,]\,1,\ +\infty\,[^{\,2}$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1) Montrer que $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$, on a $\alpha\beta \leqslant \dfrac{\alpha^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q}$.

2) En déduire que, si f et g sont dans $\mathscr{C}^0([\,a,\ b\,], \mathbb{C})$, alors

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leqslant \left(\int_a^b |\ f(t)\ |^p\ dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |\ g(t)\ |^q\ dt\right)^{1/q}.$$

3) Montrer que $\left(\displaystyle\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\right)^{1/p}$.

Remarquons que si $1/p + 1/q = 1$, on a $(p-1)(q-1) = 1$ et $p(q-1) = q$.

1) Cette inégalité est appelée **inégalité de Young** et a été démontrée dans notre livre d'Analyse de Première année voir exercice 15.13 chapitre 15 fonctions convexes.

2) Posons $A = \displaystyle\int_a^b |f(t)|^p dt$ et $B = \displaystyle\int_a^b |g(t)|^q dt$.

Supposons A et B non nulles. En appliquant l'inégalité de Young à $|f(t)|/A^{1/p}$ et $|g(t)|/B^{1/q}$, on obtient $\dfrac{|f(t)g(t)|}{A^{1/p}B^{1/q}} \leqslant \dfrac{|f(t)|^p}{pA} + \dfrac{|g(t)|^q}{qB}$. En intégrant sur $[a, b]$

$\dfrac{1}{A^{1/p}B^{1/q}}\displaystyle\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, d'où, $\displaystyle\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt \leqslant A^{1/p}B^{1/q}$.

Enfin, puisque l'on a toujours l'inégalité $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)g(t)|\,dt$, on en déduit $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \times \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}$.

Si une des intégrales $A = \int_a^b |f(t)|^p dt$ ou $B = \int_a^b |g(t)|^p dt$ est nulle, alors une des deux fonctions f ou g est la fonction nulle et dans ce cas $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est nulle également. L'inégalité est une égalité dans ce cas.
L'inégalité obtenue porte le nom d'**inégalité de Hölder**.

2) Pour $x \in [\,a,\,b\,]$, on a l'inégalité

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)| + |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\,,$$

et donc, en posant $I = \int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx$, on obtient

$$I \leqslant \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\,dx + \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\,dx\,.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à chacune des intégrales du membre de droite, on obtient

$$\int_a^b |f(x){+}g(x)|^{p-1}|f(x)|\,dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} dx\right)^{1/q},$$

$$\int_a^b |f(x){+}g(x)|^{p-1}|g(x)|\,dx \leqslant \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} dx\right)^{1/q}.$$

En additionnant membre à membre ces deux inégalités et en sachant que $(p-1)q = p$, on en déduit

$$I \leqslant \left(\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{1/p}\right)\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/q}.\ (*)$$

Lorsque I n'est pas nulle, on divise (*) par $\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/q}$ et l'on obtient l'inégalité désirée. Lorsque I est nulle, l'inégalité est encore vraie de manière évidente. Cette inégalité porte le nom d'**inégalité de Minkowski**.

Compléments pour les lecteurs connaissant la notion de norme (voir chapitre Espaces vectoriels normés) :

1) En fait on vient de montrer que l'application définie sur $\mathscr{C}^0([\,a,\,b\,],\mathbb{C})$, qui à f associe $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ vérifie l'inégalité triangulaire. De plus, pour tout nombre réel λ et tout $f \in \mathscr{C}^0([\,a,\,b\,],\mathbb{C})$ on a de manière évidente $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\,\|f\|_p$, et enfin il résulte des propriétés de l'intégrale des fonctions continues positives que $\|f\|_p = 0$ si seulement si f est la fonction nulle. Donc $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathscr{C}^0([\,a,\,b\,],\mathbb{C})$.

2) On peut montrer que deux quelconques de ces normes sont comparables, mais ne sont pas équivalentes.

• Soit $(p_1, p_2) \in]\,1, +\infty\,[^2$ tel que $p_1 < p_2$. En utilisant l'inégalité de Hölder, avec $p = \dfrac{p_2}{p_1}$ et $q = \dfrac{p_2}{p_2 - p_1}$, on obtient

$$\int_a^b |f(x)|^{p_1} \times 1\,dx \leqslant \left(\int_a^b (|f(x)|^{p_1})^p dx\right)^{p_1/p_2} \left(\int_a^b 1^q dx\right)^{1/q},$$

ce qui donne $\|f\|_{p_1} \leqslant (b-a)^{1/p_1 - 1/p_2} \|f\|_{p_2}$. Les deux normes sont comparables.

• Soit f_n l'application de $[\,a, b\,]$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f_n(x) = \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^n$. On a

$$\|f_n\|_{p_i}^{p_i} = \frac{1}{(b-a)^{np_i}} \int_a^b (x-a)^{np_i} dx = \frac{1}{(b-a)^{np_i}} \left[\frac{(x-a)^{np_i+1}}{np_i+1}\right]_a^b = \frac{b-a}{np_i+1}.$$

Alors

$$\frac{\|f_n\|_{p_1}}{\|f_n\|_{p_2}} = \frac{(np_2+1)^{1/p_2}}{(np_1+1)^{1/p_1}} (b-a)^{1/p_1 - 1/p_2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{b-a}\right)^{1/p_2 - 1/p_1} \frac{p_2^{1/p_2}}{p_1^{1/p_1}}, \text{ et}$$

cette expression tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Il ne peut donc pas exister de constante A telle que, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([\,a, b\,], \mathbb{C})$, on ait $\|f\|_{p_2} \leqslant A\|f\|_{p_1}$. Les normes $\|.\|_{p_1}$ et $\|.\|_{p_2}$ ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 3.18

Centrale PC 2007

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0, 1\,], \mathbb{R})$, avec $f(0) = 0$.

1) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2 dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2 dt$.

2) On suppose de plus que $f(1) = 0$. Améliorer l'inégalité précédente.

1) Sachant que $f(0) = 0$ et que f est de classe $\mathscr{C}^1$, on a pour $x \in [\,0, 1\,]$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt$. En appliquant l'inégalite de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$f(x)^2 = \left(\int_0^x 1 \times f'(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^x dt\right)\left(\int_0^x f'(t)^2\,dt\right) = x\int_0^x f'(t)^2\,dt. \quad (1)$$

On en déduit :

$$f(x)^2 \leqslant x\int_0^1 f'(t)^2 dt, \quad (2)$$

car $\displaystyle\int_0^x f'(t)^2 dt \leqslant \int_0^1 f'(t)^2 dt$ puisque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f'(t)^2\,dt$ est croissante sur $[\,0, 1\,]$.

En intégrant l'inégalité (2) sur $[\,0, 1\,]$, on obtient $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2 dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2 dt$.

2) On suppose que $f(0) = f(1) = 0$. On applique l'inégalité obtenue dans 1) aux fonctions $g : x \mapsto f(x/2)$ et $h : x \mapsto f(1 - x/2)$ qui appartiennent à $\mathscr{C}^1([\,0, 1\,], \mathbb{R})$

puisque $g(0) = f(0) = 0$ et $h(0) = f(1) = 0$. On en déduit

$$\int_0^1 f\left(\frac{t}{2}\right)^2 dt \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 f'\left(\frac{t}{2}\right)^2 dt \tag{3}$$

et
$$\int_0^1 f\left(1-\frac{t}{2}\right)^2 dt \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 f'\left(1-\frac{t}{2}\right)^2 dt\,. \tag{4}$$

En effectuant le changement de variable $u = t/2$ dans (3) et $u = 1 - t/2$ dans (4), on obtient

$$\int_0^{1/2} f(u)^2 dt \leqslant \frac{1}{8}\int_0^{1/2} f'(t)^2 dt \tag{5}$$

et
$$\int_{1/2}^1 f(u)^2 dt \leqslant \frac{1}{8}\int_{1/2}^1 f'(t)^2 dt\,. \tag{6}$$

En additionnant (5) et (6), on en déduit alors $\displaystyle\int_0^1 f(u)^2 dt \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 f'(t)^2 dt$.

Complément : on peut montrer en fait $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2 dt \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f'(t)^2 dt$ et que cette inégalité devient égalité si et seulement si f_a est de la forme $t \mapsto f_a(t) = a\sin(\pi t)$ où $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 3.19

Centrale PC 2006 K

1) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ périodique. Pour $x > 0$, on pose : $\displaystyle g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

Montrer que g admet une limite quand x tend vers $+\infty$.

2) Soit $x > 0$. On pose $\displaystyle\phi(x) = \int_0^x |\sin t|\,dt$.

Donner un équivalent simple quand x tend vers $+\infty$ de $\phi(x)$.

1) Soit T la période de f. Je pense que vous avez deviné la fameuse limite cherchée, c'est bien sûr $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Montrons ce résultat.

Première méthode : en utilisant la relation de Chasles.

Soit x un réel positif assez grand et soit $n = \mathbb{E}(x/T)$. On obtient, en vertu de la relation de Chasles et de la périodicité de f

$$xg(x) = \int_0^{nT} f(t)\,dt + \int_{nT}^x f(t)\,dt = n\int_0^T f(t)\,dt + \int_0^{x-nT} f(t)\,dt.$$

Il en résulte $g(x) = \dfrac{\mathbb{E}(x/T)}{x} \displaystyle\int_0^T f(t)\,dt + \dfrac{\int_0^{x-nT} f(t)\,dt}{x}$.

Par ailleurs, $\dfrac{1}{x}\left|\displaystyle\int_0^{x-nT} f(t)\,dt\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{x-nT} |f(t)|\,dt \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^T |f(t)|\,dt$.

On déduit alors du théorème d'encadrement que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^{x-nT} f(t)\,dt}{x} = 0$. D'autre part, sachant que $\mathbb{E}(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} y$, on a alors $\dfrac{\mathbb{E}(x/T)}{x}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt$.

Deuxième méthode :

En prenant l'exemple de la fonction sinus sur $[0, 2\pi]$, on constate que la limite de g est nulle dans ce cas. Ce résultat est essentiellement dû au fait que les primitives de la fonction sinus sont périodiques et continues donc bornées. Or on sait que les primitives d'une fonction périodique sont périodiques lorsque l'intégrale de la fonction sur une période est nulle. On va donc dans un premier temps examiner le cas de ces fonctions.

• Soit f une fonction continue périodique, de période T telle que $\displaystyle\int_0^T f(t)dt = 0$.

Soit F la primitive de f qui s'annule en 0. Alors, pour tout $x > 0$, on a $g(x) = \dfrac{F(x)}{x}$. Comme F est continue et périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$. En notant M un majorant de $|F|$, on a, pour $x > 0$, $\dfrac{|F(x)|}{x} \leqslant \dfrac{M}{x}$, et par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = 0$.

• Soit f une fonction continue périodique, de période T. On se ramène au cas précédent en considérant la fonction $h : x \mapsto f(x) - \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt$. La fonction h est périodique continue et son intégrale sur $[0, T]$ est nulle. D'aprés le résultat précédent on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x h(t)dt = 0$.

Or pour tout $x > 0$, on a $\displaystyle\int_0^x h(t)dt = \int_0^x f(t)dt - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)dt$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt$.

2) Il résulte de 1) que, lorsque x tend vers $+\infty$, on a $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \sim \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\,dt$.

La fonction $x \mapsto |\sin x|$ est de période π, donc $\displaystyle\int_0^x |\sin t|\,dt \sim \frac{x}{\pi}\int_0^\pi |\sin t|\,dt$.

En outre, $\displaystyle\int_0^\pi |\sin t|\,dt = \int_0^\pi \sin t\,dt = 2$. D'où $\displaystyle\int_0^x |\sin t|\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x/\pi$.

Exercice 3.20

Centrale PC 2006 et 2007

Soit $a > 0$.

1) Montrer que pour tout x réel, il existe un réel y et un seul tel que $\int_x^y e^{t^2}\,dt = a$

(on pourra étudier la fonction $F\ : x \mapsto F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$).

On pose désormais $y = f(x)$.

2) Montrer que $x = -f(-y)$. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?

3) Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?

4) Tracer la courbe représentative de f avec Maple dans le cas $a = 2$.

1) La fonction F est continue, impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Pour x fixé, l'application $y \mapsto F(y) - F(x)$ est continue, strictement croissante sur $[\,x,\ +\infty\,[$ et varie de 0 à $+\infty$. C'est une bijection de $[\,x,\ +\infty\,[$ sur $[\,0,\ +\infty\,[$. Il existe donc un nombre unique tel que $F(y) - F(x) = a$.

On remarquera dans la suite qu'un point M de coordonnées (x, y) appartient à la courbe représentative de f si et seulement si $\int_x^y e^{t^2}\,dt = a$.

2) Il résulte de la parité de la fonction $t \mapsto \exp(t^2)$ que

$$\int_x^y e^{t^2}\,dt = \int_{-y}^{-x} e^{t^2}\,dt\,.$$

Donc si $y = f(x)$ alors $-x = f(-y)$.

Soit un point M de la courbe représentative de f de coordonnées (x, y). Alors le point de coordonnées $(-y, -x)$ appartient aussi à cette courbe. Celle-ci est donc symétrique par rapport à la deuxième bissectrice.

3) Si $x \geqslant 0$, on a

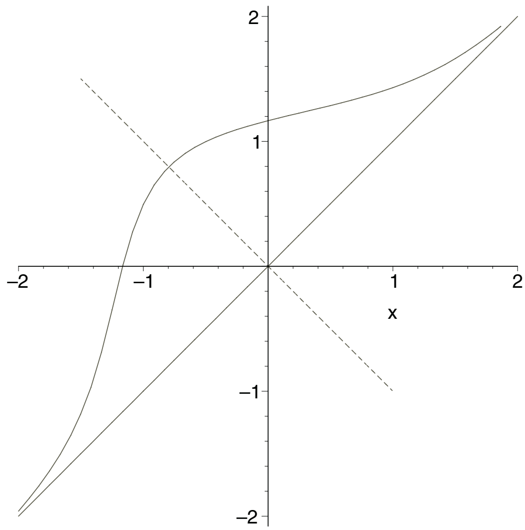
$$a = \int_x^{f(x)} e^{t^2}\,dt \geqslant \int_x^{f(x)} e^{x^2}\,dt = (f(x) - x)e^{x^2}\,,$$

donc $0 \leqslant f(x) - x \leqslant ae^{-x^2}$, et il en résulte que $f(x) - x$ tend vers zéro, lorsque x tend vers $+\infty$. La courbe représentative de f admet donc comme asymptote la première bissectrice, lorsque x tend vers $+\infty$ et également, par symétrie, quand x tend vers $-\infty$. La courbe se trouve au-dessus de son asymptote.

4) On a $2 = \int_x^{f(x)} e^{t^2}\,dt = F(f(x)) - F(x)$, et comme F est bijective, on en tire $f(x) = F^{-1}(F(x) + 2)$.

On peut donc utiliser la procédure Maple suivante, faisant apparaître la courbe avec son asymptote et la symétrie de la courbe :

```
F:=x->int(exp(t^2),t=0..x):
H:=x->solve(F(u)=x,u):
A:=plot(H(F(x)+2),x=-2..2):
B:=plot(x,x=-2..2):
C:=plot(-x,x=-1.5..1,linestyle=4):
display(A,B,C,scaling=constrained);
```



Séries numériques 4

4.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

4.1.1 Généralités

Ce qu'il faut savoir

Si la série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) converge vers 0. Ainsi, une série dont le terme général ne converge pas vers 0 est divergente. On dit dans ce cas que la série diverge **grossièrement**.

Série géométrique Soit $z \in \mathbb{C}$. La série de terme général z^n converge si et seulement si $|z| < 1$, et dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Exercice 4.1

Divergence grossière

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{2 + \sin n\frac{\pi}{4}}$?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{4n} = 1/2$. La suite $(u_{4n})_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0, donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0. Il en résulte que la série de terme général u_n diverge.

Exercice 4.2

Série divergente dont le terme général tend vers 0

On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $S_{2n} - S_n \geqslant 1/2$ et en déduire que la série de terme général $1/n$ diverge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{n+1} - S_n = 1/(n+1) > 0$. Elle admet donc une limite. Si cette limite était finie alors la suite $(S_{2n} - S_n)$ convergerait vers 0, ce qui n'est pas possible puisque, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $S_{2n} - S_n \geqslant 1/2$.

Donc la suite (S_n) admet $+\infty$ pour limite et la série de terme général $1/n$ diverge.

4.1.2 Exemples de sommation de séries

Les résultats concernant les séries géométriques (ex. 4.3) et télescopiques (ex. 4.4) sont à connaître parfaitement.

Exercice 4.3

Série géométrique

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = e^{-2n} \operatorname{ch} n$.

On a $u_n = \dfrac{1}{2}(e^{-n} + e^{-3n})$ et, puisque les séries géométriques de raison e^{-1} et e^{-3} convergent, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-1})^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-3})^n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-3}}\right).$$

Exercice 4.4

Série télescopique

Soit $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite numérique. Pour $n \geqslant n_0$, on pose $u_n = v_n - v_{n+1}$. Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ converge, et que dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = v_{n_0} - \lim_{n \to +\infty} v_n$.

Application : *CCP PC 2006*

Pour tout $n \geqslant 2$ on pose $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

Pour $n \geqslant n_0$, on calcule la somme partielle $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n}(v_k - v_{k+1})$. Cette somme vaut $S_n = v_{n_0} - v_{n+1}$ et la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ a une limite finie si et seulement si la suite $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ a une limite finie. Alors $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = v_{n_0} - \lim_{n \to +\infty} v_n$.

Application

Pour $n \geqslant 2$, on pose $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. On a alors $u_n = a_n - a_{n+1}$, et on obtient une série télescopique. Celle-ci converge puisque la suite (a_n) converge vers 0, et l'on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = a_2 = 1 - 1/\sqrt{2}$.

On peut également faire les calculs en effectuant des changements d'indice de sommation. La maîtrise de ces manipulations sera utile dans l'étude des séries entières.

Exercice 4.5

ENSEA PC 2006

1) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

2) Pour $n \geqslant 1$ on pose $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, la somme partielle de rang n de la série de terme général u_n. Montrer que $S_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1}\right)$.

3) En déduire que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1) La relation se vérifie facilement en réduisant au même dénominateur, ou en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples.

2) On a alors $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_p = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p+2}$.

En effectuant le changement d'indice $p \mapsto p+1$ dans la première somme du membre de droite et $p \mapsto p-1$ dans la troisième, on obtient

$$\sum_{p=1}^{n} u_p = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p+1} - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{n+1}\frac{1}{p+1}.$$

D'où, en faisant apparaître, si $n \geqslant 3$, la partie commune aux trois sommes,

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{p+1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

La somme se simplifie, et il reste

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right),$$

d'où
$$S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right).$$

3) Lorsque n tend vers l'infini, la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $1/4$, donc la série de terme général u_n converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{4}$.

Exercice 4.6

Séparation des termes de rang pair et de rang impair

Montrer que si la série de terme général a_{2n} et la série de terme général a_{2n+1} convergent alors la série de terme général a_n converge et que dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$.

Application : calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(3+(-1)^n)^{-n}$.

Soit S_n la somme partielle de rang n de la série de terme général a_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_{2n} = \sum_{p=0}^{2n} a_p = \sum_{p=0}^{n} a_{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} a_{2p+1} \text{ et } S_{2n+1} = \sum_{p=0}^{2n+1} a_p = \sum_{p=0}^{n} a_{2p} + \sum_{p=0}^{n} a_{2p+1}.$$

Si les deux séries convergent, alors les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent toutes les deux vers la même limite $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$, donc la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers la limite commune. On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}.$$

Application : lorsque $a_n = (3 + (-1)^n)^{-n}$, on a $a_{2n} = 4^{-2n}$ et $a_{2n+1} = 2^{-2n-1}$. Ainsi obtient-on deux séries géométriques. D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{16}{15} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\,.$$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{16}{15} + \frac{2}{3} = \frac{26}{15}\,.$

4.1.3 Séries à termes positifs

Ce qu'il faut savoir

Lorsque $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite positive, la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ des sommes partielles est croissante, et la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ est majorée. Dans ce cas, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $S_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$.

Critères de comparaison

• Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$;

– si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge,
– si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge.

• Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ et v_n soit de signe constant à partir d'un certain rang. La série de terme général u_n et la série de terme général v_n sont de même nature.

• Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n = O(v_n)$ et u_n et v_n soient de signe constant à partir d'un certain rang. Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge.

Séries de référence

• La série géométrique.

• Les séries de Riemann : la série de terme général $1/n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

On donne le nom de **série harmonique** à la série de Riemann de terme général $1/n$. La série harmonique diverge.

Règle de d'Alembert

Soit (u_n) une suite de nombres strictement positifs. On suppose que la suite (u_{n+1}/u_n) possède une limite ℓ finie ou non.

– si $0 \leqslant \ell < 1$ alors la série de terme général u_n converge,
– si $\ell > 1$ alors la série de terme général u_n diverge.

Remarque

Lorsque $\ell = 1$ on ne peut pas conclure par cette règle (comme le montre l'exemple des séries de Riemann).

Exercice 4.7

Comparaison aux séries géométriques

Etudier la nature des séries de terme général u_n suivantes :

1) $u_n = \dfrac{5^n - 3^n}{3^n + n^4}$; 2) $u_n = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}\right)^n$.

1) On obtient un équivalent de u_n en écrivant, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{5^n}{3^n} \dfrac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 + \frac{n^4}{3^n}}$.

On en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$ puisque les suites $((3/5)^n)$ et $(n^4/3^n)$ convergent vers 0.

Or la série de terme général $(5/3)^n$ est une série géométrique positive de raison $5/3 \notin]-1, 1[$. Elle diverge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n diverge aussi.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \exp\left[n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right]$,

et en utilisant le développement limité au voisinage de 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$, on obtient

$\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left[n\left(\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right] = e^{1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Or la série de terme général $e(1/2)^n$ est une série géométrique positive de raison $1/2 \in]-1, 1[$. Elle converge donc. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

Exercice 4.8

Comparaison aux séries de Riemann. CCP PC 2005

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $u_n = \dfrac{\operatorname{Arctan}(n^{2\alpha})}{n^\alpha}$.

Selon que α est positif, négatif ou nul, trouver un équivalent simple de u_n, puis étudier la nature de la série de terme général u_n.

On peut être tenté de majorer $\operatorname{Arctan}(n^{2\alpha})$ par $\pi/2$, mais cela ne permet de conclure par comparaison à la série de Riemann de terme général $1/n^\alpha$ que si $\alpha > 1$. On va étudier les autres cas au moyen des équivalents.

– Si $\alpha > 0$, alors la suite $(n^{2\alpha})_{n\geqslant 1}$ admet $+\infty$ comme limite, et, $\operatorname{Arctan}(n^{2\alpha}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{n^\alpha}$ et l'on obtient une série de Riemann. La série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$.

– Si $\alpha = 0$, alors $u_n = \operatorname{Arctan} 1 = \pi/4$ et la suite (u_n) ne converge pas vers 0. Donc la série de terme général u_n diverge grossièrement

– Si $\alpha < 0$, alors la suite $(n^{2\alpha})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. On peut donc utiliser l'équivalent $\operatorname{Arctan} u \underset{u\to 0}{\sim} u$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{2\alpha}}{n^\alpha} = \dfrac{1}{n^{(-\alpha)}}$ et l'on obtient une série de Riemann. Alors, la série de terme général u_n converge si et seulement si $-\alpha > 1$, c'est-à-dire $\alpha < -1$.

Exercice 4.9

Comparaison aux séries de Riemann

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{n}{n+1}} - 1$

Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1/n} - 1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/n} - 1 = \exp\left(-\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - 1\,.$$

En utilisant le développement limité de $u \mapsto \ln(1+u)$ au voisinage de 0, on obtient

$$u_n = \exp\left(-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) - 1 = \exp\left(-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\,.$$

Alors, en utilisant le développement limité de $u \mapsto e^u$ au voisinage de 0, on en déduit

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}\,.$$

Or $1/n^2$ est le terme général d'une série de Riemann convergente. Il en résulte que la série de terme général u_n converge aussi.

Exercice 4.10

Comparaison aux séries de Riemann

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = a^{\sqrt{n}}$ $(a > 0)$.

Lorsque $a \geqslant 1$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement.

Lorsque $0 < a < 1$, la suite $(n^2 u_n)_{n\geqslant 1} = (n^2 a^{\sqrt{n}})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 (produit d'une exponentielle et d'une puissance). Donc à partir d'un certain rang, on a $n^2 u_n \leqslant 1$, d'où l'on déduit $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, et puisque la série de terme général $1/n^2$ est une série de Riemann convergente, il en résulte que la série de terme général u_n converge également.

Remarque
On retiendra que pour comparer à une série de Riemann, il peut être utile de chercher la limite de suites de la forme $(n^\alpha u_n)$, (voir également 4.15).

Exercice 4.11

Comparaison aux séries de Riemann Centrale PC 2006

Nature de la série de terme général $v_n = \text{Arccos}(1 - 1/n^\alpha)$ $(\alpha > 0)$.

Indication de la rédaction : utiliser un développement limité de $\cos v_n$.

La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite positive qui converge vers 0 et on a $\cos v_n = 1 - 1/n^\alpha$, donc, en utilisant un développement limité au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto \cos u$, on a $\dfrac{1}{n^\alpha} = 1 - \cos v_n = \dfrac{v_n^2}{2} + o(v_n^2)$. On en déduit $v_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2/n^\alpha$ donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}/n^{\alpha/2}$, et la série de terme général v_n converge si et seulement si $\alpha/2 > 1$ c'est-à-dire $\alpha > 2$.

Exercice 4.12

TPE MP 2006

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite positive. On pose $v_n = \dfrac{\sqrt{u_n}}{n+1}$.

1) Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.
2) Montrer que la réciproque est fausse.

1) En utilisant l'inégalité $a \cdot b \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$, valable pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$ les inégalités $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$.

Comme les séries de termes généraux u_n et $1/(n+1)^2$ convergent, la série de terme général $\dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$ converge et par suite la série de terme général v_n converge.

2) Si $n \in \mathbb{N}$, prenons $u_n = 1/(n+1)$. La série de terme général u_n diverge. Par contre $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n^{3/2}$ et la série de terme général v_n converge.

Remarque
On pourrait aussi utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer les sommes partielles de la série.

L'exercice suivant utilise la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$.

Exercice 4.13

Règle de d'Alembert. CCP PC 2006

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n} a^n$ $(a > 0)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}a^n} \dfrac{n^n}{n!} = a\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = a\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.
Par un calcul de développement limité classique (voir ex. 4.7), on obtient que la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ae^{-1}, donc il résulte de la règle de d'Alembert que la série de terme général u_n converge si $a/e < 1$, donc si $a < e$, et diverge si $a/e > 1$, donc si $a > e$. Lorsque $a = e$, on obtient en utilisant la formule de Stirling $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}\,\dfrac{e^n}{n^n} = \sqrt{2n\pi}$ et la série diverge grossièrement.

Ce qu'il faut savoir

Comparaison à une intégrale

Soit f une fonction continue par morceaux décroissante et positive sur un intervalle de la forme $[\,A, +\infty\,[$. Alors la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$ converge.
Il en résulte que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) la série de terme général $f(n)$ converge

ii) la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)dt$ converge

iii) la fonction f est intégrable sur $[\,A, +\infty\,[$

iv) une primitive F de f sur $[\,A, +\infty\,[$ admet une limite finie en $+\infty$.

Remarque
De nombreux exercices reposent sur la comparaison d'une série et d'une intégrale. Lorsqu'une fonction est décroissante sur $[\,n-1, n\,]$, où $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra utiliser les inégalités $f(n) \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leqslant f(n-1)$, mais beaucoup d'autres situations sont possibles.

Exercice 4.14

Mines - Ponts PC 2005

Etudier la suite $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} - \ln(\ln n)$.

La fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, est continue décroissante positive et la série de terme général $f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)dt$ converge. En calculant la somme partielle S_n de rang n de cette série, on obtient

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=3}^{n} \left(f(k) - \int_{k-1}^{k} f(t)dt \right) &= \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(2) - \int_{2}^{n} f(t)dt \\ &= \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(2) - \ln \ln n + \ln \ln 2 . \end{aligned}$$

Comme la suite $(S_n)_{n \geqslant 3}$ converge, on en déduit que la suite $\left(\sum_{k=2}^{n} f(k) - \ln \ln n \right)_{n \geqslant 3}$ converge également.

Exercice 4.15

Séries de Bertrand

Etudier la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ en comparant à une série de Riemann lorsque $\alpha \neq 1$ et à une intégrale lorsque $\alpha = 1$.

Application : étudier les séries de termes généraux $v_n = \frac{1}{\ln n!}$ puis $w_n = n^{\frac{\ln n}{n}} - 1$.

$\alpha = 1$ La fonction définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est dérivable et l'on obtient $f'(x) = -\frac{\ln x + \beta}{x^2(\ln x)^{\beta+1}}$. Donc f' est négative sur $[e^{-\beta}, +\infty[\cap [2, +\infty[$ et f est une fonction décroissante positive sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$. On obtient facilement une primitive F de f :

$$F(x) = \frac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta} \text{ si } \beta \neq 1 \quad \text{et} \quad F(x) = \ln(\ln x) \text{ si } \beta = 1 .$$

Donc on constate que F possède une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$, et le critère de comparaison à une intégrale montre que la série de terme général $1/(n(\ln n)^\beta)$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

$\alpha < 1$ Si $n \geqslant 2$, on écrit $\dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} = \dfrac{1}{n}\dfrac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^{\beta}}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}/(\ln n)^{\beta} = +\infty$.
Donc, pour n assez grand $\dfrac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^{\beta}} \geqslant 1$, et $\dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \geqslant \dfrac{1}{n}$. La série diverge par comparaison à la série harmonique.

$\alpha > 1$ Soit α' tel que $\alpha > \alpha' > 1$. Si $n \geqslant 2$, on écrit $\dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} = \dfrac{1}{n^{\alpha'}}\dfrac{1}{n^{\alpha-\alpha'}(\ln n)^{\beta}}$.
Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha-\alpha'}(\ln n)^{\beta} = +\infty$. Donc, pour n assez grand $\dfrac{1}{n^{\alpha-\alpha'}(\ln n)^{\beta}} \leqslant 1$, et $\dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \leqslant \dfrac{1}{n^{\alpha'}}$. La série converge par comparaison à une série de Riemann.

Remarque
Ces résultats sont utilisés dans beaucoup d'exercices d'oraux. Nous vous conseillons vivement de savoir les redémontrer.

Application : En majorant chaque terme du produit $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ par n, on a, pour $n \geqslant 1$, l'inégalité $n! \leqslant n^n$, et donc $\ln n! \leqslant n \ln n$. Finalement $v_n \geqslant \dfrac{1}{n\ln n}$.
Comme la série de terme général $1/(n\ln n)$ est une série de Bertrand divergente ($\alpha = \beta = 1$), il en résulte que la série de terme général v_n diverge.
La suite $((\ln n)^2/n)$ converge vers 0. Comme on a l'équivalent $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on a donc $w_n = e^{(\ln n)^2/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^2}{n}$. On obtient une série de Bertrand divergente ($\alpha = 1, \beta = -2$), il en résulte que la série de terme général w_n diverge.

4.1.4 Séries à termes réels quelconques ou à termes complexes

Ce qu'il faut savoir

- Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite numérique. On dira que la série de terme général u_n **converge absolument** lorsque la série de terme général $|u_n|$ est convergente.
- Si la série de terme général u_n converge absolument, alors elle converge. De plus

$$\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|\,.$$

La série de terme général $|u_n|$ est une série à termes positifs et les résultats du paragraphe précédent peuvent donc s'appliquer.

- Une série qui converge sans converger absolument, est dite **semi-convergente**.

Critère de Leibniz ou critère spécial des séries alternées

Soit $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite décroissante qui converge vers 0. Alors la série alternée de terme général $(-1)^n a_n$ converge. De plus $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{n+1}$, et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}$.

La série harmonique alternée de terme général $(-1)^n/n$ est l'exemple d'une série qui converge d'après le critère de Leibniz, mais qui ne converge pas absolument.

Attention : On ne peut pas utiliser les équivalents pour étudier des séries dont le terme général n'est pas de signe constant. On privilégiera dans ce cas les développements asymptotiques. (Voir ex. 4.18).

Exercice 4.16

Etudier la convergence et la convergence absolue de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{n}$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on a $|u_n| = \dfrac{1}{n} \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{n}$. Puisque l'on a $\operatorname{Arctan} u \underset{u \to 0}{\sim} u$, on en déduit que $|u_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} 1/n^2$. Comme la série de Riemann de terme général $1/n^2$ converge, il en résulte que la série de terme général $|u_n|$ converge, c'est-à-dire que la série de terme général u_n converge absolument. Donc elle converge.

Exercice 4.17

CCP PC 2005

Etudier la convergence et la convergence absolue de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \ln n}$

La fonction, f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x - \ln x}$ est dérivable et admet comme dérivée $f'(x) = \dfrac{1 - x}{x(x - \ln x)^2}$. La dérivée étant négative, il en résulte que f est décroissante. D'autre part $|u_n| = \dfrac{1}{n} \dfrac{1}{1 - \frac{\ln n}{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Alors la série de terme général $|u_n|$ diverge par comparaison à la série harmonique. Mais la suite $(|u_n|)_{n \geqslant 1}$ est une suite décroissante qui converge vers 0. Donc la série de terme général u_n converge d'après le critère de Leibniz.

Exercice 4.18

Etudier si la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge.

Puisque la suite $((-1)^n/\sqrt{n})$ converge vers 0, on peut utiliser le développement limité au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. On a donc $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
La série de terme général $(-1)^n/\sqrt{n}$ converge d'après le critère de Leibniz. D'autre part $\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$, et la série de terme général $\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ diverge par comparaison à la série harmonique. Il en résulte que la série de terme général u_n diverge, et ceci bien que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n/\sqrt{n}$.
On a donc l'exemple de deux séries dont les termes généraux sont équivalents mais qui ne sont pas de même nature.

4.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 4.19

CCP PC 2006

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \dfrac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}$.

1) Montrer que la série de terme général u_n converge.

2) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. On rappelle que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

1) Puisque l'on a $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cos u \underset{u\to 0}{\sim} 1$, on obtient

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

et la série converge par comparaison à une série de Riemann.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sin \frac{1}{n(n+1)} = \sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1} - \cos \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n+1},$$

d'où l'on déduit $u_n = \tan \dfrac{1}{n} - \tan \dfrac{1}{n+1}$.
La série de terme général u_n est donc une série télescopique, et puisque la suite $\left(\tan \dfrac{1}{n}\right)$ converge vers 0, on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \tan 1$.

Exercice 4.20

CCP PC 2007

1) Montrer que la série de terme général $v_n = \sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)$ converge.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $a_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est entier.

3) En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

1) On a $0 \leqslant 2-\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{-1} < 1$. La série géométrique de raison $2-\sqrt{3}$ est donc convergente. Alors, puisque, pour tout u réel on a $|\sin u| \leqslant |u|$ on en déduit que $|v_n| \leqslant \pi(2-\sqrt{3})^n$ et la série de terme général v_n converge absolument.
2) On montre que a_n est entier en utilisant la formule du binôme. En effet,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{3}^k 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\sqrt{3})^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{3}^k (1+(-1)^k) 2^{n-k}.$$

Dans cette somme ne restent que les termes pour lesquels k est pair. Donc, si l'on pose $k = 2p$, on obtient alors $a_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{\mathbb{E}(n/2)} \binom{n}{2p} 3^p 2^{n-2p+1}$ qui est un nombre entier.

3) On a alors $|u_n| = |\sin(\pi a_n - \pi(2-\sqrt{3})^n)| = |v_n|$ et la série de terme général u_n converge absolument.

Exercice 4.21

CCP PC 2006

Soit $\beta \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $a_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\beta}$. Nature de la série de terme général a_n.

Indication de la rédaction : montrer que la série de terme général a_n diverge si $\beta < 0$ et converge si $\beta > 0$.

Si $\beta < 0$, pour tout $k \geqslant 1$, on a alors $k^\beta \leqslant 1$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\beta \leqslant n$, et il en résulte que $a_n \geqslant 1/n$. La série de terme général a_n diverge donc, par comparaison à la série harmonique.
Si $\beta > 0$, on fait apparaître une somme de Riemann, en écrivant

$$\sum_{k=1}^{n} k^\beta = n^{\beta+1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^\beta .$$

La suite des sommes de Riemann $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\beta}\right)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 x^\beta dx = \frac{1}{\beta+1}$ et on obtient l'équivalent $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\beta \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}$. Alors $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\beta+1}{n^{\beta+1}}$ et la série de terme général a_n converge par comparaison à une série de Riemann.

Exercice 4.22

Centrale PC 2006

Nature de la série de terme général $u_n = \tan\left(\dfrac{n\pi}{4n+1}\right) - \cos(1/n)$.

On cherche un équivalent de u_n en effectuant un développement limité. On a

$$\frac{n\pi}{4n+1} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1+\frac{1}{4n}} = \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{16n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc en utilisant la formule $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$, on obtient

$$\tan\frac{n\pi}{4n+1} = \frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{16n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{16n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}.$$

Puis en utilisant le développement limité au voisinage de 0 : $\tan u = u + o(u)$, on obtient

$$\tan\frac{n\pi}{4n+1} = \frac{1-\frac{\pi}{16n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{\pi}{16n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \left(1-\frac{\pi}{16n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{\pi}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme on a également $\cos(1/n) = 1 + o(1/n)$, on en déduit

$$u_n = -\frac{\pi}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\pi}{8n},$$

et la série de terme général u_n diverge, par comparaison à la série harmonique.

Exercice 4.23

Centrale PC 2007, Saint-Cyr PSI 2005, CCP PC 2005

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n t\, dt$.

1) Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+2}.
2) Trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.
3) Donner la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.
4) Discuter, suivant $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général u_n/n^α.

1) On a $u_n + u_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan^{n+2} t + \tan^n t)\, dt = \int_0^{\pi/4} \tan^n t(1 + \tan^2 t)\, dt$.

Puisque $t \mapsto 1 + \tan^2 t$ est la dérivée de $t \mapsto \tan t$, on en déduit que

$$u_n + u_{n+2} = \left[\frac{\tan^{n+1} t}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$

2) Pour $x \in [0, \pi/4]$, on a $0 \leqslant \tan t \leqslant 1$, et donc $0 \leqslant \tan^{n+1} t \leqslant \tan^n t$. Alors, si $n \geqslant 0$, on obtient en intégrant, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, et la suite (u_n) est décroissante positive. On en déduit que $2u_{n+2} \leqslant u_{n+2} + u_n = \dfrac{1}{n+1} \leqslant 2u_n$. Donc, pour $n \geqslant 2$, on a l'encadrement $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}$, d'où $\dfrac{n}{n+1} \leqslant 2nu_n \leqslant \dfrac{n}{n-1}$
Le théorème d'encadrement montre alors que $2nu_n$ tend vers 1 c'est-à-dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

3) Il résulte de ce qui précède que la suite (u_n) converge vers 0. De plus, elle est décroissante, alors d'après le critère de Leibniz, la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente.

4) On a $\dfrac{u_n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^{\alpha+1}}$. Alors par comparaison à une série de Riemann, la série de terme général u_n/n^α converge si et seulement si $\alpha + 1 > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 0$.

Exercice 4.24

TPE PC 2006 , ENSEA PC 2006

On se propose d'étudier la convergence et la convergence absolue de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ $(a \neq 0)$.

1) Montrer que la série diverge si $a < 0$.
2) On suppose $a > 0$.
   - 2.a Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n = (-1)^n/n^a$, et en déduire pour quelles valeurs de a la série converge absolument.
   - 2.b Etudier la nature de la série de terme général $u_n - v_n$, et en déduire pour quelles valeurs de a la série converge.

1) Pour $n \geqslant 2$ on a $u_n = \dfrac{1}{1 + (-1)^n n^a}$, et, lorsque $a < 0$, la suite $((-1)^n n^a)$ converge vers 0. Il en résulte que la suite (u_n) converge vers 1. Donc la série de terme général u_n diverge grossièrement.

2.a Pour $n \geqslant 2$ on a $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{n^a} \dfrac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^a}}$, et la suite $((-1)^n/n^a)$ converge vers 0. Il en résulte que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n^a}$. Alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^a}$, et par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que la série de terme général $|u_n|$ converge, c'est-à-dire que la série de terme général u_n converge absolument, si et seulement si $a > 1$.

2.b Etudions le cas où $0 < a \leqslant 1$. On a $u_n - v_n = -\dfrac{1}{n^a(n^a + (-1)^n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^{2a}}$.
La série de terme général v_n converge d'après le critère de Leibniz. Par ailleurs la série de terme général $u_n - v_n$ converge si et seulement si $2a > 1$ c'est-à-dire $a > 1/2$ par comparaison à une série de Riemann. On a donc les deux cas suivants :
– lorsque $1/2 < a \leqslant 1$, la série de terme général u_n est la somme de deux séries convergentes. Elle converge donc mais n'est pas absolument convergente.
– lorsque $0 < a \leqslant 1/2$, la série de terme général u_n est la somme d'une série convergente et d'une série divergente : elle diverge donc.
En résumé :
– lorsque $a > 1$ la série converge absolument
– lorsque $1/2 < a \leqslant 1$ la série est semi-convergente
– lorsque $a \leqslant 1/2$ la série diverge.

Exercice 4.25

CCP PC et PSI 2006

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
2) Montrer que la série numérique de terme général $(-1)^n u_n$ converge.
3) Etablir que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$.
4) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$.
Indication de la rédaction : on pourra commencer par établir que
$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}.$$
5) Montrer que la série de terme général u_n diverge.
Indication de la rédaction : on pourra établir que $u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

1) Il y a diverses façons de montrer que la suite (u_n) converge vers 0. Voici une méthode utilisant le théorème de convergence dominée, théorème qui sera vu dans un chapitre ultérieur.

Lorsque $n \in \mathbb{N}$ soit f_n la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par $f_n(x) = \sin^n x$. La suite (f_n) converge simplement vers 0 sur l'intervalle $[0, \pi/2[$, et les fonctions $|f_n|$ sont majorées par la fonction constante 1, qui est intégrable sur $[0, \pi/2[$. Il résulte alors du théorème de convergence dominée que la suite (u_n) converge vers 0.

2) Comme pour tout $n \geqslant 0$, et tout $x \in]0, \pi/2[$ on a $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, on en déduit que $\sin^n x \geqslant \sin^{n+1} x$, et, en intégrant, que la suite (u_n) est décroissante. La série de terme général $(-1)^n u_n$ est donc une série alternée et il résulte alors du critère de Leibniz que cette série converge.

3) En calculant la somme partielle, on obtient

$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - (-\sin x)^{n+1}}{1 + \sin x}\, dx$. Mais, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $\left| \frac{(-\sin x)^{n+1}}{1 + \sin x} \right| \leqslant \sin^{n+1} x$, et donc $\left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\sin x)^{n+1}}{1 + \sin x}\, dx \right| \leqslant u_{n+1}$. Il en résulte que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(-\sin x)^{n+1}}{1 + \sin x}\, dx = 0$. Alors la suite (S_n) converge vers $S = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin x}\, dx$.

4) En effectuant le changement de variable $u = \pi/2 - x$, on obtient

$$S = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\, dx = \left[\tan \frac{x}{2} \right]_0^{\pi/2} = 1 .$$

5) En remarquant que, lorsque $x \in [0, \pi/2]$ on a $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$, on obtient $u_n \geqslant \int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos x\, dx = \left[\frac{\sin^{n+1} x}{n+1} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}$, et la série de terme général u_n diverge par comparaison à la série harmonique.

Exercice 4.26

Mines - Ponts PC 2005 , CCP PC 2006

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On définit une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ en posant

$$u_n = a \ln(n) + b \ln(n+1) + c \ln(n+2) .$$

1) Etablir que $u_n = (a + b + c) \ln n + \frac{b + 2c}{n} - \frac{b + 4c}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2) Pour quelles valeurs de (a, b, c) la série de terme général u_n converge-t-elle ?

3) Lorsque la série converge, calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1) On écrit $u_n = a\ln n + b\left(\ln n + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) + c\left(\ln n + \ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\right)$, puis en utilisant le développement limité au voisinage de 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$,

$$\begin{aligned} u_n &= (a+b+c)\ln n + b\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + c\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (a+b+c)\ln n + \frac{b+2c}{n} - \frac{b+4c}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

2) Si $a+b+c$ n'est pas nul, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (a+b+c)\ln n$ et la série de terme général u_n diverge grossièrement.
Si $a+b+c=0$ et $b+2c$ n'est pas nul, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (b+2c)/n$ et la série de terme général u_n diverge par comparaison à la série harmonique.
Si $a+b+c=b+2c=0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -(b+4c)/(2n^2)$ et la série de terme général u_n converge par comparaison à une série de Riemann.
3) La série de terme général u_n converge si et seulement si $a+b+c=b+2c=0$ c'est-à-dire $c=a$ et $b=-2a$. Lorsque ces conditions sont vérifiées, on a alors

$$u_n = a(\ln n - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)) = a\left(\ln\frac{n}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n+2}\right),$$

et il apparaît une série télescopique, donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = a\left(\ln\frac{1}{2} - \lim_{n\to+\infty}\ln\frac{n}{n+1}\right) = -a\ln 2\,.$$

Exercice 4.27

Procédé de sommation d'Euler. Centrale PC 2006

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$.

Indication de la rédaction : on pourra écrire pu_n sous la forme $v_n - v_{n+1}$.

Lorsque $n \geqslant 1$, on peut écrire

$$pu_n = \frac{(n+p)-n}{n(n+1)\cdots(n+p)} = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)\cdots(n+p)}\,.$$

Donc en posant $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)\cdots(n+p-1)}$, on a $pu_n = v_n - v_{n+1}$, et puisque la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, il résulte du procédé télescopique que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p}{n(n+1)\cdots(n+p)} = v_1 = \frac{1}{p!}$. Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)} = \frac{1}{p\,p!}$.

Exercice 4.28

TPE PC 2006

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,dt$.

1) Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge et que sa somme vaut $\pi/2 - 1$.
2) Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $a_n = R(n)a_{n-2}$ où R est une fraction rationnelle.
3) Montrer que $n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$ est constant.
4) Montrer que la série de terme général a_n converge.

1) Lorsque $t \in [0,\ 1]$ on a $0 \leqslant t^n\sqrt{1-t^2} \leqslant t^n$ et en intégrant $0 \leqslant a_n \leqslant 1/(n+1)$. La suite (a_n) converge vers 0. D'autre part $t^{n+1}\sqrt{1-t^2} \leqslant t^n\sqrt{1-t^2}$, donc en intégrant $a_{n+1} \leqslant a_n$. La suite (a_n) est décroissante. Alors il résulte du critère de Leibniz que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.

On a $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\frac{1-(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\,dt$.

Mais $0 \leqslant \sqrt{1-t^2}\,\dfrac{t^{N+1}}{1+t} \leqslant t^{N+1}$, donc en intégrant

$$0 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\frac{t^{N+1}}{1+t}\,dt \leqslant \frac{1}{N+2}\,.$$

Il en résulte que la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\,dt\right)$ converge vers 0, et que (S_N) converge vers $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}\,dt$.

On calcule cette intégrale en effectuant le changement de variable $t = \cos u$. On a alors $dt = -\sin u\,du$. Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\cos^2 u}}{1+\cos u}\,\sin u\,du = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 u}{2\cos^2\frac{u}{2}}\,du = \int_0^{\pi/2} 2\sin^2\frac{u}{2}\,du \\ &= \int_0^{\pi/2}(1-\cos u)\,du = \Big[u - \sin u\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1\,. \end{aligned}$$

On a donc bien $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \frac{\pi}{2} - 1$.

2) Sur $[0,\ 1]$, la fonction $t \mapsto t\sqrt{1-t^2}$ a pour primitive $-(1-t^2)^{3/2}/3$. En intégrant par parties $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}(t\sqrt{1-t^2})\,dt$ lorsque $n \geqslant 2$, on obtient,

$$\begin{aligned} a_n &= \left[-\frac{t^{n-1}(1-t^2)^{3/2}}{3}\right]_0^1 + \frac{n-1}{3}\int_0^1 t^{n-2}(1-t^2)^{3/2}\,dt \\ &= \frac{n-1}{3}\int_0^1 t^{n-2}(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{n-1}{3}(a_{n-2}-a_n)\,. \end{aligned}$$

On en déduit que $(n+2)a_n = (n-1)a_{n-2}$.

3) Alors en multipliant par $n(n+1)a_{n-1}$, on obtient

$$n(n+1)(n+2)a_na_{n-1} = (n-1)n(n+1)a_{n-1}a_{n-2}\,,$$

ce qui montre que que la suite $(n(n+1)(n+2)a_na_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante.

4) On a donc pour tout $n \geqslant 1$, la relation $n(n+1)(n+2)a_na_{n-1} = 6a_1a_0$.

En utilisant la décroissance de la suite (a_n), on a, $a_n \leqslant a_{n-1} \leqslant a_{n-2}$ et donc, en divisant par a_n, on obtient $1 \leqslant \dfrac{a_{n-1}}{a_n} \leqslant \dfrac{a_{n-2}}{a_n} = \dfrac{n+2}{n-1}$. On déduit du théorème d'encadrement que la suite (a_{n-1}/a_n) converge vers 1, donc que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_{n-1}$.

Alors $a_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} a_na_{n-1} = \dfrac{6a_1a_0}{n(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{6a_1a_0}{n^3}$. D'où l'on déduit $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{6a_1a_0}}{n^{3/2}}$, et la série de terme général a_n converge par comparaison à une série de Riemann.

4.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 4.29

CCP PC 2006

On considère les suites $(h_n)_{n\geqslant 1}$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définies par $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $u_n = h_n - \ln n$.

1) En étudiant la série de terme général $u_{n+1}-u_n$, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note γ sa limite.

2) Justifier le fait que $h_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
Montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k} = ah_{2n} - bh_n\,.$$

En déduire la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2\,.$

3) On considère α dans $\mathbb{R}$. Soit $(w_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $w_n = -\alpha/n$ si n est un multiple de 4 et $w_n = 1/n$ sinon. Pour $n \geqslant 1$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$.

3.a Montrer que la suite $(S_{4n})_{n\geqslant 1}$ est convergente si et seulement si $\alpha = 3$.

3.b On suppose que $\alpha = 3$. Etablir la convergence de la série $\sum w_n$ et calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} w_k$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_{n+1} - u_n = h_{n+1} - h_n - \ln \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{n+1} + \ln \dfrac{n}{n+1}$.
On peut donc écrire $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$, et en utilisant le développement limité au voisinage de 0 : $\ln(1+u) = u + O(u^2)$ on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

La série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge par comparaison à la série de Riemann $1/(n+1)^2$. La suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)\right)_{n\geqslant 2}$ est donc convergente. Mais $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) + u_1$ et il en résulte que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge également.

2) Puisque $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers γ, on a $u_n = \gamma + o(1)$ donc $h_n - \ln n = \gamma + o(1)$, ce qui donne bien $h_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
En séparant les termes de rang pair et ceux de rang impair, on a

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1}.$$

Donc en additionnant ces deux égalités membre à membre $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ d'où l'on déduit $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = -h_{2n} + h_n$ et en utilisant la relation obtenue ci-dessus,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = -(\ln(2n) + \gamma) + (\ln n + \gamma) + o(1) = -\ln 2 + o(1).$$

Comme d'après le critère de Leibniz la série de terme général $(-1)^n/n$ converge, on a alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2\,.$$

3.1 En séparant les termes de rang $4s$, $4s+1$, $4s+2$, $4s+3$, on obtient

$$S_{4n} = \sum_{k=1}^{4n} w_k = \sum_{s=0}^{n-1} (w_{4s+1} + w_{4s+2} + w_{4s+3} + w_{4s+4})\,.$$

Alors S_{4n} est la somme partielle de rang $n-1$ de la série de terme général $a_n = w_{4n+1} + w_{4n+2} + w_{4n+3} + w_{4n+4} = \dfrac{1}{4n+1} + \dfrac{1}{4n+2} + \dfrac{1}{4n+3} - \dfrac{\alpha}{4n+4}$.
En remarquant que $\dfrac{1}{4n+b} = \dfrac{1}{4n}\dfrac{1}{1+\frac{b}{4n}} = \dfrac{1}{4n}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{1}{4n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
on obtient $a_n = \dfrac{3-\alpha}{4n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Lorsque $\alpha = 3$, on a $a_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et la série de terme général a_n converge par comparaison à la série de Riemann de terme général $1/n^2$.
Lorsque $\alpha \neq 3$, on a $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3-\alpha}{4n}$, et la série de terme général a_n diverge par comparaison à la série harmonique.
Donc la suite (S_{4n}) converge si et seulement si $\alpha = 3$.

3.2 On prend donc $\alpha = 3$. On a

$$S_{4n+1} = S_{4n} + 1/(4n+1),\ S_{4n+2} = S_{4n} + 1/(4n+1) + 1/(4n+2)$$

et $$S_{4n+3} = S_{4n} + 1/(4n+1) + 1/(4n+2) + 1/(4n+3)\,.$$

Alors, lorsque $0 \leqslant r \leqslant 3$, les suites (S_{4n+r}) convergent vers la même limite. Il en résulte que la suite (S_n) converge vers la limite commune. Il suffit de chercher la limite de (S_{4n}). On peut écrire $a_n = \dfrac{1}{4n+1} + \dfrac{1}{4n+2} + \dfrac{1}{4n+3} + \dfrac{1}{4n+4} - \dfrac{4}{4n+4}$,
et donc $S_{4n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = h_{4n} - h_n$.
En appliquant la formule obtenue en 2), on obtient alors

$$S_{4n} = (\ln(4n) + \gamma) - (\ln n + \gamma) + o(1) = \ln 4 + o(1)\,,$$

et donc (S_{4n}) converge vers $2\ln 2$. Il en résulte que (S_n) converge aussi vers $2\ln 2$.

Exercice 4.30

CCP PC 2006

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de la variable réelle x définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \cos(n!\pi x)$.

1) Montrer que si $x \in \mathbb{Q}$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 à partir d'un certain rang.

2) A l'aide du développement en série $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$, écrire $n!e$ sous la forme $n!e = P_n + r_n$, où $P_n \in \mathbb{N}$ et où $\dfrac{1}{n+1} \leqslant r_n \leqslant \dfrac{e-1}{n+1}$.

3) Que peut-on dire de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $x \in 2e\mathbb{Z}$?

4) Etudier la suite $(|u_n(e)|)_{n\in\mathbb{N}}$.

5) Etudier la série de terme général $v_n = 1 - |u_n(e)|$.

1) En écrivant $x = p/q$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a $n!\,x = n!p/q$. Si $n \geqslant q+2$, alors $n!x = p(q-1)!(q+1)\cdots n$ est un nombre entier et comme il contient comme facteurs le produit $n(n-1)$ qui est pair, il en résulte qu'il est pair également. Donc $\cos(n!\pi x) = 1$. La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante à partir du rang $q+2$.

2) On a $n!e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$. Mais, lorsque $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre $k!$ divise $n!$ et $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ est une somme de nombres entiers positifs, donc appartient à $\mathbb{N}$.

Posons $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$ et encadrons cette somme.

On peut minorer la somme r_n par son premier terme, donc $r_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$. D'autre part, on a

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots k} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)\cdots k}\right).$$

Mais, lorsque $k \geqslant n+2$, on peut minorer le produit $(n+2)\cdots k$, par $2\cdots(k-n)$, on obtient

$$r_n \leqslant \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{2\cdots(k-n)}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) = \frac{e-1}{n+1}.$$

3) Si $x = 2eq$ avec $q \in \mathbb{Z}$, on a alors $u_n(x) = \cos(2qn!e\pi) = \cos(2qP_n\pi + 2qr_n\pi)$ et puisque qP_n est entier, $u_n(x) = \cos(2qr_n\pi)$.

Mais il résulte de la question précédente que la suite (r_n) converge vers 0. Alors la suite $(\cos(2qr_n\pi))$ converge vers $\cos 0 = 1$. Donc $(u_n(x))$ converge vers 1.

4) On a cette fois $u_n(e) = \cos(n!e\pi) = \cos(P_n\pi + r_n\pi) = (-1)^{P_n}\cos(r_n\pi)$. Donc $|u_n(e)| = |\cos(r_n\pi)|$ et la suite $(\cos(r_n\pi))$ converge vers $\cos 0 = 1$. Donc $(|u_n(e)|)$ converge vers 1.

5) D'après 4) la suite (v_n) converge vers 0, et d'autre part $v_n = 1 - |\cos(r_n\pi)| \geqslant 0$. Comme la suite (r_n) converge vers 0 et est positive, le nombre r_n appartient à $[0,\ 1/2]$ à partir d'un certain rang, donc $r_n\pi$ appartient à $[0,\ \pi/2]$ et $\cos(r_n\pi)$ est positif à partir d'un certain rang. Alors

$$0 \leqslant v_n = 1 - |\cos(r_n\pi)| = 1 - \cos(r_n\pi) = 2\sin^2\frac{r_n\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{r_n^2\pi^2}{2} \leqslant \frac{(e-1)^2\pi^2}{2(n+1)^2},$$

et la série de terme général v_n converge par comparaison à une série de Riemann.

Exercice 4.31

CCP PSI 2007 K

1) Convergence et somme de la série $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2-1}$.

2) Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\mathbb{E}(\sqrt{k+1}) - \mathbb{E}(\sqrt{k})}{k}$ où $\mathbb{E}$ désigne la fonction partie entière.

Indication de la rédaction : on rappelle que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a $\displaystyle\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$.

1) Pour $N \geqslant 2$, notons S_N la somme partielle de rang N de la série, on en déduit que,

$$S_N = \sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{N+1}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)$$

donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2-1} = \lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{3}{4}$.

2) Etudions la valeur de $\mathbb{E}(\sqrt{n})$ en fonction de celle de $\mathbb{E}(\sqrt{n+1})$. Pour cela remarquons tout d'abord que si l'on se donne $p \in \mathbb{N}^*$, et si l'on a $\sqrt{n+1} > p$, alors $n+1 > p^2$, et comme ces nombres sont entiers, $n+1 \geqslant p^2+1$, donc $n \geqslant p^2$ et enfin $\sqrt{n} \geqslant p$.

Soit alors $n \geqslant 2$. Il y a deux cas possibles :

– Le nombre $\sqrt{n+1}$ n'est pas entier.

Si $k = \mathbb{E}(\sqrt{n+1})$, on a alors $1 \leqslant k < \sqrt{n+1} < k+1$. Dans ce cas on obtient les inégalités $k \leqslant \sqrt{n} < \sqrt{n+1} < k+1$, et donc $\mathbb{E}(\sqrt{n+1}) = \mathbb{E}(\sqrt{n}) = k$, ce qui donne $\mathbb{E}(\sqrt{n+1}) - \mathbb{E}(\sqrt{n}) = 0$.

– Le nombre $\sqrt{n+1}$ est un entier k.
Donc $1 \leqslant k-1 < \sqrt{n+1} = k$. On a dans ce cas $k-1 \leqslant \sqrt{n} < k$, et cette fois $\mathbb{E}(\sqrt{n+1}) = k$ et $\mathbb{E}(\sqrt{n}) = k-1$. Alors $\mathbb{E}(\sqrt{n+1}) - \mathbb{E}(\sqrt{n}) = 1$.
Il en résulte que $\dfrac{\mathbb{E}(\sqrt{n+1}) - \mathbb{E}(\sqrt{n})}{n}$ est non nul si et seulement si $n+1 = k^2$ avec $k \geqslant 2$, c'est-à-dire $n = k^2 - 1$. Alors $\displaystyle\sum_{n=2}^{N^2-1} \frac{\mathbb{E}(\sqrt{n+1}) - \mathbb{E}(\sqrt{n})}{n} = \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2-1}$.
Comme la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ des sommes partielles de la série est croissante, elle possède une limite finie ou non et la limite de cette suite est égale à la limite de toute suite extraite. En particulier c'est la limite de la suite (S_{N^2-1}). On a donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}(\sqrt{n+1}) - \mathbb{E}(\sqrt{n})}{n} = \lim_{N\to+\infty} S_{N^2-1} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}.$$

Exercice 4.32

TPE PC 2006 , CCP PC 2007

Nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n/(n!)^{1/n}$.

On peut majorer $n!$ par n^n d'où $|u_n| \geqslant 1/n$, et la série de terme général $|u_n|$ diverge par comparaison à une série harmonique.
Pour montrer la convergence de la série de terme général u_n on va utiliser le critère de Leibniz.
Démontrons que la suite $(|u_n|)$ converge vers 0.
En utilisant la formule de Stirling $n! = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}\varepsilon_n$, où (ε_n) converge vers 1, on en déduit $\ln n! = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}(\ln n + \ln(2\pi)) + \ln \varepsilon_n$, d'où

$$-\frac{\ln n!}{n} = -\ln n + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(2\pi)}{n}\right) - \frac{\ln \varepsilon_n}{n},$$

et cette expression définit une suite qui admet $-\infty$ comme limite. Alors la suite $(|u_n|) = (e^{-\frac{\ln n!}{n}})$ converge vers 0.
Démontrons que la suite $(|u_n|)$ est décroissante, en montrant que la suite $(\ln |u_n|)$ est décroissante.

$$\begin{aligned}
\ln|u_n| - \ln|u_{n+1}| &= -\frac{\ln n!}{n} + \frac{\ln(n+1)!}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\ln k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\left(n\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\ln k\right) \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(\ln(n+1) - \ln k).
\end{aligned}$$

On obtient une somme de nombres positifs, ce qui montre que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\ln|u_n| - \ln|u_{n+1}| \geqslant 0$. La suite $(\ln|u_n|)$ est donc décroissante, et il en résulte que la suite $(|u_n|)$ est décroissante. Alors la série de terme général $u_n = (-1)^n|u_n|$ converge d'après le critère de Leibniz.

Dans l'exercice suivant nous avons regroupé deux sujets d'oraux.

Exercice 4.33

Mines - Ponts PC 2006 + CCP PC 2007

Soit f continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)x^n\,dx$.

1) Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

2) Pour $0 < \alpha < 1$, on pose $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha x^n f(x)\,dx$. Montrer que la série $\sum u_n(\alpha)$ converge et établir que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{f(x)}{1-x}\,dx$.

3) On suppose que $f(1)$ est non nul. On se propose d'établir que la série $\sum u_n$ diverge.

3.a Montrer que si $f(1) > 0$ alors il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_n(\alpha) + \frac{f(1)}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\right).$$

3.b Conclure.

4) Soit f la fonction définie par $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, et si $x \in]0, 1[$ par $f(x) = -\dfrac{x}{\ln(1-x)}$.

4.a Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.

4.b Montrer que $\sum u_n$ diverge.

5) Montrer que si f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $f(1) = 0$.

1) Comme f est continue sur $[0, 1]$, il existe une constante M telle que, pour tout $x \in [0, 1]$ on ait $|f(x)| \leqslant M$. Alors $|u_n| \leqslant M \displaystyle\int_0^1 x^n dx = \frac{M}{n+1}$, et il en résulte que la suite (u_n) converge vers 0.

2) On a
$$\sum_{n=0}^{N} u_n(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\left(\sum_{n=0}^{N} x^n\right) dx = \int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{1-x}\,dx - \int_0^{\alpha} \frac{f(x)x^{N+1}}{1-x}\,dx\,.$$
Comme la fonction $x \mapsto f(x)/(1-x)$ est continue sur $[0,\,\alpha]$, il existe une constante K telle que, pour tout $x \in [0,\,\alpha]$ on ait $|f(x)|/(1-x) \leqslant K$. Alors $\left|\int_0^{\alpha} \frac{f(x)x^{N+1}}{1-x}\,dx\right| \leqslant K\int_0^{\alpha} x^{N+1}dx \leqslant \frac{K\alpha^{N+2}}{N+2}$. Il en résulte que la suite $\left(\int_0^{\alpha} \frac{f(x)x^{N+1}}{1-x}\,dx\right)$ converge vers 0. Donc la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n(\alpha)\right)$ converge vers $\int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{1-x}\,dx$. Ceci signifie que la série de terme général $u_n(\alpha)$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{1-x}\,dx\,.$

3.a On a $u_n = u_n(\alpha) + \int_{\alpha}^{1} f(x)x^n\,dx\,.$

Si f est continue et si $f(1) > 0$, il existe alors $\alpha \in]0,\,1[$ tel que $\alpha < x < 1$ implique $f(1) - f(x) \leqslant f(1)/2$. Alors $f(x) \geqslant f(1)/2$ et
$$u_n \geqslant u_n(\alpha) + \frac{f(1)}{2}\int_{\alpha}^{1} x^n\,dx = u_n(\alpha) + \frac{f(1)}{2}\frac{1-\alpha^{n+1}}{n+1}\,.$$

3.b La série de terme général $u_n(\alpha)$ converge, d'autre part $\frac{1-\alpha^{n+1}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et la série de terme général $1/n$ diverge.

Alors la série de terme général $u_n(\alpha) + \frac{f(1)}{2}\frac{1-\alpha^{n+1}}{n+1}$ diverge, et par suite la série de terme général u_n diverge.

Lorsque $f(1) < 0$, on applique ce qui précède à $-f$ et le résultat subsiste.

4.a La fonction f est continue sur $]0,\,1[$ comme quotient de fonctions continues. Au voisinage de 0, on a $\ln(1-x) = -x + o(x)$, donc $\ln(1-x)/x$ tend vers -1 et il en résulte que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. La fonction f est continue en 0. Par ailleurs, puisque $\ln(1-x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 1, on a $\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = f(1)$. La fonction f est continue en 1.

Finalement f est continue sur $[0,\,1]$.

4.b On a en particulier $u_n \geqslant \int_0^{1-1/n} \frac{x^{n+1}}{-\ln(1-x)}\,dx$, et puisque la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$ est croissante, on a sur $[0,\,1-1/n]$ l'inégalité $-\ln(1-x) \leqslant \ln n$, d'où
$$u_n \geqslant \int_0^{1-1/n} \frac{x^{n+1}}{-\ln(1-x)}\,dx \geqslant \int_0^{1-1/n} \frac{x^{n+1}}{\ln n}\,dx = \frac{1}{(n+2)\ln n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2}\,.$$

Mais, par un calcul classique (voir ex 4.7), la suite $((1 - 1/n)^n)$ converge vers $1/e$, donc

$$u_n \geqslant \frac{1}{(n+2)\ln n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{en\ln n}\,.$$

Comme la série de terme général $1/(n\ln n)$ est une série de Bertrand divergente (voir ex. 4.15), il en résulte que la série de terme général u_n diverge.

5) On écrit

$$u_n = \int_0^1 f(1)x^n\,dx + \int_0^1 (f(x) - f(1))x^n\,dx = \frac{f(1)}{n+1} + \int_0^1 (f(x) - f(1))x^n\,dx\,.$$

Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0,\ 1\,]$, la dérivée f' est bornée sur cet intervalle, et d'après l'inégalité des accroissements finis, il existe une constante M telle que, quel que soit $x \in [\,0,\ 1\,]$ on ait $|f(x) - f(1)| \leqslant M|x - 1|$. Alors

$$\left|\int_0^1 (f(x) - f(1))x^n\,dx\right| \leqslant M\int_0^1 (1-x)x^n\,dx = M\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$ est une série télescopique convergente. Il en résulte que la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - f(1))x^n\,dx$ converge absolument. Par contre la série de terme général $f(1)/(n+1)$ converge si et seulement si $f(1) = 0$. Donc la série de terme général u_n converge si et seulement si $f(1) = 0$.

Exercice 4.34

Mines - Ponts PC 2006 , Centrale PC 2006 K

Nature de la série de terme général $u_n = \left[\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^{2k}\right]^{-1/n^2}$.

Indication de la rédaction : étudier la suite $(\ln u_n)$ en comparant à une intégrale. On pourra s'aider d'un dessin.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln u_n = -\dfrac{v_n}{n^2}$ avec $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k\ln k$. Comme la fonction $x \mapsto 2x\ln x$ est croissante et positive sur $[\,1,\ +\infty\,[$, on a, lorsque $k \geqslant 1$, l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} 2x\ln x\,dx \geqslant 2k\ln k$, ce qui donne en sommant

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} 2k\ln k \leqslant \int_1^{n+1} 2x\ln x\,dx\,.$$

Cette intégrale se calcule par parties, et l'on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^{n+1} 2x\ln x\,dx &= \Big[x^2\ln x\Big]_1^{n+1} - \int_1^{n+1} x\,dx\\ &= (n+1)^2\ln(n+1) - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{1}{2}\\ &= (n+1)^2\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{n^2}{2} - n\\ &= n^2\ln n + (2n+1)\ln n + (n+1)^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{2} - n\,.\end{aligned}$$

Alors

$$\ln u_n \geqslant -\ln n - \frac{(2n+1)\ln n}{n^2} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\,,$$

d'où

$$\ln u_n \geqslant -\ln n + \frac{1}{2} + o(1)\,.$$

Et finalement

$$u_n \geqslant \frac{1}{n}e^{\frac{1}{2}+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{e}}{n}\,.$$

La série de terme général u_n diverge donc par comparaison à la série harmonique.

Exercice 4.35

Mines - Ponts PC 2005 K

1) Montrer la convergence de la série de terme général $(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

   On note $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

2) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, la somme partielle S_{2n} de la série peut s'écrire $S_{2n} = \ln\dfrac{(2n+1)[(2n)!]^2}{2^{4n}[n!]^4}$ et trouver sa limite en utilisant la formule de Stirling.

3) En déduire S.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \ln(1+1/n)$. Il est clair que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers 0. Alors la série de terme général $(-1)^n u_n$ est une série alternée qui converge d'après le critère de Leibniz. Sa somme S est en particulier la limite de la suite $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$, où $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k u_k$.

2) En regroupant deux par deux les termes de S_{2n}, on obtient

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{n}(u_{2k} - u_{2k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{2k+1}{2k} - \ln\frac{2k}{2k-1}\right) \\ &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right) \end{aligned}$$

En utilisant la relation $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)(2n)!}{2^n n!}$, et donc $\displaystyle S_{2n} = \ln\frac{(2n+1)[(2n)!]^2}{2^{4n}[n!]^4}$.

Mais, par la formule de Stirling, on a $\displaystyle\frac{(2n+1)[(2n)!]^2}{2^{4n}[n!]^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n(2n/e)^{4n}4n\pi}{2^{4n}(n/e)^{4n}(2n\pi)^2} = \frac{2}{\pi}$.

3) On en déduit que $\displaystyle S = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln\frac{2}{\pi}$.

5 Espaces vectoriels normés

5.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

5.1.1 Normes

Ce qu'il faut savoir

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

• On appelle **norme** sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}^{+}$ telle que :

(i) $\forall x \in E$, $(N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E)$ (séparation)

(ii) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ (homogénéité)

(iii) $\forall (x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

On dit alors que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé.

La norme d'un élément x de E est souvent notée $\|x\|$.

• **Exemples de normes classiques**

1) Normes standard de $\mathbb{K}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,; \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}\,; \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(|x_k|\right).$$

On définit ainsi trois normes sur $\mathbb{K}^n$.

2) Soit $\left(E, (\cdot \mid \cdot)\right)$ un espace préhilbertien réel ou complexe, alors l'application $\|\cdot\| : x \to \|x\| = \sqrt{(x\,|x\,)}$ est une norme sur E appelée norme **euclidienne**.

3) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$. On pose pour tout $f \in E$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

On définit ainsi trois normes sur E.

• **Inégalités triangulaires :** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\left|\|x\| - \|y\|\right| \leqslant \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

• **Vocabulaire :** Soient $a \in E$ et $r > 0$. On appelle

○ **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B(a,r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}.$$

○ **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B_f(a,r) = \{x \in E, \|x - a\| \leqslant r\}.$$

○ **sphère** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$S(a,r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}.$$

○ On appelle boule ouverte (resp. boule fermée, sphère) unité l'ensemble $B(0,1)$ (resp. $B_f(0,1)$, $S(0,1)$).

Remarque
Une boule est un ensemble convexe.

Exercice 5.1

Ecole de l'Air PC 2005

Montrer que N, définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x,y) = \max\left(|x|, |y|, |x-y|\right)$, est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Représenter la boule unité ouverte.

N est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$N(\lambda(x,y)) = \max\left(|\lambda x|, |\lambda y|, |\lambda(x-y)|\right) = |\lambda|\, N(x,y).$$

De plus $N(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y = x - y = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.
Montrons enfin l'inégalité triangulaire. Soient (x,y) et (x',y') dans $\mathbb{R}^2$.

$$N((x,y)+(x',y')) = \max\left(|x+x'|, |y+y'|, \left|\left(x+x'\right) - \left(y+y'\right)\right|\right).$$

On a
$$|x+x'| \leqslant |x| + |x'|,\ |y+y'| \leqslant |y| + |y'|$$

et
$$\left|\left(x+x'\right) - \left(y+y'\right)\right| \leqslant |x-y| + |x'-y'|.$$

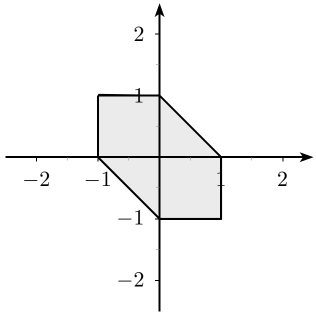
Donc $|x+x'|$, $|y+y'|$ et $\left|\left(x+x'\right) - \left(y+y'\right)\right|$ sont majorés par

$$\max\left(|x|, |y|, |x-y|\right) + \max\left(|x'|, |y'|, |x'-y'|\right) = N(x,y) + N(x',y'),$$

d'où $N((x,y)+(x',y')) \leqslant N(x,y) + N(x',y')$.
Le couple (x,y) est dans la boule unité si et seulement si $\max(|x|,|y|,|x-y|) < 1$ c'est-à-dire si et seulement si $|x| < 1$, Ainsi $|y| < 1$ et $|x-y| < 1$.

$$B(0,1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| < 1 \text{ et } |x-y| < 1\right\}.$$

On obtient la figure suivante :



5.1.2 Suites convergentes, Normes équivalentes

Ce qu'il faut savoir

• **Suites convergentes :** Soit $\big(E, \|\cdot\|\big)$ un espace vectoriel normé et soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de E.

On dit que la suite (x_n) est convergente lorsqu'il existe $\ell \in E$ telle que la suite réelle $\big(\|x_n-\ell\|\big)_n$ converge vers 0, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Un tel vecteur ℓ est alors unique. On dit que la suite (x_n) converge vers ℓ ou encore que ℓ est la limite de la suite (x_n), et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.

• **Normes équivalentes**

∘ Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, N_1 et N_2 deux normes sur E.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$;

(ii) toute suite de E convergeant vers 0 pour N_1 converge vers 0 pour N_2, et vice versa.

On dit dans ces conditions que N_1 et N_2 sont équivalentes.

∘ Si E est de **dimension finie**, alors toutes les normes définies sur E sont équivalentes. Par exemple, on a pour tout $x \in \mathbb{K}^n$
$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\,\|x\|_\infty$, $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$ et $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_2$.

En pratique on se place dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$. Un vecteur x de E est alors défini par ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Soit (x_n) une suite d'éléments de E, avec $x_n = \sum\limits_{i=1}^{p} x_{n,i} e_i$. Pour que la suite (x_n) soit convergente, de limite $\ell = \sum\limits_{i=1}^{p} \ell_i$, il faut et il suffit que chacune des suites numériques $(x_{n,i})_{n\geqslant 0}$ soit convergente, de limite ℓ_i. Il est inutile de préciser la norme choisie.

○ **Remarque** Cela n'est plus vrai en dimension infinie, on montre par exemple que les trois normes classiques $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Exercice 5.2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

2) Montrer que la suite $(B^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.
Indication pour la question 2 : Calculer B^2 et B^3.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{5}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$. Chacun des coefficients tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ donc la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle.

2. On calcule comme indiqué $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = B$.

   On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^{2k+1} = B$ et $B^{2k} = B^2$. Donc les suites extraites $(B^{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(B^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites différentes (B et B^2), donc la suite $(B^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente.

Exercice 5.3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Etablir que $(A - I_3)^2 = 0_3$. En déduire A^n. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}A^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Un simple calcul mène à $(A - I_3)^2 = 0$. On a de plus $A = I_3 + (A - I_3)$, et on déduit de la formule du binôme que $\forall n \in \mathbb{N}\ A^n = I_3 + n(A - I_3)$. On a donc $\dfrac{1}{n}A^n = A - (1 - \dfrac{1}{n})I_3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A - I_3$.

Ce qu'il faut savoir

Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on construit une suite (x_n) d'éléments de E telle que $\dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)}$ tend vers 0 ou $+\infty$. Dans la pratique, on choisit la suite (x_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_1(x_n) = 1$ (ou $N_2(x_n) = 1$).

Exercice 5.4

Centrale PSI 2007, 2006

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Si $\alpha \in [0,1]$ et $f \in E$, on pose $N_\alpha(f) = \sup_{[\alpha,1]} |f| + \displaystyle\int_0^\alpha |f|$.

1) Montrer que N_α est une norme sur E.

2) Etant donnés α et β tels que $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, on se propose de montrer que les normes N_α et N_β ne sont pas équivalentes. Pour cela on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n = \alpha + \dfrac{\beta - \alpha}{n}$, et on introduit la fonction f_n définie par

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \alpha, \\ 2\dfrac{x-\alpha}{\gamma_n - \alpha} & \text{si } \alpha \leqslant x \leqslant \dfrac{\alpha+\gamma_n}{2}, \\ -2\dfrac{x-\gamma_n}{\gamma_n - \alpha} & \text{si } \dfrac{\alpha+\gamma_n}{2} \leqslant x \leqslant \gamma_n, \\ 0 & \text{si } \gamma_n \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

2.a) Tracer le graphe de f_n et vérifier que $f_n \in E$.

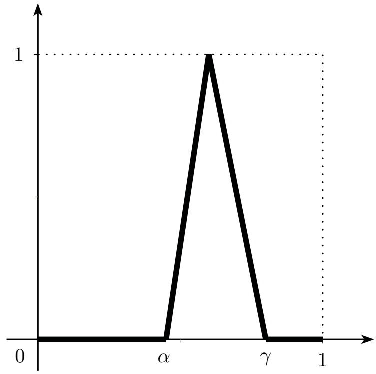
2.b) Calculer $N_\alpha(f_n)$ et $N_\beta(f_n)$ et conclure.

1) On vérifie facilement que $N_\alpha(\lambda f) = |\lambda|\, N_\alpha(f)$ et $N_\alpha(f+g) \leqslant N_\alpha(f) + N_\alpha(g)$ pour tout $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

De plus, $N_\alpha(f) = \underbrace{\sup_{[\alpha,1]} |f|}_{\geqslant 0} + \underbrace{\int_0^\alpha |f|}_{\geqslant 0} = 0$ si et seulement si $\sup_{[\alpha,1]} |f| = 0$ et $\displaystyle\int_0^\alpha |f| = 0$.

D'une part, $\sup_{[\alpha,1]} |f| = 0$ entraîne $f(x) = 0$ pour tout $x \in [\alpha, 1]$. D'autre part, $\displaystyle\int_0^\alpha |f| = 0$ et $|f|$ est continue et positive sur $[0,\alpha]$, donc f est nulle sur $[0,\alpha]$. Finalement f est nulle sur $[0,1]$. Donc N_α est une norme sur E.

2.a) La fonction f_n est une fonction affine par morceaux sur le segment $[0, 1]$, et on voit à l'aide de son graphe qu'elle est continue. C'est donc un élément de E (il est vivement conseillé de tracer effectivement son graphe !)



On vérifie géométriquement que $N_\alpha(f_n) = 1$ et que $N_\beta(f_n) = \dfrac{\gamma_n - \alpha}{2} = \dfrac{\beta - \alpha}{2n}$ (c'est l'aire du triangle !). La suite (f_n) converge vers la fonction nulle pour la norme N_β, mais pas pour la norme N_α. Les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 5.5

(Très proche de INT PC 2005, Mines-Ponts MP 2007) K

Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})\}$. On pose pour tout $f \in E$,

$$\mathscr{N}(f) = \sqrt{|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t}.$$

1) Montrer que $\mathscr{N}$ est une norme euclidienne sur E.

2) Etablir que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\mathscr{N}(f)$.

3) Montrer que les normes $\|.\|_\infty$ et $\mathscr{N}$ ne sont pas équivalentes.
Indication de l'examinateur : utiliser la suite de terme général $f_n(x) = x^n$.

1. Compte tenu de l'expression de la norme, on est conduit à penser à une norme euclidienne. Introduisons $\Phi : (f, g) \in E^2 \mapsto f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$.
Il est clair que Φ est une forme bilinéaire symétrique et positive. Montrons qu'elle est définie. Soit f un élément de E tel que $\Phi(f, f) = 0$. On a alors
$$\Phi(f, f) = |f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0.$$
Comme $t \mapsto |f'(t)|^2$ est positive et continue sur $[0, 1]$, f' est nulle sur $[0, 1]$ donc f est constante, et donc nulle puisque $f(0) = 0$.
Ainsi, Φ est un produit scalaire et $\mathscr{N}$ est la norme euclidienne associée.

2. On pense assez naturellement à écrire que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\mathrm{d}u.$$

Il vient alors, $|f(t)| \leqslant |f(0)| + \int_0^t |f'(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(u)|\,\mathrm{d}u$.

On sait que pour a et b réels, on a $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, et on en déduit que $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$. Il vient alors, en posant $a = |f(0)|$ et $b = \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$,

$$\left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 2\left(|f(0)|^2 + \left(\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2\right).$$

D'autre part on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^1 dt \cdot \int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t = \int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t\,.$$

D'où $|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{2}\sqrt{|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t}$, et donc pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leqslant \sqrt{2}\mathcal{N}(f)$,, d'où $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\mathcal{N}(f)$.

Remarque de la rédaction

On peut vérifier que $\sqrt{2}$ est la plus petite des constantes réelles K telle que $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\mathcal{N}(f)$ pour toute fonction $f \in E$. On a en effet $\|f\|_\infty = \sqrt{2}\mathcal{N}(f)$ lorsqu' on prend pour f la fonction définie par $f(t) = 1 + t$.

3. Utilisons la suite de fonctions de l'énoncé : pour $n \geqslant 1$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\mathcal{N}(f_n) = \dfrac{n}{\sqrt{2n-1}}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathcal{N}(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = \dfrac{n}{\sqrt{2n-1}} = +\infty$. Les normes ne sont pas équivalentes (car il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in E$, $\mathcal{N}(f) \leqslant C\|f\|_\infty$.
Sinon, on aurait en prenant $f = g_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}(g_n) \leqslant C\,\|g_n\|_\infty$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant 0$, ce qui est absurde.

Ce qu'il faut savoir

Partie bornée

Soit A une partie non vide de E.

• Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $M \in]0, +\infty[$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leqslant M$;

(ii) il existe $a \in E$ et $r \in]0, +\infty[$ tels que $A \subset B_f(a, r)$.

On dit alors que A est une partie **bornée** de E.

• Pour montrer qu'une partie A n'est pas bornée, on peut exhiber une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = +\infty.$$

Exercice 5.6

Les ensembles suivants sont-ils bornés ?
$A = \{x \sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 = 1\}$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$.

• Pour l'ensemble A, on peut considérer la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

On a $x_n = u_n \sin u_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc A n'est pas bornée.

• B est l'ensemble des points d'une conique. Il est facile de voir qu'il s'agit d'une ellipse (voir réduction des coniques) donc que B est bornée. On peut aussi le montrer directement en écrivant : $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2$ donc

$$(x, y) \in B \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$$

On a d'une part : $(x, y) \in B \Rightarrow \dfrac{3}{4}y^2 \leqslant 1 \Rightarrow |y| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, et d'autre part :

$$(x, y) \in B \Rightarrow (x + \frac{y}{2})^2 \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant x + \frac{y}{2} \leqslant 1$$
$$-1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow |x| \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

donc $\|(x, y)\|_\infty \leqslant 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et donc B est bornée.

• C est l'ensemble des points d'une hyperbole donc il n'est pas borné. On peut utiliser la paramétrisation classique $x = \operatorname{ch} t$ et $y = \operatorname{sh} t$ pour construire une suite de norme tendant vers $+\infty$. On peut par exemple prendre, $(x_n, y_n) = (\operatorname{ch} n, \operatorname{sh} n) \in C$.

On a $\|(x_n, y_n)\|_\infty = \operatorname{ch} n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc C n'est pas bornée.

5.1.3 Applications lipschitziennes

Ce qu'il faut savoir

• Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$ et f une application de A dans F.

∘ On dit que f est lipschitzienne de rapport λ sur A lorsque

$$\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \lambda \|x - y\|_E .$$

∘ On dit que f est lipschitzienne lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que f est $\lambda-$lipschitzienne.

∘ **Exemple :** l'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne.

∘**Remarque :** Souvent les exercices de concours sur les fonctions lipschitziennes portent sur les fonctions réelles d'une variable réelle (voir notre livre d'Analyse de première année chapitre 11 paragraphe 11.5 et chapitre 14 paragraphe 14.3).

Exercice 5.7

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et soit $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$ muni des normes classiques $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$, $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$ et $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Montrer que l'application $f \in E \mapsto \Phi(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{K}$ est lipschitzienne pour chacune des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Il est clair que Φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.
Soit $(f, g) \in E^2$. On a

$$\begin{aligned} |\Phi(f) - \Phi(g)| &= \left|\int_a^b (f - g)(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |(f - g)(t)|\,\mathrm{d}t = \|f - g\|_1 \\ &\leqslant (b - a) \times \sup_{t\in[a,b]} |(f - g)(t)| = (b - a)\|f - g\|_\infty . \end{aligned}$$

Mais aussi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left|\int_a^b (f - g)(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{b - a}\sqrt{\int_a^b |(f - g)(t)|^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{b - a}\,\|f - g\|_2 .$$

Donc Φ est 1-lipschitzienne pour la norme $\|\cdot\|_1$, $(b - a)-$lipschitzienne pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $\sqrt{b - a}-$lipschitzienne pour la norme $\|\cdot\|_2$.

5.1.4 Topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie

Ce qu'il faut savoir

Soit E un espace vectoriel normé de **dimension finie** et soit $A \subset E$.

• **Ouverts**

○ On dit que A est un **ouvert** de E lorsque tout point de A est le centre d'une boule ouverte contenue dans A, autrement dit

$$\forall a \in A,\ \exists r \in]0,+\infty[\ |\ B(a,r) \subset A.$$

○ **Exemples d'ouverts** $\varnothing$, E, une boule ouverte sont des ouverts de E.

• **Fermés**

○ On dit que A est un **fermé** de E lorsque son complémentaire $E \setminus A$ est un ouvert de E.

○ **Exemples de fermés** $\varnothing$, E, toute boule fermée sont des fermés de E.

• **Réunion et intersection d'ouverts ou de fermés**

(i) Toute réunion d'ouverts de E est un ouvert de E.

(ii) Toute intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.

(iii) Toute intersection de fermés de E est un fermé de E.

(iv) Toute réunion finie de fermés de E est un fermé de E.

• **Point adhérent :** soit A une partie **non vide** de E et soit $x \in E$.

○ On dit x est un **point adhérent** à A lorsque toute boule ouverte de centre x rencontre A, c'est-à-dire $\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing$.

Exemple Tout point de A est un point adhérent à A.

○ **Caractérisation séquentielle d'un point adhérent (filière PSI uniquement)**

x est un point adhérent à A si et seulement si x est limite d'une suite d'éléments de A.

• **Point intérieur (filière PSI uniquement)**

Soit $a \in A$, on dit que a est un **point intérieur** à A lorsqu'il existe une boule ouverte de centre a incluse dans A, c'est-à-dire $\exists r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$.

Exercice 5.8

Soit E un espace vectoriel normé et soit A un sous-espace vectoriel de E.
1) Montrer que si A est un ouvert, alors $A = E$.
2) Montrer que s'il existe $a \in A$ et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$, alors $A = E$.

1) Il est clair que $A \subset E$. Il reste à montrer que $E \subset A$. Comme A est ouvert et $0_E \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(0_E,r) \subset A$. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda\ x \in B(0_E,r) \subset A$. Il suffit de prendre $\lambda = \dfrac{r}{2\|x\|}$ car alors

$\|\lambda\, x\| = \dfrac{r}{2\|x\|}\,\|x\| = \dfrac{r}{2} < r$. Puisque A est un sous-espace vectoriel et $\lambda\, x \in A$, alors $x = \dfrac{1}{\lambda}(\lambda x) \in A$.

2) Soit $x \in E$ tel que $x \neq a$. Montrons que $x \in A$. En notant $y = a + \dfrac{r}{2\,\|x-a\|}\,(x-a)$, on a alors $\|y-a\| = \dfrac{r}{2} < r$ donc $y \in B(a,\ r)$ et donc $y \in A$. Comme a et y appartiennent à A et A est un sous-espace vectoriel, il en résulte que $x - a = \dfrac{2\,\|x-a\|}{r}\,(y-a) \in A$ puis $x = (x-a)+a \in A$, d'où $E \subset A$.

Exercice 5.9

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n.

1) Soit A un sous-espace vectoriel de E. Montrer que A est fermé (on pourra soit utiliser une base bien choisie de E, soit utiliser un produit scalaire sur E).

2) Montrer que E est le seul sous-espace vectoriel de E qui soit aussi ouvert.

1) Si $A = E$, alors il n'y a rien à démontrer. On suppose que A est un sous-espace vectoriel strict de E. On va montrer que $E \setminus A$ est un ouvert.

• Première solution : soit $\mathscr{B}_A = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de A. Il existe $(e_{p+1}, \ldots e_n)$ tel que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base de E. On note $B = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on pose $\|x\|_\infty = \sup_{i=1,..,n} |x_i|$. On a ainsi défini une norme sur E. Soit $x \in E \setminus A$, il existe $(a, b) \in A \times B$ avec $b \neq 0$, tel que $x = a + b$. On note $b = \sum_{i=p+1}^{n} b_i e_i$, et on pose $\alpha = \dfrac{\|b\|}{2}$. Le réel α est strictement positif car $b \neq 0$. De plus, il existe un indice $i_0 \in \{p+1, \ldots, n\}$ tel que $|b_{i_0}| = \|b\|$. Si $y \in B(x, \alpha)$, alors $y = x+u$ avec $\|u\| < \alpha$. Notamment la composante i_0 de y vaut $b_{i_0} + u_{i_0}$ et $|b_{i_0} + u_{i_0}| \geqslant |b_{i_0}| - |u_{i_0}| > \alpha/2$. Le vecteur y n'appartient pas à A (il a une composante non nulle sur B). La boule $B(x, \alpha)$ ne rencontre pas A, ce qui signifie qu'elle est incluse dans $E \setminus A$. Donc $E \setminus A$ est un ouvert de E et A un fermé de E.

• Seconde solution : on munit E d'un produit scalaire et soit $\|.\|$ la norme euclidienne associée. Puisque E est de dimension finie, on a $E = A \overset{\perp}{\oplus} A^\perp$. Soit $x \in E \setminus A$. Il existe $(a, b) \in A \times A^\perp$ tel que $x = a+b$ et $b \neq 0$. Il en résulte que $\|x-a\| = \|b\| > \|b\|/2$. Montrons que la boule $B(x, \|b\|/2)$ est incluse dans $E \setminus A$. Soit $a \in A'$. On a $x - a' = a - a' + b$ et par Pythagore, $\|x-a'\|^2 = \|a-a'\|^2 + \|b\|^2 > \left(\dfrac{\|b\|}{2}\right)^2$ donc $B(x, \|b\|/2) \subset E \setminus A$.

On vient de montrer que tout élément de $E \setminus A$ est le centre d'une boule ouverte contenue dans $E \setminus A$, donc $E \setminus A$ est un ouvert de F et par conséquent A est un fermé de E.

2) D'après la question 1) de l'exercice précédent, E est le seul sous-espace de E qui soit aussi ouvert.

Exercice 5.10

Mines-Ponts PC 2005, extrait

Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E.
On pose $A + B = \{x \in E \mid x = a + b \text{ où } (a, b) \in A \times B\}$.

En remarquant que $A + B = \bigcup_{b \in B}(A + b)$, montrer que la somme d'une partie quelconque et d'un ouvert est un ouvert.

Supposons que A est un ouvert.
• Soit $b \in B$, montrons que $A + b$ est un ouvert.
Soit $c \in A + b$ alors il existe $a_0 \in A$ tel que $c = a_0 + b$. Puisque A est ouvert, il existe $r \in]0; +\infty[$ tel que $B(a_0, r) \subset A$. Donc $B(a_0, r) + b \subset A + b$. Démontrons que $B(a_0, r) + b = B(a_0 + b, r)$. Il en découlera que $B(a_0 + b, r) = B(c, r) \subset A + b$ et donc que $A + b$ est un ouvert de E.
Pour montrer l'égalité des ensembles, il suffit d'écrire les équivalences

$$\begin{aligned} z \in B(a_0 + b, r) &\Leftrightarrow \|a_0 + b - z\| < r \Leftrightarrow \|a_0 - (z - b)\| < r \\ &\Leftrightarrow z - b \in B(a_0, r) \Leftrightarrow z \in b + B(a_0, r) \end{aligned}$$

• Puisque, pour tout $b \in B$, $A + b$ est un ouvert, l'ensemble $A + B = \bigcup_{b \in B}(A + b)$ est ouvert en tant que réunion d'ouverts.

Ce qu'il faut savoir

Caractérisation séquentielle des fermés

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et soit A une partie de E.

La partie A est un fermé de E si et seulement si toute suite d'éléments de A qui **converge dans** E, a sa limite dans A.

Cette caractérisation très utile ne figure qu'au programme de la filière PSI, cependant elle est si utile et naturelle que de nombreux examinateurs aux concours PC l'utilisent.

Exercice 5.11

Montrer la caractérisation séquentielle des fermés (question de cours pour les PSI, effectuer des raisonnements pas l'absurde).

• Soit A un fermé de E. On se donne une suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers $\ell \in E$. Montrons que $\ell \in A$ en raisonnant par l'absurde.
Supposons donc $\ell \notin A$ c'est-à-dire $\ell \in E \setminus A$. Comme $E \setminus A$ est par définition un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(\ell, r) \subset E \setminus A$.

Mais comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \ell$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $x_n \in B(\ell, r)$ ce qui est contradictoire avec le fait que $x_n \in A$.

• Supposons que toute suite à valeurs dans A convergente a sa limite dans A et montrons que A est un fermé c'est-à-dire que $E \setminus A$ est un ouvert en raisonnant encore par l'absurde.

Supposons que $E \setminus A$ n'est pas un ouvert c'est-à-dire que l'on n'a pas

$$\forall x \in E \setminus A,\ \exists r > 0,\ B(x, r) \subset E \setminus A,$$

ce qui s'écrit $\exists x \in E \setminus A,\ \forall r > 0,\ B(x, r) \not\subset E \setminus A$, ce qui revient à dire $\exists x \in E \setminus A,\ \forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \varnothing$. En particulier, en choisissant des réels r de la forme $\frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ et $x_n \in A$. De $\|x - x_n\| \leqslant \frac{1}{n}$, on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$. Par hypothèse $x \in A$ ce qui est contradictoire avec $x \in E \setminus A$.

5.1.5 Limite de fonctions, continuité

Ce qu'il faut savoir

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E et soit $f : A \to F$.

• **Limite** Soit a un point adhérent à A et $b \in F$.

○ On dit que f admet pour limite b en a et on écrit $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = b$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon$$

Remarque
La limite dépend des normes considérées sur E ou sur F (sauf si on remplace une norme par une norme équivalente).

○ **Caractérisation séquentielle de la limite**

$\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = b$ si et seulement si pour **toute suite** $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers b.

• **Continuité**

∘ On dit que f est continue en $a \in A$ lorsque $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = f(a)$.

∘ On dit que f est continue sur A lorsque f est continue en tout point de A.

∘ *Cas particulier important* : lorsque F est de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de F. En notant pour tout $x \in A$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$, alors f est continue en $a \in A$ (resp. sur A) si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est continue en a (resp. sur A).

∘ **Caractérisation séquentielle de la continuité**

La fonction f est continue en $a \in A$ si et seulement si pour **toute suite** $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

• Si f est lipschitzienne sur A, alors f est continue sur A.

Remarque

Bien entendu, la réciproque est fausse.Par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $[0, +\infty[$, mais n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

Exercice 5.12

L'application définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par $f(X) = \dfrac{X}{\|X\|_2} - X$ admet-elle une limite au point $(0,0,0)$?

On rappelle que si $X = (x, y, z)$, alors $\|X\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $U_n = (\frac{1}{n}, 0, 0)$ et $V_n = (0, \frac{1}{n}, 0)$. On a $U_n \to (0,0,0)$ et $V_n \to (0,0,0)$ alors que

$$\begin{array}{rclcl} f(U_n) & = & (1 - \frac{1}{n}, 0, 0) & \to & (1,0,0) \\ f(V_n) & = & (0, 1 - \frac{1}{n}, 0) & \to & (0,1,0) \end{array}$$

Donc la fonction n'a pas de limite en $(0,0,0)$.

Exercice 5.13

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}^p$ (muni d'une norme $\| \ \|$) par

$$f(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|X\| \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } \|X\| < 1 \end{cases}$$

n'est continue en aucun vecteur U tel que $\|U\| = 1$.

Soit $U \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|U\| = 1$ et soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ la suite telle que $U_n = \dfrac{n}{n+1}U$. On a $\|U_n\| = \dfrac{n}{n+1}\|U\| = \dfrac{n}{n+1} < 1$ donc $f(U_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs $\|U_n - U\| = \dfrac{1}{n+1}\|U\| \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi la suite (U_n) converge vers U mais la suite $(f(U_n))$ ne converge pas vers $f(U)$.

Exercice 5.14

Etudier la continuité des applications définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}e^{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\text{et } g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}e^{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Indication : il est souvent utile dans ce genre d'exercice de passer en coordonnées polaires. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ (le réel r est alors la norme euclidienne de (x,y)). Si on peut trouver une fonction h telle que $|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| \leqslant h(r)$ et $\lim\limits_{r\to 0} h(r) = 0$, alors f est continue en $(0,0)$.

Les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme composée, somme, produit et quotient de fonctions continues. Etudions la continuité en $(0,0)$.
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ il existe $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Nous avons alors

$$f(x,y) = r\cos^3\theta \times e^{r^2} \quad \text{et} \quad g(x,y) = \cos^2\theta \times e^{r^2}.$$

On a $|f(x,y)| \leqslant re^{r^2} \to 0$ quand $r \to 0$, donc f est continue au point $(0,0)$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.
La limite de la fonction $r \mapsto \cos^2\theta e^{r^2}$ lorsque r tend vers 0 dépend de θ, donc la fonction g ne peut pas avoir de limite unique en $(0,0)$. Par exemple, $g(x,0) = e^{x^2} \underset{\substack{x\to 0\\ \neq}}{\longrightarrow} 1$ et $g(x,x) = \dfrac{1}{2}e^{2x^2} \underset{\substack{x\to 0\\ \neq}}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} \neq 1$. Donc la fonction g n'est pas continue en $(0,0)$.

5.1.6 Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue (filière PSI uniquement)

Ce qu'il faut savoir

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Si $f\ : E \to \mathbb{K}$ est une application continue sur E, alors l'image réciproque par f d'un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{K}$ est un ouvert (resp. fermé) de E.

Ce théorème permet de reconnaître facilement des ensembles ouverts ou fermés.

Exercice 5.15

1) Soient E est un espace vectoriel normé de dimension finie, $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue et $a \in \mathbb{R}$. Dire si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :
$A = \{x \in E \mid f(x) = a\}$, $B = \{x \in E \mid f(x) \leqslant a\}$, $C = \{x \in E \mid f(x) \neq a\}$, $D = \{x \in E \mid f(x) < a\}$.

2) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

3) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que son graphe $G = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

1. $A = \{x \in E \mid f(x) = a\} = f^{-1}(\{a\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue. Il est donc fermé.
   De même $B = \{x \in E \mid f(x) \leqslant a\} = f^{-1}(]-\infty, a])$ est fermé.
   $C = \{x \in E \mid f(x) \neq a\} = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{a\})$ est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue. C'est donc une partie onverte. De même $\{x \in E \mid f(x) < a\} = f^{-1}(]-\infty, a[)$ est une partie ouverte de E.
2. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ car c'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ par l'application $M \mapsto \det(M)$ qui est continue. (C'est une fonction polynômiale des coefficients de M).
3. La courbe représentative de f dans $\mathbb{R}^2$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue $(x, y) \mapsto y - f(x)$.

5.1.7 Applications linéaires continues, normes subordonnées, applications bilinéaires

Ce qu'il faut savoir

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

• Toute application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue. De plus, il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E$.

• Toute application bilinéaire B de $E \times F$ dans G est continue. De plus, il existe $M > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in E \times F$, $\|B(x, y)\|_G \leqslant M \|x\|_E \|y\|_F$.

Exercice 5.16

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui converge vers M. Montrer que la suite $(AM_pB)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers AMB.

L'application qui à $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associe $AXB \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est linéaire, elle est donc continue. Il en résulte que $A\left(\lim\limits_{p\to+\infty} M_p\right)B = AMB$.

Exercice 5.17

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.
1) Montrer que F est fermé. On pourra considérer un supplémentaire G de F et la projection vectorielle sur G parallèlement à F.
2) Soit x_0 un élément de E. Montrer que le sous-espace affine $A = x_0 + F$ est fermé.

1) **Démonstration pour la filière PC :** nous allons démontrer que le complémentaire de F est ouvert, c'est-à-dire que pour tout élément a qui n'appartient pas à F, il existe une boule ouverte de centre a qui ne rencontre pas F. Utilisons l'indication : soit G un supplémentaire de F, et soit p le projecteur sur G, parallèlement à F. Si a est un élément de E qui n'appartient pas à F, alors $b = p(a) \neq 0_E$. Puisque p est une application linéaire, on sait qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|p(x - y)\| \leqslant M\|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in E^2$. En particulier, avec $x = a$ et $y \in F$, on a $p(a - y) = b$ et donc $\|b\| \leqslant M\|a - y\|$. On a donc $\|a - y\| \geqslant \dfrac{\|b\|}{M}$ pour tout $y \in F$, ce qui démontre que la boule ouverte de centre a et de rayon $\dfrac{\|b\|}{M}$ ne rencontre pas F.

Démonstration pour la filière PSI : soit G un supplémentaire de F et p la projection sur F parallèlement à G. On sait que $F = \{x \in E, p(x) = x\}$. On considère l'application φ définie sur E, par $\varphi(x) = \|x - p(x)\|$. Comme E est de dimension finie, l'application linéaire $x \mapsto x - p(x)$ est continue sur E. En outre, la norme est application continue (car 1-lipschitzienne), donc φ est continue sur E. Le singleton $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, donc $F = \varphi^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E.

2) Si a est un élément de E qui n'appartient pas à A, $a - x_0$ n'appartient pas à F, et on a démontré dans la question précédente qu'il existe une boule ouverte de centre $a - x_0$ et de rayon r qui ne rencontre pas F. Mais alors la boule ouverte translatée, de centre a et de rayon r ne rencontre pas A. Le sous-espace affine A est donc fermé.

5.1.8 Suites de Cauchy (filière PSI uniquement)

Ce qu'il faut savoir

Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments dans E.

- On dit que la suite (x_n) est de Cauchy lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \text{ et } p \geqslant N) \Rightarrow \|x_n - x_p\| \leqslant \varepsilon$$

- Une suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si elle est convergente.

Exercice 5.18

Mines-Ponts PSI 2004

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| < \dfrac{1}{n}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une suite de Cauchy ?

Pas nécessairement, on peut le voir en posant $u_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}$ pour $n \geqslant 2$ et $u_1 = 0$.

On a $|u_{n+1} - u_n| = \dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ mais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge (série harmonique) donc elle ne peut pas être de Cauchy sinon elle convergerait.

5.1.9 Compacité

Ce qu'il faut savoir

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, et soit A une partie non vide de E.

- On dit que la partie A est un compact de E lorsqu'elle est fermée et bornée.
- **Image d'un compact par une application continue**

◦ Soit F un espace vectoriel de dimension finie et soit f une application de A dans F. Si A est un compact de E et si f est continue sur A, alors $f(A)$ est un compact de F.

◦ **Cas particulier très important des fonctions à valeurs réelles**

Si A est un compact de E et si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue sur A, alors f est bornée et atteint ses bornes : plus précisément il existe c et d dans A, tels que

$$\sup_{x\in A} f(x) = f(c) \quad \text{et} \quad \inf_{x\in A} f(x) = f(d).$$

Ce résultat est utilisé pour la recherche d'extremum, voir chapitre 14.

Exercice 5.19

Les ensembles $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x \sin x \text{ et } |y| \leqslant 1\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + xy + y^2 \leqslant 1\}$ sont-ils des compacts de E ?

• La suite $((x_n, y_n)) = ((2n\pi, 0)) \in A$ montre que A n'est pas borné, donc l'ensemble A n'est pas compact.

Remarque pour la filière PSI

L'ensemble A est fermé, en tant qu'intersection du fermé $\{(x, x \sin x), x \in \mathbb{R}\}$ (voir exercice 5.15] et du fermé $\mathbb{R} \times [-1, 1]$.

• Pour montrer que l'ensemble B est fermé, on peut utiliser la caractérisation séquentielle d'un fermé (voir exercice 5.11), ou bien remarquer que $B = \Phi^{-1}(]-\infty, 1])$ où Φ est l'application continue définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\Phi(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Il est aussi borné (voir exercice 5.6 page 101, $|x| \leqslant 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $|y| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$) donc B est compact. (C'est le domaine limité par une ellipse.)

Exercice 5.20

Soit $n \geqslant 2$. Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Indication : On rappelle que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices M telles que ${}^tMM = I_n$.

Soit une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ convergeant vers M. On déduit de la continuité de l'application $M \mapsto {}^tMM$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que ${}^tM_kM_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} {}^tMM$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, ${}^tM_kM_k = I_n$ donc ${}^tMM = I_n$.

L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable par limite, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (voir exercice 5.11 p.105). De plus, tous les coefficients d'une matrice orthogonale sont dans $[-1, 1]$ (car les colonnes sont de norme 1 pour la norme euclidienne usuelle) donc, en considérant la norme $\|\ \|_\infty$ définie pour tout $M = (m_{i,j})$ par $\|M\|_\infty = \sup\limits_{i,j} |m_{i,j}|$, il vient pour tout $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_\infty \leqslant 1$ donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un ensemble borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pour n'importe quelle norme car elles sont toutes équivalentes) donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.21

Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Pour $x \in E$, on note $d(x, K) = \inf\limits_{k\in K} \|x - k\|$.

Montrer qu'il existe $k_0 \in K$ tel que $d(x, K) = \|x - k_0\|$.

L'application $k \in K \mapsto \|x - k\|$ est continue sur le compact K donc est bornée et atteint ses bornes. En particulier, la borne inférieure est atteinte et il existe donc $k_0 \in K$ tel que $d(x, K) = \|x - k_0\|$.

5.1.10 Norme subordonnée (spécifique à la filière PSI)

La notion de norme subordonnée est spécifique à la filière PSI. Elle est cependant l'objet de nombreux exercices et problèmes de concours dans la filière PC. L'encart suivant, destiné aux étudiants de la filière PSI pourra donc être lu avec profit par les étudiants de le filière PC.

Ce qu'il faut savoir

- Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On définit

$$|||u||| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

On montre que

$$|||u||| = \min\{M \geqslant 0 \mid \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E\}.$$

- L'application $u \mapsto |||u|||$ est une norme pour $\mathscr{L}(E, F)$, on l'appelle **norme subordonnée** de u (relative à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$), ou encore *norme triple* de u.
- S'il existe $K > 0$ tel que $\forall x \in E$ $\|u(x)\|_F \leqslant K\, \|x\|_E$ alors $|||u||| \leqslant K$.
- Soient $v \in \mathscr{L}(F, G)$ et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ alors

$$|||v \circ u||| \leqslant |||v||| \cdot |||u|||$$

Exercice 5.22

Question de cours pour PSI, exercice pour PC

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que S est un compact.

2) Montrer que $A = \{\|u(x)\| \mid x \in S\}$ est borné.

3) On pose $|||u||| = \sup\{\|u(x)\| \mid x \in S\}$. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{L}(E)$ et que pour tout $(u, v) \in (\mathscr{L}(E))^2$, $|||v \circ u||| \leqslant |||v||| \cdot |||u|||$.
Indication : pour le dernier point, on pourra montrer que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant |||u|||\, \|x\|$.

1. S est un ensemble borné (évident) et fermé (si $x \notin S$, $B(x, |1 - \|x\||) \subset E \setminus S$, c'est encore plus évident si l'on dispose de la caractérisation séquentielle des fermés) donc c'est un compact.

2. L'application $f : x \mapsto \|u(x)\|$ est continue sur E, donc l'image du compact S par f est un compact de $\mathbb{R}$. Par conséquent, $A = f(S)$ est borné.
3. • On peut donc définir $|||u||| = \sup\{\|u(x)\| \mid x \in S\}$. Montrons que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{L}(E)$.
   Soient $(u, v) \in (\mathscr{L}(E))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
   $$|||\lambda u||| = \sup\{\|\lambda u(x)\| \mid x \in S\} = |\lambda| \sup\{\|u(x)\| \mid x \in S\} = |\lambda|\, |||u|||.$$
   $|||u + v||| = \sup\{\|u(x) + v(x)\| \mid x \in S\}$, or pour tout $x \in S$,
   $$\|u(x) + v(x)\| \leqslant \|u(x)\| + \|v(x)\| \leqslant |||u||| + |||v|||$$
   donc en passant au sup, il vient $|||u + v||| \leqslant |||u||| + |||v|||$.
   Supposons enfin que $|||u||| = \sup\{\|u(x)\| \mid x \in S\} = 0$. On a alors, pour tout $x \in S$, $u(x) = 0$. Si $x \in E \setminus \{0_E\}$, alors $u(x) = \|x\|\, u\left(\dfrac{1}{\|x\|}x\right) = 0$. Comme de plus $u(0_E) = 0$ on a $u = 0$.
   • Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, de $u(x) = \|x\|\, u\left(\dfrac{1}{\|x\|}x\right)$, on déduit
   $$\|u(x)\| = \left\|u\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\| \|x\| \leqslant |||u|||\|x\|.$$
   L'inégalité reste bien sûr vraie pour $x = 0_E$.
   • Soit $(u, v) \in (\mathscr{L}(E))^2$. On a $|||v \circ u||| = \sup\{\|v(u(x))\|, x \in S\}$.
   Pour tout $x \in S$, $\|v(u(x))\| \leqslant |||v|||\|u(x)\| \leqslant |||v||| \cdot |||u|||\, \|x\| = |||v||| \cdot |||u|||$ donc en passant au sup, il vient $|||v \circ u||| \leqslant |||v||| \cdot |||u|||$.

Ce qu'il faut savoir

Pour déterminer la norme triple d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$, on procède ainsi :
i) On détermine une constante M telle que, pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| \leqslant M\|x\|$, en effectuant les majorations les plus précises possibles. Cela entraîne $|||u||| \leqslant M$.
ii) Pour montrer que $M = |||u|||$, on cherche $x_0 \in E$ **non nul**, tel que $\|u(x_0)\| = M\|x_0\|$.

Exercice 5.23

On pose, pour $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|M\|_1 = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |m_{ij}|, \quad \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{ij}^2} \text{ et } \|M\|_\infty = \sup_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |m_{ij}|.$$

Déterminer la norme subordonnée de l'application trace pour chacune de ces normes.

• Cas de la norme $\| \|_\infty$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|M\|_\infty \leqslant 1$. On a alors $|\operatorname{tr} M| = \left|\sum_{i=1}^{n} m_{ii}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |m_{ii}| \leqslant n$ donc $|||\operatorname{tr}||| \leqslant n$. Mais $|\operatorname{tr} I_n| = n$ et $\|I_n\|_\infty = 1$ donc $|||\operatorname{tr}||| \geqslant n$ et finalement $|||\operatorname{tr}||| = n$.

• Cas de la norme $\| \|_1$. De même, soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|M\|_1 \leqslant 1$ alors $|\operatorname{tr} M| = \left|\sum_{i=1}^{n} m_{ii}\right| \leqslant \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |m_{ij}| \leqslant 1$ donc $|||\operatorname{tr}||| \leqslant 1$. Mais $\left|\operatorname{tr} \frac{1}{n} I_n\right| = 1$ et $\left\|\frac{1}{n} I_n\right\|_1 = 1$ donc $|||\operatorname{tr}||| \geqslant 1$ et finalement $|||\operatorname{tr}||| = 1$.

• Cas de la norme $\| \|_2$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|M\|_2 \leqslant 1$ alors

$$|\operatorname{tr} M| = \left|\sum_{i=1}^{n} m_{ii}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |m_{ii}|.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$\sum_{i=1}^{n} \left(|m_{ii}| \times 1\right) \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |m_{ii}|^2} \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{ij}^2} \leqslant \sqrt{n}$$

donc $|||\operatorname{tr}||| \leqslant \sqrt{n}$. Mais $\left|\operatorname{tr} \frac{1}{\sqrt{n}} I_n\right| = \sqrt{n}$ et $\left\|\frac{1}{\sqrt{n}} I_n\right\|_2 = 1$ donc $|||\operatorname{tr}||| \geqslant \sqrt{n}$ et finalement $|||\operatorname{tr}||| = \sqrt{n}$.

5.1.11 Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles

Ce qu'il faut savoir

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n.

1) Dérivation d'une fonction à valeurs dans E

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \to E$ et $t_0 \in I$.

• On dit que f est **dérivable** en t_0 lorsque $\lim\limits_{t\to t_0, t\in I\setminus t_0} \frac{1}{t - t_0}[f(t) - f(t_0)]$ existe.

Si cette limite existe, elle est notée $f'(t_0)$ et appelée **dérivée** de f en t_0.

• On dit que f est dérivable sur I lorsque elle est dérivable en tout point de I.

• Si $f_1, \cdots, f_n$ sont les applications coordonnées dans une base donnée $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E, alors f est dérivable en t_0 si et seulement si chacune des f_i est dérivable en t_0 et $f'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0)e_i$.

Remarque
Si $n = 2$ ou $n = 3$, la dérivée s'interprète comme le vecteur vitesse de la courbe paramétrée $t \mapsto f(t)$. Ce vecteur donne la direction de la tangente et sa norme la vitesse instantanée.

• L'ensemble $\mathscr{D}(I,E)$ des applications dérivables de I dans E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(I,E)$, et $f \to f'$ est une application linéaire de $\mathscr{D}(I,E)$ dans $\mathscr{F}(I,E)$, $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

• Soit $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ telle que $f(I) \subset J$ et soit $g \in \mathscr{D}(J,E)$, alors $g \circ f \in \mathscr{D}(I,E)$ et $(g \circ f)' = f' \times \left(g' \circ f\right)$.

• Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit φ : $E \times F \to G$ une application bilinéaire, $f \in \mathscr{D}(I,E)$ et $g \in \mathscr{D}(I,F)$.

Alors $\varphi(f,g) \in \mathscr{D}(I,G)$ et $(\varphi(f,g))' = \varphi\left(f',g\right) + \varphi\left(f,g'\right)$.

On rappelle, qu'en dimension finie, toute application bilinéaire est continue.

Application pour tous les produits classiques

si $\lambda : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to E$ alors $(\lambda g)' = \lambda' g + \lambda g'$.

si $f, g : I \to E$ alors $(< f, g >)' =< f', g >+ < f, g'>$ où $< \cdot, \cdot >$ désigne un produit scalaire sur un espace préhilbertien E.

si $f, g : I \to \mathbb{R}^2$ alors $(\mathrm{Det}(f,g))' = \mathrm{Det}(f',g) + \mathrm{Det}(f,g')$.

si $f, g : I \to \mathbb{R}^3$ alors $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.

• On peut généraliser le résultat à des applications m-linéaires. Par exemple, pour $f, g, h \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R}^3)$:

$(\mathrm{Det}(f,g,h))' = \mathrm{Det}(f',g,h) + \mathrm{Det}(f,g',h) + \mathrm{Det}(f,g,h')$.

• Soient $f \in \mathscr{D}(I,E)$ et $g \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ partout non nulle, alors $\dfrac{1}{g} f \in \mathscr{D}(I,E)$ et $\left(\dfrac{1}{g} f\right)' = \dfrac{1}{g^2} \times \left(g f' - g' f\right)$.

• Si $f \in \mathscr{D}(I,E)$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $u \circ f \in \mathscr{D}(I,F)$ et $(u \circ f)' = u \circ f'$.

On définit alors les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, on notera en particulier la **formule de Leibniz** : pour tout $f \in \mathscr{C}^k(I,E)$ et $g \in \mathscr{C}^k(I,F)$ et φ bilinéaire,

$$\varphi(f,g)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \varphi(f^{(p)}, g^{(k-p)}).$$

2) Intégration sur un segment d'une fonction vectorielle

Soit $f = (f_1, \cdots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, on définit l'intégrale de f par

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \left(\int_a^b f_1(t)\mathrm{d}t, \cdots, \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right).$$

Soit F un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $(e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une base de F. Soit f une fonction continue par morceaux de $[a,b]$ dans F. En écrivant $f = \sum_{k=1}^{p} f_k e_k$, on définit

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f = \sum_{k=1}^{p} \left(\int_a^b f_k(t)\mathrm{d}t \right) e_k \in F$$

L' intégrale de f sur $[a,b]$ est **indépendante** de la base choisie.
Parmi les propriétés uselles de l'intégrale, il est important de retenir que si $\|\cdot\|$ est une norme sur F alors $\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$.

Exercice 5.24

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$ et :

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

En utilisant l'application Δ, montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que

$$(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c).$$

Rappelons que le déterminant est une forme n-linéaire (ici $n = 3$) par rapport à ses colonnes. Ici seule la dernière dépend de x donc Δ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x \in \,]a,b[$

$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(x) \\ g(a) & g(b) & g'(x) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. De plus, remarquons que $\Delta(a) = \Delta(b)$ donc, par le théorème de Rolle, il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $\Delta'(c) = 0$, ce qui donne la conclusion de l'énoncé.

Remarque

si g' ne s'annule pas sur $]a,b[$, on obtient l'existence de $c \in \,]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Exercice 5.25

1) On considère l'application A de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(t) & \operatorname{sh}(t) \\ -\operatorname{sh}(t) & -\operatorname{ch}(t) \end{bmatrix}.$$

Montrer que A est de classe $\mathscr{C}^1$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)^2 = I_2$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M : t \mapsto M(t)$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M(t)^2 = I_n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $M(t)M'(t) = -M'(t)M(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et en déduire que la trace de $M(t)$ est constante.

1) Les coefficients de A sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que A est de classe $\mathscr{C}^1$, et on vérifie facilement par le calcul que $A(t)^2 = I_2$.

2) En dérivant, on obtient $M'(t)M(t) + M(t)M'(t) = 0$. Il vient $2\operatorname{tr}(M(t)M'(t)) = 0$ mais on reste bloqué. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ est inversible et le relation permet d'écrire $M'(t) = -(M(t))^{-1}M'(t)M(t)$. En passant à la trace, il vient : $\operatorname{tr}(M'(t)) = -\operatorname{tr}(M'(t))$ donc $\operatorname{tr}(M'(t)) = 0$. L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \operatorname{tr}(M(t)) \end{array} \right.$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = \operatorname{tr}(M'(t))$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = 0$, φ est constante.

5.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 5.26

CCP PC 2004

Soit M une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $M(0) = I_3$.

1) En supposant M dérivable en 0, montrer que $M'(0)$ est antisymétrique.

2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ est la matrice d'une rotation vectorielle. *Indication de la rédaction :* on utilisera la continuité de l'application déterminant.

1) On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, ${}^tM(t)M(t) = I_3$ donc en dérivant en 0, on obtient

$${}^tM'(0)M(0) + {}^tM(0)M'(0) = 0.$$

Compte tenu de ce que $M(0) = I_3$, on a $M'(0) = -{}^t\left(M'\right)(0)$.

2) L'application $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \det M(t) \in \{-1, 1\}$ est continue sur un intervalle. Par le théorème des valeurs intermédiaires, son image est un intervalle et comme $f(0) = 1$, f est constante égale à 1.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\det M(t) = 1$ et $M(t) \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R})$ donc $M(t)$ est la matrice d'une rotation vectorielle.

Exercice 5.27

CCP PC 2006

On note M la fonction vectorielle définie sur $\mathbb{R}^+$ par $M(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & (t-1)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \sup |a_{ij}|$.

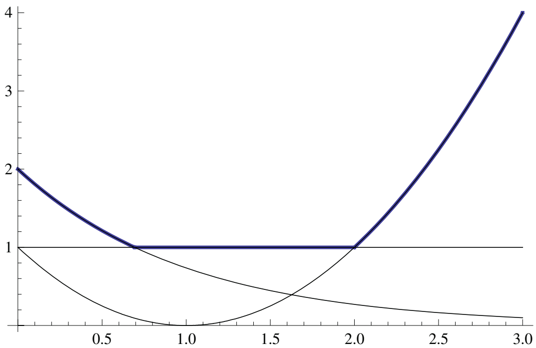
1.a) Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.b) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(t) = N(M(t))$. Déterminer pour $t \in \mathbb{R}^+$, la valeur de $\varphi(t)$. Montrer que φ est continue et de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. La fonction φ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$?

2) Soit Φ la primitive de φ qui s'annule en 0. Calculer pour $t \in \mathbb{R}^+$, la valeur de $\Phi(t)$. La fonction Φ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$?

3) Déterminer la primitive F de M sur $\mathbb{R}^+$ qui s'annule en 0 puis montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $N(F(t)) \leqslant \Phi(t)$.

1. a) On vérifie sans difficulté que N est une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
1.b. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $N(M(t)) = \max(2e^{-t}, (1-t)^2, 1)$.



Une étude simple de φ montre que $\varphi(t) = \begin{cases} 2e^{-t} & \text{si } t \in [0, \ln 2] \\ 1 & \text{si } t \in [\ln 2, 2] \\ (t-1)^2 & \text{si } t \in [2, +\infty[\end{cases}$. Comme $\lim\limits_{\substack{t \to \ln 2 \\ <}} \varphi(t) = \lim\limits_{\substack{t \to \ln 2 \\ >}} \varphi(t)$, φ est continue au point $t = \ln 2$. On vérifie de même de même que $\lim\limits_{\substack{t \to 2 \\ <}} \varphi(t) = \lim\limits_{\substack{t \to 2 \\ >}} \varphi(t)$ et donc φ est continue au point $x = 2$. Comme elle est continue sur chacun des intervalles $[0, \ln 2]$, $[\ln 2, 2]$ et $[2, +\infty[$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

Sur chacun des trois intervalles considérés, φ est la restriction de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. En revanche, $\varphi'_g(\ln 2) = -1$ et $\varphi'_d(\ln 2) = 0$ donc φ n'est pas dérivable en $\ln 2$ donc n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

2) En intégrant et à l'aide de la relation de Chasles, on obtient pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 2(1-e^{-x}) & \text{si } x \in [0, \ln 2] \\ 1 + (x - \ln 2) & \text{si } x \in [\ln 2, 2] \\ \dfrac{(x-1)^3}{3} + 3 - \ln 2 - \dfrac{1}{3} & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}.$$

Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ car c'est une primitive d'une fonction continue.

3) F s'obtient en primitivant chaque coefficient de la matrice, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$F(x) = \int_0^x M(t)\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^x 2e^{-t}\mathrm{d}t & \displaystyle\int_0^x (t-1)^2\mathrm{d}t \\ \displaystyle\int_0^x 1\mathrm{d}t & \displaystyle\int_0^x 0\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(1-e^{-x}) & \dfrac{(x-1)^3}{3} + \dfrac{1}{3} \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

La propriété $N(F(x)) = N\left(\int_0^x M(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^x N(M(t))\mathrm{d}t = \Phi(x)$ nous donne le résultat.

Exercice 5.28

CCP PSI 2005

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et K l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré n. Montrer que $\inf\limits_{P \in K} \left\{ \int_0^1 |P| \right\} > 0$.

Indication de la rédaction : on introduira la norme infinie sur $\mathbb{R}_n[x]$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie. La norme $\|.\|_\infty$ et la norme $\|.\|_1$ sont équivalentes. Il existe donc $C > 0$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|P\|_1 \geqslant C\,\|P\|_\infty$. Si $P \in K$, alors $\|P\|_\infty \geqslant 1$ (car P est unitaire de degré n) donc $\|P\|_1 \geqslant C$. Il vient $\inf\limits_{P \in K} \{\int_0^1 |P|\} \geqslant C > 0$.

Exercice 5.29

Mines-Ponts PSI 2006

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et soit A une matrice antisymétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si la suite (A^p) converge, alors sa limite est la matrice nulle.

Notons $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices symétriques (resp. antisymétriques) d'ordre n. Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc ils sont fermés. Soit $B = \lim\limits_{p\to+\infty} A^p$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la matrice A^{2p} est symétrique (${}^t(A^{2p}) = ({}^tA)^{2p} = (-A)^{2p} = A^{2p}$) et la matrice A^{2p+1} est antisymétrique. On en déduit que $B = \lim\limits_{p\to+\infty} A^{2p+1}$ est antisymétrique, et d'autre part que $B = \lim\limits_{p\to+\infty} A^{2p}$ est symétrique. Comme $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\cap\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$, il en résulte que $B = 0$.

5.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 5.30

ENSEA PSI 2007

Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, telle que,

$$\exists k \in]0,\ 1/2[\,, \forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k(|f(x) - x| + |f(y) - y|)\,.$$

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

2) Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2.a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leqslant \left(\dfrac{k}{1-k}\right)^n |u_1 - u_0|\,.$

2.b) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite. Montrer que $f(\ell) = \ell$.

1) Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Si l'on a $f(x) = x$ et $f(y) = y$, alors
$|x - y| = |f(x) - f(y)| \leqslant k(|f(x) - x| + |f(y) - y|) = 0$, et donc $x = y$.

2.a) • Montrons l'inégalité demandée. Pour $n \geqslant 1$, on a
$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leqslant k(|f(u_n) - u_n| + |f(u_{n-1}) - u_{n-1}|)$, donc $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k(|u_{n+1} - u_n| + |u_n - u_{n-1}|)$, d'où

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant \frac{k}{1-k}|u_n - u_{n-1}|\,.$$

On en déduit par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \left(\dfrac{k}{1-k}\right)^n |u_1 - u_0|\,.$

2.b) Montrons que la suite (u_n) est convergente. Comme $0 < k < 1/2$, on a $0 < \dfrac{k}{1-k} < 1$, et la série géométrique de terme général $\left(\dfrac{k}{1-k}\right)^n |u_1 - u_0|$ converge. Donc la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge, et comme c'est une série télescopique, cela équivaut au fait que la suite (u_n) converge.

Appelons ℓ la limite de la suite $(u_n)_n$.

• Montrons que $f|\ell| = \ell$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $|f(\ell) - f(u_n)| \leqslant k\left(|f(\ell) - \ell| + |f(u_n) - u_n|\right)$, d'où $|f(\ell) - u_{n+1}| \leqslant k\left(|f(\ell) - \ell| + |u_{n+1} - u_n|\right)$.
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$|f(\ell) - \ell| \leqslant k|f(\ell) - \ell|.$$

Comme $k \in \left]0, 1/2\right[$, on a alors $|f(\ell) - \ell| = 0$ d'où $f(\ell) = \ell$.

Remarque
Dans cet exercice on n'a utilisé aucune hypothèse de continuité sur la fonction f.

Exercice 5.31

CCP PSI 2006, Mines-Ponts PSI 2007K
Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I$.

1) Montrer que la suite $(A^k)_{k\geqslant 0}$ converge vers la matrice d'un projecteur.
2) Exprimer la limite en fonction de A.

1) Le polynôme annulateur de A, $P = 3X^3 - X^2 - X - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, en effet 1 est une racine évidente, il vient

$$P = (X-1)(3X^2 + 2X + 1) = 3(X-1)(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) \text{ avec } \alpha = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}.$$

Donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A = P^{-1}\operatorname{diag}(\underbrace{1, \cdots, 1}_{m(1)}, \underbrace{\alpha, \cdots, \alpha}_{m(\alpha)}, \underbrace{\overline{\alpha}, \cdots, \overline{\alpha}}_{m(\overline{\alpha}) = m(\alpha)})P.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = P^{-1}\operatorname{diag}(1, \cdots, 1, \alpha^k, \cdots, \alpha^k, \overline{\alpha}^k, \cdots, \overline{\alpha}^k)P$. Comme $|\alpha| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 1$, il vient

$$\lim_{k\to+\infty} \operatorname{diag}(1, \cdots, 1, \alpha^k, \cdots, \alpha^k, \overline{\alpha}^k, \cdots, \overline{\alpha}^k) = \begin{pmatrix} I_{m(1)} & 0 \\ 0 & 0_{n-m(1)} \end{pmatrix}.$$

Comme l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on en déduit que la suite $(A^k)_{k\geqslant 0}$ converge vers $L = P^{-1}\begin{pmatrix} I_{m(1)} & 0 \\ 0 & 0_{n-m(1)} \end{pmatrix}P$ qui est la matrice d'une projecteur complexe a priori mais en fait réel puisque la suite de matrice est réelle.

2) Remarquons que $A^p = R_p(A)$ où R_p est le reste de la division euclidienne de X^p par P.
Pour obtenir R_p, qui est un polynôme de degré au plus 2, on utilise la base formée des polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux racines de P. On a alors

l'expression de R_p suivante :

$$R_p(1)\,\frac{(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})}{(1-\alpha)(1-\bar{\alpha})}+R_p(\alpha)\,\frac{(X-1)(X-\bar{\alpha})}{(\alpha-1)(\alpha-\bar{\alpha})}+R_p(\bar{\alpha})\,\frac{(X-1)(X-\alpha)}{(\bar{\alpha}-1)(\bar{\alpha}-\alpha)}\,.$$

Mais en raison de la relation $X^p = P(X)Q_p(X)+R_p(X)$, on a $R_p(1) = 1$, $R_p(\alpha)=\alpha^p$ et $R_p(\bar{\alpha})=\bar{\alpha}^p$. On en déduit finalement

$$A^p=\frac{(A-\alpha I_n)(A-\bar{\alpha}I_n)}{(1-\alpha)(1-\bar{\alpha})}+\alpha^p\,\frac{(A-I_n)(A-\bar{\alpha}I_n)}{(\alpha-1)(\alpha-\bar{\alpha})}+\bar{\alpha}^p\,\frac{(A-I_n)(A-\alpha I_n)}{(\bar{\alpha}-1)(\bar{\alpha}-\alpha)}\,.$$

Comme $|\alpha| = 1/\sqrt{3}$, les suites (α^p) et $(\bar{\alpha}^p)$ convergent vers 0 et donc la suite (A^p) converge vers $L=\dfrac{(A-\alpha I_n)(A-\bar{\alpha}I_n)}{(1-\alpha)(1-\bar{\alpha})}=\dfrac{3A^2+2A+I_n}{6}$.

Exercice 5.32

CCP PC 2006 Normes et valeurs propres

On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme suivante : pour $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, $\|M\| = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} |m_{ij}|$.

1) Soient $X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$.
Montrer que les applications $f : M \mapsto MX$ et $g : M \mapsto P^{-1}MP$ sont continues sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.
Montrer que l'application $h : (M, N) \mapsto MN$ est continue sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})\times\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $\big(\|A^n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A alors $|\lambda| \leqslant 1$.

3) Soit $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $\big(B^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $C \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.
Montrer que $C^2 = C$, que $\mathrm{Sp}(C) \subset \{0, 1\}$
et que $\mathrm{Sp}(B) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\} \cup \{1\}$.

4) On considère $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{Z})$. On suppose que M est diagonalisable et que les valeurs propres de M sont de module strictement inférieur à 1.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n$. Montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M^{n_0} = 0$.
Conclure.

1) Les applications f et g sont linéaires et l'espace de départ est de dimension finie, donc elles sont continues.
L'application h est bilinéaire et l'espace de départ est un produit de deux espaces vectoriels de dimension finie. Elle est donc continue.

2) Soit $X = {}^t(x_1, ..., x_p)$ un vecteur propre associé à λ. On a $A^nX = \lambda^nX$.
Choisissons une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{p1}(\mathbb{C})$ (que nons noterons également $\|\cdot\|$). Comme f est une application linéaire, il existe une constante K telle que $\|f(M)\| \leqslant K\|M\|$ pour tout $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. On en déduit aisément que l'image par f d'une suite bornée est une suite bornée.

Comme la suite (A^n) est bornée, on en déduit que la suite $(f(A^n)) = (\lambda^n X)$ est bornée. Il en résulte que chacune des coordonnées de la suite de vecteurs $(\lambda^n X)$ est bornée, et comme l'une au moins des coordonnées de X est non nulle, la suite (λ^n) est elle même bornée. On obtient finalement $|\lambda| \leqslant 1$.

3) On a $C^2 = \lim_{n\to+\infty}(B^n \times B^n) = \lim_{n\to+\infty} B^{2n} = C$ (d'après 1)) donc C est la matrice d'un projecteur. C est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(C) \subset \{0, 1\}$.
D'après ce qui précède si λ est valeur propre de B, alors $|\lambda| \leqslant 1$.
Montrons que $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$. Soit donc λ valeur propre de module 1.
Soit X un vecteur propre associé à λ : $B^n X = \lambda^n X \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} CX$ (d'après 1)).
donc $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc $\left|\lambda^{n+1} - \lambda^n\right| = |\lambda|^n\,|\lambda - 1| = |\lambda - 1| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\lambda = 1$. Ainsi $\mathrm{Sp}(B) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\} \cup \{1\}$

4) Il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ tel que $M = P^{-1}DP$ avec D diagonale.
On a $D^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $M^n = P^{-1}D^nP$ et $N \mapsto P^{-1}NP$ continue donc $\lim_{n\to+\infty} M^n = 0$ (d'après 1)).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n \in \mathscr{M}_p(\mathbb{Z})$. Chaque suite d'entiers correspondant à un coefficient (i, j) de la matrice M^n converge vers 0 donc est nulle à partir d'un certain rang. En prenant le maximum des rangs à partir desquels les suites sont nulles, on obtient un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M^{n_0} = 0$.
M est nilpotente donc $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$, de plus, M est diagonalisable donc M est semblable à la matrice diagonale nulle donc M est la matrice nulle.

Exercice 5.33

Polytechnique PC 2006

Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et N la norme définie sur $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ par $N(M) = \sup_{1\leqslant i,j\leqslant d} |m_{i,j}|$ lorsque $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$.

1) Trouver $K > 0$ tel que $\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_d(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) \leqslant K N(A)N(B)$.

2) Soient $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{A^n}{n!}$. Montrer que pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, d\}^2$ la suite $\left(\left(S_p\right)_{i,j}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge. On note $\exp A = \lim_{p\to+\infty} S_p$.

3) *Application.* Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\exp A$ et $\exp B$. A-t-on $\exp(A + B) = \exp A \exp B$?

1) Soit $C = AB = (c_{ij})_{(i,j)\in[\![1,d]\!]^2}$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,d]\!]^2$, $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_{ik}b_{kj}$ donc $|c_{ij}| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{d} |a_{ik}|\,|b_{kj}| \leqslant dN(A)N(B)$. En passant au maximum, il vient $N(AB) \leqslant dN(A)N(B)$.

2) On en déduit par récurrence que, pour $n \geqslant 1$, $N(A^n) \leqslant d^{n-1}N(A)^n$. Donc, pour tout $n \geqslant 1$, on a $N\left(\dfrac{A^n}{n!}\right) \leqslant \dfrac{1}{d}\dfrac{(dN(A))^n}{n!}$. La série $\sum \dfrac{(dN(A))^n}{n!}$ converge, donc la série $\sum N\left(\dfrac{A^n}{n!}\right)$ converge.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,d]\!]^2$, $\left(S_p\right)_{i,j} = \displaystyle\sum_{n=0}^{p}\left(\frac{A^n}{n!}\right)_{i,j}$.

Or comme $\left|\left(\dfrac{A^n}{n!}\right)_{i,j}\right| \leqslant N\left(\dfrac{A^n}{n!}\right)$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{A^n}{n!}\right)_{i,j}$ est absolument convergente donc convergente. On en déduit que la suite des sommes partielles $\left(\left(S_p\right)_{i,j}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge.

3) On vérifie que $A^2 = B^2 = 0_2$. Il vient que pour $p \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{p}\frac{A^n}{n!} = I_2 + A$, cette suite stationnaire converge vers $\exp A = I_2 + A$. De même, $\exp B = I_2 + B$.

En revanche, $C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $C^2 = I_2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C^{2n} = I_2$ et $C^{2n+1} = C$. Il vient pour $p \geqslant 1$,

$$\sum_{n=0}^{2p+1}\frac{C^n}{n!} = \sum_{n=0}^{p}\frac{C^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{p}\frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{p}\frac{I_2}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{p}\frac{C}{(2n+1)!}$$
$$\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} (\operatorname{ch} 1)\, I_2 + (\operatorname{sh} 1)\, C = \exp(C) = \exp(A + B)$$

On remarque que $\exp(A + B) \neq \exp A \exp B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On montre que si $AB = BA$, alors on a bien $\exp(A + B) = \exp A \exp B$ *(ici $AB \neq BA$).*

6 Suites et séries de fonctions

La notion de convergence uniforme ne se trouve que dans le programme de la filière PSI. Les rappels de cours ainsi que les questions utilisant cette notion seront marqués ***(PSI)****.*

6.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

Dans toute cette partie I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

6.1.1 Convergence des suites de fonctions

Ce qu'il faut savoir

On donne une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toutes définies sur I, à valeurs réelles ou complexes.

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I, lorsque pour tout $x \in I$ la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.
  En pratique, on fixe x dans I et on cherche la limite (si elle existe) de la suite numérique $(f_n(x))_n$.
- **(PSI)** On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I lorsque la suite de terme général
$$\|f_n - f\|_{\infty,I} = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$$
  converge vers 0.
  En pratique, on commence par déterminer la limite simple f (si on a convergence uniforme vers f alors f est la limite simple de la suite), et on étudie l'écart $|f_n - f|$ sur I en le majorant par une suite qui tend vers 0, ou si cela n'est pas immédiat, en étudiant les variations de $f_n - f$ sur I.

Exercice 6.1

CCP PSI 2006, ENSEA MP 2006

Soit f_n la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = x^n \ln x$ si $x \in]0, 1]$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

2. **(PSI)** Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n).

1. la fonction f_n est à valeurs négatives et continue sur $[0, 1]$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(1) = f_n(0) = 0$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. Si $x \in]0, 1[$, la suite géométrique $(x^n \ln x)$ converge vers 0. Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.
2. On ne trouve pas de majorant simple pour $|f_n(x)|$ indépendant de x. On étudie les variations de $f_n - 0 = f_n$ afin de déterminer le maximum de $|f_n|$ sur $[0, 1]$. Pour tout $x \in]0, 1]$, on a $f_n'(x) = nx^{n-1} \ln x + x^{n-1} = x^{n-1}(1 + n \ln x)$. Cela donne le tableau de variations suivant si $n \in \mathbb{N}^*$.

x	0		$e^{-1/n}$		1
$f_n'(x)$		$-$		$+$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e.n}$	$\nearrow$	0

Ainsi $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = \dfrac{1}{ne}$, de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. La suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.

Exercice 6.2

CCP PSI 2005

Soit $I = [0, \pi/2]$ et f_n la fonction définie sur I par $f_n(x) = (\sin x)^n \cos x$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur I.
2. **(PSI)** Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur I.

1. Convergence simple : soit $x \in I$. On voit apparaître une suite géométrique de raison $\sin x$. Si $x = \dfrac{\pi}{2}$ alors $\sin x$ vaut 1 mais $\cos x = 0$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Sinon $|\sin x| < 1$ et on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur I.
2. Convergence uniforme : f_n est positive et $f_n(0) = f_n(\pi/2) = 0$. On étudie les variations de f_n sur I car on ne trouve pas directement de majorant qui permettrait de conclure. Pour tout $x \in [0, \pi/2]$,

$$f_n'(x) = n(\sin x)^{n-1} \cos^2 x - (\sin x)^{n+1} = (\sin x)^{n-1}(n \cos^2 x - \sin^2 x)$$

Le facteur $(\sin x)^{n-1}$ ne s'annule qu'en 0, alors que

$$n \cos^2 x - \sin^2 x = (\sqrt{n} \cos x + \sin x)(\sqrt{n} \cos x - \sin x)$$

s'annule en $x_n = \operatorname{Arctan}\sqrt{n}$ en étant positif avant, négatif après. Ainsi $|f_n|$ admet son maximum en $x_n = \operatorname{Arctan}\sqrt{n} \in]0, \pi/2[$. Ce maximum vérifie

$$|f_n(x_n)| = |\sin x_n|^n \cos(x_n) \leqslant \cos(x_n) = \cos(\operatorname{Arctan}(\sqrt{n})).$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} x_n = \pi/2$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} \cos x_n = 0$, ce qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{\infty,I} = 0.$$

La convergence est uniforme sur I.

Ce qu'il faut savoir

(PSI) - Propriétés liées à la convergence uniforme

- Si (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur I, alors f est continue sur I.
- Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$.

Remarque

On utilise assez fréquemment la contraposée d'une de ces propositions pour montrer qu'une suite de fonctions continues sur I ne converge pas uniformément sur I. Par exemple, on montre que la limite simple n'est pas continue.

Exercice 6.3

Air PSI 2005 (PSI)

On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ une fonction f_n sur $[0, \pi]$ par $f_n(0) = 1$ et $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{x(1+nx)}$ si $x \neq 0$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0, \pi]$ de la suite de fonctions (f_n).
2. Soit $a \in]0, \pi[$. Étudier la convergence uniforme sur $[a, \pi]$ de cette suite (f_n).

1. On a immédiatement $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ si $x \in]0, \pi]$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $[0, \pi]$ vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
La fonction f n'est pas continue sur $[0, \pi]$. Nous allons montrer que chacune des fonctions f_n est continue sur $[0, \pi]$ ce qui prouvera que la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0, \pi]$ (sinon la limite f serait continue). Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue sur $]0, \pi]$ et
$$\lim_{x\to0^+} f_n(x) = 1 \text{ car } \lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Chaque fonction f_n est donc continue sur $[0, \pi]$ et la convergence n'est pas uniforme sur $[0, \pi]$.

2. Soit $a \in]0, \pi[$. On essaie de majorer $\sup_{x \in [a,\pi]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [a,\pi]} |f_n(x)|$. Or, pour tout $x \in [a, \pi]$, on a $1 + nx \geqslant 1 + na, x(1 + nx) \geqslant a(1 + na)$ et $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Ainsi, pour tout $x \in [a, \pi], 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{a(1+na)}$. Ainsi $\|f_n\|_{\infty,[a,\pi]} \leqslant \dfrac{1}{a(1+na)}$ de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$ et la convergence est uniforme sur l'intervalle $[a, \pi]$ (on aurait également pu utiliser le fait que pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a $0 \leqslant \sin x \leqslant x$ pour obtenir une majoration $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+nx}$ si $x \in]0, \pi]$ puis $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+na}$ si $x \in [a, \pi]$).

Exercice 6.4

CCP PSI 2005

On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \sqrt{n} \cos x (\sin x)^n$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, \pi/2]$.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt$ et $\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt$.
3. **(PSI)** La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, \pi/2]$.

1. Si $x \in [0, \pi[$, on a $|\sin x| < 1$ et par croissances comparées, on obtient $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. De plus $f_n(\pi/2) = 0$. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\left[0, \pi/2\right]$, qu'on notera f.

2. Il est immédiat que $\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{n} \cos x (\sin x)^n\,dx = \left[\sqrt{n}\frac{(\sin x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{n}}{n+1},$$
ainsi $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt = 0 = \int_0^{\pi/2} f(t)\,dt$.

3. Le calcul précédent ne permet pas de conclure. On utilise les résultats de l'exercice 6.2, ce qui permet de montrer que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$ avec $x_n = \operatorname{Arctan} \sqrt{n}$. On peut obtenir un équivalent simple de la valeur du maximum $f_n(x_n) = y_n$. On a
$$\tan^2 x_n = n, \cos^2 x_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } \sin^2 x_n = \frac{n}{n+1}$$

Puisque $\sin x_n$ et $\cos x_n$ sont strictement positifs, on peut écrire

$$y_n = \sqrt{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n}\exp\left(\frac{n}{2}\ln(1-\frac{1}{n+1})\right)\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

avec $\frac{n}{2}\ln(1-\frac{1}{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}\frac{-1}{n} = -\frac{1}{2}$, on obtient $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1/2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = e^{-1/2}$. La convergence de la suite de fonctions (f_n) n'est donc pas uniforme.

Remarque
Comme l'exercice précédent, la convergence uniforme sur un segment est une hypothèse suffisante pour permuter limite et intégrale mais elle n'est pas nécessaire.

6.1.2 Convergences des séries de fonctions et propriétés

Ce qu'il faut savoir

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I. On note (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum f_n$.

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I, lorsque pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge. On pose alors pour tout $x \in I$, $S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
- (PSI) La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I, lorsque la suite de fonctions (S_n) converge uniformément vers S sur I.
- La série $\sum f_n$ converge normalement sur I lorsque $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Remarque importante
Convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple, les implications réciproques sont fausses.

En pratique : on essaie d'abord de prouver la convergence normale. Pour cela, on cherche un majorant α_n de $\|f_n\|_\infty$ tel que la série numérique $\sum \alpha_n$ converge (si on ne trouve pas un majorant de manière simple, on étudie les variations de f_n).

(PSI) Lorsqu'il n'y a pas convergence normale mais convergence simple de la série de fonctions, l'écart $S_n(x) - S(x)$ est égal à $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Pour établir la convergence uniforme de la série de fonctions, il faut montrer que la suite $(\|R_n\|_\infty)$ tend vers 0.

Exercice 6.5

CCP MP 2006

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha} \exp(-nx)$.

1. Déterminer pour $\beta \in \mathbb{R}$ et $x \in [0,1]$, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $n^\beta f_n(x)$.
2. Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n$.
3. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence normale sur $[0,1]$?

1. Pour $x \in [0,1]$, $|n^\beta u_n(x)| \leqslant n^{\beta-\alpha} x^n$ et, par croissances comparées, pour tout $x \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\beta u_n(x) = 0$. La majoration ne donne pas toujours le résultat si $x = 1$. En revanche, on a $n^\beta u_n(1) = n^{\beta-\alpha} \exp(-n)$ et par croissances comparées, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\beta u_n(1) = 0$.

2. D'après la question précédente, pour tout $x \in [0,1]$, $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{n^2})$ et la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

3. On peut étudier les variations de u_n ou bien constater que $u_n(x) = \dfrac{(xe^{-x})^n}{n^\alpha}$. En étudiant les variations de $x \mapsto xe^{-x}$, on montre que cette fonction est croissante sur $[0,1]$ avec des valeurs allant de 0 à $1/e$. Ainsi, on obtient $\|u_n\|_\infty = \dfrac{e^{-n}}{n^\alpha} = \alpha_n$. Or $\sum \alpha_n$ converge puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \dfrac{1}{e}$. La convergence de la série $\sum u_n$ est normale sur $[0,1]$, quelle que soit la valeur de α.

Ce qu'il faut savoir

Limite et continuité de la somme d'une série de fonctions

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et a adhérent à I. Si chacune des fonctions f_n admet une limite **finie** ℓ_n en a et si $\sum f_n$ converge (uniformément) normalement sur I alors

- $\sum \ell_n$ converge
- la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet pour limite $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ en a.

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de permutation des limites.

- Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur I qui converge normalement sur I alors sa somme S est continue sur I.

Ce qu'il faut savoir

Très important : aspect local de la continuité

Lorsqu'on souhaite démontrer la continuité de la somme (ou par la suite sa dérivabilité) sur un intervalle I mais qu'on n'arrive pas à démontrer la convergence normale ou uniforme sur cet intervalle, on peut restreindre l'étude à des sous-intervalles (souvent des segments) qui forment un recouvrement de I. C'est suffisant car la continuité est une propriété locale de la fonction et la continuité sur chacun des intervalles donnera celle sur leur union (quelle que soit l'union). On détecte la borne ou les bornes de I qui posent problème et on essaie de s'en écarter (voir 6.7, 6.8, 6.9). En revanche, et c'est très important, la convergence uniforme ou normale sur chacun des intervalles ne donnera pas celle sur I tout entier (on ne pourra pas par exemple utiliser de théorème de permutation de limites).

Exercice 6.6

CCP PSI 2006, TPE PSI 2006

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n définie par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = x^n \ln x$ si $x \in]0, 1]$. Étudier la convergence simple et normale de $\sum f_n$ sur $[0, 1]$.

Il y a bien entendu convergence de $\sum f_n(0)$ et $\sum f_n(1)$ et la somme de la série de fonctions est nulle en ces deux valeurs. Pour $x \in]0, 1[$, la série géométrique $\sum x^n \ln x$ converge avec $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \ln x = \dfrac{x \ln x}{1 - x}$. La série de fonctions converge simplement sur $[0, 1]$. On note S sa somme. La fonction S est continue sur $[0, 1[$ mais elle ne l'est pas en 1 puisque $\lim_{x \to 1} S(x) = -1 \neq S(1)$. Il ne peut donc y avoir convergence normale sur $[0, 1]$. Les résultats de l'exercice 6.1 nous confirment cela puisque $\|u_n\|_{\infty,[0,1]} = \dfrac{1}{ne}$.

Exercice 6.7

CCP MP 2007, Centrale PC 2007

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$ où $u_n(x) = \exp(-x\sqrt{n})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On note S la somme de cette série de fonctions.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 0$.
4. Montrer que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$.

1. Chacune des fonctions u_n est définie sur $\mathbb{R}$. Si $x < 0$, la suite $(u_n(x))_n$ diverge vers $+\infty$ donc la série associée diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n(0) = 1$ et la série $\sum u_n(0)$ diverge également. Si $x > 0$, par croissances comparées, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-x\sqrt{n}} = 0$ donc $u_n(x)$ est négligeable devant $1/n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction u_n est décroissante, positive sur $\mathbb{R}_+^*$ si bien que $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = 1$. La série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $a > 0$, pour les mêmes raisons que précédemment, on a $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = u_n(a)$. Puisque $\sum u_n(a)$ converge, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. Chacune des fonctions u_n étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la somme S est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$. Donc S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. La série $\sum u_n$ converge normalement sur $[1,+\infty[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 0$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction S est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, si $x > y$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $S_N(x) \leqslant S_N(y)$ (S_N désigne la somme partielle d'ordre N de la série $\sum u_n$), ce qui donne, lorsque N tend vers $+\infty$, l'inégalité $S(x) \leqslant S(y)$.
5. On va montrer que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$ ce qui équivaut à montrer $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x S(x) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $v_n(x) = e^x u_n(x)$ pour $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|v_n\|_{\infty,[1,+\infty[} = v_n(1)$ car la fonction v_n est positive et décroissante sur $[1,+\infty[$. Puisque $v_n(1) = e^{1-\sqrt{n}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum v_n$ converge normalement sur $[1,+\infty[$. Chacune des fonctions v_n admet une limite finie en $+\infty$, à savoir 0 pour

$n \geqslant 2$ et 1 lorsque $n = 1$. Cela permet d'écrire

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x S(x) = 1.$$

Ce qu'il faut savoir

Intégration sur un segment

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues qui converge normalement (et/ou uniformément - PSI) sur un segment $[a, b]$. Alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b S(t)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt \right).$$

Exercice 6.8

CCP PC 2006

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto nxe^{-nx^2}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^*$. On note S sa somme. Montrer que S est impaire.
2. Soit $a > 0$. Calculer pour $x > 0$, $\int_a^x S(t)\,dt$ et en déduire S.

1. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a $|f_n(x)| \leqslant nbe^{-na^2}$. La série $\sum nbe^{-na^2}$ converge car $nbe^{-na^2} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $a > 0$. Ainsi $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. On montre de la même façon que $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_-^*$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\sum_{n=0}^{N} f_n(-x) = -\sum_{n=0}^{N} f_n(x)$, ce qui donne $S(-x) = -S(x)$ lorsque N tend vers $+\infty$. La fonction S est donc impaire.
2. La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $[a, x]$ (ou $[x, a]$), on peut intervertir somme et intégrale, ainsi

$$\int_a^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x nte^{-nt^2}\,dt = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[e^{-nt^2} \right]_a^x = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{-x^2}} - \frac{1}{1 - e^{-a^2}} \right),$$

puisque chacune des séries géométriques $\sum(e^{-x^2})^n$ et $\sum(e^{-a^2})^n$ est de raison dans $[0,1[$. La fonction $x \mapsto \int_a^x S(t)\,dt$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de S, en la dérivant, on obtient, pour tout $x>0$,

$$S(x) = \frac{1}{2}\frac{2xe^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2} = \frac{xe^{-x^2}}{(e^{-x^2})^2(e^{x^2/2}-e^{-x^2/2})^2} = \frac{x}{4\,\mathrm{sh}^2\left(\dfrac{x^2}{2}\right)}.$$

Ce qu'il faut savoir

Dérivation

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Si

(i) $\sum f_n$ converge simplement sur I. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$,

(ii) $\sum f_n'$ converge normalement (et/ou uniformément - PSI) sur I. On note $T = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$,

alors S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $x \in I$, $S'(x) = T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.

Exercice 6.9

CCP PSI 2005

Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+e^{nx})}{n^3}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathscr{D}$.
3. La fonction f est-elle $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$?

1. On cherche un équivalent simple de $u_n(x) = \dfrac{\ln(n+e^{nx})}{n^3}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Il n'est pas le même suivant le signe de x. Si $x \leqslant 0$, $\ln(n+e^{nx}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ (car $n+e^{nx} \sim n$ de limite infinie), donc $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n^3}$ négligeable devant $1/n^2$ en $+\infty$. Donc la série converge si $x \leqslant 0$. En revanche si $x>0$, $n+e^{nx} \sim e^{nx}$ qui tend

également vers $+\infty$ donc $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(e^{nx})/n^3 = x/n^2$. Il y a donc convergence pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Chaque fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de prouver la convergence normale de la série. On n'a évidemment pas convergence normale sur $\mathbb{R}$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = +\infty$. On doit limiter les valeurs de x. Soit $A \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in]-\infty, A]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n(x)| \leqslant |u_n(A)|$ puisque $x \mapsto u_n(x)$ est croissante et positive sur $\mathbb{R}$. La série converge donc normalement sur $]-\infty, A]$ et f est continue sur tout intervalle $]-\infty, A]$, A réel quelconque, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x > 0$,
$$u_n'(x) = \frac{ne^{nx}}{(n+e^{nx})n^3} = \frac{e^{nx}}{n+e^{nx}}\frac{1}{n^2},$$
on obtient alors facilement $0 \leqslant u_n'(x) \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc convergence normale de la série des dérivées sur $\mathbb{R}$, les autres propriétés pour appliquer le théorème de dérivation ayant été vérifiées, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque
Le théorème de dérivabilité donne également la continuité. On aurait donc pu se passer de la partie où on démontre la continuité.

6.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 6.10

Mines-Ponts PC 2006

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{Arctan}(\dfrac{x}{n})$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier les variations de S.
3. Justifier l'existence d'une limite, éventuellement infinie, pour $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Indication de la rédaction : en supposant que cette limite est finie et en minorant la somme par une somme partielle, montrer qu'on obtient une contradiction. Conclure.

f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire. On étudie donc la série de fonctions sur $\mathbb{R}^+$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$, de signe fixe. Puisque $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge. La série $\sum f_n(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ vers un réel $S(x)$. La somme S est donc définie sur $\mathbb{R}$ et S est impaire. Il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}^+$ car $\sup\limits_{x\geqslant 0} |f_n(x)| = \dfrac{\pi}{2n}$, terme général d'une série divergente. On prouve la convergence normale de la série de fonctions sur les segments $[-A, A]$. Soit $A > 0$, pour tout $x \in [-A, A]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n} \operatorname{Arctan} \dfrac{A}{n} = f_n(A)$, terme général d'une série convergente d'après l'ensemble de définition trouvé précédemment. Chacune des fonctions f_n étant continue sur $\mathbb{R}$, S est continue sur $[-A, A]$, pour tout $A > 0$, donc finalement sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_n'(x) = \frac{1}{n^2}\frac{1}{1 + x^2/n^2} = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. La série $\sum f_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers S avec convergence normale de $\sum f_n'$ sur $\mathbb{R}$ donc S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$. On en déduit que S est croissante sur $\mathbb{R}$ puisque $S'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque
Bien entendu, on aurait pu se passer de la continuité de f et montrer directement que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

3. Lorsque x devient grand, on remarque que $f_n(x)$ est proche de $\dfrac{\pi}{2n}$ qui est le terme général d'une série divergente. On s'attend donc à ce que S admette une limite infinie en $+\infty$.
La croissance de S sur $\mathbb{R}$ permet d'affirmer que S admet une limite en $+\infty$ soit finie, soit infinie. Supposons que cette limite soit finie et notons la ℓ. Pour $x > 0$, $S(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \operatorname{Arctan}(x/n)$, où N est un entier naturel fixé. En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $\ell \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\pi}{2n}$ et cela pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Lorsque N tend vers $+\infty$, on obtient une contradiction et finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.

Remarque
On pourrait montrer que la limite est $+\infty$ en utilisant la définition de la limite infinie, sans justifier l'existence d'une limite en $+\infty$ pour S : soit $A > 0$, on fixe N de sorte que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\pi}{2n} \geqslant 2A$. Par continuité de $S_N : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \operatorname{Arctan}(x/n)$ sur $\mathbb{R}$, il existe $B > 0$ tel que, pour $x > B$, $S_N(x) > A$ et, puisque $S(x) > S_N(x)$, on a bien pour tout $x > B$, $S(x) > A$.

Exercice 6.11

CCP PC 2007

Soit la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ puis $\mathscr{C}^2$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer f'' puis f' sur $]0, +\infty[$.
3. f est-elle dérivable en 0 ?
4. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x \ln(1 - e^{-t})\, dt$ *(cette question est à traiter après avoir étudié la notion d'intégrabilité)*.

1. Soit $u_n : x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{n^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est définie et continue sur $I = [0, +\infty[$. De plus, on a $\|u_n\|_{\infty,I} = 1/n^2$. Puisque $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum u_n$ converge normalement sur I et f est donc définie et continue sur I.
2. On fixe $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, +\infty[$ avec $u_n'(x) = -\dfrac{e^{-nx}}{n}$ et $u_n''(x) = e^{-nx}$. On a $\|u_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{e^{-na}}{n}$, terme négligeable devant e^{-na} lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ et $\sum u_n$ converge simplement sur $[a, +\infty[$ donc f est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ avec, pour tout $x > a$, $f'(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$. De même, avec $\|u_n''\|_{\infty,[a,+\infty[} = e^{-na}$, on montre que f' est $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle avec, pour tout $x \geqslant a$, $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$. La fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, donc sur l'union de ces intervalles, à savoir $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout

$x > 0$,

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}.$$

En intégrant (on utilise l'avant dernière forme trouvée pour f''), il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln(1-e^{-x})+C$. On détermine cette constante à l'aide d'une valeur particulière. On ne peut pas prendre $x = 0$ et aucune autre valeur ne donne rapidement cette constante. On étudie alors la limite lorsque x tend vers $+\infty$. D'une part, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 - e^{-x}) + C = C$. D'autre part, puisque la convergence de $\sum u'_n$ est normale sur $[1, +\infty[$ et puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u'_n(x) = 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ par permutation des limites. Finalement, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln(1 - e^{-x})$.

3. Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1 - e^{-x}) = -\infty$, f n'est pas dérivable en 0.

4. On voudrait écrire directement, pour tout $x > 0$, $f(x) - f(0) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt$ mais f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ (problème pour l'intégration en 0). On va généraliser cette formule, mais la difficulté vient de la limite infinie pour f' en 0. Il faut éviter d'avoir à traiter deux difficultés : la borne qui dépend de la variable x et celle qui donne une intégrale généralisée. Notons $g(x) = \displaystyle\int_1^x f'(t)\,dt$ pour $x > 0$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée f' (et $g(x) = f(x) - f(1)$ si $x > 0$). On prouve l'intégrabilité de f' sur $]0, 1]$. Si $x > 0$, $f'(x) = \ln(1 - e^{-x}) = \ln(x + o(x)) = \ln x + \ln(1 + o(1))$. Donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$ et f' est intégrable sur $]0, 1]$. Donc g admet une limite finie en 0 qui vaut $g(0) = \displaystyle\int_0^1 f'(t)\,dt$ (par définition de cette intégrale). On écrit alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x > 0$, $f(x) - f(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^x f'(t)\,dt = g(x) - g(\varepsilon)$. On peut alors passer à la limite et faire tendre ε vers 0 (f est continue en 0). On obtient, pour tout $x > 0$, $f(x) - f(0) = g(x) - g(0) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \ln(1 - e^{-t})\,dt$.

Exercice 6.12

Air MP 2005 (PSI)

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

2. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3. Déterminer une équation différentielle simple dont f est solution et en déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

1. On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n+1}$. Si $x < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n(x)| = +\infty$ et la série $\sum u_n(x)$ est grossièrement divergente. Si $x \geqslant 0$, la suite $(e^{-nx})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (vers 0 si $x > 0$ et constante égale à 1 si $x = 0$) et positive. La suite $(\dfrac{1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante vers 0 si bien que la suite $(|u_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante vers 0. La série $\sum u_n$ étant alternée, le critère spécial des séries alternées nous assure que la série converge lorsque $x \geqslant 0$. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}^+$.
2. Chacune des fonctions u_n est continue sur $\mathbb{R}^+$. La difficulté vient du fait que $\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} = |u_n(0)| = \dfrac{1}{n+1}$, et on n'a pas convergence normale de la série de fonctions. On doit alors essayer de montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ (on ne peut pas ici se contenter de la convergence normale sur les intervalles $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, ce qui ne donnerait que la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$). On sait toutefois que pour $x \geqslant 0$, la série numérique $\sum u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées. On note pour $x \geqslant 0$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ (reste d'ordre n de la série). Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Le critère spécial des séries alternées nous permet la majoration de $|R_n(x)|$ par la valeur absolue de son premier terme, soit $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$, si bien que $\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$. Ce majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. La convergence est donc uniforme sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction somme f est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.
   Chacune des fonctions u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $u_n'(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{n}{n+1} e^{-nx}$. On peut remarquer que $u_n'(0) = (-1)^{n+1} \dfrac{n}{n+1}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi $\sum u_n'(0)$ diverge et on n'a aucune chance de pouvoir appliquer le théorème de dérivation sur $\mathbb{R}^+$ (mais cela ne prouve pas que f n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$). On fixe $a > 0$. Pour $x \in [a, +\infty[$, $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{n}{n+1} e^{-na} \leqslant e^{-na}$, ce qui donne la convergence normale de $\sum u_n'$ sur $[a, +\infty[$. On a auparavant prouvé la convergence simple de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^+$. On peut donc conclure que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ avec,
   $$\text{pour tout } x \geqslant a,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} e^{-nx}.$$
   La dérivabilité s'étend à $\mathbb{R}_+^*$ puisque a est un réel strictement positif quelconque.

3. Les termes $\dfrac{n}{n+1}$ et $\dfrac{1}{n+1}$ dans f' et f nous invitent à les ajouter pour les simplifier. Pour tout $x>0$,
$$f(x)-f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n+1}e^{-nx}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-e^{-x})^n=\frac{1}{1+e^{-x}}$$
ce qui donne, pour tout $x>0$, $f'(x)=f(x)-\dfrac{1}{1+e^{-x}}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$, ce qui permet d'obtenir $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=f(0)-\dfrac{1}{2}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et f' admet une limite finie en 0, ainsi f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6.13

CCP PC 2006, Centrale PC 2005

Soit la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que S est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Déterminer la limite de $S(x)$ lorsque x tend vers 0 ainsi qu'un équivalent simple de $S(x)$ en 0.
4. Montrer que pour tout $x>0$, $xS(x)-S(x+1)=\dfrac{1}{e}$.
5. Déterminer des réels a, b et c tels que $S(x)=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

On note $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$.

1. La forme de u_n permet de prouver directement la convergence normale de la série sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x>0$, $|u_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{n\,n!}$ mais seulement si $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction u_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. On s'intéresse alors à la série qui ne commence qu'au rang 1. Pour tout $n\geqslant 1$, $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*}=\dfrac{1}{n\,n!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme chaque fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $T=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc écrire, pour tout $x>0$, $S(x)=u_0(x)+T(x)=\dfrac{1}{x}+T(x)$, somme de deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n(x) = 0$. Puisque la convergence est normale sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de permutation des limites permet d'écrire $\lim\limits_{x \to +\infty} T(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.
   Cela donne $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x \to +\infty} T(x) = 0$.

3. Pour des raisons semblables, on a $\lim\limits_{x \to 0} T(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\, n!}$. Or $\lim\limits_{x \to 0^+} u_0(x) = +\infty$, ainsi on obtient d'une part $\lim\limits_{x \to 0^+} S(x) = +\infty$ et d'autre part $S(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ (on ne peut pas appliquer le théorème de permutation des limites à la série qui définit S puisque la fonction u_0 n'admet pas de limite finie en 0^+).

4. On regroupe les deux sommes, pas directement (sinon cela ne se simplifie pas) mais après un changement d'indice. Pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned}
xS(x) - S(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+1+n)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x+n}{n!(x+n)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

5. Puisque $xS(x) = S(x+1) + \dfrac{1}{e}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} xS(x) = 1/e$ et $S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{ex}$. On utilise alors $S(x+1) = \dfrac{1}{e(x+1)} + o\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{1}{ex} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, ce qui donne $xS(x) = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{ex} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, c'est-à-dire $S(x) = \dfrac{1}{ex} + \dfrac{1}{ex^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 6.14

Mines-Ponts PSI 2005

Soit la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 nx}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de S. Étudier la continuité et la dérivabilité de S.

2. On définit une fonction Φ par $\Phi(0) = 1$ et $\Phi(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sh} x}$ si $x > 0$. Montrer que Φ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.
3. En exprimant $S(x)$ à l'aide de la fonction Φ, déterminer un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

1. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$, $u_n(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 nx}$. La fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}^*$ et paire. On étudie donc la convergence de la série de fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x > 0$, $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{2}{e^{nx}}\right)^2 = 4e^{-2nx}$. La série géométrique $\sum e^{-2nx}$ converge (la raison est $e^{-2x} \in \,]0,1[$). Par les critères de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. Chacune des fonctions u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x > 0$, $u_n'(x) = \dfrac{-2n\operatorname{ch}(nx)}{\operatorname{sh}^3(nx)}$.
Puisqu'on doit étudier la classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, afin d'éviter les problèmes de majoration à la fois pour x proche de 0 et x trop grand, on se place sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. On a alors, pour tout $x \in [a,b]$, $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{2n\operatorname{ch}(nb)}{\operatorname{sh}^3(na)} = v_n$.
Or $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n\dfrac{e^{nb}}{e^{3na}} = 8ne^{(b-3a)n}$, et on se rend compte que la majoration est beaucoup trop grande car $b - 3a$ peut-être positif. On reprend en cherchant une meilleure majoration (ch et sh sont équivalents en $+\infty$, on ne doit donc pas les garder ensemble) :
$$\forall x \in [a,b], |u_n'(x)| = \frac{2n}{\operatorname{th}(nx)\operatorname{sh}^2(nx)} \leqslant \frac{2n}{\operatorname{th}(na)\operatorname{sh}^2(na)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{8n}{1.e^{2na}}.$$
Ce qui donne bien cette fois la convergence normale sur $[a,b]$ (et par la même occasion sur $[a,+\infty[$). Ainsi S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$, avec, d'après le théorème de dérivabilité, pour tout $x > 0$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$.
2. Φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \Phi(x) = 1$. Donc Φ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Une étude de la fonction $x \mapsto \operatorname{sh} x - x$ donne $\operatorname{sh} x \geqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Phi(x) \leqslant 1$. Puisque $\Phi(0) = 1$, on en déduit que Φ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
3. Pour tout $x > 0$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Phi^2(nx)}{n^2x^2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Phi^2(nx)}{n^2}$. On note $f_n(x) = \dfrac{\Phi^2(nx)}{n^2}$ pour $x \geqslant 0$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \geqslant 0$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Donc la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ et sa somme - notons la F - est continue sur $\mathbb{R}^+$. Avec $F(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on obtient $S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{F(0)}{x^2} = \frac{\pi^2}{6x^2}$.

6.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 6.15

Mines-Ponts MP 2006

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = \dfrac{n^x n!}{\left(\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right)}$.

1. Prouver l'existence, pour tout $x > 0$, de $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.
2. Montrer l'existence d'une constante γ telle que, pour tout $x > 0$,
$$\ln\Gamma(x) = -\ln x - \gamma\, x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln(1+\frac{x}{n})\right).$$
3. Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Puisque $f_n(x) > 0$ si $x > 0$, on va plutôt étudier $g_n(x) = \ln f_n(x)$, cela permet de transformer les produits en somme. Soit $x > 0$. Pour étudier la convergence de la suite $(g_n(x))$, on étudie la convergence de la série de terme général $(g_n(x) - g_{n-1}(x))$. Si $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 1$, on a, pour tout $x > 0$,
$$\begin{aligned} g_n(x) - g_{n-1}(x) &= \ln(f_n(x)/f_{n-1}(x)) = \ln\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^x \frac{n}{x+n}\right)\\ &= x\ln\frac{n}{n-1} - \ln(1+\frac{x}{n})\\ &= -x\ln(1-\frac{1}{n}) - (\frac{x}{n} + O(\frac{1}{n^2}))\\ &= \frac{x}{n} - \frac{x}{n} + O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2}).\end{aligned}$$
Par critère de comparaison, la série de terme général $(g_n(x) - g_{n-1}(x))$ est absolument convergente, donc convergente et la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie $\ell(x)$. Par continuité de la fonction exponentielle, la suite $(f_n(x))$ converge vers $\exp(\ell(x))$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note cette limite $\Gamma(x)$.
2. On essaie de faire apparaître les termes demandés. On a
$$\frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right) = x\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{x+k}{k}\right)$$

ce qui donne, pour $x > 0$, $\ln f_n(x) = x \ln n - \ln x - \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{x}{k})$. On ajoute les termes nécessaires pour obtenir la série demandée :

$$\begin{aligned}
\ln f_n(x) &= x \ln n - \ln x + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{k} - \ln(1 + \frac{x}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k} \\
&= -\ln x - x \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{k} - \ln(1 + \frac{x}{k})\right)
\end{aligned}$$

un développement simple de $\ln(1 + x/k) - x/k = O(1/k^2)$ prouve la convergence de la seconde série. Pour prouver la convergence de $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$, on peut utiliser l'étude de la convergence précédente avec $x = 1$, car

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(1 + \frac{1}{k})\right) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(\frac{k+1}{k})\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n) - \ln(1 + 1/n)
\end{aligned}$$

soit prouver directement la convergence de cette suite en trouvant un équivalent du terme général de la série $\sum (v_n - v_{n-1})$. On note alors γ la limite de cette suite v_n. On obtient en passant à la limite et en utilisant la continuité de ln sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\ln \Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln(1 + \frac{x}{n})\right).$$

3. On va bien entendu étudier $\ln \circ \Gamma$ en utilisant la relation précédente, pour ensuite conclure sur la classe $\mathscr{C}^1$ de Γ en composant avec la fonction exponentielle. La fonction $x \mapsto -\ln x - \gamma x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il reste donc à étudier la classe de la série de fonctions $\sum h_n$ avec, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n(x) = \frac{x}{n} - \ln(1 + \frac{x}{n})$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Chaque fonction h_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on dispose déjà de la convergence simple de la série de fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$,

$$h_n'(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} = \frac{x}{n(x+n)}$$

Cette série de fonctions converge normalement sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ puisque pour tout $x \in [a, b]$, $|h_n'(x)| \leqslant \frac{b}{n(n+a)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b}{n^2}$. Le théorème de dérivation permet de conclure quant à la classe $\mathscr{C}^1$ de la somme sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

L'exercice suivant utilise la notion d'intégrabilité.

Exercice 6.16

CCP PSI 2007

On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n^{x+1}}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0, +\infty[$. On notera S la somme de la série.
2. Étudier la convergence normale de cette même série sur $[0, +\infty[$.
3. S est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ donc la série converge pour $x = 0$. Si $x > 0$, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{x+1}}$ converge puisque $x + 1 > 1$. On a donc convergence simple de la série de fonctions sur $[0, +\infty[$.
2. Chaque fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$. On étudie les variations de f_n sur $[0, +\infty[$ afin d'obtenir le maximum de la fonction f_n sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, on a
$$f_n'(x) = \frac{1}{n^{x+1}} - \frac{x \ln n}{n^{x+1}} = \frac{1 - x \ln n}{n^{x+1}}.$$
$f_n(0) = 0$, la limite de f_n en $+\infty$ est nulle par croissances comparées et finalement f_n est positive avec un maximum en $1/\ln n$ avec
$$f_n(1/\ln n) = \frac{1}{(\ln n) n^{1+1/\ln n}} = \frac{1}{e n \ln n}$$
(car $n^{1/\ln n} = e$). La série $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge (voir exercice 4.15 sur les séries de Bertrand). Il n'y a donc pas convergence normale sur $\mathbb{R}^+$.
3. On peut facilement montrer la continuité de S sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. En effet, sur un tel segment $[a, b]$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{b}{n^{a+1}}$ et $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$. Comme chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $[a, b]$, S est continue sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$. L'étude de la continuité en 0 est plus technique. On va encadrer la somme partielle par des intégrales. Soit $x > 0$, si $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{(n+1)^{x+1}} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^{x+1}}\, dt \leqslant \frac{1}{n^{x+1}}$$
puisque $t \mapsto 1/t^{x+1}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. En utilisant la convergence de la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{x+1}}$ (car $x + 1 > 1$), on peut sommer les inégalités

précédentes pour n allant de 1 à $+\infty$ pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{x+1}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}}$$

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \frac{1}{x}$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} - 1 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}}$, soit $\displaystyle 1/x \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} \leqslant 1 + 1/x$ et finalement $1 \leqslant S(x) \leqslant 1 + x$. Cela nous donne, par encadrement $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} S(x) = 1 \neq S(0) = 0$ et S n'est pas continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 6.17

Centrale PSI 2005 K

Montrer que la fonction f définie par $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + x^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle f_n(x) = \frac{n}{n^2 + x^2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum (-1)^n f_n(x)$ est une série alternée. Il est nécessaire de montrer la décroissance de la suite $(f_n(x))_n$ vers 0. On étudie la fonction $h : t \mapsto \dfrac{t}{t^2 + x^2}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée vérifiant $h'(t) = \dfrac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2}$. Ainsi h' est décroissante sur $[|x|, +\infty[$ et la série vérifie bien le critère spécial des séries alternées (à partir d'un certain rang seulement, mais c'est suffisant).

Le calcul des premières dérivées de f_n ne fait pas apparaître de formule simple, si on a l'intention d'obtenir une majoration pour une convergence normale. On décompose alors en éléments simples : on cherche des complexes a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{n}{(x + in)(x - in)} = \frac{a}{x + in} + \frac{b}{x - in}.$$

On trouve alors $a = i/2$ et $b = -i/2$ (par exemple en réduisant au même dénominateur $x^2 + n^2$ et en utilisant le fait que les deux numérateurs sont deux fonctions polynômes égales sur $\mathbb{R}$ donc avec les même coefficients). Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x + in} - \frac{1}{x - in} \right).$$

On note $u_n(x) = 1/(x + in) = (x + in)^{-1}$ toujours pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On va prouver par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, la propriété

$$\mathscr{P}(p) : f \text{ est de classe } \mathscr{C}^p \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n^{(p)}(x).$$

Il ne faut pas oublier de mettre la formule pour $f^{(p)}$ dans l'hypothèse de récurrence car le fait que f soit de classe $\mathscr{C}^p$ ne garantit pas du tout que $f^{(p)}$ est la somme des dérivées d'ordre p de $(-1)^n f_n$.

On calcule ses premières dérivées : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u_n'(x) = -1(x+in)^{-2}, u_n''(x) = (-1)(-2)(x+in)^{-3} \dots$$

et une récurrence assez rapide permet de prouver que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$u_n^{(p)}(x) = (-1)^p \frac{p!}{(x+in)^{p+1}},$$

ainsi que $|u_n^{(p)}(x)| \leqslant \dfrac{p!}{n^{p+1}}$. Cela permet alors d'obtenir, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n^{(p)}(x)| \leqslant \dfrac{2p!}{n^{p+1}}$. Cela donne la convergence normale de la série des dérivées d'ordre p sur $\mathbb{R}$, dès que $p \geqslant 1$.

On peut alors montrer le résultat par récurrence.

- On a $\mathscr{P}(1)$: la série $\sum (-1)^n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, chaque fonction $(-1)^n f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\sum (-1)^n f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ avec $f' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n'$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(p)$. Alors la série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, $\sum (-1)^n f_n^{(p)}$ converge au moins simplement sur $\mathbb{R}$ et sa série des dérivées converge normalement sur $\mathbb{R}$. Cela permet d'appliquer le théorème de dérivation à $\sum (-1)^n f_n^{(p)}$ et d'en déduire $\mathscr{P}(p+1)$. Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathscr{P}(p) \Rightarrow \mathscr{P}(p+1)$.
- conclusion : par récurrence, on a prouvé le résultat demandé : f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, donc $\mathscr{C}^\infty$.

Remarque

La rédaction de cet exercice dans le cadre du programme PC est plus simple puisque la récurrence ne s'impose pas car le théorème de classe $\mathscr{C}^p$ est au programme : soit $p \in \mathbb{N}^*$, chaque fontion $(-1)^n f_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbb{R}$, la série $\sum (-1)^n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et chaque série $\sum (-1)^n f_n^{(k)}$, pour $k \in \{1, \dots, p\}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (seule la convergence normale de la dernière dérivée est nécessaire pour appliquer le théorème, la convergence simple suffit pour les autres). Cela donne bien le fait que f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ et ce pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Séries entières 7

7.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres complexes, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit u_n la fonction de $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$ définie par $u_n(z) = a_n z^n$ (resp. $u_n(x) = a_n x^n$). La série de fonctions de terme général u_n est appelée **série entière** à variable complexe (resp. réelle) de coefficients a_n. Par abus de langage on notera cette série « la série entière $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum a_n x^n$) ».

7.1.1 Rayon de convergence

Ce qu'il faut savoir

Il existe un unique nombre $R \in [0, +\infty]$, appelé **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$, tel que l'on ait le tableau suivant :

$\lvert z \rvert < R$	$\lvert z \rvert > R$
La série de terme général $a_n z^n$ converge absolument	La série de terme général $a_n z^n$ ne converge pas absolument
La série de terme général $a_n z^n$ converge	La série de terme général $a_n z^n$ diverge
La suite $(a_n z^n)_{n \geqslant 0}$ converge vers 0	La suite $(a_n z^n)_{n \geqslant 0}$ ne converge pas vers 0
La suite $(a_n z^n)_{n \geqslant 0}$ est bornée	La suite $(a_n z^n)_{n \geqslant 0}$ n'est pas bornée

$\lvert z \rvert = R$: Il peut se passer n'importe quoi

• **Résultats pratiques pour déterminer le rayon de convergence**

1) **Règle de d'Alembert pour les séries entières**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si

(i) il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $a_n \neq 0$

(ii) la suite $(|a_{n+1}|/|a_n|)$ tend vers $\ell \in [0, +\infty]$,

alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = 1/\ell$, avec la convention $1/0 = +\infty$ et $1/+\infty = 0$.

Remarque

On ne peut pas appliquer directement la règle de d'Alembert telle qu'on vient de la citer, à des séries entières dites *lacunaires* c'est-à-dire où une infinité de termes a_n s'annulent.

Cependant dans le cas de série du type $\sum b_n z^{p_n}$ où (p_n) est une suite strictement croissante de nombres entiers positifs et (b_n) est une suite de nombres complexes non nuls, on pourra essayer d'appliquer la règle de d'Alembert à la **série numérique** de terme général $u_n(z) = b_n z^{p_n}$. Nous allons voir plusieurs exemples dans les exercices .

Mise en garde

– La règle de d'Alembert n'est pas toujours applicable, par exemple lorsque la suite $(|a_{n+1}|/|a_n|)$ n'a pas de limite.

– Le fait que la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R n'implique pas que la suite $\left(|a_{n+1}|/|a_n|\right)$ converge vers $1/R$.

2) **Comparaison des rayons de convergence de deux séries entières**

Cette méthode est très utile. En effet, elle permet de se ramener à des séries entières dont on connaît déjà le rayon de convergence ou auxquelles on peut, par exemple, appliquer la règle de d'Alembert.

Plus précisément, soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

– La série entière $\sum |a_n| z^n$ a pour rayon de convergence R_a ; autrement dit, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence .

– Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

– Si à partir d'un certain rang $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.

– Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.

Dans les deux derniers cas, on a seulement une inégalité entre les rayons de convergence. Pour obtenir l'inégalité inverse, on utilisera souvent la partie droite du tableau précédent : par exemple, quand une série entière de rayon R ne converge pas en un point $|x_0|$, ou quand la suite $a_n x_0^n$ ne converge pas vers 0, alors $R \leqslant |x_0|$.

• **Deux séries de référence**

Série géométrique Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. La série entière $\sum \lambda^n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1/|\lambda|$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < 1/|\lambda|$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n z^n = \frac{1}{1-\lambda z}$.

Série exponentielle La série entière de terme général $z^n/n!$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

• **Rayon de convergence de la somme de deux séries entières**

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ est tel que $\begin{cases} R = \min(R_a, R_b) & \text{si } R_a \neq R_b \\ R \geqslant R_a & \text{si } R_a = R_b \end{cases}$

et si $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

• **Rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières**

Le rayon de convergence R de la série entière produit, de coefficients $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, est tel que $R \geqslant \min(R_a, R_b)$, et, si $|z| < \min(R_a, R_b)$,

on a alors, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$.

• **Série dérivée et série primitive d'une série entière**

On appelle **série primitive (resp. dérivée)** de la série entière $\sum a_n z^n$ la série entière $\displaystyle\sum \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ (resp. $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$).

Ces trois séries entières ont le même rayon de convergence.

Exercice 7.1

CCP MP 2006 et Mines - Ponts MP 2006 et 2005

Déterminer le rayon de convergence R, l'ensemble $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{A}$) des nombres réels pour lesquels la série entière $\sum a_n x^n$ converge (resp. converge absolument) dans les quatre cas suivants :

a) $a_n = \sin n$; *b*) $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$; *c*) $a_n = \dfrac{i^n n^2}{n^2+1}$; *d*) $a_n = \sin \dfrac{1}{n^2}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| \leqslant 1$. Le rayon de convergence de la série entière est donc supérieur ou égal à celui de la série géométrique $\sum x^n$. Donc $R \geqslant 1$.

Par ailleurs, on montre par l'absurde que la suite (a_n) ne converge pas vers 0. Si c'était le cas alors, il résulterait de l'égalité $a_{n+1} - a_{n-1} = 2\sin 1 \cos n$ que la suite $(\cos n)$ convergerait aussi vers 0, et donc que la suite $(\cos^2 n + \sin^2 n)$ convergerait vers 0, ce qui n'est pas possible.

On en déduit que $R \leqslant 1$. Finalement on a $R = 1$. La série converge absolument et converge si $|x| < 1$, elle ne converge pas et ne converge pas absolument si $|x| \geqslant 1$. Alors $\mathscr{A} = \mathscr{C} =]-1,\ 1[$.

b) On a $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$, et la série entière étudiée a même rayon de convergence que la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n}$, qui est de rayon de convergence 1. La série converge absolument et converge si $|x| < 1$, elle ne converge pas et ne converge pas absolument si $|x| > 1$.

Lorsque $x = 1$, il résulte de l'équivalent précédent que la série de terme général $\ln(1 + 1/n)$ diverge par comparaison à la série harmonique.

Lorsque $x = -1$, il résulte de la croissance de la fonction logarithme que la suite $(\ln(1+1/n))$ est décroissante. Par ailleurs puisqu'elle est équivalente à $(1/n)$, la suite $(\ln(1 + 1/n))$ converge vers 0. Alors il résulte du critère de Leibniz que la série de terme général $(-1)^n \ln(1 + 1/n)$ converge, mais elle ne converge pas absolument. Donc $\mathscr{A} =]-1,\ 1[$ et $\mathscr{C} = [-1,\ 1[$.

c) On a $|a_n| < 1$. La série entière $\sum a_n x^n$ a donc un rayon de convergence supérieur ou égal à celui de la série $\sum x^n$, donc $R \geqslant 1$. Par ailleurs, la suite $(|a_n|)$ converge vers 1, donc ne converge pas vers 0. On en déduit donc que $R \leqslant 1$. Finalement $R = 1$.

La série converge absolument et converge si $|x| < 1$, elle ne converge pas et ne converge pas absolument si $|x| \geqslant 1$. Alors $\mathscr{A} = \mathscr{C} =]-1,\ 1[$.

d) Lorsque n tend vers l'infini, on a $\sin \dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$, et donc $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \sim \dfrac{n^2}{(n+1)^2}$. Donc la suite $(|a_{n+1}|/|a_n|)$ converge vers $\ell = 1$. Il résulte du critère de d'Alembert que $R = 1/\ell = 1$. La série converge absolument et converge si $|x| < 1$, elle ne converge pas et ne converge pas absolument si $|x| > 1$.

Lorsque $|x| = 1$ et $n \geqslant 1$, on a $|a_n x^n| = \sin \dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$ et la série de terme général $a_n x^n$ converge absolument par comparaison à une série de Riemann. Alors $\mathscr{A} = \mathscr{C} = [-1,\ 1]$.

Exercice 7.2

TPE 2006

Déterminer le rayon et le domaine de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$a)\quad \sum n!z^n \qquad b)\quad \sum n!z^{n^2} \qquad c)\quad \sum z^{n!}$

a) Posons $a_n = n!$, on a $a_{n+1}/a_n = n+1$. La suite (a_{n+1}/a_n) a pour limite $+\infty$. D'après le critère de d'Alembert on a $R = 0$. Le domaine de convergence est donc $\{0\}$.

b) Posons $u_n(z) = n!z^{n^2}$. Alors $\dfrac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = (n+1)|z|^{2n+1}$.

On utilise la règle de d'Alembert pour la série numérique de terme général $u_n(z)$. La suite $(|u_{n+1}(z)|/|u_n(z)|)$ converge vers 0 si $|z| < 1$, donc la série de terme général $u_n(z)$ converge absolument dans ce cas. On en déduit que $R \geqslant 1$. La suite $(|u_{n+1}(z)|/|u_n(z)|)$ admet $+\infty$ pour limite si $|z| > 1$, donc la série ne converge pas absolument dans ce cas. On en déduit que $R \leqslant 1$. Finalement on obtient $R = 1$.

Lorsque $|z| = 1$, on a $|u_n(z)| = n!$, et la suite $(u_n(z))$ ne converge pas vers 0, donc la série de terme général $u_n(z)$ diverge. Alors le domaine de convergence est $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

c) Posons $u_n(z) = z^{n!}$. On a $\dfrac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = |z|^{(n+1)!-n!} = |z|^{nn!}$. Et l'on conclut comme dans b.

Voilà un résultat à connaître, c'est la première question de nombreux problèmes d'écrit et d'exercices d'oraux

Exercice 7.3

CCP PC 2006, Centrale MP 2006

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ est infini.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < R$, et $z \in \mathbb{C}$. La suite $(|a_n|\alpha^n)$ est bornée. Soit M un majorant de cette suite. On a alors $\dfrac{|a_n|}{n!}|z|^n \leqslant M\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{|z|}{\alpha}\right)^n$ Et comme la série de terme général $\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{|z|}{\alpha}\right)^n$ est une série convergente (série de l'exponentielle), on en déduit que la série de terme général $a_n z^n/n!$ converge absolument. La série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ a donc un rayon de convergence infini.

Exercice 7.4

1) Montrer que si la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence $R > 0$, alors la série entière $\sum a_n z^{2n}$ est de rayon de convergence $\sqrt{R}$.

2) Soient R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs des séries $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut $\min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2})$, et que, si $|z| < R$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}.$$

1) La série de terme général $a_n z^n$ converge si $|z| < R$ et diverge si $|z| > R$. Donc la série de terme général $a_n (z^2)^n$ converge si $|z|^2 < R$, c'est-à-dire si $|z| < \sqrt{R}$ et diverge si $|z|^2 > R$, c'est-à-dire si $|z| > \sqrt{R}$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$ est donc $\sqrt{R}$.

2) D'après 1), la série $\sum a_{2n} z^{2n}$ est de rayon de convergence $\sqrt{R_1}$, et la série $\sum a_{2n+1} z^{2n}$ est de rayon de convergence $\sqrt{R_2}$, donc la série $z \sum a_{2n+1} z^{2n}$ est aussi de rayon de convergence $\sqrt{R_2}$.
Alors, lorsque $R_1 \neq R_2$, la série $\sum a_n z^n$ qui est la somme des séries $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $z \sum a_{2n+1} z^{2n}$ est de rayon de convergence $\min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2})$.
Lorsque $R_1 = R_2$, on sait déjà que $R \geqslant \sqrt{R_1}$.
Soit alors $|z| > \sqrt{R_1}$. La suite $(a_{2n} z^{2n})$ ne converge pas vers 0. Alors la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas non plus vers 0, et il en résulte que $R \leqslant \sqrt{R_1}$. On a donc encore égalité dans ce cas, et pour tout $|z| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}$.

7.1.2 Fonction définie par la somme d'une série entière

Ce qu'il faut savoir

Soit une série entière de coefficients a_n et de rayon de convergence non nul R.

- La série entière $\sum a_n z^n$ de la variable complexe z converge normalement sur tout compact inclus dans le disque ouvert $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ et la fonction S définie sur D par $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une fonction continue sur D.

• La série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]-R, R[$ et l'on a

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b a_n x^n \, dx\right).$$

• On définit sur $]-R, R[$ une fonction S en posant $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

La fonction S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, en dérivant terme à terme, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-R, R[$

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n .$$

Toutes ces séries entières ont le même rayon R.

Exercice 7.5

CCP PSI 2007

Montrer que la fonction $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2^{2n}(n!)^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On peut comparer à la série de l'exponentielle, en remarquant que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \leqslant \frac{1}{n!}$. Il en résulte que la série entière définissant g a aussi un rayon de convergence infini. (On pourrait également utiliser la règle de d'Alembert).

Il en résulte que g est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque

On voit sur cet exemple l'intérêt d'utiliser les séries entières plutôt que les séries de fonctions : si l'on avait voulu démontrer, dans le chapitre précédent, que la série de fonctions de terme général $u_n(t) = \frac{(-1)^n t^n}{2^{2n}(n!)^2}$ était de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on aurait démontré que, pour tout entier p et tout nombre $A > 0$, la série des dérivées $u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[-A, A]$, alors que maintenant, le fait que la série entière ait un rayon de convergence infini suffit.

Exercice 7.6

CCP MP 2006

Montrer que $\int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$.

La série entière $\sum x^n$ est une série géométrique de rayon 1. Comme $[0,\ 1/2]$ est inclus dans $]-1,\ 1[$, on a donc

$$\ln 2 = \int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{1/2} x^n dx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} .$$

7.1.3 Développement d'une fonction en série entière

Ce qu'il faut savoir

• **Fonctions développables en série entière**

Soient f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur un intervalle I, et r un nombre réel positif tel que $]-r,\ r[\subset I$.

– On dit que f est développable en série entière sur $]-r,\ r[$ lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que, pour tout $x \in]-r,\ r[$, on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

– Dans ce cas, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,\ r[$, et les coefficients a_n sont déterminés de manière unique par la formule $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Remarque

Toute fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,\ r[$ n'est pas nécessairement développable en série entière sur $]-r,\ r[$.

– Si f est développable en série entière sur $]-r,\ r[$, alors :

(i) la fonction f' est développable en série entière sur $]-r,\ r[$, et, pour tout $x \in]-r,\ r[$, on a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}\, x^n$;

(ii) toute primitive F de f dans l'intervalle $]-r,\ r[$ admet un développement en série entière sur $]-r,\ r[$ de la forme $F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_{n-1}}{n}\, x^n$.

– Si f et g sont développables en série entière sur $]-r,\ r[$, alors $f+g$ et fg sont développables en série entière sur $]-r,\ r[$.

• **Développement en série entière des fonctions usuelles**

(i) Les fonctions suivantes sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{xz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xz)^n}{n!} \quad \text{où } z \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

(ii) Les fonctions suivantes sont développables en série entière sur $]-1,\,1[$ et l'on a, pour tout $x \in]-1,\,1[$,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad ; \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\,.$$

(iii) Série du binôme.
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. On a, pour tout $x \in]-1,\,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n\,.$$

(iv) On pourra retenir aussi que, pour tout $x \in]-1,\,1[$, on a

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad ; \quad \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{argth} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

• **Quelques méthodes pour développer une fonction f en série entière**

(i) On exprime la fonction f à l'aide de fonctions dont le développement en série entière est connu, par des opérations de somme, produit de Cauchy, dérivation ou primitivation, en utilisant éventuellement un changement de variable.
Lorsque la fonction f contient un sinus, cosinus, sinus hyperbolique ou cosinus hyperbolique, on pourra exprimer ces fonctions sous forme exponentielle.
(ii) On montre que f est solution d'une équation différentielle linéaire, puis on cherche la solution de cette équation développable en série entière et vérifiant les mêmes conditions initiales que f.

Exercice 7.7

Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{2-x}$ et préciser le rayon de convergence.

Pour $x < 2$, on a $f(x) = \sqrt{2}\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^{1/2}$. On se ramène donc à la série du binôme et on obtient une série entière de rayon de convergence 2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \frac{1}{2^n}(-1)^n x^n\right) \\ &= \sqrt{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{2n} n!}\, x^n\right). \end{aligned}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par le produit $2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n-1)(2n) = 2^n n!(2n-1)$, on peut encore écrire

$$f(x) = \sqrt{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{3n}(n!)^2}\, x^n\right) .$$

Exercice 7.8

Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \cos(x+1)$ et préciser le rayon de convergence.

On écrit $f(x) = \cos x \cos 1 - \sin x \sin 1$, d'où l'on déduit, pour tout x réel, puisque les séries sont de rayon de convergence infini,

$$f(x) = \cos 1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sin 1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

On a donc

$$\cos(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ , avec } a_{2n} = (-1)^n \frac{\cos 1}{(2n)!} \text{ et } a_{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{\sin 1}{(2n+1)!} .$$

Exercice 7.9

CCP MP 2006

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{-x^2+x+2}$.

1)Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, on a $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{2-x}\right)$.

2)Développer la fonction f en série entière et préciser le rayon de convergence.

3)Quel est le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0 ?

1) On vérifie facilement en réduisant au même dénominateur ou en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples que

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x/2}\right) .$$

2) Il apparaît la somme de deux séries géométriques, la première de rayon de convergence 1 et la seconde de rayon de convergence 2. Il en résulte que la somme aura 1 comme rayon de convergence. Alors, pour $|x| < 1$,

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n .$$

3) La partie régulière du développement limité à l'ordre 3 de la fonction f n'est autre que la somme partielle d'ordre 3 de la série, donc

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{3}\left((-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n + o(x^3) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3)\,.$$

Exercice 7.10

CCP et Mines-Ponts MP 2005

1) Développer la fonction $f\,:\,x \mapsto e^x \sin x$ en série entière et préciser le rayon de convergence .
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la relation

$$\frac{(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}}{n!} = \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!}.$$

1) Exprimons $\sin x$ sous la forme $(e^{ix}+e^{-ix})/(2i)$. On a alors pour tout x réel

$$f(x) = \frac{1}{2i}(e^{(i+1)x} - e^{(-i+1)x}) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-i)^n x^n}{n!}\right).$$

On obtient alors $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{2i}\,\frac{x^n}{n!}$.

Et, puisque $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, on a $\dfrac{(1+i)^n-(1-i)^n}{2i} = \sqrt{2}^n\sin(n\pi/4)$, et finalement $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{2}^n\sin(n\pi/4)\,\frac{x^n}{n!}$. La série entière est donc de rayon infini.

2) Appliquons la formule du produit de Cauchy à $e^x\sin x$. Si l'on note a_n les coefficients de la série entière de $\sin x$, le coefficient b_n de x^n dans le produit est alors $b_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} a_p\frac{1}{(n-p)!}$. Mais a_p est nul si p est pair et $a_{2k+1} = (-1)^k/(2k+1)!$.

On obtient donc $b_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!}$. Mais on a obtenu dans 1) $b_n = \dfrac{2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}$, ce qui donne l'égalité désirée.

Exercice 7.11

En effectuant un produit de Cauchy, développer en série entière la fonction $f\,:\,x \mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{1+x}$ et préciser le rayon de convergence.

On effectue le produit de Cauchy des séries de rayon 1 :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \text{ et } \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

On obtient donc une série de rayon $R \geqslant 1$, et, pour $|x| < 1$, on a

$$\frac{\ln(x+1)}{1+x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(-1)^{n-k}\right)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n.$$

Puisque la série de terme général $1/n$ diverge, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$ admet $+\infty$ pour limite, et la série entière obtenue diverge donc si $x = 1$. Il en résulte que $R \leqslant 1$. Cela résulte également du fait que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$. Finalement $R = 1$.

Exercice 7.12

CCP PC 2006

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
2) Etablir que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.
3) Déterminer le développement en série entière de la fonction f.

1) La série entière de l'exponentielle étant de rayon infini, les fonctions $x \mapsto e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{x^2}$ sont développables en série entière de rayon infini. Alors la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ l'est aussi comme primitive d'une fonction développable en série entière de rayon infini. Enfin f l'est également comme produit de deux fonctions développables en série entière de rayon infini.

2) La fonction f est dérivable et, pour tout x réel, on a $f'(x) = 1 - 2xf(x)$, avec de plus $f(0) = 0$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$.

On obtient $f'(x) + 2xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{n+1}$. En faisant le changement d'indice de sommation $n \mapsto n-1$ dans la deuxième somme, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) + 2xf(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1}x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}((n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1})x^n. \end{aligned}$$

Comme la somme de cette série entière est égale à 1, l'égalité précédente implique l'égalité des coefficients des deux séries entières. On a donc $a_1 = 1$, et, pour tout $n \geqslant 1$, on trouve $(n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} = 0$, avec de plus la condition initiale $a_0 = f(0) = 0$.
Il résulte immédiatement par récurrence que les termes de rang pair sont nuls (ce qui était prévisible puisque la fonction f est impaire). Pour les termes de rang impair, on a la relation $a_{2p+1} = \dfrac{-2}{2p+1} a_{2p-1}$, d'où l'on déduit, également par récurrence, que $a_{2p+1} = \dfrac{(-2)^p}{(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 1}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-2)^p x^{2p+1}}{(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 1} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{2^{2p}\,p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$.

On intervertit l'ordre de deux sommations lorsque la fonction étudiée est définie comme une intégrale

Exercice 7.13

Mines - Ponts PC 2007

Soit $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + x\sin 2t}\,dt$. Donner le développement en série entière de φ sur $]-1, 1[$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$. On a $\sqrt{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!} x^n$.
Pour tout $t \in [0, \pi/2]$ et $x \in]-1, 1[$, on a donc $|a_n x^n \sin^n 2t| \leqslant |a_n||x^n|$ et la série de fonctions $t \mapsto a_n x^n \sin^n 2t$ converge normalement sur $[0, \pi/2]$. On peut donc intervertir les signes $\displaystyle\int$ et $\displaystyle\sum$. On obtient

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + x\sin 2t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \int_0^{\pi/2} \sin^n 2t\,dt.$$

Pour $n \geqslant 0$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n 2t\,dt$. En effectuant le changement de variable $u = 2t$, on trouve $I_n = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^n u\,du$, et par symétrie $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n u\,du$.
L'intégrale I_n est une intégrale de Wallis. Le développement de φ en série entière dans $]-1, 1[$ est donc $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_n x^n$.

Remarque
L'intégrale I_n se calcule (Voir chapitre 3) grâce à la relation de récurrence $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, et on obtient deux expressions différentes suivant la parité de n.

7.1.4 Calcul de la somme d'une série entière

Ce qu'il faut savoir

C'est le problème inverse de celui du développement en série entière. On exprime la série S à l'aide des séries entières des fonctions usuelles, par des opérations de somme, produit de Cauchy, dérivation ou primitivation, en utilisant éventuellement un changement de variable.

Exercice 7.14

CCP PC 2006

Trouver le rayon de convergence R, puis calculer pour tout $x \in]-R, R[$, la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

En appliquant le critère de d'Alembert à la série numérique de terme général $u_n(x) = \frac{x^n}{(2n)!}$, on trouve que $R = +\infty$.

Lorsque $x \geqslant 0$, $\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}\sqrt{x}$.

Lorsque $x \leqslant 0$, $\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos\sqrt{-x}$.

Exercice 7.15

CCP MP 2005

Soit α un nombre réel. Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout $x \in]-R, R[$, la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\alpha)x^n$.

Comme $|\cos(n\alpha)| \leqslant 1$, le rayon de convergence R est plus grand que celui de la série géométrique $\sum x^n$. Donc $R \geqslant 1$. Par ailleurs la suite $(\cos(n\alpha))$ ne converge pas vers 0, sinon la suite extraite des termes de rang pair $(\cos(2n\alpha)) = (2\cos^2(n\alpha) - 1)$ convergerait vers -1. Donc $R \leqslant 1$. Il en résulte que $R = 1$, et que la série entière ne converge ni en 1, ni en -1.

Comme les séries $\sum e^{in\alpha}x^n$ et $\sum e^{-in\alpha}x^n$ sont des séries géométriques de rayon 1, on a lorsque $|x| < 1$,

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\alpha}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\alpha}x^n\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{i\alpha}x)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-i\alpha}x)^n\right),$$

donc $S(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-e^{i\alpha}x} + \dfrac{1}{1-e^{-i\alpha}x}\right) = \dfrac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha + x^2}$.

Exercice 7.16

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout $x \in]-R, R[$, la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sh} n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

En écrivant $\operatorname{sh} n = \dfrac{e^n - e^{-n}}{2}$, on a $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{2}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
Les séries entières obtenues sont de rayon infini. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^n x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-n}x^{2n}}{(2n)!}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(x\sqrt{e}) - \operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{e}}\right).$$

Exercice 7.17

CCP PSI 2005, Ecole de l'air MP 2005

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout $x \in]-R, R[$, la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$.

La somme $S(x)$ n'est autre que le produit de Cauchy de deux séries de rayon 1. Pour tout $x \in]-1, 1[$ on a $S(x) = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right) = \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$. En particulier, on a $R \geqslant 1$. On remarque que $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$, ce qui ne serait pas possible si on avait $R > 1$, car la série entière est continue sur $]-R, R[$. Il en résulte alors que $R = 1$.

Exercice 7.18

Mines - Ponts PC 2006 et MP 2007

Déterminer le rayon de convergence R, puis calculer pour tout $x \in]-R,\ R[$, la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

Indication de la rédaction : montrer que, pour tout x réel, $S''(x)+S'(x)+S(x) = e^x$.

Pour tout x réel, en appliquant le critère de d'Alembert à la série numérique de terme général $u_n(x) = x^{3n}/(3n)!$, on obtient $\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \dfrac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$, et la suite $(|u_{n+1}(x)/u_n(x)|)$ converge vers 0. La série de terme général $u_n(x)$ est donc absolument convergente et la série entière $\sum u_n(x)$ a un rayon de convergence infini. Il en résulte que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On a $S(x) = 1 + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^9}{9!} + \cdots$ et on obtient

$$S'(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \text{ puis } S''(x) = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots .$$

Dans ces trois séries apparaissent tous les termes de la série de $x \mapsto e^x$. On a alors pour tout x réel, $S''(x) + S'(x) + S(x) = e^x$.
Donc S est solution de l'équation différentielle linéaire $(E)\ :\ y'' + y' + y = e^x$, avec de plus $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.
Le polynôme caractéristique de (E) vaut $X^2 + X + 1$ et a pour racines complexes $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$. Les solutions réelles de l'équation homogène sont donc de la forme $x \mapsto e^{-x/2}\left(A\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2} + B\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)$, où A et B sont deux nombres réels, et une solution particulière de (E) est $x \mapsto e^x/3$.

Donc
$$S(x) = e^{-x/2}\left(A\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + B\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{e^x}{3}.$$

On a $S(0) = 1 = A + 1/3$, donc $A = 2/3$, et en dérivant

$$\begin{aligned} S'(x) &= e^{-x/2}\left[-\frac{1}{2}\left(A\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + B\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \right. \\ &\qquad \left. \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-A\sin\frac{x\sqrt{3}}{2} + B\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right] + \frac{e^x}{3}. \end{aligned}$$

On en tire $S'(0) = 0 = -A/2 + \sqrt{3}B/2 + 1/3$, d'où $B = 0$. Finalement $S(x) = \dfrac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-x/2}\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)$.

• *Pour les séries entières dont le coefficient a_n est de la forme $P(n)$ ou $P(n)/n!$, où P est un polynôme, on pourra décomposer P dans la base $(L_k)_{k\geqslant 0}$ définie par $L_0(X) = 1$, et pour $k \geqslant 1$, $L_k(X) = X(X-1)\cdots(X-(k-1))$. On fera ensuite apparaître les dérivées de la série géométrique dans le premier cas et la série de l'exponentielle dans le second.*

Exercice 7.19

1) Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout $x \in]-R, R[$, la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+n+1)x^n$.

2) Mêmes questions lorsque $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+n+1}{n!}x^n$.

1) En appliquant le critère de d'Alembert, on obtient $R = 1$.
On décompose le polynôme $P(X)$ dans la base (L_0, L_1, L_2). Il existe des nombres α, β, γ tels que $X^2+X+1 = \alpha+\beta X+\gamma X(X-1)$. En donnant à X les valeurs 0 et 1 successivement on obtient $\alpha = 1$, puis $\beta = 2$. Quant à γ c'est le coefficient du terme dominant de P, donc $\gamma = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, $n^2+n+1 = n(n-1)+2n+1$.
Puisque toutes les séries utilisées dans le calcul suivant ont un rayon de convergence égal à 1, on a, lorsque $|x| < 1$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty}x^n$,

ou encore $S(x) = x^2\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2} + 2x\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}x^n$.

Si l'on pose $T(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$, on a alors $T'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$,

et $T''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$, d'où

$S(x) = \dfrac{2x^2}{(1-x)^3} + \dfrac{2x}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{1-x}$, et finalement $S(x) = \dfrac{1+x^2}{(1-x)^3}$.

2) On a cette fois $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$.

Donc, en simplifiant, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-2)!} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Et finalement $S(x) = x^2\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + 2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = (x+1)^2e^x$.

Toutes les séries apparaissant dans le calcul précédent sont de rayon infini. La somme est donc valable pour tout x réel.

• *Pour les séries entières dont le coefficient a_n est une fraction rationnelle, on pourra utiliser la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.*

Exercice 7.20

CCP PC 2006

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout $x \in]-R,\ R[$, la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra utiliser l'égalité $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{4}{2n+1}$.

Il résulte de la règle de d'Alembert que la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^{n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$ est de rayon 1, et donc, en remplaçant x par x^2, que la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$ est aussi de rayon 1.

Puisque toutes les séries entières utilisées dans le calcul suivant ont un rayon de convergence égal à 1, on a, lorsque $x \in]-1,\ 1[$,

$$\begin{aligned}
S(x) &= x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^{n+1}}{n+1} - 4x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} - 4x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= -x^2 \ln(1-x^2) + (-\ln(1-x^2) - x^2) - \left(2x \ln \frac{1+x}{1-x} - 4x^2\right) \\
&= 3x^2 - (x^2+1)\ln(1-x^2) - 2x \ln \frac{1+x}{1-x}\,.
\end{aligned}$$

Ce que l'on peut encore écrire $S(x) = 3x^2 - (1-x)^2 \ln(1-x) - (1+x)^2 \ln(1+x)$.

• *Pour les séries entières dont le coefficient a_n est défini par une intégrale, on peut être amené à permuter les signes $\sum$ et $\int$.*

Exercice 7.21

CCP PSI 2007

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\, dt$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ et calculer sa somme.

Indication de la rédaction : pour $t \in [0, 1]$ et $|x| < 1$, on pourra utiliser l'égalité $\dfrac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{1+tx}{1+t^2} + \dfrac{x^2}{1-tx}\right)$.

Lorsque $t \in [0, 1]$ et $|x| < 1$, on a $\dfrac{t^n|x|^n}{1+t^2} \leqslant |x|^n$. La série de fonctions $t \mapsto \dfrac{t^n|x|^n}{1+t^2}$ converge donc normalement sur $[0, 1]$, et l'on peut intervertir les signes $\int$ et $\sum$.

On obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(tx)^n\, dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1-tx)}$.

La relation $\dfrac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{1+tx}{1+t^2} + \dfrac{x^2}{1-tx}\right)$ permet de calculer l'intégrale, et on obtient, pour $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \frac{1}{1+x^2}\left[\operatorname{Arctan} t + \frac{x}{2}\ln(t^2+1) - x\ln(1-tx)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}x - x\ln(1-x)\right).\end{aligned}$$

On a montré en particulier que le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$ est plus grand que 1. Mais on constate que $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$, ce qui ne serait pas possible si on avait $R > 1$, car la série entière est continue sur $]-R, R[$. Il en résulte alors que $R = 1$.

Exercice 7.22

On désire étudier la série entière de coefficients $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2+t^2)^{n+1}}\, dt$.

1) Si R est le rayon de convergence de la série, montrer qu'alors $R \geqslant 2$.
2) Lorsque $|x| < 2$, calculer la somme partielle $S_n(x)$ et montrer que la suite $(S_n(x))$ converge.
3) En déduire la somme de la série et que $R = 2$.

1) On a tout d'abord $0 \leqslant a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2+t^2)^{n+1}}\, dt \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$, et puisque la série géométrique de terme général $x^n/2^{n+1}$ a pour rayon de convergence 2, on en déduit que $R \geqslant 2$.

2) Pour $|x| < 2$, calculons la somme partielle $S_n(x)$ de la série entière. Tout d'abord en sommant la série géométrique, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2+t^2)^{k+1}} = \frac{1}{2+t^2}\,\frac{1-\left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{2+t^2}} = \frac{1}{2-x+t^2}\left(1-\left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1}\right).$$

En intégrant, on obtient donc

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2} - \int_0^1 \left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1} \frac{dt}{2-x+t^2}.$$

Mais $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{|x|}{2+t^2}\right)^{n+1} \frac{dt}{2-x+t^2} \leqslant \left(\frac{|x|}{2}\right)^{n+1} \int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2}$. Et puisque $|x| < 2$, le membre de droite converge vers 0. Il résulte du théorème d'encadrement que la suite $\displaystyle\left(\int_0^1 \left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1} \frac{dt}{2-x+t^2}\right)$ converge vers 0, et donc que la suite $(S_n(x))$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2} = \frac{1}{2-x}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2-x}}\right)^2}$.

3) Cette intégrale se calcule et on obtient finalement

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \left[\frac{1}{\sqrt{2-x}} \operatorname{Arctan} \frac{t}{\sqrt{2-x}}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2-x}} \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{2-x}}.$$

On remarque que $\lim\limits_{x\to 2^-} S(x) = +\infty$, ce qui ne serait pas possible si on avait $R > 2$, car la série entière est continue sur $]-R,\ R[$. Il en résulte alors que $R = 2$.

7.1.5 Quelques applications des séries entières

Ce qu'il faut savoir

Les séries entières ont beaucoup d'applications ; nous en donnons ici trois exemples : prolongement d'une fonction en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, détermination du terme général d'une suite numérique définie par une relation de récurrence et calcul de sommes de séries numériques convergentes.

Elles servent aussi à résoudre des équations différentielles comme on l'a déjà vu et on le verra de nouveau dans le chapitre « Équations différentielles ».

- ***Prolongement d'une fonction en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$***

Exercice 7.23

CCP PC 2005

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1/2$ et pour $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout x réel $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

On en déduit que, pour $x \neq 0$, on a $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n)!}$, ce qui reste vrai pour $x = 0$. La fonction f est donc développable en série entière de rayon infini et il en résulte qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

• *Détermination des termes d'une suite*

A toute suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres complexes on peut associer une série entière, par exemple $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{n!}$, qui, lorsque le rayon de convergence n'est pas nul, détermine une fonction appelée **fonction génératrice** de la suite.

On peut ainsi déterminer certaines suites vérifiant une relation de récurrence. En général la relation de récurrence permet de faire apparaître une équation différentielle ou une équation fonctionnelle vérifiée par f et on résoudra cette équation. Cette méthode sert par exemple pour déterminer le cardinal de certains ensembles. (Voir ex. 7.34)

Exercice 7.24

Mines - Ponts MP 2006 et PC 2007

On pose $a_0 = 1$, puis, si $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_{n-k}a_k$. On veut calculer les a_n en utilisant la fonction génératrice f définie ci-dessus.

1) En utilisant le produit de Cauchy, montrer que, si f a un rayon de convergence non nul, alors $f' = f^2$.

2) Résoudre l'équation différentielle précédente et en déduire a_n.

3) Vérifier que la suite ainsi obtenue convient bien.

1) En effectuant le produit de Cauchy de la série entière de somme $f(x)$ par elle-même, on obtient, pour $|x| < R$,

$$f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n-k}}{(n-k)!}\,\frac{a_k}{k!}\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_{n-k}a_k\right)\frac{x^n}{n!}\,.$$

Donc, en utilisant la relation de récurrence donnée dans l'énoncé, on obtient $f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\dfrac{x^n}{n!}$. Mais on a aussi $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, et l'on en déduit donc que $f'(x) = f(x)^2$, avec de plus $f(0) = 1$.

2) Sur un intervalle où f ne s'annule pas, on a $f'(x)/f(x)^2 = 1$, d'où en intégrant $-1/f(x) = x - a$, et donc $f(x) = 1/(a - x)$. Alors, puisque $f(0) = 1$, on obtient $f(x) = 1/(1 - x)$. On vérifie bien que $x \mapsto 1/(1 - x)$ est solution de l'équation différentielle dans $]-\infty, -1[$. Donc $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n!\,\frac{x^n}{n!}$, et $a_n = n!$.

3) Il existe une suite unique vérifiant les conditions de l'énoncé. On vérifie alors par récurrence que la solution obtenue dans 2) convient. On a bien $a_0 = 0! = 1$, et si l'on suppose que pour tout k compris entre 0 et n, on a $a_k = k!$, alors

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(n-k)!k! = \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)n! = (n+1)!\,,$$

ce qui donne la formule au rang $n + 1$. Elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

• *Calcul de sommes de séries numériques*

Une méthode pour calculer la somme $A = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ d'une série numérique convergente, consiste à introduire une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ pour laquelle il existe $x_0 \in]0, R]$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait $b_n = a_n x_0^n$.

On calcule alors pour tout $x \in]0, R[$, la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^n$.

Deux cas sont possibles :
(i) lorsque $R > x_0$, on a $A = S(x_0)$ (voir 7.25) ;
(ii) lorsque $R = x_0$, la démarche à suivre est différente suivant que vous êtes en filière PC ou en filière PSI.

Filière PC : on utilise le théorème d'Abel, qui affirme que, sous les hypothèses précédentes, $A = \displaystyle\lim_{x\to R^-} S(x)$.

Filière PSI : pour $n \geqslant 0$, notons u_n la fonction définie sur $[0, R]$ par $u_n(x) = a_n x^n$.
On montre que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément sur $[0, R]$
– ou bien en montrant que cette série converge normalement (cet argument est ausi utilisable en PC),
– ou bien, lorsque la série $\sum u_n$ est alternée, en montrant que la suite (u_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, R]$, et en appliquant le critère de Leibniz.
Dans les deux cas, S est continue sur $[0, R]$ et $A = \displaystyle\lim_{x\to R^-} S(x)$ (voir 7.26 et 7.30).

Exercice 7.25

Montrer l'existence et calculer $A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)2^{-n}$.

Introduisons la série entière $\sum (n+1)x^n$. Son rayon de convergence vaut 1. En posant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$, on a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Donc $A = f'(1/2) = 4$.

Exercice 7.26

Montrer l'existence et calculer $A_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $A_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

Les deux séries sont des séries alternées qui convergent d'après le critère de Leibniz. Introduisons les séries entières $\sum (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ et $\sum (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
Ces séries sont de rayon de convergence 1 et l'on a, pour $x \in]-1, 1[$,

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x) \text{ et } f_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{Arctan} x\,.$$

PC On applique le théorème d'Abel et l'on obtient $A_1 = \lim_{x\to 1^-} f_1(x) = \ln 2$ et $A_2 = \lim_{x\to 1^-} f_2(x) = \operatorname{Arctan} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

PSI Pour $x \in [0, 1]$ et $n \geqslant 1$, posons $u_n(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$. La suite $(|u_n(x)|)$ est décroissante et converge vers 0. La série de terme général $u_n(x)$ est alternée, et d'après le critère de Leibniz, on a, pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0, 1]$, l'inégalité $\left| S(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)|$. Mais $|u_{n+1}(x)| \leqslant 1/n$, et la suite $(1/n)$ converge vers 0. Il en résulte que la série de terme général u_n converge uniformément sur l'intervalle $[0, 1]$.

On peut alors conclure : comme les fonctions u_n sont continues sur $[0, 1]$, la somme f_1 l'est aussi, et en particulier elle est continue en 1, donc $A_1 = \lim_{x\to 1^-} f_1(x) = \ln 2$.

Par le même argument, on obtient $A_2 = \lim_{x\to 1^-} f_2(x) = \operatorname{Arctan} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Remarque

Les deux sommes $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$ sont utilisées dans de nombreux exercices.

7.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 7.27

Centrale PSI 2006

Déterminer en fonction de a les rayons de convergence des séries entières $\sum a^n z^{n!}$ et $\sum a^{n!} z^n$.

Lorsque $a = 0$, les séries sont nulles et donc de rayon infini.
Lorsque $a \neq 0$, en appliquant la règle de d'Alembert à la série de terme général $u_n(z) = a^n z^{n!}$, on obtient $\dfrac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = |a||z|^{(n+1)!-n!} = |a| \cdot |z|^{n \cdot n!}$.
La suite $(|u_{n+1}(z)|/|u_n(z)|)$ converge vers 0 lorsque $|z| < 1$ et la série de terme général $u_n(z)$ converge absolument.
La suite $(|u_{n+1}(z)|/|u_n(z)|)$ admet $+\infty$ pour limite lorsque $|z| > 1$ et la série de terme général $u_n(z)$ ne converge pas absolument. Il en résulte que la série entière est de rayon de convergence 1. Le résultat ne dépend pas de $a \neq 0$.
De même en appliquant la règle de d'Alembert à la série de terme général $v_n(z) = a^{n!} z^n$, on obtient $\dfrac{|v_{n+1}(z)|}{|v_n(z)|} = |z||a|^{n \cdot n!}$.
Lorsque $|a| > 1$, la suite $(|v_{n+1}(z)|/|v_n(z)|)$ admet $+\infty$ pour limite quel que soit z non nul. La série de terme général $v_n(z)$ est toujours divergente et le rayon de convergence de la série entière est donc nul.
Lorsque $|a| < 1$, la suite $(|v_{n+1}(z)|/|v_n(z)|)$ converge vers 0, et la série de terme général $v_n(z)$ est toujours convergente. Le rayon de convergence de la série entière est donc infini.
Lorsque $|a| = 1$, on retrouve la série géométrique de rayon 1.

Exercice 7.28

Mines - Ponts PC 2005

On veut développer en série entière la fonction

$$x \mapsto f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} \text{ où } \alpha \in]0, \pi[.$$

1) Justifier et établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x - e^{i\alpha}} + \frac{1}{x - e^{-i\alpha}}\right).$$

2) Développer f' en série entière et préciser le rayon de convergence.

3) En déduire le développement de f en série entière.

1) En remarquant que, pour tout x réel, on a $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = (x - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha$ et puisque $\sin\alpha \neq 0$, on en déduit que $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 > 0$. Alors la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable comme composée de fonctions dérivables. On obtient $f'(x) = \dfrac{x - \cos\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ et l'on vérifie, en réduisant au même dénominateur, que $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x - e^{i\alpha}} + \dfrac{1}{x - e^{-i\alpha}}\right) = f'(x)$.

2) Pour tout x réel, on a donc $f'(x) = \operatorname{Re}\dfrac{1}{x - e^{-i\alpha}} = -\operatorname{Re}\dfrac{e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}x}$.
Si $x \in]-1, 1[$, on a $|e^{i\alpha}x| < 1$, et donc on peut utiliser la série géométrique pour obtenir $\dfrac{e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}x} = e^{i\alpha}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\alpha}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(n+1)\alpha}x^n$.
En prenant la partie réelle de cette expression, on en déduit que

$$f'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty}(\cos(n+1)\alpha)x^n\,,$$

et la série entière $\sum(\cos(n+1)\alpha)x^n$ est de rayon au moins 1. Mais en utilisant la relation $\cos 2(n+1)\alpha = 2\cos^2(n+1)\alpha - 1$, on en déduit que la suite $(\cos(n+1)\alpha)$ ne peut pas converger vers 0. Donc la série entière $\sum(\cos(n+1)\alpha)x^n$ est de rayon 1.
Alors, en prenant la primitive qui vaut 0 en 0, on en déduit que si $x \in]-1, 1[$
$f(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}x^n$, et la série entière obtenue est encore de rayon 1.

Exercice 7.29

CCP PC 2007

1) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum \frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}x^{2n+1}$ a pour rayon de convergence $\sqrt{2}$.

   Pour tout $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}x^{2n+1}$.

2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$(x^2 - 2)y' + xy + 2 = 0\,. \qquad (E)$$

3) Déduire de ce qui précède une expression explicite de f.

4) La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}x^{2n+1}$ converge-t-elle lorsque $x = \sqrt{2}$?

1) Si $n \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}^*$, posons $a_n = \dfrac{n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$. On a $\dfrac{|a_{n+1}x^{2n+3}|}{|a_n x^{2n+1}|} = \dfrac{n+1}{2n+3}|x|^2$, et la suite ainsi définie converge vers $|x|^2/2$. Il résulte de la règle de d'Alembert pour les séries numériques que la série de terme général $a_n x^{2n+1}$ converge absolument si $|x|^2/2 < 1$, c'est-à-dire si $|x| < \sqrt{2}$, et ne converge pas absolument si $|x|^2/2 > 1$, c'est-à-dire si $|x| > \sqrt{2}$. La série entière $\sum a_n x^{2n+1}$ est donc de rayon de convergence $\sqrt{2}$.

2) Pour tout $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, on obtient $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n}$ donc, si l'on pose $F(x) = (x^2-2)f'(x) + xf(x)$, on obtient

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n+2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)a_n x^{2n+2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_{n-1}x^{2n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 2(na_{n-1} - (2n+1)a_n)x^n - 2\,.
\end{aligned}$$

Et puisque $na_{n-1} - (2n+1)a_n$ est nul pour tout entier n, il en résulte que $(x^2-2)f'(x) + xf(x) = -2$. Donc f est bien solution de l'équation (E).

3) Si $|x| < \sqrt{2}$, l'équation homogène $(x^2-2)y' + xy = 0$ s'écrit $y' = \dfrac{x}{2-x^2}\,y$, ce qui donne $y = \dfrac{C}{\sqrt{2-x^2}}$. En utilisant la méthode de variation de la constante, on obtient $\dfrac{x^2-2}{\sqrt{2-x^2}}C' = -2$, donc $C' = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-(x/\sqrt{2})^2}}$, et finalement $C = 2\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{\sqrt{2}} + A$, où A est une constante.

Alors, compte-tenu du fait que $f(0) = 0$, on obtient $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

4) En multipliant le numérateur et le dénominateur de a_n par $2\cdot 4\cdots(2n)$, on peut écrire $a_n = \dfrac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}$. Alors, en utilisant la formule de Stirling, $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2n\pi}$, on obtient $a_n\sqrt{2}^{\,2n+1} = \sqrt{2}\,\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!} \sim \dfrac{\sqrt{2}}{2n}\,\dfrac{2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}2n\pi}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}2\sqrt{n\pi}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\,\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

et la série diverge par comparaison à une série de Riemann.

Exercice 7.30

CCP PC 2006

Soit f la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f, noté E_f, et montrer que f est continue sur E_f.

2) Expliciter $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles pour $x \in E_f$.

3) Soit $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^n$. Déterminer l'ensemble de définition de g, et, pour x convenable, la valeur de $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

4) La fonction g est-elle développable en série entière en 0 ? Si c'est le cas, expliciter les coefficients et le rayon de convergence de cette série entière.

1) Pour $n \geqslant 2$, notons a_n le coefficient d'ordre n de la série, et $u_n \ : x \mapsto a_n x^n$. En appliquant la règle de d'Alembert, la série $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence 1. Pour $n \geqslant 2$ et $|x| < 1$, on a $|a_n x^n| \leqslant 1/(n(n-1))$. Comme la série de terme général $1/(n(n-1))$ converge, il en résulte que la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge normalement sur $[-1,\ 1]$. Alors $E_f = [-1,\ 1]$ et f est définie et continue sur E_f.

2) Sur $]-1,\ 1[$, la fonction f est dérivable et l'on a

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)\,.$$

Par ailleurs $f(0) = 0$.

Donc f est la primitive, nulle en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$. En faisant une intégration par parties, pour tout $x \in]-1,\ 1[$, on obtient $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$. Et ce résultat subsiste par continuité en 1 et en -1 : on aura $f(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2\ln 2 - 1$ et $f(-1) = \displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$.

3) La fonction g est définie si et seulement si $-1 \leqslant \dfrac{x}{1-x} \leqslant 1$.

Or $1 + \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$ est positif si et seulement si $x < 1$, et avec cette condition $1 - \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1-2x}{1-x}$ est positif si et seulement si $x \leqslant 1/2$. Le domaine de définition de g est donc $E_g =]-\infty,\ 1/2]$. Pour tout x de E_g, on a alors,

$$g(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} = \frac{-\ln(1-x) - x}{1-x}\,.$$

4) Les fonctions $x \mapsto 1/(1-x)$ et $x \mapsto \ln(1-x)$ sont développables en série entière de rayon 1. Il en résulte alors que le produit de Cauchy est développable en série entière de rayon au moins 1, donc g est développable en série entière. Le rayon de la série entière vaut au moins 1.
On peut expliciter les coefficients de cette série en effectuant le produit de Cauchy. Pour $|x| < 1$, on a $-\ln(1-x) - x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Alors

$$\frac{-\ln(1-x)-x}{1-x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n .$$

Comme la suite $\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \right)_{n \geqslant 2}$ ne converge pas vers 0, on en déduit que le rayon de la série entière obtenue est exactement égal à 1.

On remarquera que l'égalité $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n$ n'a lieu que si $x \in]-1,\ 1/2]$.

Exercice 7.31

CCP PC 2006

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $a_0 = a_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k} .$$

1) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $a_k \leqslant k!$ et en déduire que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{a_k}{k!} x^k$ est supérieur ou égal à 1.

2) Pour $x \in]-R,\ R[$, on pose $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$.

2.a Montrer que pour tout $x \in]-R,\ R[$, on a $S^2(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{k+1}}{k!} x^k$.

2.b Montrer que pour tout $x \in]-R,\ R[$, on a $S'(x) = \frac{1}{2}(1 + S^2(x))$ et en déduire $S(x)$.

3) Déterminer un majorant de R.

On remarque par récurrence sur n que $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1) On montre l'inégalité par récurrence. On a $a_0 = 0! = 1$ et $a_1 = 1! = 1$. Si l'on suppose que pour tout k compris entre 0 et n, on a $a_k \leqslant k!$, alors

$$a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k)!k! \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} n! = \frac{(n+1)n!}{2} \leqslant (n+1)! ,$$

ce qui donne l'inégalité au rang $n+1$. Elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a alors $|a_k|/k! \leqslant 1$, et la série entière $\sum a_k x^k/k!$ a un rayon de convergence supérieur à celui de la série géométrique $\sum x^k$. Donc $R \geqslant 1$.

2.a Si $|x| < R$, on a, en utilisant le produit de Cauchy

$$S(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\,\frac{a_{n-k}}{(n-k)!}\,x^n = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k a_{n-k}\frac{x^n}{n!}\,.$$

En utilisant la relation de récurrence, on obtient donc $S(x)^2 = 1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1}\frac{x^n}{n!}$.

2.b Si $|x| < R$, on obtient en dérivant $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1}\frac{x^n}{n!}$.

On en déduit que la fonction S vérifie sur $]-R, R[$ l'équation différentielle $S'(x) = \dfrac{1}{2}(S(x)^2+1)$. Cette équation peut s'écrire $S'(x)/(S(x)^2+1) = 1/2$, et en intégrant, on obtient, $\operatorname{Arctan} S(x) = x/2 + C$, où C est une constante. Donc $S(x) = \tan\left(\dfrac{x}{2} + C\right)$. Comme $S(0) = 1 = \tan C$, on a $C = \pi/4 + k\pi$ avec k entier, ce qui donne $S(x) = \tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$. (On vérifie facilement que cette solution convient).

3) Si on avait $R > \pi/2$, alors la fonction S serait continue en $\pi/2$. Mais la fonction $x \mapsto \tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ n'a pas de limite finie en $\pi/2$, d'où une contradiction. Donc $R \leqslant \pi/2$.

Exercice 7.32

CCP PC 2006

Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut $+\infty$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1) Montrer que $\forall r \in]0, +\infty[\,,\ \forall p \in \mathbb{N}\,,\ \displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt = 2\pi r^p a_p$.

2) On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Etablir l'existence d'un réel positif M vérifiant : $\forall r \in]0, +\infty[\,,\ \forall p \in \mathbb{N}\,,\ |a_p| \leqslant \dfrac{M}{r^p}$.
Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*\,,\ a_p = 0$. En déduire que f est constante.

3) On suppose qu'il existe un entier q non nul et deux réels strictement positifs α et β tels que : $\forall z \in \mathbb{C}\,,\ |f(z)| \leqslant \alpha|z|^q + \beta$. Montrer que f est un polynôme.

4) On suppose que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant e^{\mathrm{Re}(z)}$. Montrer qu'il existe un nombre complexe K tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = Ke^z$. Pour ce faire, on pourra utiliser la deuxième question.

1) Pour $t \in [0, 2\pi]$, n et $p \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = a_n r^n e^{i(n-p)t}$.

Alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

Mais $|f_n(t)| = |a_n|r^n$, et pour tout z dans $\mathbb{C}$ la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente. Par suite la série de terme général $|a_n|r^n$ converge et la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. On peut alors intervertir les signes $\int$ et $\sum$, ce qui donne $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f_n(t)\,dt$.

Mais $\displaystyle\int_0^{2\pi} f_n(t)\,dt$ est nulle si $n \neq p$ et vaut $2\pi a_p r^p$ si $n = p$. On obtient donc

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt = 2\pi r^p a_p .$$

2) Si l'on suppose que f est bornée, alors il existe une constante M telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $|f(z)| \leqslant M$. On en déduit alors, que, pour tout $r > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle 2\pi r^p |a_p| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\,dt \leqslant 2\pi M$, et donc $|a_p| \leqslant \dfrac{M}{r^p}$.

Si $p \geqslant 1$, on en déduit en faisant tendre r vers l'infini, que $a_p = 0$, et donc que $f(z) = a_0$. La fonction f est constante.

3) Par la même majoration que dans 2), on obtient

$$2\pi r^p |a_p| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} (\alpha r^q + \beta)\,dt = 2\pi(\alpha r^q + \beta),$$

et donc $|a_p| \leqslant \dfrac{\alpha r^q + \beta}{r^p}$.

Si $p \geqslant q + 1$, on en déduit en faisant tendre r vers l'infini, que $a_p = 0$, et donc que $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_q z^q$. La fonction f est un polynôme.

4) Considérons la fonction $g : z \mapsto f(z)e^{-z}$. Puisque le produit de Cauchy de deux séries entières de rayon infini est une série entière de rayon infini, la fonction g possède un développement en série entière de rayon infini. Par ailleurs $|f(z)e^{-z}| \leqslant e^{\mathrm{Re}\,z}|e^{-z}| = 1$ et g est bornée. Il résulte de 2) que g est une constante K. Alors, pour tout z complexe, $f(z) = Ke^z$.

7.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 7.33

CCP PC 2007

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n le nombre de couples $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p + 4q = n$.
Montrer que $A_n = 1 + \left[\frac{n}{4}\right]$, où $\left[\frac{n}{4}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{4}$.

2) Développer $\frac{1}{(1-x)^2}$ en série entière de x. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?

3) En déduire le développement de $\frac{1}{(1-x^4)^2}$ en série entière de x, ainsi que le rayon de convergence de la série obtenue.

4) On considère la série entière de terme général $u_n(x) = \left(1 + \left[\frac{n}{4}\right]\right) x^n$.

4.a Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

4.b Calculer sa somme

5) A l'aide du produit de Cauchy des développements en série entière de $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1-x^4}$, retrouver le résultat de la première question.

1) Dire que $p + 4q = n$ avec p et q entiers naturels, est équivalent à dire que q est un entier compris entre 0 et $n/4$ et $p = n - 4q$. Le nombre A_n est donc le nombre d'entiers compris entre 0 et $n/4$, donc $A_n = 1 + \left[\frac{n}{4}\right]$.

2) Pour $x \in]-1, 1[$, posons $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Cette fonction a pour développement en série entière de rayon 1, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Alors f est dérivable sur $]-1, 1[$, et sa dérivée f' admet le développement en série entière de rayon 1 $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$.

3) En remplaçant x par x^4 dans le développement précédent lorsque $x^4 < 1$, on obtient $\frac{1}{(1-x^4)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{4n}$. Par ailleurs, cette série entière diverge si $x^4 > 1$, donc elle a encore un rayon de convergence égal à 1.

4.a Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{n}{4} \leqslant A_n \leqslant 1 + \dfrac{n}{4}$ et donc, $A_n \sim n/4 \sim (n+1)/4$. Comme la série entière de terme général $(n+1)x^n$ est de rayon 1 d'après la question 2), il en résulte que la série de terme général $A_n x^n$ est aussi de rayon 1.

4.b Remarquons que $\left[\dfrac{n}{4}\right] = p$ si et seulement si n est un des nombres $4p$, $4p+1$, $4p+2$, $4p+3$. On va donc sommer la série en regroupant les termes quatre par quatre. Soit $|x| < 1$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{4p+3} A_n x^n &= \sum_{r=0}^{p} (A_{4r}x^{4r} + A_{4r+1}x^{4r+1} + A_{4r+2}x^{4r+2} + A_{4r+3}x^{4r+3}) \\ &= \sum_{r=0}^{p} (r+1)x^{4r}(1 + x + x^2 + x^3) \\ &= (1 + x + x^2 + x^3) \sum_{r=0}^{p} (r+1)x^{4r} .\end{aligned}$$

Alors, puisque toutes les séries en présence sont de rayon 1, on obtient, en faisant tendre p vers l'infini,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = (1+x+x^2+x^3) \sum_{r=0}^{+\infty} (r+1)x^{4r} = \frac{1-x^4}{1-x} \, \frac{1}{(1-x^4)^2} = \frac{1}{(1-x)(1-x^4)} .$$

5) Pour $|x| < 1$, on obtient en utilisant le produit de Cauchy

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^4)} = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} x^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} x^{4q}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+4q=n} 1\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n .$$

Par unicité du développement en série entière, on déduit de la question 4.b que $A_n = 1 + \left[\dfrac{n}{4}\right]$.

Exercice 7.34

Mines - Ponts PC 2007

Si $n \geqslant 1$, soit I_n le nombre d'involutions de $\{1, \dots, n\}$. On pose $I_0 = 1$.

1) Montrer, si $n \geqslant 2$, que : $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge si $x \in]-1,\ 1[$. Soit $S(x)$ sa somme.

3) Montrer, pour $x \in]-1,\ 1[$, que : $S'(x) = (1+x)S(x)$.

4) En déduire une expression de $S(x)$, puis une expression de I_n.

Rappelons qu'une involution φ d'un ensemble E est une application telle que $\varphi o \varphi = \mathrm{Id}_E$. Le nombre I_n est le nombre d'involutions d'un ensemble fini à n éléments.

1) Pour $n \geqslant 3$, soit φ une involution de $\{1,\ldots,n\}$.
Ou bien $\varphi(n) = n$ alors la restriction de φ à $\{1,\ldots,n-1\}$ est une involution de $\{1,\ldots,n-1\}$. Il y a donc I_{n-1} involutions de ce type.
Ou bien $\varphi(n) = p$ appartient à $\{1,\ldots,n-1\}$. Alors $\varphi(p) = n$, et la restriction de φ à $\{1,\ldots,n-1\}\setminus\{p\}$ est une involution de cet ensemble fini à $n-2$ éléments. Donc pour chacune des $n-1$ valeurs de p, il y a I_{n-2} involutions. Cela fait $(n-1)I_{n-2}$ involutions de ce type. Finalement $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.
Cette relation est encore vraie si $n = 2$, car $I_2 = 2$, (les deux bijections de $\{1,2\}$ sur lui-même sont des involutions), et $I_1 = I_0 = 1$.

2) Comme toute involution de $\{1,\ldots,n\}$ est bijective, c'est une permutation de $\{1,\ldots,n\}$. Le nombre d'involutions est donc inférieur au nombre de permutations et l'on a $I_n \leqslant n!$.

Alors $0 \leqslant I_n/n! \leqslant 1$, et la série entière $\sum I_n x^n/n!$ a un rayon de convergence R supérieur à celui de la série géométrique $\sum x^n$. Donc $R \geqslant 1$.

3) Calculons $S'(x)$. On a, pour $x \in]-1,\ 1[$,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-1)!}\,x^{n-1} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}}{(n-1)!}\,x^{n-1} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!}\,x^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{I_{n-2}}{(n-2)!}\,x^{n-1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}\,x^n + x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}\,x^n . \end{aligned}$$

On trouve donc $S'(x) = S(x) + xS(x) = (1+x)S(x)$, avec de plus $S(0) = 1$, et cette équation différentielle linéaire du premier ordre a comme solution unique la fonction $S : x \mapsto e^{x+x^2/2}$.

4) On a donc $S(x) = e^{x+x^2/2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{2^n n!}\right)$.

On obtient un produit de Cauchy de séries entières de rayon de convergence infini donc la série entière de somme $S(x)$ est en fait de rayon de convergence infini.

Posons $a_{2p} = \dfrac{1}{2^p p!}$, $a_{2p+1} = 0$, $b_p = \dfrac{1}{p!}$. Le coefficient c_n de x^n dans la série produit est donc $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} = \sum_{p=0}^{E(n/2)} a_{2p} b_{n-2p} = \sum_{p=0}^{E(n/2)} \frac{1}{2^p p!(n-2p)!}$,

et par identification des coefficients, ce nombre vaut $I_n/n!$. Donc, on obtient, $I_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{E(n/2)} \frac{n!}{2^p p!(n-2p)!}$.

Exercice 7.35

Mines - Ponts PC 2006

1) Existence de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

2) Montrer que $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.

3) Montrer que la série de terme général R_n converge et calculer sa somme.

1) Le nombre R_n est le reste d'une série alternée convergente. Le calcul effectué dans l'exercice 7.26 montre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$. On a alors $R_n = -\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (-1)^{n+2} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt \\ &= (-1)^{n+2} \int_0^1 \frac{t^{n+1}+t^n}{1+t}\, dt = (-1)^{n+2} \int_0^1 t^n dt = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} . \end{aligned}$$

On en déduit que $u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+2}}{k+1}$, et il en résulte que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + u_0$.

Mais $u_0 = -\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = -\Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = -\ln 2$, donc $u_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \ln 2$, et on obtient bien que $u_n = R_n$.

3) On a $\sum_{k=0}^{n} R_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} t^k}{1+t}\, dt$, et, en calculant la somme de la suite géométrique, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} R_k = -\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{(1+t)^2}\, dt.$$

Mais $\left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{(1+t)^2}\,dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{n+1}\,dt = \frac{1}{n+2}$, et il en résulte que la suite $\left(\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{(1+t)^2}\,dt\right)$ converge vers 0. Donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} R_k\right)$ converge vers $-\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{1}{2}$. On a donc finalement $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = -\frac{1}{2}$.

Exercice 7.36

d'après Polytechnique-ESPCI PC 2006

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n - v_n$, $v_{n+1} = u_n - 2v_n$.

Calculer les rayons de convergence et les sommes des séries entières $\sum u_n z^n$ et $\sum v_n z^n$.

Posons $f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ et $f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n$. Soient R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs de ces deux séries entières. Si ces rayons ne sont pas nuls, on a alors pour $|z| < \min(R_1, R_2)$:

$$f_1(z) = u_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} z^{n+1} = u_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n - v_n) z^{n+1},$$

d'où $f_1(z) = u_0 + z(f_1(z) - f_2(z))$.

De même, obtient-on, $f_2(z) = v_0 + z(f_1(z) - 2f_2(z))$.

Les nombres $f_1(z)$ et $f_2(z)$ apparaissent donc comme solution d'un système linéaire

$$\begin{cases} (1-z)f_1(z) + zf_2(z) = 1 \\ zf_1(z) - (2z+1)f_2(z) = 0 \end{cases}.$$

Le déterminant de ce système vaut $(z-1)(2z+1) - z^2 = z^2 - z - 1$ et admet comme racines réelles $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$ et $-1/\Phi = (1-\sqrt{5})/2$. Donc si $|z| < (\sqrt{5}-1)/2$, le système est de Cramer et on obtient facilement les solutions

$$f_1(z) = -\frac{2z+1}{z^2-z-1} \quad \text{et} \quad f_2(z) = -\frac{z}{z^2-z-1}.$$

Pour $\alpha \neq 0$, la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z-\alpha} = -\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{1-\frac{z}{\alpha}}$ est développable en série entière de rayon $|\alpha|$. Alors $z \mapsto \dfrac{1}{z-\Phi}$ est développable en série entière de rayon $\Phi = (\sqrt{5}+1)/2$ et $z \mapsto \dfrac{1}{z+1/\Phi}$ est développable en série entière de rayon $1/\Phi = (\sqrt{5}-1)/2$. La fonction produit $z \mapsto \dfrac{1}{z^2-z-1}$ est donc développable en série entière de rayon $(\sqrt{5}-1)/2$, et par suite les fonctions f_1 et f_2 également. Comme ces fonctions ont un pôle en $(\sqrt{5}-1)/2$, le rayon de convergence des deux séries vaut exactement $(\sqrt{5}-1)/2$.

Remarque
Il est également possible de calculer explicitement u_n et v_n à partir de la relation matricielle $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Les suites (u_n) et (v_n) sont des combinaisons linéaires des suites $((-\Phi)^n)$ et $((1/\Phi)^n)$. Le calcul de f_1 et f_2 se ramène alors à sommer des séries géométriques.

Exercice 7.37

Mines - Ponts PSI 2005

1) Montrer que la série entière $\sum \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \dfrac{x^n}{n!}$ est de rayon de convegence infini.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e}} e^{ex}$. Montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \dfrac{1}{n!}$ et cherchons un équivalent de a_n.

On a tout d'abord $n^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = n^2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = n - \dfrac{1}{2} + o(1)$.

Donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n-\frac{1}{2}+o(1)} \sim \dfrac{e^n}{\sqrt{e}}$. Il en résulte que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \dfrac{1}{n!} \sim \dfrac{e^n}{\sqrt{e}}\dfrac{1}{n!}$.

La série entière $\sum \dfrac{e^n}{n!} x^n$ est la série de l'exponentielle. Elle a donc un rayon de convergence infini. Alors la série entière $\sum \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \dfrac{x^n}{n!}$ a aussi un rayon de convergence infini.

Posons $b_n = \dfrac{e^n}{\sqrt{e}}\dfrac{1}{n!}$. Pour tout x réel, on a alors $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

2) Pour tout $n \geqslant 0$, posons $\varepsilon_n = a_n/b_n - 1$. On a donc $a_n = b_n + b_n\varepsilon_n$, et, puisque $a_n \sim b_n$, la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Alors, pour $x > 0$, on obtient en sommant $f(x) = g(x) + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\varepsilon_n x^n$.

Montrer que $f(x) \sim g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ revient alors à montrer que $\dfrac{1}{g(x)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\varepsilon_n x^n$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $n \geqslant N$ implique $|\varepsilon_n| < \varepsilon/2$. Alors, pour $x > 0$, on obtient $\dfrac{1}{g(x)}\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\varepsilon_n x^n\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{1}{g(x)}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} b_n|\varepsilon_n|x^n$.

Mais, puisque les fonctions polynômes sont négligeables devant g en $+\infty$, on a alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{g(x)}\sum_{n=0}^{N-1} b_n|\varepsilon_n|x^n = 0$. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $x > \alpha$ implique $\dfrac{1}{g(x)}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} b_n|\varepsilon_n|x^n < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Alors $\dfrac{1}{g(x)}\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\varepsilon_n x^n\right| < \varepsilon$, ce qui montre que $\dfrac{1}{g(x)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\varepsilon_n x^n$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, d'où l'on déduit l'équivalence $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de $+\infty$.

8 Intégration sur un intervalle quelconque

8.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

8.1.1 Convergence et intégrabilité

Ce qu'il faut savoir

Intégrales convergentes

- Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b[$ (avec b éventuellement infini). On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge lorsque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b (par valeurs inférieures).
- Soient f et g deux fonctions continues (par morceaux) et **positives** sur $[a, b[$ (b étant éventuellement infini).
  - Si $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, b[$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
  - Si $f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x))$ ou si $f(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x))$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
  - Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
- Si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge (on dit que **l'intégrale est absolument convergente**), alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge. La réciproque est fausse.

Remarque

- Les résultats sont valables si les fonctions sont négatives sur $[a, b[$ (attention aux sens des inégalités) ou si elles sont simplement de signe constant sur un intervalle $[a', b[\subset [a, b[$.
- On dispose de résultats semblables sur un intervalle $]a, b]$. Si l'intervalle est du type $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ convergent.
- Les critères de comparaison (o, O et $\sim$) ne sont valables que lorsque l'intervalle est ouvert d'un seul côté.
- Si f et g sont équivalentes en b et si l'une est de signe constant alors l'autre est également de signe constant sur un voisinage de b.

Intégrabilité : Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I d'extrémités a et b, à valeurs réelles ou complexes.

- On dit que f est intégrable sur I s'il existe un réel M tel que, pour tout segment $K \subset I$, $\int_K |f(t)|\,dt \leqslant M$.
- La fonction f est intégrable sur I si et seulement si $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente.

Fonctions de référence

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$.
- La fonction $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$.
- Si a et b sont des réels tels que $a < b$, alors
  - la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a, b]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
  - la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Exercice 8.1

CCP PSI 2006

Étudier l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t-1}}$ sur $]1, +\infty[$.

Soit $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t-1}}$. La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$. On étudie donc séparément l'intégrabilité sur $]1, 2]$ et $[2, +\infty[$.

- $f(t) \underset{t\to 1^+}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{(t-1)^{1/2}}$ et $t \mapsto \dfrac{e^{-1}}{(t-1)^{1/2}}$ est continue et intégrable sur $]1, 2]$, donc f également.
- $f(t) = \underset{+\infty}{o}(1/t^2)$. En effet, $t^2 f(t) \underset{+\infty}{\sim} t^2 e^{-t}/\sqrt{t} = t^{3/2}e^{-t}$ et $t^{3/2}e^{-t}$ tend vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées). Puisque $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[2, +\infty[$, la fonction f l'est également.

Finalement f est intégrable sur $]1, +\infty[$.

Exercice 8.2

CCP PSI 2005

Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right) dx$.

Soit $f : x \mapsto x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ puisque $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \geqslant 0$. Il suffit donc de chercher un équivalent simple de f en $+\infty$ pour étudier la convergence de l'intégrale. En remarquant que $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$, il semble plus judicieux de factoriser par $(x + 1)^2$ afin de faire apparaître la simplification avec l'autre terme $x + 1$. Pour tout $x \geqslant 0$,

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = (x + 1)\sqrt{1 + \frac{1}{(x + 1)^2}} = (x + 1)\left(1 + \frac{1}{2(x + 1)^2} + o(\frac{1}{(x + 1)^2})\right)$$

d'où, en développant $f(x) = -\dfrac{1}{2(x + 1)} + o(\dfrac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2x}$. Donc l'intégrale est divergente.

Remarque

On aurait pu montrer que f est négative (puisque $x^2 + 2x + 2 \geqslant (x + 1)^2$) mais cela n'est pas nécessaire puisque f est équivalente à une fonction négative en $+\infty$.

Exercice 8.3

CCP PC 2006

Étudier l'intégrabilité de $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}\sin(1/x^2)}{\ln(1 + x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 \ln(1+x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3/2}\ln(1+x)} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
- $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}\sin(1/x^2)}{x} = \dfrac{\sin(1/x^2)}{\sqrt{x}}$. On ne dispose pas d'équivalent simple pour $\sin(1/x^2)$. On peut en revanche majorer $\left|\dfrac{\sin(1/x^2)}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Puisque $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(1/x^2)}{\sqrt{x}}$ l'est également et donc f est intégrable sur $]0, 1]$.

Exercice 8.4

CCP PC 2006

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Étudier l'intégrabilité de $f : x \mapsto x^\alpha e^{-\beta x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ si $\alpha \geqslant 0$ et sur $]0, +\infty[$ si $\alpha < 0$. Dans le cas où $\alpha < 0$, on commence par étudier l'intégrabilité sur $]0, 1]$. On a $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^\alpha$. La fonction $x \to x^\alpha$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha > -1$. Dans le cas $\alpha < 0$, la fonction f est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha \in]-1, 0[$. Dans le cas $\alpha \geqslant 0$, la fonction f est continue sur $[0, 1]$ et donc intégrable aussi bien sur $[0, 1]$ que sur $]0, 1]$. Il reste à étudier l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$. L'utilisation des croissances comparées nous mène à distinguer 3 cas :

- Si $\beta < 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
- Si $\beta = 0$, alors $f(x) = x^\alpha$ et la fonction f est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$.
- Si $\beta > 0$, alors $f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(1/x^2)$ et f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Finalement f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\beta > 0$ et $\alpha > -1$.

Le résultat de l'exercice suivant n'est pas au programme, mais il est fortement conseillé de l'avoir étudié et de retenir les méthodes employées.

Exercice 8.5

Intégrales de Bertrand

Étudier l'intégrabilité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$ sur $[2, +\infty[$ puis sur $]0, 1/2]$ en fonction des réels α et β.

- Intégrabilité sur $[2,+\infty[$: l'idée est de se dire que le comportement principal de la fonction pour l'intégrabilité est celui de $\dfrac{1}{x^\alpha}$ sauf au cas limite d'intégrabilité, lorsque $\alpha = 1$. Plus précisément, par croissances comparées, on a $\dfrac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha'}}\right)$ si $\alpha' < \alpha$. Si on peut trouver un tel α' avec $\alpha' > 1$, on obtient l'intégrabilité de f sur $[2,+\infty[$. C'est possible lorsque $\alpha > 1$. Dans le cas où $\alpha < 1$, on a $xf(x) = \dfrac{x^{1-\alpha}}{(\ln x)^\beta}$ de limite infinie lorsque x tend vers $+\infty$. Ainsi $f(x) \geqslant 1/x$ pour x suffisamment grand et f n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$. Dans le cas où $\alpha = 1$, on a $f(x) = \dfrac{1}{x}(\ln x)^{-\beta}$ et f est la dérivée de $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta}$ lorsque $\beta \neq 1$ et celle de $x \mapsto \ln|\ln x|$ si $\beta = 1$. La fonction f est positive et elle est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, c'est à dire si et seulement si une primitive de f sur $[2,+\infty[$ admet une limite finie en $+\infty$. Cela ne sera le cas que lorsque $1-\beta < 0$ soit $\beta > 1$.
  Conclusion : la fonction f est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ avec $\beta > 1$.
- Intégrabilité sur $]0,1/2]$: le raisonnement est identique. La différence provient du fait que $x \mapsto 1/x^\alpha$ est intégrable sur $]0,1/2]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
  – si $\alpha < 1$, pour tout $\alpha' > \alpha$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha'} f(x) = 0$ par croissances comparées et si on choisit $\alpha' \in]\alpha, 1[$, alors $f(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha'}}\right)$ avec $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\alpha'}}$ intégrable sur $]0,1/2]$ ce qui donne l'intégrabilité de f sur $]0,1/2]$.
  – si $\alpha = 1$, avec les mêmes primitives (aux valeurs absolues près) et le même raisonnement que dans la première situation, la fonction f est intégrable sur $]0,1/2]$ si et seulement si $\beta > 1$.
  – si $\alpha > 1$ alors $xf(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0, $f(x) \geqslant 1/x$ au voisinage de 0 et f n'est pas intégrable sur $]0,1/2]$.
  Conclusion : f est intégrable sur $]0,1/2]$ si et seulement si $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ avec $\beta > 1$.

8.1.2 Calcul d'intégrales

Ce qu'il faut savoir

Pour déterminer la valeur de $\displaystyle\int_I f$, on peut calculer l'intégrale de f sur un segment inclus dans I en déterminant une primitive de f, par exemple par intégration par parties ou par changement de variables.

Exercice 8.6

d'après Centrale PC 2006

On note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$.

1. Justifier l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} et en déduire la valeur de I_n à l'aide de factorielles.

1. Notons $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1/x^{2n}$. Or $x \mapsto 1/x^{2n}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc f l'est aussi et par continuité, f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2. Soit $A > 0$, les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$, ainsi, en intégrant par parties,
$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + \int_0^A \frac{2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx\\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n\left(\int_0^A \frac{dx}{(1+x^2)^n} - \int_0^A \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}\right).\end{aligned}$$
en écrivant que $x^2 = x^2+1-1$. Toutes les limites lorsque A tend vers $+\infty$ existent, et on obtient $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$ soit $I_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n} I_n$. Cela permet d'écrire
$$\begin{aligned}I_n &= \frac{2n-3}{2n-2}\,\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{3}{4}\,\frac{1}{2} I_1 = I_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2k}\\ &= \frac{2n-2}{2n-2}\,\frac{2n-3}{2n-2}\,\frac{2n-4}{2n-4}\,\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{4}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{2}{2}\,\frac{1}{2} I_1\\ &= \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2} I_1\end{aligned}$$
où $I_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x = \pi/2$.

Remarque

- On fera attention, lors du calcul à ne pas écrire de fausses égalités comme, par exemple, $I_n = \displaystyle\int_0^A f_n(x)\,dx$.
- En effectuant le changement de variable $x = \tan t$, on montrer que I_n est l'intégrale de Wallis $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t\,dt$.

Exercice 8.7

CCP PC 2006

Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\text{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right)dx$.

La fonction $f : x \mapsto \text{Arcsin}(\dfrac{1}{x}) - \dfrac{1}{x}$ est continue sur $[1,+\infty[$ (car la fonction arcsinus est continue sur $[0,1]$ et $x \mapsto 1/x$ est continue sur $[1,+\infty[$ à valeurs dans $]0,1]$). Pour prouver l'existence de l'intégrale, en tant qu'intégrale impropre, il suffit de justifier que l'intégrale de 1 à X admet une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$. Si on veut prouver l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$, on peut chercher un équivalent simple de f en $+\infty$. On a $\text{Arcsin}\,u = u + u^3/6 + o(u^3)$ lorsque u tend vers 0 d'où $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6x^3}$. Donc f est bien intégrable sur $[1,+\infty[$ (on peut également prouver la convergence de l'intégrale et justifier que f est positive en utilisant le fait que pour tout $u \in [0,1]$, on a $\text{Arcsin}\,u \geqslant u$).

Soit $X > 1$,

$$\begin{aligned}
\int_1^X \text{Arcsin}(\frac{1}{x})\,dx &= X\,\text{Arcsin}(1/X) - \text{Arcsin}(1) + \int_1^X x.\frac{1}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}}\,dx \\
&= X\,\text{Arcsin}(1/X) - \frac{\pi}{2} + \int_1^X \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \\
&= X\,\text{Arcsin}(1/X) - \frac{\pi}{2} + \text{argch}(X)
\end{aligned}$$

et $\displaystyle\int_1^X f(x)\,dx = X\,\text{Arcsin}(1/X) - \frac{\pi}{2} + \text{argch}(X) - \ln X$. Puisque $\text{Arcsin}\,u \underset{0}{\sim} u$, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} X\,\text{Arcsin}(1/X) = 1$. Pour $X \geqslant 1$, $\text{argch}(X) = \ln(X + \sqrt{X^2-1})$ et $\text{argch}(X) - \ln X = \ln(1 + \sqrt{1-1/X^2})$. Finalement lorsque X tend vers $+\infty$, on obtient

$$\int_1^{+\infty}\left(\text{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right)dx = 1 - \frac{\pi}{2} + \ln 2.$$

Ce qu'il faut savoir

Changement de variable

Si f est une fonction intégrable sur un intervalle I et si φ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de J sur I, alors

$$(f\circ\varphi)\,\varphi' \text{ est intégrable sur } J \text{ et } \int_I f = \int_J f\circ\varphi\,|\varphi'|.$$

Remarque

Pour effectuer un changement de variable à l'aide de ce théorème, il faut partir de l'intégrale sur un intervalle I d'une fonction intégrable. La fonction φ a pour image cet intervalle I (on exprime l'ancienne variable en fonction de la nouvelle). On peut préférer montrer qu'on dispose d'un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme lorsque la nouvelle variable est donnée en fonction de l'ancienne, ce qui évite d'avoir à trouver le changement réciproque.

Exercice 8.8

CCP PC 2006

Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \ln t}{(1+t^3)^2}\, dt.$

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t^2 \ln t}{(1+t^3)^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. On a $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln t}{t^4} = \underset{t\to+\infty}{o}(1/t^3)$. Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Il semble raisonnable de poser $u = t^3$ (on aura $du = 3t^2\, dt$) dans cette intégrale, soit $t = \sqrt[3]{u}$. On considère alors

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ u & \mapsto & u^{1/3} \end{array} \right.$$

φ est bijective et de classe $\mathscr{C}^1$, on peut effectuer le changement de variable et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \ln t}{(1+t^3)^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3} \frac{\ln(u^{1/3})}{(1+u)^2}\, du = \frac{1}{9} \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{(1+u)^2}\, du.$$

Il reste à calculer cette dernière intégrale plus simple, à l'aide d'une intégration par parties (pour faire disparaître le ln). Soit $0 < a < b$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\ln u}{(1+u)^2}\, du &= \left[-\frac{\ln u}{1+u} \right]_a^b + \int_a^b \frac{1}{u(1+u)}\, du \\
&= \frac{\ln a}{1+a} - \frac{\ln b}{1+b} + \int_a^b \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du \\
&= \frac{\ln a}{1+a} - \frac{\ln b}{1+b} + \ln b - \ln a + \ln(a+1) - \ln(b+1)
\end{aligned}$$

On s'intéresse séparément aux limites lorsque b tend vers $+\infty$ et a vers 0 :

Sachant que $\ln b - \ln(b+1) - \dfrac{\ln b}{1+b} = \ln \dfrac{b}{b+1} - \dfrac{\ln b}{1+b}$, cette quantité est de limite nulle lorsque b tend vers $+\infty$. D'autre part,

$$\ln(a+1) + \frac{\ln a}{1+a} - \ln a = \ln(a+1) + \frac{\ln a}{1+a}(1-(1+a)) = \ln(a+1) - \frac{a \ln a}{a+1}$$

et cette quantité tend vers $\ln 1 = 0$ lorsque a tend vers 0. Finalement l'intégrale I est nulle.

Remarque
On peut retrouver la valeur différemment, plus rapidement : f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u \mapsto 1/u$ est une bijection $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors,

$$I = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{t^2} \frac{\ln(1/t)}{(1+1/t^2)^3} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^6}{t^4} \frac{-\ln t}{(1+t^3)^2}\, dt = -I,$$

donc $2I = 0$ et $I = 0$.

Exercice 8.9

TPE PSI 2006

Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a\sin^2 x}$ (*on utilisera le changement de variable* $t = \tan x$).

Le changement de variable proposé ne convient pas sur $[0, \pi]$, il faut changer l'intervalle d'intégration. Soit $f(x) = \dfrac{1}{1 + a\sin^2 x}$. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle est également paire et de période π. Ainsi $I = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$. On peut exprimer $\sin^2 x$ assez facilement à l'aide de $\tan^2 x$ puisque $\sin^2 x = \cos^2 x \tan^2 x$ soit $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ si $x \in [0, \pi/2[$. La fonction $\varphi : t \mapsto \operatorname{Arctan} t$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, +\infty[$ sur $[0, \pi/2[$ et f est intégrable sur $[0, \pi/2]$ donc sur $[0, \pi/2[$ ce qui permet d'effectuer le changement de variable dans l'intégrale

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + a\frac{t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2}\, dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(a+1)t^2}\, dt \\ &= \frac{2}{a+1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \frac{1}{a+1}}\, dt. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $t \mapsto \dfrac{1}{\alpha} \operatorname{Arctan} \dfrac{t}{\alpha}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+\alpha^2}$ si $\alpha \neq 0$ et que par conséquent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+\alpha^2}\, dt = \frac{\pi}{2\alpha}$ si $\alpha > 0$, on obtient

$$I = \frac{2}{a+1} \frac{\pi\sqrt{a+1}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{a+1}}.$$

Remarque
- Le changement de variable $t = \tan(x/2)$ est valable sur $[0, \pi[$ mais les calculs sont alors plus longs et compliqués.

- Afin d'effectuer le changement de variable $x = \tan t$, on a transformé une intégrale définie (sur le segment $[0, \pi/2]$) en une intégrale généralisée (ici sur $[0, \pi/2[$). Cette transformation est légitime puisque si f est continue sur un segment $[a, b]$ alors elle est intégrable sur les intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ et les différentes intégrales ont même valeur.

8.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 8.10

CCP PC 2007

On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^n}\, dx$.

1. Justifier l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. À l'aide du changement de variable $x = 1/u$, montrer que
$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}\, du,$$
puis à l'aide du changement $v = u - 1/u$, calculer I_1.
3. Calculer alors I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sous forme d'un produit.
4. En déduire la limite de la suite (I_n).

1. La fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^4)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1/x^{4n}$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si $n \in \mathbb{N}^*$ puisqu'alors $4n > 1$.
2. La fonction $u \mapsto 1/u$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc
$$I_1 = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{1+\frac{1}{u^4}}\left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\, du.$$
Ainsi $2I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4}\, du + \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\, du = \int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}\, du$. On pose $\psi(u) = u - 1/u$ pour $u > 0$. La fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $u > 0$, $\psi'(u) = 1 + 1/u^2 > 0$. Donc ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et réalise un $\mathscr{C}^1-$ difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. On peut donc effectuer le changement de variable $v = \psi(u)$ (en fait $u = \psi^{-1}(v)$) dans l'intégrale demandée. On a $v^2 = u^2 + \dfrac{1}{u^2} - 2$ soit $v^2 + 2 = \dfrac{u^4+1}{u^2}$ et $\psi'(u) = 1 + \dfrac{1}{u^2}$. En écrivant $\dfrac{u^2+1}{u^4+1} = \dfrac{u^2}{u^4+1}\left(1 + \dfrac{1}{u^2}\right)$, on obtient
$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{v^2+2}\, dv = \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^2+2}\, dv = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

3. En effectuant une intégration par parties comme dans l'exercice 8.6, on obtient
$$I_n = 4n \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(1+x^4)^{n+1}}\, dx = 4n \int_0^{+\infty} \frac{x^4+1-1}{(1+x^4)^{n+1}}\, dx = 4n(I_n - I_{n+1}).$$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_{n+1} = \dfrac{4n-1}{4n} I_n$ et $I_n = I_1 \displaystyle\prod_{p=1}^{n-1} \frac{4p-1}{4p}$, soit
$$I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \prod_{p=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{4p}\right).$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln I_n = \ln I_1 + \displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} \ln(1 - \frac{1}{4p})$ (tous les facteurs du produit sont positifs). Or $\ln(1 - \dfrac{1}{4p}) \underset{p \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4p}$ terme général d'une série divergente à termes négatifs. Donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln I_n = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$ par composition avec la fonction exponentielle.

Remarque
La question de la limite de I_n peut se traiter plus simplement à l'aide du théorème de convergence dominée (voir chapitre suivant) puisque la suite de fonction f_n converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leqslant f_n \leqslant f_1$.

Exercice 8.11

Mines-Ponts PC,MP 2006 et 2007

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\, dx$.

Posons $f(x) = \sqrt{\tan x}$ pour $x \in [0, \pi/2[$. La fonction f est continue sur $[0, \pi/2[$. Il reste à trouver un équivalent de f en $\pi/2$. Pour $h \in]0, \pi/2[$,
$$f(\frac{\pi}{2} - h) = \sqrt{\tan(\frac{\pi}{2} - h)} = \frac{1}{\sqrt{\tan h}} \underset{h \to 0}{\sim} \frac{1}{h^{1/2}}.$$
Donc $f(x) \underset{x \to \pi/2}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi/2 - x}}$ et f est intégrable sur $[0, \pi/2[$. Pour le calcul on va effectuer le changement de variable $u = f(x)$ soit $x = \operatorname{Arctan}(u^2) = \varphi(u)$. La fonction φ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, +\infty[$ sur $[0, \pi/2[$ donc ce changement permet d'écrire
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\, dx = \int_0^{+\infty} u \frac{2u}{1+u^4}\, du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\, du.$$

Il reste à calculer cette intégrale. On peut le faire assez rapidement à l'aide de l'exercice précédent puisqu'on a prouvé que cette intégrale vaut $2I_1 = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$. De façon plus usuelle, on peut effectuer ce calcul à l'aide d'une décomposition en éléments simples, mais c'est assez long.

Exercice 8.12

Mines-Ponts PC 2006

Montrer que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est nulle à l'aide d'un changement de variable simple.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln t$, et comme la fonction $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$, la fonction f est intégrable sur $]0, 1]$. De plus $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln t}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$, donc f est également intégrable sur $[1, +\infty[$.
- On cherche un changement de variable simple, qui transforme $\mathbb{R}_+^*$ en lui même et qui ne change pas trop le terme $\ln t$. On considère $u \mapsto 1/u$ qui est bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors

$$I = \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln(1/u)}{1+\dfrac{1}{u^2}}\left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\, du = -I$$

Donc $I = -I$ et $I = 0$.

Exercice 8.13

d'après CCP PC 2007

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin^{2n}(t)\, e^{-t}\, dt$.

1. Justifier l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}$ et calculer I_0
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n = \dfrac{2n(2n-1)}{4n^2+1} I_{n-1}$. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de I_n en fonction de n et du produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k^2+1)$.
3. Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \dfrac{2n(2n-1)}{4n^2+1}$. Déterminer un équivalent de $v_n - 1$ au voisinage de $+\infty$. En déduire la limite de la suite I_n.

1. La fonction $f_n : t \mapsto \sin^{2n}(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $|f_n(t)| \leqslant e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc f_n l'est également.
$$I_0 = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-t}\, dt = \lim_{A \to +\infty} 1 - e^{-A} = 1.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre par parties sur $[0, A]$ avec $A > 0$ (les fonctions utilisées sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$).
$$\int_0^A f_n(t)\, dt = \left[-e^{-t} \sin^{2n} t\right]_0^A + 2n \int_0^A e^{-t} \left(\sin^{2n-1} t \cos t\right)\, dt$$
soit $I_n = 2n \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\sin^{2n-1} t \cos t\right)\, dt$. On effectue une seconde intégration par parties qui donne
$$\begin{aligned} I_n &= 2n \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} \left((2n-1) \sin^{2n-2} t \cos^2 t - \sin^{2n} t\right)\, dt\right) \\ &= 2n \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} \left((2n-1)(\sin^{2n-2} t)(1 - \sin^2 t) - \sin^{2n} t\right)\, dt\right), \end{aligned}$$
c'est-à-dire $I_n = 2n \left((2n-1)I_{n-1} - 2nI_n\right)$ d'où $I_n = 2n(2n-1)I_{n-1} - 4n^2 I_n$ et
$$I_n = \frac{2n(2n-1)}{4n^2+1} I_{n-1}.$$
On obtient $I_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right) I_0$. Le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k)(2k-1)$ vaut $(1.2).(3.4)\ldots((2k-1)(2k))\ldots(2n-1)(2n) = (2n)!$, ainsi $I_n = \dfrac{(2n)!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k^2+1)}$.

3. On a $v_n - 1 = \dfrac{4n^2 - 2n}{4n^2+1} - 1 = \dfrac{-2n-1}{4n^2+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$. Tous les termes de la suite v_n sont positifs, $\ln I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(v_k)$ avec v_n de limite 1 et $\ln v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n}$.

Ainsi la série de terme général $\ln v_n$ est divergente et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln v_k = -\infty$. Par composition avec la fonction exponentielle, on obtient $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Exercice 8.14

TPE PSI 2007

Prouver l'existence de l'intégrale suivante et calculer sa valeur
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} 3x - \operatorname{Arctan} x}{x}\, dx.$$

- Existence : on pose $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan} 3x - \operatorname{Arctan} x}{x}$ pour $x > 0$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si on prouve la convergence de l'intégrale, on aura alors prouvé l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque la croissance de Arctan assure que f est positive sur $]0, +\infty[$. On peut prouver indépendamment l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) = \dfrac{3x - x + o(x)}{x}$ lorsque x est proche de 0, et $f(x)$ admet pour limite 2 lorsque x tend vers 0. Donc f peut se prolonger par continuité en 0 et f est intégrable sur $]0, 1]$. C'est plus compliqué lorsque x devient grand. On peut utiliser la relation $\operatorname{Arctan} u = \pi/2 - \operatorname{Arctan} 1/u$ si $u > 0$, ce qui donne (par développement limité) :
$$f(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(\frac{1}{x}) - \operatorname{Arctan}(\frac{1}{3x})}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3x^2}.$$
On peut également utiliser l'inégalité des accroissements finis sur $[x, 3x]$ appliquée à $g = \operatorname{Arctan}$ avec $\sup\limits_{t\in[x,3x]} |(t)| = \dfrac{1}{1+x^2}$ ce qui donne $|f(x)| \leqslant \dfrac{2x}{x(1+x^2)} \leqslant \dfrac{2}{x^2}$ pour conclure quant à l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$.
- Calcul : la première idée est d'intégrer par parties. Cependant cela ne donne rien : on dérive Arctan mais il faut alors intégrer $x \mapsto 1/x$ en ln, ce qui donne une autre expression compliquée. Soit $0 < a < b$.
$$I_{a,b} = \int_a^b \frac{\operatorname{Arctan} 3x - \operatorname{Arctan} x}{x}\,dx = \int_a^b \frac{\operatorname{Arctan} 3x}{x}\,dx - \int_a^b \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\,dx$$
En effectuant le changement $u = 3x$ dans la première intégrale, la partie $\dfrac{dx}{x}$ se transforme en $\dfrac{du}{u}$, on va alors se ramener à deux intégrales d'une même fonction :
$$I_{a,b} = \int_{3a}^{3b} \frac{\operatorname{Arctan} u}{u}\,du - \int_a^b \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\,dx = \int_b^{3b} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\,dx - \int_a^{3a} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\,dx.$$
La croissance de Arctan donne
$$\int_b^{3b} \frac{\operatorname{Arctan} b}{x}\,dx \leqslant \int_b^{3b} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\,dx \leqslant \int_b^{3b} \frac{\operatorname{Arctan} 3b}{x}\,dx$$
soit
$$\operatorname{Arctan}(b)\ln 3 \leqslant \int_b^{3b} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\,dx \leqslant \operatorname{Arctan}(3b)\ln 3$$
et par encadrement $\displaystyle\int_b^{3b} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\,dx$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}\ln 3$ lorsque b tend vers $+\infty$. Le même encadrement en 0 donne une limite nulle pour $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\,dx$ lorsque a tend vers 0. En conclusion
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} 3x - \operatorname{Arctan} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 3.$$

Remarque

Beaucoup d'exercices sont construits sur ce modèle. On peut appliquer une méthode semblable pour les intégrales de fonctions du type $g_{a,b} : x \mapsto \dfrac{f(ax) - f(bx)}{x}$ où f est continue sur $\mathbb{R}^+$. Plus précisément,

- si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_{a,b}(t)\,dt = f(0)\ln\frac{b}{a}$.
- si f admet une limite finie ℓ en $+\infty$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_{a,b}(t)\,dt = (f(0) - \ell)\ln\frac{b}{a}$.

Exercice 8.15

Centrale PC 2005, CCP PC 2007

1. Justifier l'existence de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,dt$ et de $I(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,dt$ pour $x > 0$.
2. Déterminer des réels α et β tels que, pour $x > 0$,
$$I(x) = \alpha \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt + \beta \int_x^{+\infty} \frac{\sin 3t}{t^2}\,dt.$$
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $I(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{3\sin t}{4t^2}\,dt$.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt - \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,dt\right) = 0$, et en déduire la valeur de J.
5. Montrer que I peut se prolonger en une application dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et préciser la dérivée en 0.

1. On note $g(t) = \dfrac{\sin^3 t}{t^2}$. La fonction g est continue sur $]0, +\infty[$, tend vers 0 en 0 (puisque $g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^3}{t^2} = t$) - donc g est intégrable sur $]0, 1]$ - et $|g(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ - donc g est intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que sur tout intervalle $[x, +\infty[$ car $[x, +\infty[\subset]0, +\infty[$ si $x > 0$. Tout cela garantit l'existence de J et de I.
2. En linéarisant $\sin^3 t$, on obtient $\sin^3 t = \dfrac{3\sin t - \sin 3t}{4}$. On peut alors séparer l'intégrale définissant $I(x)$ en 2 (chacune des 2 fonctions qui apparaissent est intégrable sur $[x, +\infty[$) et on obtient le résultat avec $\alpha = 3/4$ et $\beta = -1/4$.

3. Puisque $t \mapsto \dfrac{\sin 3t}{t^2}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$, on peut effectuer le changement de variable $t = u/3$ (l'application $u \mapsto u/3$ est une bijection $\mathscr{C}^1$ de $[3x, +\infty[$ sur $[x, +\infty[$, ce qui donne

$$I(x) = \frac{3}{4}\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, dt - \frac{1}{4}\int_{3x}^{+\infty} \frac{9\sin u}{3u^2}\, du = \frac{3}{4}\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\, dt.$$

4. $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\, dt - \int_x^{3x} \frac{1}{t}\, dt = \int_x^{3x} \frac{\sin t - t}{t^2}$. On définit $h(t) = \dfrac{\sin t - t}{t^2}$ sur $]0, +\infty[$, prolongée par continuité en 0 par 0 ($\sin t - t \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{t^3}{6}$). On note alors H un primitive de h sur $[0, +\infty[$ (elle existe puisque h est continue sur $[0, +\infty[$). On écrit $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin t - t}{t^2} = H(3x) - H(x)$ qui tend vers $H(0) - H(0) = 0$ lorsque x tend vers 0. Finalement $I(x) - \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_x^{3x} \frac{1}{t}\, dt = I(x) - \dfrac{3}{4}\ln 3$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 et ainsi $\lim\limits_{x\to 0} I(x) = \dfrac{3}{4}\ln 3$. Puisque g est intégrable sur $]0, +\infty[$, $J = \lim\limits_{x\to 0} I(x) = \dfrac{3}{4}\ln 3$.

5. Pour $x > 0$, on peut écrire $I(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\, dt - \int_1^x g(t)\, dt$ ce qui donne le fait que I est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $I' = -g$. De plus $I(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers 0 (question précédente), et pour tout $x > 0$, $I'(x) = -\dfrac{\sin^3 x}{x^2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} I'(x) = 0$ (voir première question). Donc I peut se prolonger en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $I(0) = J$ et $I'(0) = 0$.

Exercice 8.16

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ converge.

La difficulté vient du fait que f n'est pas forcément de signe constant, si bien que la seule majoration intéressante que l'on pourrait obtenir est $\left|\dfrac{f(t)}{t}\right| \leqslant |f(t)|$ si $t \geqslant 1$, mais cela n'aboutit pas car on ne sait rien sur l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$. On revient alors à la définition de la convergence. Appelons F la primitive de f sur $[1, +\infty[$ qui s'annule en 1 : $\forall x \in [1, +\infty[$, on a $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\, dt$. La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ signifie, par définition, que F admet une limite finie en $+\infty$. Pour tout $x \geqslant 1$, par intégration par parties sur $[1,x]$ (les fonctions sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur ce segment),

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt = \frac{F(x)}{x} - \frac{F(1)}{1} + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2}\,dt$$

De plus F est continue sur $[1,+\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$ donc F est bornée sur $[1,+\infty[$. Notons M un majorant de F sur $[1,+\infty[$. Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$. Pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a $\displaystyle\left|\frac{F(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{M}{t^2}$. Donc $t \mapsto \dfrac{F(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt$ est donc convergente et finalement, $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ ce qui signifie bien que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge.

On obtient, de plus, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}$.

Ce qu'il faut savoir

Le fait d'avoir la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ n'apporte aucune information sur le comportement de f au voisinage de l'infini (limite, équivalent ou domination). Dans ces exercices théoriques, on ne pourra jamais se diriger vers des méthodes exploitant le comportement de f. Il est alors fréquent de passer par une primitive puisque l'hypothèse permet d'avoir l'existence de la limite en $+\infty$ pour cette primitive.

Exercice 8.17

D'après plusieurs concours

1. Soit f continue, décroissante et intégrable sur $]0,1]$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$
2. En déduire que $\sqrt[n]{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{e}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$.

1. On ne peut bien entendu pas directement appliquer le résultat sur les sommes de Riemann puisque la fonction f n'est pas continue sur le segment $[0, 1]$. On va donc encadrer la somme par des intégrales. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [[1, n-1]]$. Puisque f est décroissante sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a
$$\frac{k+1-k}{n} f(\frac{k+1}{n}) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\, dt \leqslant \frac{k+1-k}{n} f(\frac{k}{n}).$$
En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à $n-1$, on obtient
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k+1}{n}) \leqslant \int_{1/n}^{1} f(t)\, dt \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}),$$
c'est-à-dire
$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} f(\frac{k}{n}) \leqslant \int_{1/n}^{1} f(t)\, dt \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}).$$
De plus, pour tout $t \in]0, \frac{1}{n}]$, f est minorée par $f(\frac{1}{n})$ et f est intégrable sur $]0, 1]$, on a donc également $\frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) \leqslant \int_0^{1/n} f(t)\, dt$. Cela permet d'obtenir, en ajoutant à l'inégalité précédente, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \leqslant \int_0^1 f(t)\, dt$. On a également
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) + \frac{f(1)}{n} \geqslant \int_{1/n}^{1} f(t)\, dt + \frac{f(1)}{n}$$
ce qui donne finalement l'encadrement
$$\int_{1/n}^{1} f(t)\, dt + \frac{f(1)}{n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \leqslant \int_0^1 f(t)\, dt.$$
f est intégrable sur $]0, 1]$ donc la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\int_{1/n}^{1} f(t)\, dt$ est $\int_0^1 f(t)\, dt$ et $f(1)/n$ tend vers 0. Par encadrement, on obtient le résultat demandé.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. On a
$$\ln u_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1} \ln k \right) - \ln n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \right).$$
La fonction $f : x \mapsto -\ln x$ est continue, décroissante et intégrable sur $]0, 1]$. La question précédente entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln u_n = -\int_0^1 \ln x\, dx$, c'est-à-dire
$$\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = \lim_{a\to 0} [x \ln x - x]_a^1 = -1.$$

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{-1}$, ce qui donne $\sqrt[n]{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{e}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, on définit $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$. On a $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ où $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$. La fonction f est continue sur $]0,1[$, décroissante sur $]0,1/2]$ puis croissante sur $[1/2,1[$. On généralise le résultat de la première question pour des fonctions monotones et intégrables sur des intervalles $]a,b]$ ou $[a,b[$ (a et b réels). On sépare la somme en deux sommes, l'une où l'indice k varie de 1 à $E(n/2)$ et l'autre où l'indice k prend les autres valeurs. On obtient alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^{1/2} f(t)\,dt + \int_{1/2}^{1} f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi.$$

On peut calculer l'intégrale de différentes façons : soit de façon usuelle, en écrivant $t(1-t) = \dfrac{1}{4} - (t - \dfrac{1}{2})^2$ et en intégrant à l'aide de la fonction arcsinus, soit à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

8.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 8.18

Centrale PC 2007K

Soit F la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$

1. Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $F(x) = \dfrac{\cos x}{x^2} + O(\dfrac{1}{x^3})$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $F(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x$.
4. Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.
5. Montrer qu'il existe un unique réel $r \in]0,\pi]$ tel que $F(r) = 0$.

1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur tout intervalle $[x,+\infty[$ où $x > 0$, et $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, donc f est intégrable sur tout intervalle $[x,+\infty[$ si $x > 0$. Pour $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt - \int_1^x f(t)\,dt$, l'application $x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (c'est la primitive de f qui s'annule en 1), donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $-f$.

2. On va intégrer par parties afin d'augmenter le degré du dénominateur dans l'intégrale. Soit $A > x > 0$,
$$\int_x^A \frac{\sin t}{t^2}\,dt = \left[\frac{-\cos t}{t^2}\right]_x^A - 2\int_x^A \frac{\cos t}{t^3}\,dt,$$
ce qui donne, lorsque A tend vers $+\infty$, $F(x) = \dfrac{\cos x}{x^2} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\,dt$. On a bien le premier terme demandé. Il reste à montrer que la nouvelle intégrale est un $O(1/x^3)$. La première idée consiste à écrire
$$\left|2\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\,dt\right| \leqslant 2\int_x^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^3}\right|\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{2}{t^3}\,dt = \frac{1}{x^2}$$
mais la majoration est trop forte. On doit réintégrer par parties comme précédemment,
$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\,dt = -\frac{\sin x}{x^3} + 3\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^4}\,dt.$$
Le premier terme est un $O(1/x^3)$, le second aussi en majorant la valeur absolue de l'intégrale par $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{3}{t^4}\,dt = \frac{1}{x^3}$.

3. On cherche d'abord à comprendre comment va apparaître le terme $\ln x$. On sépare l'intégrale en deux afin de ne pas conserver une difficulté en $+\infty$ en écrivant $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt + \int_x^1 f(t)\,dt$ et on étudie cette seconde intégrale. On a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$ et on s'attend donc à ce que $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt$ se comporte comme $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = -\ln x$. On évalue la différence :
$$\int_x^1 \left(\frac{\sin t}{t^2} - \frac{1}{t}\right) = \int_x^1 \left(\frac{\sin t - t}{t^2}\right)\,dt.$$
On note $g : t \mapsto \dfrac{\sin t - t}{t^2}$ pour tout $t \in\,]0,1]$ prolongée par continuité en 0 par 0. On note de nouveau g la fonction prolongée sur $[0,1]$, elle est continue sur $[0,1]$ ce qui implique que $\displaystyle\int_x^1 g(t)\,dt$ tend vers la constante $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$. Ainsi $\displaystyle\int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\,dt - (-\ln x)$ tend vers une constante, et $\ln x$ admet une limite $-\infty$ lorsque x tend vers 0 donc
$$\int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\,dt \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$$

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est constant et donc négligeable devant $-\ln x$ en 0, on a le résultat souhaité.

4. La fonction F est continue sur $]0,+\infty[$. On a $F(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$ et la fonction logarithme est intégrable sur $]0,1]$ donc F également. De plus, $|F(x)| = O(1/x^2)$ en $+\infty$ donc F est intégrable sur $[1,+\infty[$. Finalement F est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le résultat le plus simple concernant F est la valeur de sa dérivée. On imagine donc qu'on va intégrer par parties. Soit $0 < \varepsilon < A$,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A F(x)\,dx &= [xF(x)]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A xF'(x)\,dx \\ &= AF(A) - \varepsilon F(\varepsilon) + \int_\varepsilon^A x\frac{\sin x}{x^2}\,dx\end{aligned}$$

Or $\varepsilon F(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} -\varepsilon\ln\varepsilon$ de limite nulle lorsque A tend vers $+\infty$,
$AF(A) = \dfrac{\cos A}{A} + O(1/A^2)$ de limite nulle, ce qui donne en prenant les limites

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

5. $\forall x \in\,]0,\pi]$, $F'(x) = -\dfrac{\sin x}{x^2} \leqslant 0$. Donc F est décroissante sur $]0,\pi]$, et même strictement décroissante puisque F' ne s'annule qu'en π. La fonction F admet une limite infinie en 0. Il reste à monter que $F(\pi) \leqslant 0$.

$$F(\pi) = \int_\pi^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,dt.$$

On pose $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,dt = \int_0^\pi \frac{\sin(u+n\pi)}{(u+n\pi)^2}\,du$ par changement de variable $t = u + n\pi$. Or $I_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{(u+n\pi)^2}\,du = (-1)^n u_n$. Puisque la fonction sinus est positive sur $[0,\pi]$,

$$\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{((n+1)\pi)^2}\,du \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{(u+n\pi)^2}\,du \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{(n\pi)^2}\,du$$

donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{((n+1)\pi)^2}\,du \leqslant u_n$, ce qui donne la décroissance de (u_n), ainsi qu'une limite nulle pour cette suite. Par le critère spécial des séries alternées, la somme de la série est du signe de son premier terme, c'est-à-dire négatif. Donc $F(\pi) \leqslant 0$.

Exercice 8.19

Polytechnique-ESPCI PC 2005

1. Montrer que les fonctions $t \mapsto \ln \sin t$ et $t \mapsto \ln \cos t$ sont intégrables sur $]0, \pi/2[$. On appelle alors I et J la valeur de ces intégrales. Montrer que $I = J$.
2. Trouver une relation entre $I + J$ et I.
3. En déduire la valeur de I et de J.

1. Soit $f : t \mapsto \ln \sin t$. Cette fonction est continue sur $]0, \pi/2]$ car $t \mapsto \sin t$ est continue sur $]0, \pi/2]$ à valeurs dans $]0, 1]$ et ln est continue sur $]0, 1]$. En revanche $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = -\infty$. Or pour t proche de 0, on a $\sin t = t + o(t) = t(1 + o(1))$ et $f(t) = \ln t + \ln(1 + o(1)) = \ln t + o(1)$ donc $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln t$. Or $t \mapsto \ln t$ est continue et intégrable sur $]0, \pi/2]$. Donc par comparaison, f est intégrable sur $]0, \pi/2]$. Puisque $\cos u = \sin(\pi/2-u)$, on va appliquer le changement de variable $t = \pi/2 - u$ dans la première intégrale. La fonction $\varphi : u \mapsto \pi/2 - u$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, \pi/2[$ sur $]0, \pi/2]$ et f est intégrable sur $]0, \pi/2]$ donc $u \mapsto f(\varphi(u)).\varphi'(u) = -\ln(\cos u)$ est intégrable sur $[0, \pi/2[$ avec
$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin t \, dt = -\int_{\pi/2}^{0} \ln(\cos u)\, du$$
c'est-à-dire $I = J$.
2. Bien entendu $I + J = 2I$ mais ce n'est pas cette relation qui est attendue.
$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\frac{\sin 2t}{2})\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\, dt - \int_0^{\pi/2} \ln 2 \, dt. \end{aligned}$$
Puisque $u \mapsto u/2$ est une bijection $\mathscr{C}^1$ de $]0, \pi]$ sur $]0, \pi/2]$, on peut appliquer le changement $t = u/2$ dans la première intégrale, ce qui donne
$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\, du = \frac{1}{2}\left(I + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\, du\right).$$
On peut appliquer le changement $u = \pi - t$ dans l'intégrale restante et $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\, du = I$. Finalement
$$I + J = \frac{1}{2}(2I) - \frac{\pi}{2}\ln 2 = I - \frac{\pi}{2}\ln 2$$
3. Tout cela donne $I = J = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

9 Théorème de convergence dominée et applications

9.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

9.1.1 Théorème de convergence dominée

Ce qu'il faut savoir

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si :
(i) (f_n) converge **simplement** vers une fonction f sur I,
(ii) la fonction f est continue par morceaux sur I,
(iii) il existe φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leqslant \varphi(x),$$

alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$.

Remarque

- Bien entendu, on peut utiliser une suite de fonctions définie seulement à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.
- L'hypothèse de domination est fondamentale et ne peut pas être remplacée, par exemple par une hypothèse de convergence uniforme (voir exercice 9.4, page 211).
- L'hypothèse de domination entraîne que chaque fonction f_n est intégrable sur I.

Exercice 9.1

CCP PSI 2005

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+nx+x^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2. Déterminer la limite de $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)_{n\geqslant 1}$.

1. La fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$.
Puisque $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, f_n l'est également.
2. Les hypothèses de continuité et de domination ont été obtenues dans la question précédente. Il reste à étudier la convergence simple de la suite de fonctions. Si $x > 0$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{nx}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$, fonction continue sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de convergence dominée donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 0$.

Exercice 9.2

CCP PSI 2005

On définit pour $n \geqslant 2$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\,dt$. Prouver l'existence de I_n et déterminer la limite de la suite (I_n).

Soit n un entier supérieur à 2 et f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(t) = \dfrac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}$. La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$.
On étudie la limite simple de cette suite de fonctions :

- si $t \in]0, 1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$,
- si $t = 1$ alors $f_n(1) = 1$ pour tout $n \geqslant 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 1$,
- si $t > 1$ alors $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^n}{t^{2n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$.

Donc f_n converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction f est continue par morceaux.
Il reste à dominer cette suite de fonctions. Il est clair que la majoration de $|f_n(x)|$ va être différente suivant que $x \in]0, 1]$ ou $x > 1$. Soit $n \geqslant 2$:

- si $x > 1$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{2x^n}{x^{2n}} = \dfrac{2}{x^n} \leqslant \dfrac{2}{x^2}$.
- si $x \in]0, 1]$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Soit φ définie par $\varphi(x) = \dfrac{2}{x^2}$ si $x > 1$ et $\varphi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ si $x \in]0,1]$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, intégrable sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $n \geqslant 2$ et $x > 0$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée et

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2.$$

Ce qu'il faut savoir

Quelques pistes pour trouver une bonne fonction qui domine

La réponse n'est pas toujours simple mais on peut donner quelques idées générales.

- On commence par détecter les facteurs indépendants de n, on les factorise et on ne cherche surtout pas à les majorer pour simplifier l'écriture (par exemple en majorant $\dfrac{1}{1+t^2}$ par $\dfrac{1}{t^2}$ on crée un problème d'intégrabilité au voisinage de 0).
- Si la limite simple fait apparaître plusieurs intervalles, on peut chercher une domination sur chacun des intervalles (l'écriture d'une fonction dominante peut faire apparaître plusieurs intervalles).
- Il reste à majorer les termes qui dépendent de n. Plusieurs méthodes sont possibles : majoration directe (par exemple $|\sin nu|$ par $|nu|$ ou par 1), minoration d'un terme positif par 0 (au dénominateur), étude de la suite ou d'une fonction associée (en remplaçant n par une variable t dans $\mathbb{R}$), encadrement de $\dfrac{1}{n}$ entre 1 et 0...

Exercice 9.3

CCP PSI et MP 2007

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ bornée et telle que $f(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent en l'infini de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}\,dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(t) = f(t)e^{-nt}$. On note M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}^+$, $|f(t)e^{-nt}| \leqslant Me^{-t}$. Comme la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Cela permet de justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. L'application du théorème de convergence dominée donne seulement $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Pour déterminer un équivalent de I_n, on effectue le changement de variable linéaire $u \mapsto u/n$ dans I_n, ce qui est possible puisque la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On obtient $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u}\,du$. La fonction $g_n : u \mapsto f(\frac{u}{n})e^{-u}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$, vers la fonction continue $g : u \mapsto f(0)e^{-u}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $u \geqslant 0, |g_n(u)| \leqslant Me^{-u}$. Le théorème de convergence dominée entraîne

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(u)\,du = f(0)\int_0^{+\infty} e^{-u}\,du = f(0).$$

Puisque $f(0) \neq 0$, on obtient $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{f(0)}{n}$.

Exercice 9.4

(PSI)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(t) = \dfrac{t^n e^{-t}}{n!}$.

1. Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions (f_n). On note $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.
2. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.
3. Que peut-on en conclure ?

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la suite numérique $\left(\dfrac{t^n}{n!}\right)$ converge vers 0. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle. La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $f_n'(t) = (n-t)t^{n-1}\dfrac{e^{-t}}{n!}$. L'étude des variations de f_n donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un maximum pour f_n valant $f_n(n) = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$. La fonction f_n est positive, si bien que
$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = \frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \qquad \text{(formule de Stirling)}.$$
La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1$ (voir exercice 10.9 page 244), donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1$. En revanche $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0$.
3. La convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ n'est pas suffisante pour permuter limite et intégrale.

9.1.2 Permutation série-intégrale

Ce qu'il faut savoir

Théorème d'intégration terme à terme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I. Si
(i) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I,
(ii) la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est **continue par morceaux** sur I,
(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I,
(iv) la série numérique $\sum \int_I |f_n(t)|\, dt$ converge,

alors S est intégrable sur I et $\int_I S(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\, dt$.

Remarque
– La dernière hypothèse du théorème précédent est fondamentale (voir exercice 9.9, page 216)
– La convergence normale (et/ou uniforme - PSI) de la série de fonctions $\sum f_n$ n'est ni nécessaire, ni suffisante pour permuter somme et intégrale sur un intervalle non borné.

Exercice 9.5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2x^2}$

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\int_0^{+\infty} S(t)\, dt = \dfrac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

1. Soit $x > 0$. On a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x^2}$ et la série numérique $\sum f_n(x)$ converge. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Cela donne $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \dfrac{1}{n}$, et $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $a > 0$. Pour

tout $x \geqslant a$, on a $|f_n(x)| \leqslant f_n(a)$. Puisque $\sum f_n(a)$ converge, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Chacune des fonctions f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc S est continue sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$. Finalement S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$, et pour $A > 0$, on a

$$\int_0^A |f_n(t)|\, dt = \int_0^A f_n(t)\, dt = \frac{1}{n^2}\int_0^A \frac{1}{t^2 + \frac{1}{n}}\, dt = \frac{\sqrt{n}}{n^2}\operatorname{Arctan}(A\sqrt{n}).$$

On obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = \frac{\pi}{2n^{3/2}}$. La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Le théorème d'intégration terme à terme donne d'une part l'intégrabilité de S sur $\mathbb{R}_+^*$, et d'autre part $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\, dt = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$.

Exercice 9.6

Navale PC 2005, TPE MP 2006

1. Montrer que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$.
On note alors $\displaystyle\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$.

2. Montrer que, pour $t > 0$, $\displaystyle\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$.

3. En déduire que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{n^{x+1}}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et h_x la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$. La fonction h_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par croissances comparées, on a $h_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, et h_x est intégrable sur $[1, +\infty[$. De plus, $h_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ et $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x - 1 > -1$. Finalement h_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$.

2. Si $t > 0$, alors $|e^{-t}| < 1$ et $\displaystyle\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{e^t}\frac{1}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{e^t}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^x e^{-(n+1)t}$ est continue, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$ (même démonstration que dans la première question). La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, et pour tout $t > 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \frac{t^x}{e^t - 1}$.

La fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]0,+\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} t^x e^{-(n+1)t}\, dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n+1}\right)^x e^{-u} \frac{du}{n+1}$$

car $u \mapsto u/(n+1)$ est bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ et f_n est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui autorise le changement de variable. On obtient

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, dt = \frac{1}{(n+1)^{x+1}}\Gamma(x+1).$$

Comme $x+1 > 1$, la série $\sum \frac{1}{(n+1)^{x+1}}$ converge. Le théorème d'intégration terme à terme entraîne $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{n^{x+1}} = \Gamma(x+1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{x+1}}$.

Ce qu'il faut savoir

Dans ce genre d'exercices (transformation d'une intégrale en la somme d'une série), l'idée est de décomposer l'une des fonctions à l'aide d'une série de fonctions. On est souvent amené à utiliser un développement en série entière d'une fonction. Fréquemment, on utilise la somme de la série géométrique ou celle de la série exponentielle.

9.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 9.7

CCP PSI 2006, Mines-Ponts PC 2007, MP 2006

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\, dx$.

1. Quelle est la limite de I_n ?
2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dy$.

1. On appelle f_n la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f_n(x) = e^{-x^n}$. On étudie la convergence simple de cette suite de fonction :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \\ 1/e & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[1,+\infty[$ vers f, fonction continue par morceaux sur $[1,+\infty[$. De plus, pour tout $x \geqslant 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, on a $x^n \geqslant x$ et $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-x}$. Donc, pour tout $x \in [1,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leqslant e^{-x}$. Comme la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue et intégrable sur $[1, +\infty[$, le théorème de convergence dominée implique $\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt = 0$.

2. D'après ce qui vient d'être montré, la fonction f_n est continue et intégrable sur $[1, +\infty[$. L'application $\varphi : u \mapsto u^{1/n}$ est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$, de classe $\mathscr{C}^1$, donc $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{n} e^{-u} u^{1/n-1}\,du = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} u^{1/n}\frac{e^{-u}}{u}\,du.$

   On pose pour $u \geqslant 1$, $g_n(u) = u^{1/n}\frac{e^{-u}}{u}$. Puisque $u^{1/n} = e^{(\ln u)/n}$, on a, pour tout $u \geqslant 1$, $\lim_{n\to+\infty} g_n(u) = \frac{e^{-u}}{u}$. De plus, pour tout $u \geqslant 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|g_n(u)| \leqslant u\frac{e^{-u}}{u} = e^{-u}$ et $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Le théorème de convergence dominée entraîne $\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} g_n(u)\,du = \int_1^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du$. Cette dernière intégrale est non nulle (intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle sur $[1, +\infty[$), d'où $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_1^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du.$

Exercice 9.8

CCP PSI 2006

1. Montrer que pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on a $\frac{2t}{\pi} \leqslant \sin t$.
2. On pose, pour $n \geqslant 1$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \sin\frac{x}{n}\right)^n & \text{si} \quad x \in [0, \frac{n\pi}{2}] \\ 0 & \text{si} \quad x > \frac{n\pi}{2} \end{cases}$$

   Déterminer la limite des suites $(f_n(x))$ et $\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)$.

1. La fonction sinus est concave sur $[0, \pi/2]$. La corde qui passe par les points $(0, 0)$ et $(\pi/2, 1)$ d'équation $y = \frac{2}{\pi}x$ est sous la courbe représentative de sinus (sur $[0, \pi/2]$) et pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on a $\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n \leqslant \frac{2x}{\pi}$ alors $f_n(x) = 0$. Si $n > \frac{2x}{\pi}$, on a $x/n \in [0, \pi/2[$ donc $1 - \sin(x/n) > 0$, d'où

$$f_n(x) = \left(1 - \sin\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln(1 - \sin\frac{x}{n})\right).$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{x}{n} = 0$, on a lorsque n tend vers $+\infty$,

$$n\ln\left(1-\sin\frac{x}{n}\right) \sim -n\sin\frac{x}{n} \sim -n\frac{x}{n} = -x \text{ (même si } x=0).$$

La continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x} = f(x)$.
La suite (f_n) converge simplement vers une fonction continue f sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminons une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et indépendante de n qui domine la suite de fonctions (f_n) : $\forall x \in [0, \frac{n\pi}{2}[$, $x/n \in [0,\pi/2[$ et $-\sin(x/n) \in]-1,0]$.
On a également $\ln(1+u) \leqslant u$ si $u > -1$. D'où

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \exp\left(n(-\sin\frac{x}{n})\right) \leqslant \exp\left(n(-\frac{2x}{n\pi})\right) = \exp\left(-\frac{2x}{\pi}\right).$$

On note alors $\varphi(x) = \exp\left(-\frac{2x}{\pi}\right)$ pour $x \geqslant 0$. On a $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \varphi(x)$ si $x \in [0, \frac{n\pi}{2}]$ d'après ce qu'on vient de montrer, mais également si $x > \frac{n\pi}{2}$ puisqu'alors $f_n(x) = 0$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$. Comme la fonction φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, le théorème de convergence dominée implique

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi/2}\left(1-\sin(\frac{x}{n})\right)^n dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1.$$

Ce qu'il faut savoir

- Il est assez fréquent d'avoir une suite de fonctions non nulles sur un segment dont les bornes dépendent de n et nulles ailleurs. Il faut faire attention lors de l'étude de la convergence simple : on fixe x dans l'intervalle complet d'étude, on justifie que pour n assez grand, ce x se situe dans l'intervalle où f_n est non nulle et on utilise ainsi la bonne valeur pour $f_n(x)$.
- Lorsque la définition de la fonction f_n fait apparaître des intervalles dépendant de n, on fera attention à ce que la limite simple ne soit pas définie sur des intervalles qui dépendent encore de n, ce qui n'aurait pas de sens. La même remarque est valable pour la fonction qui domine : elle ne doit pas être définie sur des intervalles qui dépendent de n.

Exercice 9.9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa somme f.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que f l'est également.

3. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt$

4. Comparer $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

5. Que peut-on conclure ?

1. On voit apparaître deux séries géométriques de raisons e^{-x} et e^{-2x}. Pour $x > 0$, ces raisons sont dans $]0,1[$, et les deux séries convergent. On obtient alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - 2\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}} \\ &= \frac{1}{e^x-1} - \frac{2}{e^{2x}-1} = \frac{(e^x+1)-2}{(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{1}{1+e^x}\end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto e^{-ax}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour $a > 0$. Donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a d'une part,

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{e^{-nx}}{n} + \frac{2e^{-2nx}}{2n}\right]_0^A = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n} = 0,$$

d'autre part, on vérifie que $f_n(x) > 0$ si et seulement si $x \geqslant \dfrac{\ln 2}{n}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt &= \int_0^{\ln 2/n}\left(2e^{-2nx} - e^{-nx}\right)dx + \int_{\ln 2/n}^{+\infty}\left(e^{-nx} - 2e^{-2nx}\right)dx \\ &= \frac{1}{n}\left[e^{-nx} - e^{-2nx}\right]_0^{\ln 2/n} + \frac{1}{n}\left[e^{-2nx} - e^{-nx}\right]_{\ln 2/n}^{+\infty} \\ &= \frac{2}{n}\left(e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2}\right) = \frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

4. On déduit de la question précédente que $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 0$. Par ailleurs, on a pour $A > 0$, $\int_0^A \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^A \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^A$, d'où $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \ln 2$.

5. Cela montre d'une part que le théorème d'intégration terme à terme ne doit pas s'appliquer ici mais surtout que l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n(t)|\,dt$ ne peut pas être remplacée par la convergence de $\sum \int_I f_n(t)\,dt$.

Exercice 9.10

CCP PSI 2006

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs réelles.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\, dx = f(1)$.

On aimerait bien intégrer par parties, en intégrant $x \mapsto x^n$ en $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ pour compenser le facteur n. Mais c'est impossible sans hypothèse supplémentaire puisqu'il faudrait alors dériver f. On utilise alors le théorème de convergence dominée après avoir transformé l'intégrale, qu'on note I_n. L'application $u \mapsto u^{1/n}$ est une bijection $\mathscr{C}^1$ de $]0, 1]$ dans lui-même (on doit alors considérer l'intégrale comme une intégrale sur l'intervalle $]0, 1]$) et puisque $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur $[0, 1]$, on peut effectuer le changement de variable pour obtenir

$$I_n = n\frac{1}{n}\int_0^1 uf(u^{1/n})u^{1/n-1}\, du = \int_0^1 u^{1/n} f(u^{1/n})\, du$$

On pose $g_n(u) = u^{1/n} f(u^{1/n})$. Pour tout $u \in\ ]0, 1]$, $\lim_{n\to+\infty} u^{1/n} = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} g_n(u) = f(1)$. Pour la domination, on se donne M un majorant de $|f|$ sur $[0, 1]$ (il existe puisque f est continue sur ce segment), ce qui permet d'écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $u \in\ ]0, 1]$, $|g_n(u)| \leqslant M$ avec $u \mapsto M$ évidemment intégrable sur $]0, 1]$. Le théorème de convergence dominée permet de conclure $\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 f(1)\, du = f(1)$.

Remarque

On fera bien attention aux différents passages entre le segment $[0, 1]$ et l'intervalle $]0, 1]$ afin de pouvoir appliquer les théorèmes (changement de variable, existence d'un majorant, intégrabilité...)

Exercice 9.11

Mines-Ponts PC 2007

Déterminer la limite de la suite $I_n = n \int_0^1 \ln(1 + t^n)\, dt$.

On pourrait être tenté par une intégration par parties pour faire apparaître un $1/n$ mais cela ne semble pas évident (le seul sens immédiat consiste à dériver $t \mapsto \ln(1+t^n)$ ce qui a l'effet contraire). On essaie alors un changement de variable $u = t^n$, ce qui est possible car $u \mapsto u^{1/n}$ est bijective et $\mathscr{C}^1$ de $]0, 1]$ dans lui-même et $t \mapsto \ln(1 + t^n)$ est continue sur $[0, 1]$ donc intégrable sur $]0, 1]$. On obtient

$$I_n = n \int_0^1 \ln(1+u)\left(\frac{1}{n}u^{-1+\frac{1}{n}}\right) du = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}\, du.$$

On note alors $f_n : u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u^{1-1/n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in]0,1]$. Cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction $f : u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ sur $]0,1]$ et

$$\frac{1}{u^{1-1/n}} = \exp((1-1/n)(-\ln u)) \leqslant \exp(-\ln u) = 1/u$$

puisque $u \in]0,1]$ et $-\ln u \geqslant 0$. Donc, pour tout $u \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|g_n(u)| \leqslant \dfrac{\ln(1+u)}{u}$. Cette dernière fonction est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1. Donc elle est intégrable sur $]0,1]$. Le théorème de convergence dominée donne alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du$.

Exercice 9.12

CCP PSI 2005

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2 \ln t}{t^2-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Lorsque $0 < t < 1$, on a $\dfrac{t^2\ln t}{t^2-1} = -(t^2\ln t)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} t^{2n}\ln t$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\ln t\,dt$. Cette intégrale a un sens puisque la fonction $t \mapsto t^{2n}\ln t$ qui est continue sur $]0,\ 1]$ se prolonge par continuité en 0. On calcule cette intégrale en intégrant par parties. Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_\varepsilon^1 t^{2n}\ln t\,dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ln t\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{2n}}{2n+1}\,dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ln t - \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right]_\varepsilon^1.$$

Lorsque ε tend vers 0, on obtient $I_n = -\dfrac{1}{(2n+1)^2}$. Puisque $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4n^2}$, la série $\sum I_n$ converge. De plus $\displaystyle\int_0^1 \left|t^{2n}\ln t\right|\,dt = |I_n|$ car la fonction intégrée est de signe fixe. Il résulte alors du théorème d'intégration terme à terme, que la fonction $x \mapsto \dfrac{t^2\ln t}{t^2-1}$ est intégrable sur $]0,\ 1[$ et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2\ln t}{t^2-1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} I_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 9.13

CCP PSI 2007

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels.

1. Montrer que la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!}x^n$ a un rayon de convergence infini. On note f la somme de la série entière.

2. Montrer que pour $x > 1$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}$.

1. Soit M un majorant de la suite $(|a_n|)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|\dfrac{a_n}{n!}\right| \leqslant \dfrac{M}{n!}$. La série entière $\sum \dfrac{M}{n!}x^n$ a un rayon de convergence infini, et par théorème de comparaison, la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!}x^n$ a un rayon de convergence infini.

2. Soit $x > 1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t)e^{-xt} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}t^n e^{-xt}$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(t) = \dfrac{a_n}{n!}t^n e^{-xt}$. Chacune des fonctions f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et la somme de cette série de fonctions est la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\,dt$. La suite (I_n) vérifie la relation de récurrence $I_n = \dfrac{n}{x}I_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ (une intégration par partie simple donne ce résultat) si bien que pout tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $I_n = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$. On a alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt = \frac{|a_n|}{n!}I_n = \frac{|a_n|}{x^{n+1}} \leqslant \frac{M}{x^{n+1}}$. Puisque $\dfrac{1}{x} \in [0, 1[$, la série géométrique $\sum \dfrac{M}{x^{n+1}}$ converge. Le théorème d'intégration terme à terme donne le résultat.

Exercice 9.14

Mines-Ponts PC 2007, CCP PC 2006

1. On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^p$. Justifier l'existence de $I_{n,p}$ et déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n,p-1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

1. Pour n et p dans $\mathbb{N}$, on définit sur $]0, 1]$ la fonction $f_{n,p}$ par $f_{n,p}(x) = x^n(\ln x)^p$. Elle est continue sur $]0, 1]$ et se prolonge par continuité par 0 en 0 lorsque $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 0$, la fonction $x \mapsto (\ln x)^p$ est négligeable devant $x \mapsto x^{-1/2}$ lorsque x

tend vers 0. Cela justifie l'existence de $I_{n,p}$. Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in]0,1[$. Alors

$$\int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^p \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^p\right]_\varepsilon^1 - \frac{p}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^{n+1}\frac{(\ln x)^{p-1}}{x}\, dx$$

ce qui, donne lorsque ε tend vers 0, $I_{n,p} = -\dfrac{p}{n+1} I_{n,p-1}$. Une récurrence simple donne alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n,n} = (-1)^n \dfrac{n!}{(n+1)^n} I_{n,0} = (-1)^n \dfrac{n!}{(n+1)^{n+1}}$.

2. Pour tout $x \in]0,1]$, on a $x^x = \exp(x \ln x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}$. On note alors $f_n(x) = \dfrac{(x \ln x)^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1]$. La série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1]$ et la somme de cette série est la fonction continue $x \mapsto x^x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de signe fixe sur $]0,1]$, ce qui donne $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\, dx = \left|\int_0^1 f_n(x)\, dx\right|$. La question précédente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\, dx = \frac{1}{n!}\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$. La série $\displaystyle\sum \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ converge car $\dfrac{1}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$ lorsque $n \geqslant 1$. Le théorème d'intégation terme à terme peut s'appliquer. Cela donne

$$\int_0^1 x^x \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Exercice 9.15

Centrale MP 2006

1. Prouver l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th} x)\, dx$.

2. Montrer que $I = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

1. Soit $f : x \mapsto \ln(\operatorname{th} x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\operatorname{th} x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et puisque leur limite commune est nulle, on a $f(x) \sim \ln x$ au voisinage de 0 et f est intégrable sur $]0,1]$. Pour $x > 0$, $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$. Puisque $\operatorname{th} x$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$, on a $\ln(\operatorname{th} x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \operatorname{th} x - 1 = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} -2e^{-2x}$. Finalement f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc $]0, +\infty[$.

2. On reprend la transformation précédente, puisque $e^{-2x} \in]0,1[$ si $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}\ln(\operatorname{th} x) &= \ln(1-e^{-2x}) - \ln(1+e^{-2x}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-2nx}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{-2nx}}{n} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} (1+(-1)^{n-1}) \frac{e^{-2nx}}{n} = -\sum_{p=0}^{+\infty} 2\frac{e^{-2(2p+1)x}}{2p+1}.\end{aligned}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $u_p : x \mapsto 2\dfrac{e^{-2(2p+1)x}}{2p+1}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, et on a

$$\int_0^{+\infty} |u_p(x)|\, dx = \int_0^{+\infty} u_p(x)\, dx = \frac{2}{2(2p+1)} \frac{1}{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

Ainsi, la série $\sum u_p$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et $f = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En outre, la série $\sum \int_0^{+\infty} |u_p(t)|\, dt$ converge. Cela prouve de nouveau que f est intégrable sur I et $\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th} x)\, dx = -\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$. En utilisant la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, on obtient

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = S - \frac{1}{4}S = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ce qu'il faut savoir

Méthode

La dernière hypothèse du théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle I peut être mise en défaut (voir exercice suivant). Dans ce cas, on peut appliquer au moins deux autres méthodes. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, on pose $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)$.

1. On permute d'abord la somme finie et l'intégrale. On se ramène ainsi à une permutation entre une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et une intégrale. On applique alors le théorème de convergence dominée à la **suite de fonctions** (S_n).
2. On écrit $S(t) = S_n(t) + R_n(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, puis

$$\int_I S(t)\, dt = \int_I S_n(t)\, dt + \int_I R_n(t)\, dt.$$

On utilise la linéarité de l'intégrale sur la somme finie et on montre que $\lim_{n\to+\infty}\int_I R_n(t)\,dt = 0$, par exemple en majorant le reste.

Exercice 9.16

CCP PSI 2007 K

1. Montrer que $S : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}$ est définie et continue sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

2. Prouver l'existence et calculer $\int_0^{+\infty} S(t)\,dt$. On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction u_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u_n(t) = \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}$. Si $t > 0$, alors la série $\sum u_n(t)$ est une série alternée qui vérifie le critère spécial des séries alternées. Ainsi S est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$ et $R_n = S - S_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $a > 0$, pour tout $t \in [a, +\infty[$, on a $|u_n(t)| \leqslant \frac{1}{1+n^2a^2}$, terme général d'une série convergente. La série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ et S est continue sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, donc S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On s'attend à utiliser une permutation série-intégrale. Les fonctions u_n sont continues et intégrables sur $[0, +\infty[$. Pour $A > 0$, on a $\int_0^A \frac{1}{1+n^2t^2}\,dt = \frac{\operatorname{Arctan}(nA)}{n}$ donc $\int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt = \frac{\pi}{2n}$. On constate que $\int_I |u_n(t)|\,dt = \frac{\pi}{2n}$, terme général d'une série divergente, donc on ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme. On applique les méthodes décrites précédemment :

   - *par majoration du reste :* si $t > 0$, la série $\sum u_n(t)$ est une série qui vérifie le critère spécial des séries alternées. Cela permet d'obtenir la majoration $|R_n(t)| \leqslant |u_{n+1}(t)|$. Ainsi, la fonction R_n est intégrable sur I et on a $\left|\int_I R_n(t)\,dt\right| \leqslant \int_I |u_{n+1}(t)|\,dt = \frac{\pi}{2(n+1)}$. On en déduit $\lim_{n\to+\infty}\int_I R_n(t)\,dt = 0$. Puisque $S = S_1 + R_1$, S est également intégrable sur I. De plus, pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\int_I S(t)\,dt &= \int_I S_n(t)\,dt + \int_I R_n(t)\,dt = \sum_{p=1}^{n} \int_I u_p(t)\,dt + \int_I R_n(t)\,dt \\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p} + \int_I R_n(t)\,dt.\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_I S(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p} = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

- *par le théorème de convergence dominée :* pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut de nouveau écrire $\displaystyle\int_I S_n(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p}$. La suite de fonctions continues (S_n) converge simplement sur I vers la fonction continue S. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme S_n est la somme partielle d'une série alternée qui vérifie le critère spécial des séries alternées, si bien que $|S_n(t)| \leqslant |u_1(t)|$ pour tout $t > 0$. La fonction $|u_1|$ est continue et intégrable sur I. Le théorème de convergence dominée appliqué à la suite (S_n) donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I S_n(t)\,dt = \int_I S(t)\,dt$, ce qui redonne le résultat.

Exercice 9.17

CCP PC 2006

On note $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt}\cos(xt)\,dt$ après avoir justifié son existence.
3. Montrer que $\displaystyle f(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+e^t}\,dt$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle u_n(x) = (-1)^n\frac{n}{n^2+x^2}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $g : t \mapsto \dfrac{t}{t^2+x^2}$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ et pour tout $t \geqslant 1$, $g'(t) = \dfrac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}$ donc g est décroissante sur $[|x|,+\infty[$. On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées, ce qui prouve la convergence simple de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}$. La fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout

$x \in \mathbb{R}$, $u_n'(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{2nx}{(n^2+x^2)^2}$. On peut alors prouver au choix la convergence normale de $\sum u_n'$ sur $[-A, A]$, où $A > 0$, puisque pour $x \in [-A, A]$, $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{2nA}{n^4} = \dfrac{2A}{n^3}$ ou directement sur $\mathbb{R}$ en utilisant $|2nx| \leqslant x^2 + n^2$ et ainsi $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2+x^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. On montre ainsi que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $|e^{-nt}\cos(xt)| \leqslant e^{-nt}$ et $t \mapsto e^{-nt}$ est intégable sur $\mathbb{R}^+$. Cela prouve l'existence de I_n.

$$I_n = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(n-ix)t}\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{n-ix}\right) = \frac{n}{n^2+x^2}.$$

3. D'après la question prédédente,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-nt}\cos(xt)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{-nt}\cos(xt)\,dt.$$

On pose $h_n(t) = (-1)^n e^{-nt}\cos(xt)$. La fonction h_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. En revanche, le calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h_n(t)|\,dt$ n'est pas immédiat. Une majoration rapide serait $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h_n(t)|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt = 1/n$ qui donne un terme général de série divergente. On note, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \sum_{k=1}^{n} h_k(t) = \cos(xt)\sum_{k=1}^{n}(-e^{-t})^k \\ &= \cos(xt)(-e^{-t})\frac{1-(-1)^n e^{-nt}}{1+e^{-t}} = -\cos(xt)\frac{1-(-1)^n e^{-nt}}{1+e^t} \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir $|S_n(t)| \leqslant \dfrac{2}{1+e^t}$ pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque S_n est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ qui converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction continue $t \mapsto -\dfrac{\cos(xt)}{1+e^t}$ et que $t \mapsto \dfrac{2}{1+e^t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de convergence dominée donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_n(t)\,dt = -\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+e^t}\,dt$, avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty} h_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^n I_n = f(x)$.

Exercice 9.18

Navale MP 2005, CCP PC 2007

(*Dans cet exercice, on pourra utiliser* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-nt}\,dt$ et la calculer.

2. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}}\,dt$ et la calculer (*pour le calcul, on utilisera le théorème de convergence dominée*).

3. On définit pour $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(e^{\sqrt{t}}-1)}$.
   - Justifier l'existence de f, montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer f'.
   - Montrer que pour tout $t > 0$, $e^t - 1 \geqslant t$ et en déduire $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 0$.
   - Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.
   - Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : t \mapsto te^{-nt}$ définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Puisque $f_n(t)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Soit $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A te^{-nt}\,dt = \left[-\frac{te^{-nt}}{n}\right]_0^A + \frac{1}{n}\int_0^A e^{-nt}\,dt = -\frac{Ae^{-nA}}{n} - \frac{1}{n^2}\left[e^{-nt}\right]_0^A$.
Lorsque A tend vers $+\infty$, on obtient $I_n = \dfrac{1}{n^2}$.

2. Soit $a : t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}}$. La fonction a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on obtient $a(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et a est intégrable sur $]0,1]$. De plus $a(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{t}} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Donc a est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. A l'aide du changement de variable $t = u^2$ ($u \mapsto u^2$ est une bijection $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même), on obtient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} 2u\,du$. Pour $u > 0$, $e^{-u} \in\,]0,1[$ et $\dfrac{1}{1-e^{-u}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nu}$. Ainsi
$$I = 2\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} ue^{-(n+1)u}\right)du = 2\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} ue^{-nu}\right)du.$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme est la fonction continue $g : u \mapsto \dfrac{ue^{-u}}{1-e^{-u}}$. On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(u)|\,du = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,du = \frac{1}{n^2}$, donc $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(u)|\,du$ converge. Le théorème d'intégration terme à terme permet d'écrire

$$I = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u)\,du = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

3. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(t) = \dfrac{1}{t(e^{\sqrt{t}}-1)}$.

- Soit $x > 0$. La fonction h est continue sur $[x, +\infty[$ et $h(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc h est intégrable sur $[x, +\infty[$. Pour $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\,dt - \int_1^x h(t)\,dt$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f' = -h$.
- Soit $t > 0$. En appliquant l'égalité des accroissements finis sur $[0, t]$, il existe $c > 0$ tel que $e^t - e^0 = e^c(t-0) \geqslant t$. Cela donne $0 \leqslant h(t) \leqslant \dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ puis $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$, et $0 \leqslant xf(x) \leqslant 2\sqrt{x}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 0$.
- Pour $x > 0$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{e^{\sqrt{t}}-1}$ (cette majoration est possible car la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{e^{\sqrt{t}}-1}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$). De plus, on peut écrire $\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt - \int_1^x \varphi(t)\,dt$, si bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 0$. Par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.
- f est positive, la question de l'intégrabilité revient à l'existence d'une limite finie pour $\displaystyle\int_\varepsilon^A f(t)\,dt$ lorsque ε tend vers 0 et A vers $+\infty$. On intègre par parties afin d'utiliser tous les résultats précédents :

$$\int_\varepsilon^A f(x)\,dx = Af(A) - \varepsilon f(\varepsilon) - \int_\varepsilon^A xf'(x)\,dx = Af(A) - \varepsilon f(\varepsilon) + \int_\varepsilon^A \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}.$$

Avec $\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}-1} = \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{1-e^{-\sqrt{x}}}$, on obtient, lorsque ε tend vers 0 et A vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{1-e^{-\sqrt{x}}}\,dx = \frac{\pi^2}{3}$.

9.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 9.19

CCP PC 2006

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$, et f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{E(x)}{n}\right)^n & \text{si} \quad 0 \leqslant x < n+1 \\ 0 & \text{si} \quad x \geqslant n+1 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx.$$

2. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n).
3. En déduire la limite de (u_n).

1. On commence par un changement d'indice pour transformer la première somme (k devient $n - k$) et $u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$. On peut ajouter le terme d'indice n qui est nul. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, lorsque $x \in [k, k+1[$, on a $f_n(x) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$ et $\int_k^{k+1} f_n(x)\, dx = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$ puis

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{n+1} f_n(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f_n(x)\, dx = u_n.$$

2. Soit $x > 0$. Dès que $n > x - 1$, on a $f_n(x) = \left(1 - \frac{E(x)}{n}\right)^n$, ce qui donne $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = e^{-E(x)}$. Cette limite est valable si $x = 0$ et la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \mapsto \exp(-E(x))$.

3. Pour tout $u < 1$, on a $\ln(1-u) \leqslant -u$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, n[$, on a $\frac{E(x)}{n} < 1$, par conséquent,

$$0 \leqslant f_n(x) = \exp\left(n \ln(1 - \frac{E(x)}{n}\right) \leqslant \exp(-n\frac{E(x)}{n}) = \exp(-E(x)).$$

La fonction f_n est nulle à la fois sur $[n, n+1]$ et sur $[n+1, +\infty[$. On a donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geqslant 0, |f_n(x)| \leqslant \exp(-E(x)).$$

La fonction $g : x \mapsto \exp(-E(x))$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, et puisque $E(x) \geqslant x-1$ pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant \exp(1-x)$, donc g est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Le thérorème de convergence dominée entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^{+\infty} g(x)\,dx$. Puisque g est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} e^{-k}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \frac{1}{1-1/e} = \frac{e}{e-1}.$$

Exercice 9.20

Mines-Ponts PC 2006 K

Étudier la convergence de la suite $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{(1+x^2)^n}\,dx$.

Il n'est pas possible d'appliquer directement le théorème de convergence dominée ici puisque la fonction qu'on intègre vaut $\sqrt{n}$ en 0 et il va être impossible d'en trouver un majorant indépendant de n. La difficulté est de voir comment supprimer le $\sqrt{n}$ tout en faisant apparaître une suite de fonctions plus ou moins connues. Souvent, lorsqu'un exposant n apparaît, on peut essayer de faire apparaître des suites du type $(1+u/n)^n$ qui vont converger vers e^u. Ici on va appliquer le changement de variable $x = u/\sqrt{n}$. La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{n}}{(1+x^2)^n}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ et $u \mapsto u/\sqrt{n}$ est bijective et $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$. On a donc

$$I_n = \int_0^{+\infty} \sqrt{n}\frac{1}{(1+u^2/n)^n}\frac{1}{\sqrt{n}}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2/n)^n}\,du.$$

Cette écriture semble plus confortable pour appliquer le théorème de convergence dominée. On définit alors $f_n(u) = \frac{1}{(1+u^2/n)^n}$ pour $u \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(u) = 1/(e^{u^2}) = e^{-u^2}$ pour tout $u \geqslant 0$. Il ne reste plus qu'à minorer $(1+u^2/n)^n$ indépendamment de n. En écrivant $\exp(n\ln(1+u^2/n))$, on n'obtient qu'une majoration par $\exp(u^2)$ ce qui ne convient pas. En revanche, on peut développer $(1+u^2/n)^n$. Tous les termes sont positifs, ce qui donne

$$(1+\frac{u^2}{n})^n \geqslant 1 + n\frac{u^2}{n} = 1+u^2$$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geqslant 0, \frac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n} \leqslant \frac{1}{1+u^2}$, et $u \mapsto 1/(1+u^2)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de convergence dominée entraîne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{(1+x^2)^n}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\frac{u^2}{n})^n}\,du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du (= \frac{\sqrt{\pi}}{2}).$$

Exercice 9.21

Mines-Ponts PSI 2006

1. Montrer que pour tout $u \in [0, 1[$, on a $\ln(1-u) \leqslant -u$.
2. Soit $\alpha < 1$ et $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^{\alpha t}\, dt$. Montrer que la suite I_n converge et donner sa limite.

1. On peut étudier les variations de la différence, utiliser l'égalité des accroissements finie (avec $f(x) = \ln(1-x)$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{1-x} \leqslant -1$, si $u \in]0, 1[$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(u) - f(0) = \ln(1-u) = f'(c).u \leqslant -1.u$) ou encore utiliser un développement en série entière car $\forall u \in [0, 1[$,
$$\ln(1-u) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n} = -u - u^2/2 - \ldots \leqslant -u.$$
2. Afin d'utiliser le théorème de convergence dominée, on doit se ramener sur un intervalle fixe. Soit
$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n e^{\alpha t} & \text{si } t \in [0, n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$
f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ (limite nulle à droite et à gauche de n) et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque continue sur $[0, n]$ et nulle au delà de n. Ainsi $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$.
On étudie la convergence simple de la suite de fonctions. Soit $t \geqslant 0$. Pour $n > t$, on a $f_n(t) = \exp\left(n \ln(1 - \dfrac{t}{n})\right) e^{\alpha t}$ et $n \ln(1 - \dfrac{t}{n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} -t$. Donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(t) = e^{-t} e^{\alpha t} = e^{(\alpha-1)t}$. En ce qui concerne la domination, on utilise la première question. Si $t \in [0, n]$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-nt/n} e^{\alpha t} = e^{(\alpha-1)t}$. Si $t > n$, $f_n(t) = 0 \leqslant e^{(\alpha-1)t}$. Donc, pour tout $t \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{(\alpha-1)t}$ et puisque $\alpha - 1 < 0$, $t \mapsto e^{(\alpha-1)t}$ est intégable sur $\mathbb{R}^+$. On obtient
$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)t}\, dt = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Remarque

Une erreur fréquente est de majorer $f_n(t)$ par $e^{(\alpha-1)t}$ sur $[0, n]$ et par 0 sur $[n, +\infty[$. La fonction qui domine dépend encore de n, même si cela n'apparaît pas sur les valeurs prises par cette fonction.

Intégrales dépendant d'un paramètre

10

10.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

Ce qu'il faut savoir

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et une application $h : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \rightarrow & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t). \end{array} \right.$

Théorème de continuité : si

(i) pour tout $x \in A, t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I (*définition*),

(ii) pour tout $t \in I, x \mapsto h(x,t)$ est continue sur A (*régularité*),

(iii) il existe une fonction φ définie, continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall (x,t) \in A \times I, |h(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ (*domination*),

alors l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\,dt \end{array} \right.$ est définie et continue sur A.

Théorème de dérivation : si

(i) pour tout $x \in A, t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I (*définition*),

(ii) pour tout $t \in I, x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A (*régularité*),

(iii) pour tout $x \in A, t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I,

(iv) il existe une fonction ψ définie, continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall (x,t) \in A \times I, |\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)| \leqslant \psi(t)$ (*domination*),

alors l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\,dt \end{array} \right.$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A **et** pour tout $x \in A$, $f'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Remarque

- L'intégrabilité dans l'hypothèse de définition du théorème de continuité n'est pas nécessaire puisqu'elle est conséquence de la domination par une fonction intégrable. En revanche il ne faut pas oublier de vérifier la continuité par morceaux. Cependant dans beaucoup d'exercices où l'intervalle A est à déterminer, la première hypothèse revient exactement à se poser la question de l'ensemble de définition de f.

- Il est important de comprendre la double conclusion du théorème de dérivation. Sous les hypothèses données, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ et on connait sa dérivée. Une telle fonction peut-être de classe $\mathscr{C}^1$ sans que sa dérivée soit donnée par $f'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Exercice 10.1

CCP PSI 2007, CCP PC 2006

1. Étudier l'existence, la continuité et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de
$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt.$$
2. Déterminer une équation différentielle simple vérifiée par f et en déduire une valeur simple pour $f(x)$ (on pourra admettre que $f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$).

1. On définit $h(x,t) = e^{-t^2}\cos(xt)$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$.
   - *Existence :* soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ on a $|e^{-t^2}\cos(xt)| \leqslant e^{-t^2}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (par exemple parce qu'elle est négligeable devant $t \mapsto e^{-t}$ en $+\infty$). Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, ce qui revient à dire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   - *Continuité :* on applique le théorème de continuité. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (et intégrable sur $\mathbb{R}^+$) et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, |h(x,t)| \leqslant e^{-t^2} = \varphi(t)$, et φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
   - *Dérivabilité :* La fonction $t \mapsto h(x,t)$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -t\sin(xt)e^{-t^2}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = te^{-t^2}|\sin(xt)| \leqslant te^{-t^2} = \psi(t),$$
   où ψ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (par exemple parce que $\psi(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(\frac{1}{t^2})$).

   Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin(xt)e^{-t^2}\,dt$.

Remarque

On peut évidemment se contenter de montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$, sans établir d'abord la continuité. Dans ce cas, on ne doit pas oublier de prouver l'intégrabilité de $t \mapsto h(x,t)$ sur $\mathbb{R}^+$ pour x fixé dans $\mathbb{R}$.

2. La valeur obtenue pour $f'(x)$ nous invite à nous diriger vers une intégration par parties (on dispose d'une primitive immédiate de $t \mapsto te^{-t^2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $u : t \mapsto \frac{1}{2}e^{-t^2}$ et $v : t \mapsto \sin(xt)$ sont définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Soit $A > 0$, on peut alors écrire
$$\int_0^A \sin(xt)\left(-te^{-t^2}\right)\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin(xt)e^{-t^2}\right]_0^A - \frac{x}{2}\int_0^A \cos(xt)e^{-t^2}\,dt,$$
ce qui donne, lorsque A tend vers $+\infty$, $f'(x) = -\frac{x}{2}f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La résolution de cette équation différentielle donne
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)e^{-x^2/4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2/4}.$$

Ce qu'il faut savoir

Remarques autour de la fonction dominante

On se place dans le cas du théorème de continuité (les remarques sont identiques pour le théorème de dérivation).

- La meilleure fonction possible est donnée par $\varphi_1(t) = \sup_{x\in A}|f(x,t)|$, dans le sens où il n'est pas possible de trouver une fonction inférieure à celle-ci qui vérifie l'hypothèse de domination. Si cette fonction n'est pas intégrable sur I, alors il est impossible d'appliquer le théorème de continuité, on peut se tourner alors vers la domination locale (voir exercice 10.4, page 235 et remarque qui suit page 237).
- Pour trouver une dominante, on peut décomposer f en facteurs et majorer séparément les facteurs. Lorsqu'un facteur ne dépend pas de la première variable (x avec les notations précédentes), la meilleure solution est de ne surtout pas chercher à le majorer, cela ne peut que créer des problèmes d'intégrabilité supplémentaires (par exemple on ne majore pas $\frac{t}{1+t^2}$ par $\frac{1}{t}$, car cela crée une difficulté d'intégration en 0 qui n'existait pas avant).

Exercice 10.2

Mines-Ponts MP 2007

Existence et calcul de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}\,dt$.

Si on peut appliquer le théorème de dérivation, on pourra alors calculer assez facilement $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}\,dt$. Soit $h(x,t) = \dfrac{\sin(xt)e^{-t}}{t}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_x : t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. $g_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{xt}{t} = x$ et g_x admet une limite finie en 0. Enfin $g_x(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{-t})$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction g_x est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on montre ainsi la définition de f sur $\mathbb{R}$). Pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$ ainsi que $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}$. Puisque $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de dérivation s'applique et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}\,dt$. On calcule cette intégrale facilement :

$$f'(x) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(1+ix)t}\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Puisque $f(0) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{Arctan} x$.

Exercice 10.3

CCP PC 2007

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ où $f(x,t) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$.

1. Vérifier que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
2. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.
3. Exprimer pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F'(x)$ sans le symbole $\displaystyle\int$.
   On pourra utiliser sans la démontrer l'identité suivante :
   $$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+t^2x^2}\right).$$
   En déduire le calcul de $F(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$, puis pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 dt$.

1. Pour montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{xt}{t} = x$ et f_x est intégrable sur $]0,1]$ car prolongeable par continuité en 0. De plus, pour tout $t > 0$, on a $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{\pi/2}{t^3}$, donc f_x est

intégrable sur $[1,+\infty]$. Finalement f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et F est définie sur $\mathbb{R}$. Comme Arctan est impaire, F est impaire et il suffit d'étudier F sur $[0,+\infty[$.

2. Pour tout $t \in]0,+\infty[$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$.
L'application $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de dérivation entraîne que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et également, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\,dt$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$ et $x \neq 1$, en utilisant l'identité donnée ainsi que l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ des fonctions qui apparaissent dans cette identité,
$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2} \lim_{A\to+\infty} [\operatorname{Arctan} t - x \operatorname{Arctan}(xt)]_0^A = \frac{\pi}{2}\frac{1-x}{1-x^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+x}.$$
Par ailleurs, F' est continue sur $[0,+\infty[$, donc pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a $F'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Sachant que $F(0) = 0$, on a alors pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x)$. Puisque F est impaire, on a $F(x) = -F(-x) = -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x)$ lorsque $x < 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors $F(x) = \operatorname{signe}(x)\dfrac{\pi}{2}\ln(1+|x|)$.

3. En intégrant par parties, on trouve, si $A > 0$,
$$2\int_0^A \frac{\operatorname{Arctan} t}{t(1+t^2)}\,dt = \left[\frac{(\operatorname{Arctan} t)^2}{t}\right]_0^A + \int_0^{+A} \frac{(\operatorname{Arctan} t)^2}{t^2}\,dt.$$
Lorsque A tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 dt = 2F(1) = \pi \ln 2.$

Exercice 10.4

D'après plusieurs concours

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,dt.$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I =]0,+\infty[$.
2. Déterminer f' et calculer cette intégrale. On déterminera des constantes a et b telles que $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\right) = a\dfrac{t}{1+t^2} + b\dfrac{t}{1+x^2t^2}$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

On note $h(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, on a $|h(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ où $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

   la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$. Le meilleur majorant possible de cette dernière fonction, indépendant de $x \in \mathbb{R}$, est $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t}{1+t^2}$. Mais $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on ne peut donc pas appliquer le théorème de dérivation sur $\mathbb{R}$. On remarque que pour $x = 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(0,t) = \dfrac{t}{1+t^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Il est donc impossible d'appliquer le théorème de dérivation sur un intervalle contenant 0. On choisit alors $a > 0$. On a

$$\forall x \in [a,+\infty[, \forall t \in \mathbb{R}^+, \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{t}{(1+a^2t^2)(1+t^2)} = \psi(t).$$

   Cette fonction ψ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (continue sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente à $t \mapsto 1/(a^2t^3)$ lorsque t tend vers $+\infty$). De plus $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}^+$. Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ avec, pour tout $x \geqslant a$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,dt$. Cette dérivée est valable sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$. Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et donc sur $\mathbb{R}^*$ par parité). La fonction f' est positive sur $\mathbb{R}^+$ et f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. On a déjà montré que pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,dt$. On décompose la fraction rationnelle en éléments simples. Pour $x \neq 1$, on obtient $\dfrac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \dfrac{1}{1-x^2}\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{x^2}{1-x^2}\dfrac{t}{1+x^2t^2}$. Soit $A > 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,dt &= \frac{1}{2(1-x^2)}\ln(1+A^2) - \frac{1}{2(1-x^2)}\ln(1+x^2A^2)\\ &= \frac{1}{2(1-x^2)}\ln\left(\frac{1+A^2}{1+x^2A^2}\right).\end{aligned}$$

   La limite lorsque A tend vers $+\infty$ est $\dfrac{1}{2(1-x^2)}\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$. La fonction f' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $f'(1) = \lim\limits_{x\to1} f'(x) = \dfrac{1}{2}$.

3. f est croissante, elle admet donc une limite en $+\infty$, finie ou infinie. On la note ℓ. Lorsque x devient grand, le terme $\operatorname{Arctan}(xt)$ se rapproche de $\pi/2$ (sauf pour $t=0$). Pour tout $x>0$, $f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi^2}{4}$. On en déduit que la limite ℓ est finie et $\ell \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}$. On propose deux méthodes pour déterminer ℓ.

   - Soit $a>0$. On a $f(x) \geqslant \displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan} xt}{1+t^2}\,dt \geqslant \operatorname{Arctan}(ax)\int_a^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, on obtient la minoration $\ell \geqslant \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$. Cette minoration est valable pour tout $a>0$, donc lorsqu'on fait tendre a vers 0, on obtient $\ell \geqslant \dfrac{\pi^2}{4}$. Finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\pi^2}{4}$.
   - Puisque f admet une limite finie ℓ en $+\infty$, on a par exemple, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n)=\ell$. Or $f(n)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan}(nt)}{1+t^2}\,dt$. Soit $g_n(t)=\dfrac{\operatorname{Arctan}(nt)}{1+t^2}$. La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$, la suite (g_n) converge simplement vers $t\mapsto\dfrac{\pi/2}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\geqslant 0$, $|g_n(t)|\leqslant\dfrac{\pi/2}{1+t^2}$. La fonction $t\mapsto\dfrac{\pi/2}{1+t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc le théorème de convergence dominée entraîne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n)=\int_0^{+\infty}\frac{\pi/2}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi^2}{4}=\ell$.

Ce qu'il faut savoir

domination locale

Lorsqu'on ne parvient pas à appliquer les théorèmes de continuité et de dérivabilité sur un intervalle A (les fonctions majorantes obtenues ne sont pas intégrables sur l'intervalle I), on peut essayer d'utiliser ces théorèmes sur les segments inclus dans A. On prouve alors la continuité ou la dérivabilité sur tout segment inclus dans A. Cela entraîne la même propriété sur l'union de tous ces segments, c'est-à-dire sur A.

Remarque

- On fera attention à la rédaction dans ce genre de problèmes. On fixe un segment $[a,b]\subset A$, on applique le théorème sur ce segment pour conclure **dans un premier temps** que la fonction possède la régularité souhaitée sur le segment, **puis** sur A tout entier.
- On peut appliquer la même méthode sur un intervalle $]a,+\infty[$ en appliquant les théorèmes de continuité ou de dérivabilité sur les intervalles $[b,+\infty[\subset]a,+\infty[$.

10.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 10.5

Mines-Ponts MP 2007

Soient $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.
2. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.
3. En déduire $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

1. On pose $f = F^2$ où $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto e^{-x^2}$. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc f l'est également, avec pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = 2F'(x)F(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

   Posons $h : (x,t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1]$. Pour tout $x \geqslant 0$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ et donc intégrable sur $[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$. Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1]$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1$ et $t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0,1]$. Donc g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec, pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,x\,dt$. Le changement linéaire $u = xt$ donne $\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du$.

2. D'après les calculs précédents, $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée nulle. La fonction $f+g$ est donc constante. Or $f(0) = 0$ et $g(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}$. Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.

3. La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-t})$. Ainsi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = I^2$. On détermine la limite de g en $+\infty$ par encadrement. Pour $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}e^{-x^2}$.

Par encadrement, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. En conclusion $I^2 = \dfrac{\pi}{4}$ et puisque $I \geqslant 0$, on obtient $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 10.6

Mines-Ponts MP 2007

1. Étudier $J(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par J et en déduire une forme simplifiée de $J(x)$ (on rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ - voir exercice précédent).

1. On définit $h(x,t) = \dfrac{e^{-t}e^{itx}}{\sqrt{t}}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ (on choisit ces deux intervalles car il n'y a aucun problème de définition sur x et car on intègre - par rapport à t - de 0 à $+\infty$ une fonction qui n'est pas définie en 0. La dépendance en x se situe simplement dans e^{ixt}, complexe de module 1. Les dominations sur $\mathbb{R}$ vont être très simples à obtenir.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
   - Pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|h(x,t)| = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = \varphi(t)$. Or φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, ainsi que $\varphi(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, ce qui permet de montrer que φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - De même, on a, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)| = \sqrt{t}e^{-t} = \psi(t)$ avec ψ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   D'après le théorème de dérivation, la fonction J est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $J'(x) = i\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}e^{ixt}\,dt$.
2. On doit trouver une relation entre J et J' à l'aide d'une intégration par parties. Les écritures de J et J' font apparaître trois facteurs. On peut regrouper les deux exponentielles afin d'avoir un seul produit et ainsi réaliser l'intégration par parties (en constatant de plus que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ s'intègre en $t \mapsto 2\sqrt{t}$). Les fonctions utilisées

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. On obtient alors

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}} e^{(ix-1)t}\,dt = \left[2\sqrt{t}e^{(ix-1)t}\right]_a^b - 2(ix-1)\int_a^b \sqrt{t}e^{(ix-1)t}\,dt.$$

On a $\lim\limits_{b\to+\infty} 2\sqrt{b}e^{-b}e^{ixb} = 0$ (le module est $2\sqrt{b}e^{-b}$ de limite nulle par croissances comparées) et $\lim\limits_{a\to 0} 2\sqrt{a}e^{-a}e^{ixa} = 0$. On obtient alors, en passant aux limites,

$$J(x) = -2(ix-1)\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{(ix-1)t}\,dt = -\frac{2(ix-1)}{i}J'(x) = -2(x+i)J'(x)$$

Finalement J vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $J'(x) = -\dfrac{x-i}{2(x^2+1)}J(x)$.

Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{x-i}{2(x^2+1)} = -\dfrac{x}{2(x^2+1)} + i\dfrac{1}{2(x^2+1)}$ est la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{4}\ln(1+x^2) + \dfrac{i}{2}\operatorname{Arctan} x$. Ainsi il existe un réel C tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $J(x) = \dfrac{C}{(1+x^2)^{1/4}}e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arctan} x}$. On a $C = J(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$. Le changement de variable $t = u^2$ dans cette intégrale donne $C = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$.

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}$, $J(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}}e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arctan} x}$.

Remarque

On fera attention ici à ne pas prendre comme primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x+i}$ la fonction $x \mapsto \ln(x+i)$ qui n'est pas définie, ni même $x \mapsto \ln|x+i|$ qui ne convient pas.

Exercice 10.7

CCP PC 2006

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

   Étudier sa continuité, sa dérivabilité, ses variations et ses limites aux bornes.
2. En trouvant une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$ donner un équivalent de f en 0 et $+\infty$.

1. • *Définition :* soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $h_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^x(1+t)}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et $h_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$, ainsi h_x est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $x+1 > 1$, c'est-à-dire si $x > 0$.

- *Continuité :* on note $h(x,t) = \dfrac{1}{t^x(1+t)}$ pour $(x,t) \in]0,+\infty[\times[1,+\infty[$. Les hypothèses de continuité sont immédiates : pour tout $x > 0$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[1,+\infty[$ (et intégrable) et pour tout $t \geqslant 1$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On essaie de dominer $|h|$ indépendamment de x. Il suffit de majorer $\dfrac{1}{t^x}$. Comme $t \geqslant 1$, $x \mapsto t^x$ est croissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui permet de majorer $\dfrac{1}{t^x}$ par $\dfrac{1}{t^0} = 1$. C'est la meilleure majoration valable pour tout $x > 0$. Cela donne pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [1,+\infty[$, $|h(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t}$. On ne peut pas conclure, puisque $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$. On analyse alors la situation afin de comprendre où se situe la difficulté. Il est clair ici que le problème vient du fait que x peut être aussi proche de 0 que possible. On fixe alors $A > 0$ et on applique le théorème de continuité sur $[A,+\infty[$. Les hypothèses de continuité restent vérifiée et on obtient maintenant $\forall x \geqslant A, \forall t \geqslant 1, |h(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{t^A(1+t)} = \varphi(t)$. Puisque $A > 0$, la fonction φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et par le théorème de continuité, f est continue sur $[A,+\infty[$ pour tout $A > 0$. Les intervalles $[A,+\infty[$ pour $A > 0$ recouvrent $\mathbb{R}_+^*$, donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- *Dérivabilité :* on applique la même méthode. Pour tout $x > 0$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$, et pour tout $t \geqslant 1$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{\ln t}{t^x(1+t)}$. On obtient

$$\forall x \geqslant A, \forall t \geqslant 1, \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{\ln t}{t^A(1+t)} = \psi(t).$$

La fonction ψ est continue sur $[1,+\infty[$. Pour prouver son intégrabilité sur $[1,+\infty[$, on cherche $\alpha > 1$ tel que $t^\alpha\psi(t)$ admet une limite nulle en $+\infty$. C'est le cas dès que $\alpha < 1 + A$. On peut choisir par exemple $\alpha = 1 + A/2 \in]1, A[$. Donc ψ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A,+\infty[$ avec, pour tout $x \geqslant A$, $f'(x) = -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x(1+t)}\,dt$. Cela étant vrai pour tout $A > 0$, f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x(1+t)}\,dt$.
- *Limite aux bornes :* il est assez simple de majorer $f(x)$ puisque pour $x > 0$, on a

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \left[-\frac{1}{xt^x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Cela donne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Il est un peu moins simple de minorer f par une intégrale facilement calculable. On peut écrire

$$f(x) \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^{x+1}} = \left[-\frac{1}{x(1+t)^x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x2^x}$$

ce qui montre que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0. On aurait pu se passer de l'étude des limites puisqu'on demande la recherche d'équivalent dans la question suivante.

2. Soit $x > 0$. En écrivant $f(x)$ sous la forme $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{t^{x+1}(1+t)}$, on obtient $f(x) + f(x+1) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \frac{1}{x}$. L'étude en 0 est simple puisque $f(x+1)$ admet une limite finie $f(1)$ lorsque x tend vers 0. Puisque $f(x) = \dfrac{1}{x} - f(x+1)$, on en déduit que $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{x}$. L'étude en $+\infty$ est moins immédiate. On serait tenté d'écrire

$$f(x+1) + f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x) + f(x) = 2f(x)$$

et ainsi conclure que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$ mais la relation $f(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x)$ n'est pas forcément vraie (penser à e^x ou e^{x^2}). On procède par encadrement. D'après la première question, f est décroissante. Pour $x > 0$, on a $f(x+1) \leqslant f(x)$, ce qui donne, pour $x > 0$, $2f(x+1) \leqslant f(x) + f(x+1) \leqslant 2f(x)$. Ainsi, en utilisant la relation $f(x+1) + f(x) = 1/x$, on a, pour $x > 1$, $\dfrac{1}{x} \leqslant 2f(x) \leqslant \dfrac{1}{x-1}$. Finalement $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

Exercice 10.8

TPE PSI 2005, Mines-Ponts PC 2007

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(x^2+\sin^2 t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = \tan t$).
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \pi \ln x)$ et en déduire une écriture simplifiée de $f(x)$ pour $x > 0$.
3. Montrer que f est définie et continue en 0.

On note $h(x,t) = \ln(x^2 + \sin^2 t)$ pour $x > 0$ et $t \in [0, \pi/2]$.

1. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0, \pi/2]$ et donc intégrable sur ce segment. Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{2x}{x^2+\sin^2 t}$. Afin de dominer indépendamment de x, on se place sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ (ainsi on majore facilement le numérateur et on évite d'avoir un dénominateur qui s'approche de 0). Plus précisément, pour tout $t \in [0,\pi/2]$ et $x \in [a,b]$, on a $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{2b}{a^2+\sin^2 t}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{2b}{a^2+\sin^2 t}$ est continue sur le segment $[0,\pi/2]$ donc intégrable. Finalement f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ avec, pour tout $x \in [a,b]$, $f'(x) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{x^2+\sin^2 t}\,dt$. La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x>0$, $f'(x) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{x^2+\sin^2 t}\,dt$. Le terme $\sin^2 t$ s'exprime en fonction de $\tan t$. On effectue le changement de variable $u = \tan t$: la fonction $u \mapsto \operatorname{Arctan} u$ est bijective et $\mathscr{C}^1$ de $[0,+\infty[$ dans $[0,\pi/2[$ ainsi, si $x>0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + \dfrac{u^2}{1+u^2}} \frac{du}{1+u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2+(1+x^2)u^2}\,du \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{u\sqrt{1+x^2}}{x}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

2. Pour $x>0$, on a

$$f(x) - \pi\ln x = \int_0^{\pi/2} \left(\ln(x^2+\sin^2 t) - \ln(x^2)\right) dt = \int_0^{\pi/2} \ln\left(1 + \frac{\sin^2 t}{x^2}\right) dt.$$

En utilisant la majoration $\ln(1+u) \leqslant u$, valable pour $u \geqslant 0$, on obtient

$$0 \leqslant f(x) - \pi \ln x \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{x^2}\,dt \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^2}\,dt = \frac{\pi}{2x^2}.$$

Par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \pi\ln x) = 0$. Or, pour tout $x>0$, $f'(x) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}$. Il existe donc $A \in \mathbb{R}$ tel que , pour tout $x>0$, $f(x) = \pi \operatorname{argsh} x + A$. On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{argsh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$. On détermine A par la limite précédente.

$$f(x) - \pi\ln x = A + \pi\ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = A + \pi\ln(1+\sqrt{1+1/x^2}),$$

ce qui donne, lorsque x tend vers $+\infty$, $A + \pi\ln 2 = 0$. Ainsi, pour tout $x>0$, $f(x) = \pi\operatorname{argsh}(x) - \pi\ln 2$.

3. La première possibilité serait de calculer $f(0)$ (on peut consulter l'exercice 8.19, page 207). On montre que $f(0)$ existe et $f(0) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt = -\pi\ln 2$ et

constater enfin que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. Sinon, on essaie d'appliquer le théorème de continuité pour une intégrale à paramètre. Si on veut tenir compte du fait que $x \in \mathbb{R}^+$, il faut considérer l'intégrale sur $]0, \pi/2]$ et non plus sur $[0, \pi/2]$ (il ne faut pas que $x^2 + \sin^2 t$ s'annule). On va prouver la continuité sur un segment $[0, A]$ où $A > 0$ est fixé (il faut visiblement borner x si on veut pouvoir majorer $\ln(x^2 + \sin^2 t)$. Pour tout $x \in [0, A]$, la fonction $t \mapsto \ln(x^2 + \sin^2 t)$ est continue sur $]0, \pi/2]$. Pour tout $t \in]0, \pi/2]$, la fonction $x \mapsto \ln(x^2 + \sin^2 t)$ est continue sur $[0, A]$. Si $x \in [0, A]$ et $t \in]0, \pi/2]$, on a l'encadrement $\sin^2 t \leqslant x^2 + \sin^2 t \leqslant A^2 + \sin^2 t$, ce qui donne

$$\ln \sin^2 t \leqslant \ln(x^2 + \sin^2 t) \leqslant \ln(A^2 + \sin^2 t).$$

Le point délicat est le passage à la valeur absolue car on ne connaît pas les signes de ces expressions, ni la position relative de leur valeur absolue. On a déjà, $|\ln(x^2 + \sin^2 t)| \leqslant \max(|\ln \sin^2 t|, |\ln(A^2 + \sin^2 t)|)$. Il n'est pas évident de déterminer ce maximum, mais on peut le majorer par la somme de ces deux nombres positifs. Ainsi, pour tout $x \in [0, A]$ et $t \in]0, \pi/2]$, $|\ln(x^2 + \sin^2 t)| \leqslant |\ln \sin^2 t| + |\ln(A^2 + \sin^2 t)|$. La seconde quantité est intégrable sur $]0, \pi/2]$ car $t \mapsto \ln(A^2 + \sin^2 t)$ est continue sur $[0, \pi/2]$. Soit $\varphi(t) = \ln \sin^2 t = 2 \ln \sin t$. La fonction φ est continue sur $]0, \pi/2]$ et $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} 2 \ln t$. Donc φ est intégrable sur $]0, \pi/2]$. Le théorème de continuité pour les intégrales à paramètre s'applique, donc f est continue sur $[0, A]$. Cela permet de retrouver $f(0) = \lim_{x\to 0}(\pi \operatorname{argsh}(x) - \pi \ln 2) = -\pi \ln 2$.

Exercice 10.9

(Fonction Γ) Mines-Ponts PC 2006

On définit, lorsque c'est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de Γ.
2. Montrer que Γ est continue sur tout segment $[a, b] \subset \mathscr{D}$.
3. Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ puis $\mathscr{C}^2$ sur tout segment $[a, b] \subset \mathscr{D}$. En déduire que Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$ et déterminer Γ' et Γ''.
4. Montrer que Γ est une fonction convexe.
5. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.
6. Calculer $\Gamma(1)$, et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n + 1) = n!$.
7. Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers 0. En déduire la limite de Γ en 0.
8. Donner la limite de Γ en $+\infty$, ainsi que celle de $x \mapsto \Gamma(x)/x$.
9. Donner l'allure de la courbe représentative de Γ.

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $h(x,t) = t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $h(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$, et h est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x-1 > -1$, c'est-à-dire si $x > 0$. De plus $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2(t^{x-1}e^{-t}) = 0$, ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x,t) = \underset{t\to+\infty}{o}(1/t^2)$. La fonction h est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, $t \mapsto e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On cherche à dominer $|h(x,t)|$ indépendamment de $x \in [a,b]$. Le terme e^{-t} ne dépend pas de x. Il faut déterminer un majorant de $x \mapsto t^{x-1}$. En le mettant sous la forme $e^{(x-1)\ln t}$, le maximum est atteint en a lorsque $t \leqslant 1$ (car $\ln t$ est négatif) et en b lorsque $t > 1$. On pose alors
$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si} \quad t \in]0,1] \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$
φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle est même continue car les deux morceaux se raccordent en 1). Elle est intégrable sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ (voir question précédente). Ainsi Γ est continue sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Donc Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour tout $x \in [a,b]$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$. En utilisant la fonction φ précédente, on a
$$\forall x \in [a,b], \forall t > 0, \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |\ln t|\varphi(t) = \psi(t).$$
La fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et $t^2\psi(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Donc ψ est intégrable sur $[1,+\infty[$. De plus, on a $\psi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{|\ln t|}{t^{1-a}}$. Puisque $1-a < 1$, la fonction ψ est intégrable sur $]0,1]$ (d'après l'exercice 8.5, page 189). Le théorème de dérivation montre que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Pour montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^2$, on utilise la même méthode sur $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ avec $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = (\ln t)^2 h(x,t)$. La domination est réalisée par la fonction $t \mapsto (\ln t)^2\varphi(t)$, et son intégrabilité se prouve de la même manière. Alors Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$. Tout cela permet de conclure que Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$,
$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)t^{x-1}e^{-t}\,dt \text{ et } \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$
4. Pour $x > 0$, $\Gamma''(x)$ est égale à l'intégrale d'une fonction positive et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc Γ'' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et Γ est (strictement) convexe.

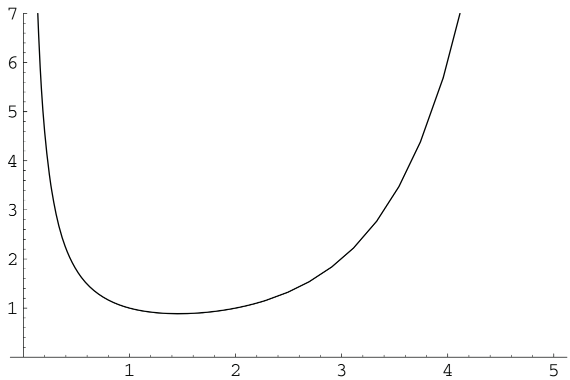
5. Soit $x > 0$. On se donne $A > \varepsilon > 0$. On a
$$\int_\varepsilon^A t^x e^{-t}\,dt = \left[t^x e^{-t}\right]_\varepsilon^A + x\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$
Puisque $x > 0$, $\varepsilon^x e^{-\varepsilon}$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 et $A^x e^{-A}$ vers 0 en $+\infty$. On obtient, lorsque ε tend vers 0 et A vers $+\infty$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

6. $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$ et $\Gamma(n+1) = n!$ se montre par récurrence, à l'aide de la relation de la question précédente.

7. Pour $x > 0$, on a $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$. Puisque Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\Gamma(1) \neq 0$, on a $\Gamma(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \Gamma(1) = 1$. Donc $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

8. La fonction Γ étant convexe, elle admet une limite en $+\infty$. Or $\Gamma(n+1) = n!$ pour n entier. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$. Pour $x > 1$, $\dfrac{\Gamma(x)}{x} = \dfrac{x-1}{x}\Gamma(x-1)$, de limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$.

9.



10.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 10.10

ENSAM PSI 2006 K

On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, étudier sa continuité, sa parité et montrer que f est bornée sur son ensemble de définition.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $xf(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt$.

3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'' = f$.
4. En déduire une expression simple pour f.
5. Simplifier $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{x^2+t^2}\, dt$.

1. Soit $h(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ (on a par conséquent la continuité partielle par rapport à chaque variable) et, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $|h(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$. Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On obtient facilement $h(-x) = h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est donc paire, ainsi que $|f(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\cos(xt)|}{1+t^2}\, dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x > 0$ et $A > 0$. On a $x \displaystyle\int_0^{A} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\, dt = \left[\frac{\sin(xt)}{1+t^2}\right]_0^A + 2\int_0^A \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\, dt$, car $t \mapsto \sin(xt)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Puisque $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{\sin(xA)}{1+A^2} = 0$, on obtient en faisant tendre A vers $+\infty$, $xf(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\, dt$.

3. On pense bien entendu à appliquer le théorème de dérivabilité. Cependant, il n'aboutira pas si on cherche à l'appliquer sur $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\, dt$. En effet $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{1+t^2}|\sin(xt)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{|\sin(xt)|}{t}$ et on peut montrer que $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème n'a donc aucune chance de s'appliquer ici. On va l'appliquer à la nouvelle intégrale obtenue dans la question précédente. Soit $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. On définit g pour x positif par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\, dt$ et, pour $(x,t) \in A$, $h_2(x,t) = \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$. La fonction h_2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A. Pour tout $(x,t) \in A$, $|h_2(x,t)| \leqslant \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$, ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto h_2(x,t)$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De plus, pour tout $(x,t) \in A$, on a $\left|\dfrac{\partial h_2}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\right| \leqslant \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$. Le théorème de dérivation montre que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\, dt$. Puisque, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \dfrac{2}{x}g(x)$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$\mathbb{R}_+^*$ et, si $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{x} g'(x) - \dfrac{2}{x^2} g(x)$. Pour $x \geqslant 0$, on a

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(t^2+1-1)\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt = f(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt = f(x) - k(x).$$

On montre comme précédemment que k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x > 0$, $k'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt = -g(x)$. Alors g' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $g''(x) = f'(x) - k'(x) = f'(x) + g(x)$. Pour $x > 0$, on obtient

$$f''(x) = \frac{2}{x} g''(x) - \frac{4}{x^2} g'(x) + \frac{4}{x^3} g(x) = \frac{2}{x}\left(f'(x) + g(x) - \frac{2}{x} g'(x) + \frac{2}{x^2} g(x) \right)$$

et avec l'écriture précédente pour $f'(x)$, il vient $f''(x) = \dfrac{2}{x} g(x) = f(x)$ si $x > 0$.

4. La fonction f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'' = y$. Il existe donc des réels A et B tels que, pour tout $x > 0$, $f(x) = Ae^x + Be^{-x}$. La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que $A = 0$. Par continuité de f en 0, on a $B = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2} e^{-x}$, et par parité, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2} e^{-|x|}$. Cette écriture de f montre que f n'est pas dérivable en 0 puisque les dérivées à droite et à gauche en 0 sont différentes (et opposées).

5. La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos t}{x^2+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ lorsque $x \neq 0$. On peut alors effectuer le changement de variable linéaire $t = ux$ (toujours si $x \neq 0$) pour se ramener à une intégrale proche de celle définissant f. Ainsi, si $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{x^2+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{x^2(1+u^2)} x\,du = \frac{1}{x} f(x) = \frac{\pi e^{-x}}{2x}$$

Par parité, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{x^2+t^2}\,dt = \frac{\pi e^{-|x|}}{2|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 10.11

Mines-Ponts PC 2005 (et plus) K

On définit, lorsque c'est possible, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\,dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. F est-elle continue ?
3. Sur quel intervalle F est-elle $\mathscr{C}^\infty$?

4. Montrer que pour tout x réel, on a $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.

5. Donner le développement en série entière de F autour de 0.

On note $h(x,t) = \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g_x : t \mapsto h(x,t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{xt}{t} = x$, on peut prolonger g_x par continuité en 0 et g_x est intégrable sur $]0,1]$. De plus $g_x(t) = \underset{t\to+\infty}{O}(e^{-t})$ et g_x est intégrable sur $[1,+\infty[$. Finalement, la fonction g_x est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$, et on montre facilement que f est impaire.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. La difficulté vient de la domination. Si on majore $|\sin xt|$ par 1, on obtient un majorant $\frac{1}{e^t-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$ non intégrable sur $]0,1]$. On utilise la majoration $|\sin u| \leqslant |u|$ qui donne $|h(x,t)| \leqslant |x|\frac{t}{e^t-1}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Mais ce majorant dépend de x. Soit $A > 0$. Pour tout $x \in [-A, A]$ et $t > 0$, on a $|h(x,t)| \leqslant A\frac{t}{e^t-1}$. La fonction $\varphi : t \mapsto A\frac{t}{e^t-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, admet une limite finie A lorsque t tend vers 0, et est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$. Donc f est continue sur $[-A, A]$ pour tout $A > 0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. On définit l'hypothèse de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) : f \text{ est de classe } \mathscr{C}^n \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et,} \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt + n\frac{\pi}{2})\frac{t^n}{e^t-1}\,dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\theta_n : (x,t) \mapsto \sin(xt + n\frac{\pi}{2})\frac{t^n}{e^t-1}$. La question précédente donne $\mathscr{P}(0)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \theta_n(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après l'hypothèse de récurrence), pour tout $t > 0$, $x \mapsto \theta_n(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\frac{\partial \theta_n}{\partial x} = \theta_{n+1}$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $|\theta_{n+1}(x,t)| \leqslant \frac{t^{n+1}}{e^t-1} = \psi_n(t)$. La fonction ψ_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, admet une limite finie en 0 (0 en général, 1 si $n = 0$), et $\psi_n(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc ψ_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et le théorème de dérivation montre que $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec la dérivée souhaitée. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, et f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $a : t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{e^t - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et intégrable sur $]0, +\infty[$. On décompose $\dfrac{1}{e^t - 1}$ en somme de termes d'une série géométrique. Puisque $t > 0$, $e^t > 1$, ce qui ne permet pas d'utiliser la somme d'une série géométrique de raison e^t. On factorise par e^t et, puisque $e^{-t} \in]0, 1[$, on obtient

$$\forall t > 0, \frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit a_n sur $\mathbb{R}^+$ par $a_n(t) = e^{-nt}\sin(xt)$. Chacune des fonctions a_n est continue et $\sum a_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. La somme de cette série de fonctions est la fonction a, puisque la série provient de la décomposition de a. La fonction a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t > 0$, on a $|a_n(t)| \leqslant e^{-nt}$ et a_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, si $A > 0$,

$$\int_0^A a_n(t)\,dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^A e^{-(n-ix)t}\,dt\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1 - e^{-nA}e^{ixA}}{n - ix}\right)$$

La limite lorsque n tend vers l'infini donne (puisque e^{-nA} tend alors vers 0 et que e^{ixA} est borné), $\displaystyle\int_0^{+\infty} a_n(t)\,dt = \mathrm{Im}(\frac{1}{n - ix}) = \mathrm{Im}(\frac{n+ix}{n^2+x^2}) = \frac{x}{n^2+x^2}$. On espère alors pouvoir appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Hélas, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |a_n(t)|\,dt$ n'est pas facile à évaluer. On obtient facilement la majoration $\displaystyle\int_0^{+\infty} |a_n(t)|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n}$, mais cela ne permet pas d'appliquer le théorème. On affine la majoration de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |a_n(t)|\,dt$. On a, pour $t > 0$, $a_n(t) = \sin(xt)e^{-nt}$. Pour n grand, très rapidement la fonction prend des valeurs petites, si bien que la contribution importante dans l'intégrale se fait autour de 0. Le choix de majorer $|\sin(xt)|$ par 1 est donc assez mauvais. On peut plutôt majorer $|\sin(xt)|$ par $|xt|$. Cette majoration est plus mauvaise pour les grandes valeurs de x mais elle sera largement compensée par l'exponentielle. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^{+\infty} |a_n(t)|\,dt \leqslant |x|\int_0^{+\infty} te^{-nt}\,dx = \frac{|x|}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt = \frac{|x|}{n^2}.$$

Finalement $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |a_n(t)|\,dt$ est convergente, et on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme, ce qui donne le résultat demandé.

5. On effectue les calculs et les permutations sans les justifier afin de voir où cela mène :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(xt)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)dt && (10.1)\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{t^{2n+1}}{e^t-1}x^{2n+1}\right)dt && (10.2)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{t^{2n+1}}{e^t-1}x^{2n+1}\right)dt && (10.3)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{e^t-1}\,dt\right)x^{2n+1} && (10.4)\end{aligned}$$

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{e^t-1}\,dt$. Dans l'exercice 9.6, page 213, on montre que $I_n = \Gamma(2n+2)\zeta(2n+2)$ où $\Gamma(2n+2) = (2n+1)!$ (voir exercice 10.9, page 244) et $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^x}$ lorsque $x > 1$. On obtient alors $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\zeta(2n+2)x^{2n+1}$. Il reste à justifier les calculs et déterminer pour quelles valeurs de x ils sont valables. La formule (10.1) n'utilise que le développement en série entière de la fonction sinus, valable sur $\mathbb{R}$, les formules (10.2) et (10.4) ne sont que des réécritures. Il reste à justifier l'intégration terme à terme de (10.3). On définit u_n sur $\mathbb{R}^+$ par $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\dfrac{t^{2n+1}}{e^t-1}x^{2n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (voir les méthodes des questions précédentes), la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ est la fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{e^t-1}$. Enfin, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}|u_n(t)|\,dt = \frac{I_n|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \zeta(2n+2)|x|^{2n+1}$. La fonction ζ est décroissante sur $[2,+\infty[$ (somme de fonctions décroissantes) et minorée par 1 (premier terme de la somme). Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leqslant \zeta(2n+2) \leqslant \zeta(2)$. Le rayon de la série entière $\sum \zeta(2n+2)x^{2n+1}$ est donc le même que celui de $\sum x^{2n+1}$ c'est à dire 1. La permutation est donc valable lorsque $|x| < 1$ (on peut également montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x) = 1$ pour retrouver le rayon de convergence, par exemple en appliquant le critère de d'Alembert). Finalement, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\zeta(2n+2)x^{2n+1}$.

11 Séries de Fourier

11.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

Ce qu'il faut savoir

On note $\mathcal{CM}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques et continues par morceaux. On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques et continues. Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$:

Les **coefficients de Fourier *exponentiels*** de f sont définis par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \ .$$

Les **coefficients de Fourier *trigonométriques*** de f sont définis par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt\ , \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt\ .$$

On trouvera dans les exercices d'assimilation (1.1, 1.3, ...) de nombreux exemples de calculs de coefficients de Fourier.

Les remarques suivantes sont utiles pour calculer les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$:

- Si f est paire alors, $b_n(f) = 0$, et $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$.

  Si f est impaire alors, $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$.
- On peut remplacer l'intervalle d'intégration $[0, 2\pi]$ par un autre intervalle d'amplitude 2π, mieux adapté à la fonction f. Par exemple on prend l'intervalle $[-\pi, \pi]$ lorsque f est une fonction paire (ou impaire).
  Notons à ce sujet que le tracé du graphe de f est souvent déterminant lors du choix de l'intervalle d'intégration.
- Sans modifier les coefficients de Fourier, on peut modifier les valeurs de f en un nombre fini de point sur l'intervalle d'intégration. Notamment on remplace souvent la valeur de f en un point où est elle discontinue par la demi-somme des limites à gauche et à droite en ce point.

Certaines propriétés de régularité de f ont des conséquences importantes sur ses coefficients de Fourier :

- Lorsque $f \in \mathscr{CM}_{2\pi}$, les suites $(c_n(f))$, $(c_{-n}(f))$, $(a_n(f))$ et $(b_n(f))$ convergent vers 0 ; en particulier, elles sont bornées.
- Si f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f') = inc_n(f)$.
- Plus généralement, si f est 2π-périodique, de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ par morceaux, alors $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f^{(k+1)}) = (in)^{k+1}c_n(f)$.

  On en déduit que $c_n(f) = o\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right)$ quand $|n| \to \infty$.

Série de Fourier d'une fonction $f \in \mathscr{CM}_{2\pi}$

• On note u_0 la fonction constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $u_0(x) = c_0(f) = \dfrac{a_0(f)}{2}$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx} = a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\ .$$

• La série de fonctions $\sum u_n$ est appelée la série de Fourier de f. Sa somme partielle à l'ordre N est définie par $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$.

Lorsque la série de Fourier converge en un point x de $\mathbb{R}$, la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est parfois notée $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$.

Les théorèmes fondamentaux

• **Le théorème de Dirichlet :** soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge **simplement** sur $\mathbb{R}$. En chaque point $x \in \mathbb{R}$, la somme de la série de Fourier de f est égale à la demi-somme des limites à gauche et à droite de f. En particulier si f est continue au point $x \in \mathbb{R}$, alors la somme de la série de Fourier de f au point x est égale à $f(x)$.

• **Le théorème de convergence normale :** soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, et continue sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de f converge **normalement** sur $\mathbb{R}$, et sa somme est égale à f.

• **La formule de Parseval :** soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique continue par morceaux. Alors les séries numériques $\sum |c_n|^2$, $\sum |c_{-n}|^2$, $\sum |a_n|^2$ et

$\sum |b_n|^2$ sont convergentes et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2\right)$$
$$= \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

- Soient f et g deux fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Si f et g ont les mêmes coefficients de Fourier, alors $f = g$.

Exercice 11.1

Centrale MP 2007, CCP PC 2006

Soit $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}_{2\pi}$ telle que $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ pour tout $x \in [0, 2\pi[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
2. Justifier la convergence de la série de Fourier de f et calculer sa somme.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}$, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

La fonction f est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Son graphe est représenté FIG. 11.1.

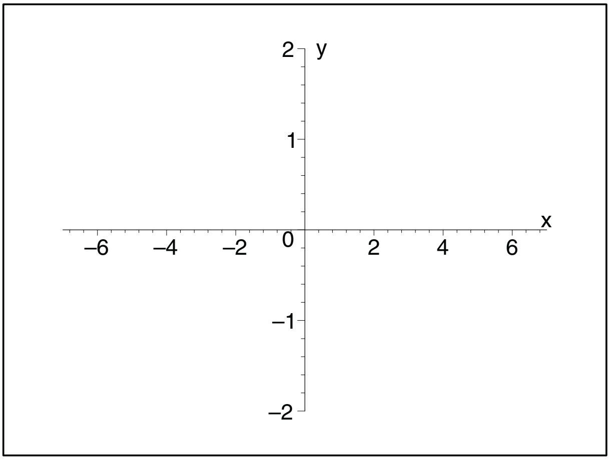


Figure 11.1 Graphe de f

1. Comme f est une fonction à valeurs réelles, nous utilisons les coefficients de Fourier trigonométriques de f. Il est judicieux de modifier la valeur de f au point $x = 0$ (et aussi en tous les points de la forme $x = 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$) et de la remplacer par 0. Ainsi modifiée la fonction f est impaire. On a donc $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\pi - t)}{2}\sin(nt)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left[-\frac{(\pi - t)\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi}}_{\frac{2\pi}{n}} - \frac{1}{2n\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(nt)dt}_{0} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

2. Le théorème de Dirichlet montre que la Série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, le série de Fourier de f converge vers la demi-somme des limites à gauche et à droite de f au point x.

   En particulier : $\forall x \in]0, 2\pi[, \quad \dfrac{\pi - x}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

3. Utilisons la relation précédente avec $x = \pi/2$. Si $n = 2p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ on a $\sin(n\pi/2) = 0$, tandis que si $n = 2p + 1$ $(p \in \mathbb{N})$, $\sin((2p + 1)\pi/2) = (-1)^p$. On obtient donc : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p + 1} = \frac{\pi}{4}$.

   Enfin la formule de Parseval donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)^2 dx = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 11.2

Extrait de Mines-Ponts PSI, MP 2007

1. La série $\displaystyle\sum \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est-elle la série de Fourier d'une fonction continue par morceaux, 2π-périodique ?
2. La série $\displaystyle\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ est-elle la série de Fourier d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, 2π-périodique ?

1. Non, car la série de terme général $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \dfrac{1}{n}$ devrait converger d'après la formule de Parseval.

2. Non, car pour $x = 0$, on obtient la série $\sum \frac{1}{n}$, qui devrait converger d'après le théorème de Dirichlet.

Exercice 11.3

Air PSI 2004, CCP MP 2006

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = |x|$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, et soit g la fonction 2π-périodique, impaire, telle que $g(x) = 1$ pour tout $x \in]0, \pi[$.

1. Tracer les graphes de f et de g. Vérifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, et que f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.
2. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f et de g.
3. Justifier la convergence des séries de Fourier de f et de g, et calculer leur somme.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Indications de la rédaction : pour la question 2 on pourra remarquer que g est la dérivée de f, dans le sens où $g(x) = f'(x)$ en chaque point $x \in \mathbb{R}$ où f est dérivable. Pour la question 4 on pensera à utiliser la formule de Parseval.

1. On représente sur un même dessin (FIG. 11.2) le graphe de f (en noir) et le graphe de g (en gris) .

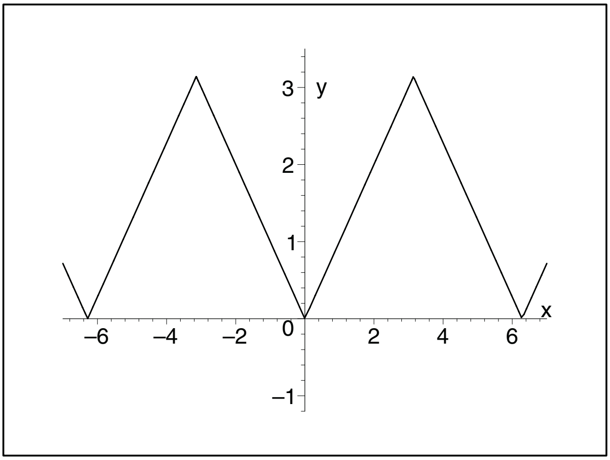


Figure 11.2 Les graphes de f et de g.

Les fonctions f et g sont affines par morceaux ; elles sont donc de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On observe de plus que f est continue sur $\mathbb{R}$. Comme $g(x) = f'(x)$ en chaque point où f est dérivable, on peut considérer g comme la dérivée de f.

2. Commençons par le calcul des coefficients de Fourier de g. Comme c'est une fonction impaire, on a $a_n(g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n(g) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(nx)dx = \dfrac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$. Il en résulte que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $b_{2p}(g) = 0$ et que $b_{2p+1}(g) = \dfrac{4}{(2p+1)\pi}$.
Comme f est paire, on a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On calcule $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$, puis, pour $n \geqslant 1$, à l'aide d'une intégration par parties :
$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[f(t)\sin(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(nt)dt \\ &= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)dt = -\frac{1}{n}\,b_n(g)\,, \end{aligned}$$
d'où $a_{2p}(f) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et $a_{2p+1}(f) = -\dfrac{4}{(2p+1)^2\pi}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

3. Comme f et g sont 2π-périodiques, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet montre que les séries de Fourier de f et de g sont convergentes en chaque point, et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}\cos(2p+1)x\ .$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)}\sin(2p+1)x\ .$$
(En effet f est continue sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, la demi-somme des limites à gauche et à droite de g au point x est égale à $g(x)$.)
Il est très intéressant de remarquer la ***convergence normale*** *de la série de Fourier de f (f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux), tandis que la série de Fourier de g n'est pas normalement convergente.*

4. Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient $g(\pi/2) = 1 = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)}$, d'où $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4}$.
Pour $x = 0$ on a, $f(0) = 0 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$, d'où $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

La formule de Parseval appliquée à f donne $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x^2dx = \dfrac{\pi^2}{2}+\dfrac{16}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p+1)^4}$.

On en déduit que : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. Posons enfin $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$. On peut écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n+1)^4}$, d'où en faisant tendre N vers $+\infty$, $S = \dfrac{1}{2^4}S + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$. On en déduit que $S = \dfrac{\pi^4}{90}$.

11.1.1 Séries de fonctions trigonométriques

Jusqu'à présent nous sommes partis d'une fonction $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}_{2\pi}$ et nous lui avons associé une série de fonctions $\sum u_n$, où, pour $n \geqslant 1$, et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}$.

Nous allons maintenant partir du point de vue inverse : on se donne une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, et on considère la série de fonctions $\sum u_n$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u_0(x) = c_0,\ \text{ et } u_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} \ \text{ pour } n \geqslant 1.$$

Une telle série est appelée une série trigonométrique. Il est souvent utile de mettre en évidence son mode de convergence (notamment la convergence normale, qui permet l'utilisation du théorème d'intégration terme à terme).

Exercice 11.4

(Convergence normale d'une série trigonométrique)

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction u_n par $u_0(x) = c_0$, et, pour $n \geqslant 1$, $u_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}$.

1. Montrer que $\|u_n\|_\infty = |c_n| + |c_{-n}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Indication de la rédaction : on pourra exprimer c_n et c_{-n} sous forme trigonométrique.
2. En déduire que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les séries numériques $\sum c_n$ et $\sum c_{-n}$ sont absolument convergentes.
3. Déterminer deux familles de nombres complexes, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $u_0(x) = \dfrac{a_0}{2}$ et $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

5. On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et on désigne par S sa somme.
Montrer que S est une fonction continue et 2π-périodique, et calculer ses coefficients de Fourier.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$|u_n(x)| = \left|c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right| \leqslant |c_n| + |c_{-n}| .$$
Il en résulte que $\|u_n\|_\infty \leqslant |c_n| + |c_{-n}|$.
Les nombres complexes c_n et c_{-n} peuvent être écrits sous forme trigonométrique :
$$c_n = re^{i\theta} \quad \text{et} \quad c_{-n} = r'e^{i\theta'} \text{ avec } (r, r') \in \mathbb{R}_+^2 \text{ et } (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2 .$$
On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = re^{i(\theta+nx)} + r'e^{i(\theta'-nx)}$.
Soit x_0 le nombre réel tel que $\theta + nx_0 = \theta' - nx_0$. (On calcule facilement $x_0 = (\theta' - \theta)/2n$)). On a alors $u_n(x_0) = (r + r')e^{ix_1}$, avec $x_1 = \theta + nx_0$, d'où
$$\|u_n\|_\infty \geqslant |u_n(x_0)| = r + r' = |c_n| + |c_{-n}| .$$
On a donc $\|u_n\|_\infty = |c_n| + |c_{-n}|$.

2. Il résulte de la question précédente que la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente si et seulement si la série numérique de terme général $|c_n|+|c_{-n}|$ est convergente.
Comme $0 \leqslant |c_n| \leqslant |c_n| + |c_{-n}|$ et $0 \leqslant |c_{-n}| \leqslant |c_n| + |c_{-n}|$, la convergence de la série de terme général $|c_n| + |c_{-n}|$ entraîne celle des séries de termes généraux $|c_n|$ et $|c_{-n}|$. Réciproquement si les séries de termes généraux $|c_n|$ et $|c_{-n}|$ sont convergentes, leur somme est convergente.

3. On a évidemment $a_0 = 2c_0$.
Pour $n \geqslant 1$ on a $u_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, avec $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = c_n - c_{-n}$.

4. Pour tout $n \geqslant 1$ on a $|a_n| \leqslant |c_n|+|c_{-n}|$ et $|b_n| \leqslant |c_n|+|c_{-n}|$. Donc la convergence de la série de terme général $|c_n| + |c_{-n}|$ entraîne la convergence des séries de termes généraux $|a_n|$ et $|b_n|$.
On a aussi $|c_n| \leqslant |a_n|+|b_n|$ et $|c_{-n}| \leqslant |a_n|+|b_n|$. Donc la convergence de la série de terme général $|a_n|+|b_n|$ entraîne la convergence des séries de termes généraux $|c_n|$ et $|c_{-n}|$.

5. La continuité de chaque fonction u_n et la convergence normale de la série $\sum u_n$ entraînent la continuité de la somme S. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$S(x + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x + 2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = S(x) .$$

S est donc 2π-périodique.

Soit p un entier relatif. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, notons v_n la fonction définie par $v_n(x) = u_n(x)e^{-ipx} = c_n e^{i(n-p)x} + c_{-n}e^{i(-n-p)x}$. Comme $\|v_n\|_\infty = |c_n| + |c_{-n}|$, la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Les fonctions v_n étant continues, on peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur le segment $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
c_p(S) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(x)e^{-ipx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)e^{-ipx}\right] dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n e^{i(n-p)x}\, dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_{-n}e^{i(-n-p)x}\, dx \\
&= c_p \quad \text{puisque} \int_0^{2\pi} e^{imx}dx = 0 \text{ si } m \in \mathbb{Z}^*.
\end{aligned}$$

Ce qu'il faut savoir

Lorsque les séries numériques $\sum c_n$ et $\sum c_{-n}$ sont absolument convergentes, la série trigonométrique $c_0 + \sum(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Sa somme S est une fonction continue, 2π-périodique, et $c_n(S) = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

11.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 11.5

CCP PC 2007, Mines-Ponts MP 2006

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : t \mapsto f(t) = e^{e^{it}}$.

1) Justifier que f est égale à la somme de sa série de Fourier.

2) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{ikt}}{k!}$.

En déduire les coefficients de Fourier c_n de f pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2\cos t}dt = 2\pi\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}$.

Indication de la rédaction : pour la question 2, utiliser le développement en série entière de e^z, avec $z = e^{it}$.

1) La fonction f est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de convergence normale la série de Fourier de f est normalement convergente, et sa somme est égale à f.

2) Le développement en série entière de la fonction exponentielle :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

donne, avec $z = e^{it}$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{k!}$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{i(k-n)t}}{k!}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(k-n)t}}{k!}dt,$$

l'intégration terme à terme étant justifiée par la convergence normale de la série de fonctions $\sum v_n$ où $v_n(t) = \frac{e^{i(k-n)t}}{k!}$.

Pour $k \neq n$, on a $\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(k-n)t}}{k!}dt = 0$, et on a donc $c_n = \frac{1}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $c_n(f) = 0$ pour $n < 0$.

3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\cos t}e^{i\sin t}$, et donc $|f(t)|^2 = e^{2\cos t}$. La formule de Parseval donne alors $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2\cos t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}$.

Exercice 11.6

Centrale PSI MP 2006, TPE PC 2007

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = |\sin x|$.

1. Donner l'allure du graphe de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f. Montrer que la série de Fourier de f est convergente, et calculer sa somme.
3. Montrer que $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}$.
4. Déterminer une suite (c_n) de réels tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos^2 nx$.

(À l'oral de Centrale, un logiciel de calcul formel est à disposition).

1. Le graphe de f s'obtient facilement à partir du graphe de la fonction sinus. Le tracé suivant est obtenu à l'aide de l'instruction `Maple` :

```
> plot(abs(sin(x)),x=-5..5);
```

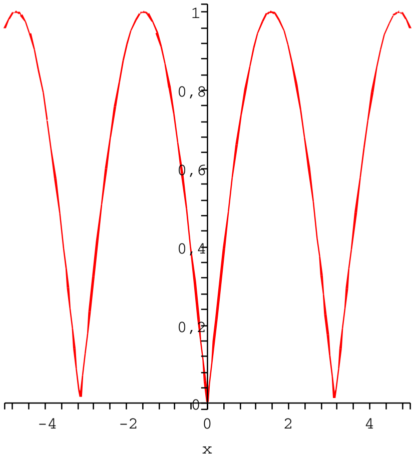


Figure 11.3 Le graphe de f

2. f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Le théorème de convergence normale montre que la série de Fourier de f est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, et que sa somme est égale à f.
Comme f est paire, on a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a $a_1(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \cos x\, dx = 0$, et, pour $n \neq 1$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\, dx)$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{n+1}[\cos(n+1)x]_0^{\pi} + \frac{1}{n-1}[\cos(n-1)x]_0^{\pi}\right) = -\frac{2(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)}$$

Vérifions ce résultat à l'aide de `Maple` :

```
> assume(n,integer): int(sin(x)*cos(n*x),x=0..Pi);
```

$$-\frac{1+(-1)^n}{-1+n^2}$$

On a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{-4}{\pi(4p^2-1)}$. Il en résulte que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos 2px}{4p^2-1}$$

3. En particulier, avec $x = 0$, on obtient $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}$.

4. En utilisant la relation $\cos 2px = 2\cos^2 px - 1$ on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2\cos^2 px - 1}{4p^2 - 1}\right)$$
$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2\cos^2 px}{4p^2 - 1} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2 - 1}\right)$$

puisque les séries de termes généraux $\dfrac{2\cos^2 px}{4p^2-1}$ et $\dfrac{1}{4p^2-1}$ sont convergentes.

Comme $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| = \dfrac{4}{\pi} - \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 px}{4p^2-1}$.

Exercice 11.7

D'après CCP MP 2005, Mines-Ponts PSI 2006

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.

1) Déterminer les coefficients de Fourier de f.

2) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$\operatorname{cotan}(t) = \frac{1}{t} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{\pi^2 n^2 - t^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t}{\pi^2 n^2 - t^2}$$

1) La fonction f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Comme elle est paire les coefficients $b_n(f)$ sont nuls.

On a $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\alpha x\, dx = \dfrac{2}{\alpha\pi}\left[\sin\alpha x\right]_0^{\pi} = \dfrac{2\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\alpha x \cos nx\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \big(\cos(\alpha+n)x + \cos(\alpha-n)x\big)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}\right] \\
&= \frac{(-1)^n \sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}\right] \\
&= -\frac{2(-1)^n \alpha \sin\alpha\pi}{\pi(n^2-\alpha^2)}.
\end{aligned}$$

2) Par application du théorème de convergence normale on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} - \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \alpha^2} \cos nx.$$

En particulier pour $x = \pi$ on obtient

$$\cos \alpha\pi = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} - \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$$

c'est-à-dire $\dfrac{\cos \alpha\pi}{\sin \alpha\pi} = \dfrac{1}{\alpha\pi} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(n^2 - \alpha^2)}$, puis, pour $x = 0$,

$1 = \dfrac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} - \dfrac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \alpha^2}$, ou encore $\dfrac{1}{\sin \alpha\pi} = \dfrac{1}{\alpha\pi} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \alpha}{\pi(n^2 - \alpha^2)}$.

Si t est un nombre réel qui n'est pas un multiple de π, le nombre réel $\alpha = \dfrac{t}{\pi}$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}$, et en remplaçant α par $\dfrac{t}{\pi}$ dans les relations précédentes on obtient $\operatorname{cotan}(t) = \dfrac{1}{t} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{\pi^2 n^2 - t^2}$ et $\dfrac{1}{\sin t} = \dfrac{1}{t} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t}{\pi^2 n^2 - t^2}$.

Exercice 11.8

TPE PSI, PC 2005 K

Justifier que, pour x dans $[0, \pi]$, on a

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3} .$$

Qu'obtient-on avec $x = \dfrac{\pi}{2}$?

La présence de deux séries, l'une paire, et l'autre impaire, nous amène à prolonger la fonction $x \mapsto x(\pi - x)$ en une fonction paire d'une part, et en une fonction impaire d'autre part.

Soit f la fonction paire, 2π-périodique, valant $x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$. (Cf. FIG. (11.4))

La fonction f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On a

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x)dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{\pi x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3},$$

et, pour $n \geqslant 1$, $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \cos(nx)dx$.

D'où $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi} \underbrace{\left[x(\pi - x) \dfrac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi}}_{0} - \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - 2x) \frac{\sin(nx)}{n} dx$,

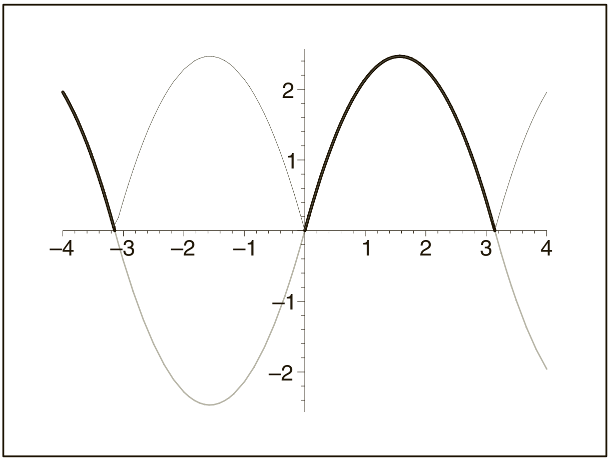


Figure 11.4 Les graphes de f et de g.

et finalement, $$a_n(f) = \frac{2}{\pi n^2}[(\pi - 2x)\cos(nx)]_0^\pi + \underbrace{\frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi \cos(nx)dx}_{0}$$
$$= \frac{2}{\pi n^2}(-\pi(-1)^n - \pi) = -\frac{2}{n^2}(1+(-1)^n).$$

On a donc $a_n(f) = 0$ si n est impair et $a_n(f) = -\dfrac{4}{n^2}$ si n est pair.

En appliquant le théorème de Dirichlet on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2px)}{p^2}$.

Soit à présent g la fonction impaire 2π-périodique valant $x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$.
La fonction g est continue, $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
b_n(g) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\underbrace{\left[-x(\pi - x)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi}_{=0} + \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos(nx)dx \\
&= -\frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\cos(nx)dx = -\frac{4}{\pi n}\underbrace{\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi}_{=0} + \frac{4}{\pi n^2}\underbrace{\int_0^\pi \sin(nx)dx}_{=\frac{1-(-1)^n}{n}}.
\end{aligned}$$

Donc $b_n(g) = 0$ si n est pair et $b_n(g) = \dfrac{8}{\pi n^3}$ si n est impair. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $g(x) = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}$, grâce au théorème de Dirichlet.

En particulier, pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2px)}{p^2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.$$

Avec $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient $\dfrac{\pi^2}{4} = \dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Soit $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

Exercice 11.9

(Inégalité de Wirtinger) CCP MP 2007, Mines-Ponts PC 2006

1) Soient $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ et g l'application de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $g(t) = Ae^{it} + Be^{-it}$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \, dt = \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 \, dt$

2) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π-périodique, telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Indication de la rédaction : utiliser la formule de Parseval.

1) On a $|g(t)|^2 = |A|^2 + |B|^2 + A\overline{B}e^{2it} + \overline{A}Be^{-2it}$. On en déduit que

$$\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \, dt = |A|^2 + |B|^2 .$$

On a ensuite $g'(t) = iAe^{it} - iBe^{-it}$, et donc

$$\int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 \, dt = |A|^2 + |B|^2 = \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \, dt.$$

2) Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = inc_n(f)$.
Les fonctions f et f' étant continues, la formule de Parseval donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2),$$

car $c_0(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. On a aussi

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt = \frac{|c_0(f')|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (|c_n|^2 (f) + |c_{-n}(f)|^2),$$

car $c_0(f') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}(f(2\pi) - f(0)) = 0$.
On en déduit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}(n^2-1)(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) > 0,$$

et donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt$.

Examinons à présent le cas d'égalité. Comme $n^2 - 1 > 0$ pour $n > 1$, l'égalité $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt$ entraîne $c_n(f) = 0$ pour tout $n \notin \{-1, 0, 1\}$.

Comme la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, elle est égale à la somme de sa série de Fourier et on a alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = c_1 e^{ix} + c_{-1}e^{-ix}$. On retrouve les fonctions étudiées dans la question 1.

Exercice 11.10

Centrale PC MP 2006

A l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Soit f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = x(1 - x^2)$.

1) Montrer qu'il existe une suite (b_n) telle que

$$\forall x \in [-1, 1],\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x).$$

2) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

1) Introduisons d'abord la fonction $\widetilde{f}$, 2-périodique, qui coïncide avec f sur $[-1, 1]$, puis la fonction g, 2π-périodique, telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \widetilde{f}(t/\pi)$.

En particulier, pour tout $t \in [-\pi, \pi],\ g(t) = \dfrac{t(\pi^2 - t^2)}{\pi^3}$.

Ainsi définie g est 2π-périodique, impaire, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, et continue sur $\mathbb{R}$. La série de Fourier de g est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$, et sa somme coïncide avec g. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(g) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(g) = \frac{2}{\pi^4}\int_0^{\pi} t(\pi^2 - t^2)\sin nt\,dt.$$

Confions ce calcul à `Maple`

```
> assume(n,integer):
> simplify(int(t*(Pi^2-t^2)*sin(n*t),t=0..Pi)*2/(Pi^4));
```

$$12\frac{(-1)^{(1+n)}}{n^3\pi^3}$$

Le théorème de Dirichlet montre que $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \dfrac{12}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nt}{n^3}$, d'où

$$\forall x \in [-1,1],\ x(1-x^2) = \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin n\pi x}{n^3}\ .$$

C'est bien la forme souhaitée, avec, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{12}{\pi^3}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit v_n la fonction définie par $v_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}\sin n\pi x}{n^3}$.

v_n est continue sur $[0,1]$ et la série $\sum v_n$ converge normalement sur $[0,1]$. On peut donc intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1-x^2)\,dx &= -\frac{12}{\pi^4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}[\cos n\pi x]_0^1}{n^4}\\ &= \frac{12}{\pi^4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^4} = \frac{24}{\pi^4}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}\end{aligned}$$

On en déduit $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{24}\int_0^1 x(1-x^2)\,dx = \frac{\pi^4}{96}$.

Enfin la formule de Parseval appliquée à la fonction g donne

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)^2 dt = \frac{144}{\pi^6}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$$

On obtient finalement $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

Vérification : avec `Maple` on obtient

```
> sum(1/(2*p+1)^4,p=0..infinity);
1/96 Pi^6
> sum(1/n^6,n=1..infinity);
1/945 Pi^6
```

Exercice 11.11

(Produit de convolution) Mines-Ponts PSI 2006

On désigne par $\mathscr{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues, 2π-périodiques, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soient $f, g \in \mathscr{C}_{2\pi}$. On note $f * g$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f*g)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$.

1) Montrer que $f * g$ est une fonction continue 2π-périodique.

2) Calculer les coefficients de Fourier de $f * g$ en fonction de ceux de f et de g.

3) Démontrer que la série de Fourier de $f * g$ est normalement convergente, et calculer sa somme.

1) Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$ existe.
L'application $\varphi\colon \mathbb{R}\times[0,2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(x,t) = f(t)g(x-t)$ est continue. De plus comme f et g sont bornées, il existe des constantes réelles A et B telles que $|f(x)| \leqslant A$ et $|g(x)| \leqslant B$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. φ vérifie donc *l'hypothèse de domination* $|\varphi(x,t)| \leqslant AB$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,2\pi]$.
On en conclut que la fonction $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est aussi 2π-périodique car si $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a $g(x+2\pi-t) = g(x-t)$.

2) Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned}
c_n(f*g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\,dt\right)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)e^{-inx}\,dt\right)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)e^{-inx}\,dx\right)dt \quad \text{(théorème de Fubini)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\int_0^{2\pi} g(x-t)e^{-inx}\,dx\right)dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\int_{-t}^{2\pi-t} g(y)e^{-in(y+t)}\,dy\right)dt \\
&\qquad \text{(changement de variable } y = x-t\text{)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n(g)f(t)e^{-int}dt \\
&= c_n(f)c_n(g)
\end{aligned}$$

3) Les séries numériques $\sum |c_n(f)|^2$ et $\sum |c_n(g)|^2$ sont convergentes d'après le théorème de Parseval. L'inégalité $|c_n(f)c_n(g)| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(|c_n(f)|^2 + |c_n(g)|^2\right)$ montre que la série numérique $\sum |c_n(f*g)|$ est convergente. On montre de même que la série $\sum |c_{-n}(f*g)|$ converge. La série de Fourier de $f*g$ est donc normalement convergente, et sa somme est égale à $f*g$.

Exercice 11.12

1) Soient a et b deux nombres complexes. Montrer que

$$a\overline{b} = \frac{1}{4}\left(|a+b|^2 - |a-b|^2 + i\,|a+ib|^2 - i\,|a-ib|^2\right).$$

2) Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Montrer que la série de terme général $\overline{c_n(f)}c_n(g)+\overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)$ est convergente et que

$$\overline{c_0(f)}c_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty}(\overline{c_n(f)}c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}g(t)dt\ .$$

1) Lorsque λ est un nombre complexe, on a $|a+\lambda b|^2 = |a|^2 + \overline{\lambda}a\overline{b} + \lambda\overline{a}b + |\lambda|^2\,|b|^2$.
En donnant à λ les valeurs successives $\lambda = 1,\ -1,\ i$ et $-i$ on obtient

$$|a+b|^2 - |a-b|^2 + i\,|a+ib|^2 - i\,|a-ib|^2 = 4a\overline{b}\ .$$

2) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\overline{c_n(f)}c_n(g) = \frac{1}{4}\left(|c_n(g+f)|^2 - |c_n(g-f)|^2 + i\,|c_n(g+if)|^2 - i\,|c_n(g-if)|^2\right).$$

En appliquant le théorème de Parseval aux fonctions $(g+f)$, $(g-f)$, $(g+if)$ et $(g-if)$, on voit que la série de terme général $\overline{c_n(f)}c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)$ est convergente et que

$$\begin{aligned}
&\overline{c_0(f)}c_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty}(\overline{c_n(f)}c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)) \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(|g+f|^2 - |g-f|^2 + i\,|g+if|^2 - i\,|g-if|^2\right)dt \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}g(t)dt\ .
\end{aligned}$$

11.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 11.13

CCP PC 2007

Soit $f : \mathbb{C}\setminus\{-3\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(z) = \dfrac{3z}{3+z}$.

1. Développer $f(z)$ en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?

2. Soit g la fonction impaire, 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ g(\theta) = \frac{\sin\theta}{5 + 3\cos\theta}\ .$$

2.a Montrer que la série de Fourier de g converge normalement sur $\mathbb{R}$, et que sa somme est égale à g.

2.b Montrer qu'il existe une constante réelle A, que l'on déterminera, telle que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ g(\theta) = A\,\mathrm{Im}\big(f(e^{i\theta})\big),$$

où $\mathrm{Im}(f(e^{i\theta})\big)$ désigne la partie imaginaire de $f(e^{i\theta})$.

2.c A l'aide de la question 1, déterminer un développement de g sous la forme de la somme d'une série trigonométrique $g(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \sin k\theta$.

2.d En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur de l'intégrale $I_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} g(\theta)\,d\theta$, puis la série de Fourier de g.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} g(\theta)\,d\theta$. En déduire la valeur de la somme

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(6k+5)}{3^{3k+2}(3k+1)(3k+2)}\ .$$

1) À l'aide de la série géométrique on obtient pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant 3$:

$$f(z) = \frac{z}{1+\frac{z}{3}} = z\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} z^{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}} z^k.$$

Le rayon de convergence est égal à 3.

2a) g est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Le théorème de convergence normale montre que la série de Fourier de g converge normalement sur $\mathbb{R}$, et que sa somme est égale à g. Comme de plus g est impaire, on a $a_n(g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2b) On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\big(f(e^{i\theta})\big) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{3e^{-i\theta}}{3+e^{i\theta}} - \frac{3e^{-i\theta}}{3+e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2i}\,\frac{9(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{10+3(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}\\ &= \frac{9\sin\theta}{10+6\cos\theta} = \frac{9}{2}g(\theta).\end{aligned}$$

et donc $g(\theta) = \dfrac{2}{9}\,\mathrm{Im}\big(f(e^{i\theta})\big)$.

2c) Appliquons la question 1 avec $z = e^{i\theta}$. On obtient alors $f(e^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}} e^{ik\theta}$,

et on en déduit que $g(\theta) = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3^k} \sin k\theta$.

2d) Soit $n \in \mathbb{N}$. La série de fonctions $\sum u_k$, où $u_k(\theta) = \frac{(-1)^{k-1}}{3^k} \sin k\theta \sin n\theta$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Le théorème d'intégration terme à terme donne alors les coefficients de Fourier $b_n(g)$:

$$b_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(\theta) \sin n\theta \, d\theta = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3^k} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin k\theta \sin n\theta \, d\theta = \frac{2}{3} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

La série de Fourier de g est donc la série trigonométrique trouvée à la question 2.c.

3) On a d'une part $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} g(\theta)\, d\theta = -\frac{1}{3} \left[\ln(5 + 3\cos\theta\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{3} \ln \frac{16}{7}$.

D'autre part par intégration terme à terme d'une série de fonctions normalement convergente,

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} g(\theta)\, d\theta = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} \left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} \left(1 - \cos\frac{2n\pi}{3}\right) \ (*).$$

Posons alors $\alpha_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} \left(1 - \cos\frac{2n\pi}{3}\right)$ et $\beta_k = \alpha_{3k} + \alpha_{3k+1} + \alpha_{3k+2}$.

On calcule $\beta_k = \frac{(-1)^{3k}}{(3k+1)3^{k+1}} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{(-1)^{3k+1}}{(3k+2)3^{k+2}} \left(1 + \frac{1}{2}\right)$.

On en déduit $\beta_k = \frac{(-1)^k (6k+5)}{3^{3k+2}(3k+1)(3k+2)}$, et en regroupant 3 à 3 les termes dans la série $(*)$, on obtient $S = \frac{1}{3} \ln \frac{16}{7}$.

Exercice 11.14 K

Soit $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$K : (x, y) \mapsto \begin{cases} (x-1)y & \text{si } y \leqslant x, \\ (y-1)x & \text{si } x \leqslant y. \end{cases}$$

1) Soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [-\pi, +\pi]$. Déterminer la série de Fourier de f et indiquer son mode de convergence et sa somme.

2) En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|x| + |y| \leqslant 1$, on a :

$$(x+y)^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi(x+y)}{n^2}$$

puis, en utilisant la relation $xy = \frac{1}{4}\big((x+y)^2 - (x-y)^2\big)$,

$$xy = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\pi x)\sin(n\pi y)}{n^2} .$$

3) En déduire finalement que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad K(x, y) = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi x)\sin(n\pi y)}{n^2} .$$

1) La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Il en résulte que la série de Fourier de f est normalement convergente, et que sa somme est égale à f.

Elle est paire donc les coefficients de Fourier $b_n(f)$ sont nuls. On calcule aisément $a_0(f) = \dfrac{2\pi^2}{3}$ et, à l'aide de deux intégrations par parties successives,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)dt = \frac{4(-1)^n}{n^2} \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

D'où : $\forall t \in [-\pi, \pi],\ t^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nt)}{n^2}$.

2) Soient x et y sont deux nombres réels tels que $|x| + |y| \leqslant 1$. On a alors $\pi(x+y) \in [-\pi, \pi]$ et donc

$$(x+y)^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi(x+y)}{n^2} .$$

On a de même $(x-y)^2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi(x-y)}{n^2}$, puis en utilisant la relation $xy = \frac{1}{4}\big((x+y)^2 - (x-y)^2\big)$,

$$\begin{aligned} xy &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(n\pi(x+y)) - \cos(n\pi(x-y))}{n^2} \\ &= -\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\pi x)\sin(n\pi y)}{n^2} \end{aligned}$$

3) Si $(x, y) \in [0, 1]^2$ et si $x \leqslant y$, alors $|y-1| + |x| = 1 - y + x \leqslant 1$. On voit de même que $|x-1| + |y| \leqslant 1$ lorsque $y \leqslant x$. On peut donc appliquer le résultat précédent.

Compte tenu des relations

$$\sin(n\pi(x-1) = (-1)^n \sin(n\pi x) \quad \text{et} \quad \sin(n\pi(x-1) = (-1)^n \sin(n\pi x)$$

on obtient :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad K(x,y) = -\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi x)\sin(n\pi y)}{n^2}.$$

Exercice 11.15

CCP PC 2006 K

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. On veut démontrer, à l'aide des séries de Fourier, que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt.$$

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = |\sin t|$.
   Tracer le graphe de g et calculer les coefficients de Fourier de g. Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$g(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}.$$
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer qu'il existe une constante réelle $A > 0$ telle que, pour tout $r > 0$,
   $$\left|\int_a^b f(t)\cos(rt)dt\right| \leqslant \frac{A}{r}.$$
3. Conclure.

1. Cette question a été traitée dans l'exercice (11.6) (voir page 261). Les coefficients de Fourier $b_n(g)$ sont nuls. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n}(g) = -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{4n^2-1}$ et $a_{2n+1}(g) = 0$.
   Comme g est 2π-périodique, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, et continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de convergence normale montre que la série de Fourier de g converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \ |\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}.$$
2. À l'aide d'une intégration par parties on obtient, pour $r > 0$,
   $$\int_a^b f(t)\cos(rt)dt = \left[f(t)\frac{\sin(rt)}{r}\right]_a^b - \frac{1}{r}\int_a^b f'(t)\sin(rt)dt.$$
   En posant $M = \sup(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty)$, on a alors
   $$\left|\int_a^b f(t)\cos(rt)dt\right| \leqslant \frac{2M+(b-a)M}{r} = \frac{A}{r}.$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la série de fonctions $\sum u_n$, avec $u_n : t \mapsto \dfrac{f(t)\cos(2n\lambda t)}{4n^2-1}$ converge normalement sur $[a,b]$, on a

$$\int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\,dt = \int_a^b f(t)\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n\lambda t)}{4n^2-1}\right)dt$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b \frac{f(t)\cos(2n\lambda t)}{4n^2-1}\,dt\ .$$

Or

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b \frac{f(t)\cos(2n\lambda t)\,dt}{4n^2-1}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\left|\int_a^b f(t)\cos(2n\lambda t)dt\right|$$
$$\leqslant \frac{A}{2\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(4n^2-1)} \longrightarrow 0 \text{ quand } \lambda \to +\infty\ .$$

Il en résulte que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt.$

Exercice 11.16

Mines-Ponts PC 2006 K K

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)x} = \frac{1}{e^x-1}$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}$.

3. Soit g la fonction 2π-périodique dont la restriction à $[0,2\pi[$ est $x \mapsto e^{ax}$. Déterminer la série de Fourier de g, et justifier sa convergence.

4. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $0 < e^{-x} < 1$. La série géométrique $\sum e^{-(n+1)x}$ est donc convergente, et sa somme est égale à $\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \dfrac{1}{e^x-1}$.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin ax}{e^x-1}$. f est continue sur $]0,+\infty[$, et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)x}\sin ax$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, désignons par v_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $v_n(x) = e^{-(n+1)x} \sin ax$. v_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $|v_n|$ est intégrable sur I puisque $|v_n(x)| \leqslant e^{-(n+1)x}$.

Afin d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle, nous cherchons à démontrer la convergence de la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |v_n(x)|\, dx$.

La simple majoration $|v_n(x)| \leqslant e^{-(n+1)x}$ ne permet pas de conclure car la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} dx = \frac{1}{n+1}$ est divergente !

En revanche la majoration $|\sin ax| \leqslant |a|\, x$, suivie d'une intégration par parties permet de conclure puisque

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |v_n(x)|\, dx &\leqslant |a| \int_0^{+\infty} x e^{-(n+1)x} dx \\ &\leqslant |a| \left(\left[\frac{-x e^{-(n+1)x}}{n+1} \right]_{x=0}^{x \to +\infty} + \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} dx \right) \\ &\leqslant \frac{|a|}{(n+1)^2}\,,\end{aligned}$$

et la série de terme général $\dfrac{1}{(n+1)^2}$ est convergente.

Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\, dx$ est convergente, et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \sin ax\, dx\,.$$

On calcule enfin

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \sin ax\, dx &= \frac{1}{2i} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} e^{iax} dx - \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} e^{-iax} dx \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{-1}{-(n+1) + ia} - \frac{-1}{-(n+1) - ia} \right) = \frac{a}{(n+1)^2 + a^2}\end{aligned}$$

On a donc bien : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + (n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}\,.$

3. Afin d'obtenir les coefficients $a_n(g)$ et $b_n(g)$, calculons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{at} e^{int} dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{(a+in)t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{a+in} (e^{2a\pi} - 1) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{a - in}{a^2 + n^2} (e^{2a\pi} - 1)\end{aligned}$$

D'où en prenant les parties réelle et imaginaire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(g) = \frac{a(e^{2a\pi} - 1)}{\pi(a^2 + n^2)} \text{ et } b_n(g) = \frac{-n(e^{2a\pi} - 1)}{\pi(a^2 + n^2)}\ .$$

Comme g est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, le théorème de Dirichlet donne :

$$\forall x \in]0, 2\pi[,\ e^{ax} = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}\cos nx - \frac{n}{a^2 + n^2}\sin nx\right)$$

Le théorème de Dirichlet donne pour $x = 0$

$$\frac{1 + e^{2a\pi}}{2} = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}\right),$$

d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{2a\pi} + 1}{e^{2a\pi} - 1} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\text{th}(a\pi)} - \frac{1}{a}\right).$

Exercice 11.17

(Inégalité isopérimétrique) Centrale PSI 2006 K K

Soit $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ |\gamma'(t)| = 1$, et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \gamma(t)\,dt = 0$. On note Γ la courbe définie par la paramétrisation $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, et on note S l'aire du domaine délimitée par Γ.

1) Montrer que $S = \displaystyle\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \overline{\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt$.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\overline{\gamma(t)}\gamma'(t)\right|\,dt \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} |\gamma(t)|^2\,dt + \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|^2\,dt\right)$.

3) En déduire que $|S| \leqslant \pi$ et étudier le cas d'égalité. Interprétation géométrique ?

Indications de la rédaction : pour la question 1 on rappelle que l'aire algébrique du domaine limitée par Γ est $S = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big)\,dt$. Pour la question 3 on pourra utiliser l'inégalité de Wirtinger (cf. exercice 11.9 page 266).

1) Utilisons l'indication. On a $S = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big)\,dt$.

Or : $\overline{\gamma}\gamma' = (x - iy)(x' + iy') = xx' + yy' - i(x'y - xy')$. D'où

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \overline{\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt &= \int_0^{2\pi} [x(t)x'(t) + y(t)y'(t)]\,dt + i\int_0^{2\pi} [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[x^2(t) + y^2(t)\right]_0^{2\pi} + 2iS \\ &= 2iS \quad \text{(puisque } t \mapsto x^2(t) + y^2(t) \text{ est } 2\pi\text{-périodique).}\end{aligned}$$

2) Cela résulte de l'inégalité $\left|\overline{\gamma(t)}\gamma'(t)\right| \leqslant \frac{1}{2}(|\gamma(t)|^2 + |\gamma'(t)|^2)$.

3) Il résulte des questions 1) et 2) que

$$|S| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left|\overline{\gamma(t)}\gamma'(t)\right|\,dt \leqslant \frac{1}{4}\left(\int_0^{2\pi} |\gamma(t)|^2\,dt + \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|^2\,dt\right).$$

En utilisant l'inégalité de Wirtinger on obtient $|S| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|^2\,dt = \pi$.

L'égalité $|S| = \pi$ entraîne le cas d'égalité dans l'inégalité de Wirtingen. On a donc dans ce cas $\gamma(t) = Ae^{it} + Be^{-it}$ où A et B sont deux constantes complexes. La relation $\forall t \in \mathbb{R},\ |\gamma'(t)| = 1$ s'écrit alors $|A|^2 + |B|^2 + (A\overline{B})e^{it} + (\overline{A}B)e^{-it} = 1$, d'où on déduit facilement $B = 0$ et $|A| = 1$, ou bien $A = 0$ et $|B| = 1$. On a alors $\gamma(t) = Ae^{it}$ où $\gamma(t) = Be^{-it}$ et dans les deux cas Γ est un cercle centré à l'origine et de rayon 1.

Ce résultat montre que parmi toutes les courbes régulières fermées dont la longueur est fixée (on peut toujours supposer qu'une telle courbe est définie par une paramétrisation normale et que sa longueur est égale à 2π) celle qui limite le domaine d'aire maximale est le cercle.

(La condition $\int_0^{2\pi} \gamma(t)dt = 0$ semble limitative, mais on peut toujours la supposer vérifiée, quitte à faire un changement d'origine du repère : il suffit de prendre pour nouvelle origine le point Ω de coordonnées $x_0 = \int_0^{2\pi} x(t)dt$ et $y_0 = \int_0^{2\pi} y(t)dt$.)

Exercice 11.18

Centrale PSI 2006 K K

Soit $\beta \in]0, 1[$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{\beta} + 2\beta\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \beta^2}$.
2. Soit f_β l'unique fonction 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ coïncidant avec $x \mapsto \cos(\beta x)$ sur $[-\pi, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de f_β ; étudier la convergence de la série de Fourier.

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\beta)}$.

4. On considère l'application $\varphi_\beta : \theta \in\,]-\pi,\pi[\mapsto \varphi_\beta(\theta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\,dx$.

   Montrer que φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et que pour tout $\theta \in\,]-\pi,\pi[$, $\varphi_\beta'(\theta) + i\beta\varphi_\beta(\theta) = 0$.
   En déduire une expression simple de $\varphi_\beta(\theta)$.

1. Commençons par justifier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+x}\,dx$.

   L'application $f : x \mapsto \dfrac{x^{\beta-1}}{1+x}$ est continue et positive sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$. On a de plus $f(x) \sim x^{\beta-1}$ au voisinage de 0 et $f(x) \sim x^{\beta-2}$ au voisinage de $+\infty$. La convergence des intégrales de Riemann $\displaystyle\int_0^1 x^{\beta-1}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{\beta-2}dx$ assurent alors l'intégrabilité de f sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$, et donc l'intégrabilité de f sur $]0,+\infty[$.
   Pour le calcul de I, nous séparons en deux l'intervalle d'intégration : $I = I_1 + I_2$, avec $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}}{1+x}\,dx$ et $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+x}\,dx$. Comme l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est un difféomorphisme de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur l'intervalle $]0,1]$, le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ dans la seconde intégrale est licite, et on obtient $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{-\beta}}{1+x}\,dx$.

   Soit alors $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in\,]0,1]$. On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n = \frac{1-(-1)^{N+1}x^{N+1}}{1+x}$, et donc

$$\frac{x^{\beta-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{\beta-1+n} + (-1)^{N+1}\frac{x^{\beta+N}}{1+x},$$

   d'où $I_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{1}{\beta+n} + K_N$, avec $|K_N| = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\beta+N}}{1+x}\,dx$.

   On a alors $|K_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^{\beta-1+N}dx = \frac{1}{N+1+\beta}$, et donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} K_N = 0$.

   On en déduit finalement que $I_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n+\beta}$.

Pour le calcul de I_2, posons $\alpha = 1 - \beta$. En remplaçant β par $1-\beta$ dans l'expression de I_1, on obtient $I_2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1-\beta}$.

On a enfin $I = \dfrac{1}{\beta} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n+\beta} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1-\beta}$, et en regroupant les termes, on obtient $I = \dfrac{1}{\beta} + 2\beta\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\beta^2}$.

2. La fonction f_β est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Le théorème de convergence normale montre que sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$, et que sa somme est égale à f_β.
Les calculs des coefficients de Fourier de f_β ont été effectués dans l'exercice 11.7 : on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f_\beta) = 0$, $a_0(f_\beta) = \dfrac{2}{\pi\beta}\sin(\beta\pi)$, et, pour $n \geqslant 1$,
$$a_n(f_\beta) = \frac{2(-1)^{n-1}\beta\sin(\beta\pi)}{\pi(n^2-\beta^2)}.$$
On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_\beta(x) = \frac{1}{\pi\beta}\sin(\beta\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2\beta\sin(\beta\pi)}{\pi(n^2-\beta^2)}\cos(nx).$$

3. Avec $x = 0$, la relation précédente donne
$$1 = \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{\beta} + 2\beta\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\beta^2}\right)$$
Il en résulte que
$$\frac{\pi}{\sin(\beta\pi)} = \frac{1}{\beta} + 2\beta\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\beta^2} = \int_0^{+\infty}\frac{x^{\beta-1}}{1+x}\,dx\ .$$

4. Le détail des calculs est assez technique.
Posons $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi,\pi\right[\to \mathbb{R}$, et soit $K\colon \Delta \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $K(x,\theta) = \dfrac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}$. Elle est continue sur Δ, et elle admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial K}{\partial\theta}(x,\theta) = \dfrac{-ie^{i\theta}x^\beta}{(1+xe^{i\theta})^2}$ qui est-elle aussi continue sur Δ. Nous allons vérifier des hypothèses de dominations sur $\Delta_0 = \mathbb{R}_+^* \times [-\theta_0,\theta_0]$, où θ_0 est un nombre réel fixé ($0 < \theta_0 < \pi$). Pour cela nous utilisons la minoration
$$\begin{aligned}\left|1+xe^{i\theta}\right|^2 &= (1+x\cos\theta)^2 + x^2\sin^2\theta\\ &= 1+2x\cos\theta+x^2\\ &\geqslant 1+2x\cos\theta_0+x^2 = \left|1+xe^{i\theta_0}\right|^2\ .\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\forall (x,\theta)\in\Delta_0,\, |K(x,\theta)| \leqslant |K(x,\theta_0)|\,, \text{ et } \left|\frac{\partial K}{\partial\theta}(x,\theta)\right| \leqslant \left|\frac{\partial K}{\partial\theta}(x,\theta_0)\right| .$$

On a de plus

$$\begin{gathered}|K(x,\theta_0)| \sim x^{\beta-1} \text{ quand } x\to 0,\\ |K(x,\theta_0)| \sim x^{\beta-2} \text{ quand } x\to +\infty,\\ \left|\frac{\partial K}{\partial\theta}(x,\theta_0)\right| \sim x^{\beta} \text{ quand } x\to 0 \text{ et}\\ \left|\frac{\partial K}{\partial\theta}(x,\theta_0)\right| \sim x^{\beta-2} \text{ quand } x\to +\infty,\end{gathered}$$

d'où l'on déduit, par comparaison à une intégrale de Riemann, que les fonctions $x\mapsto |K(x,\theta_0)|$ et $x\mapsto \left|\dfrac{\partial K}{\partial\theta}(x,\theta_0)\right|$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$.

Le théorème de dérivation sous le signe somme montre alors que la fonction φ_β définie par $\varphi_\beta(\theta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\,dx$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[-\theta_0,\theta_0]$ (et donc sur $]-\pi,\pi[$), et que

$$\forall\theta\in\,]-\pi,\pi[,\ \varphi'_\beta(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{-ie^{i\theta}x^{\beta}}{(1+xe^{i\theta})^2}\,dx$$

Dans cette dernière intégrale nous effectuons une intégration par parties, avec les fonctions auxiliaires $u\colon x\mapsto \dfrac{1}{1+xe^{i\theta}}$ et $v\colon x\mapsto ix^{\beta}$. Comme le produit uv a des limites nulles en 0 et $+\infty$, on obtient

$$\varphi'_\beta(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{-i\beta x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\,dx = -i\beta\varphi_\beta(\theta)\,.$$

On en déduit qu'il existe une constante K telle que $\varphi_\beta(\theta) = Ke^{-i\beta\theta}$, et la question 2 montre que $K = \varphi_\beta(0) = \dfrac{\pi}{\sin(\beta\pi)}$. On a donc $\varphi_\beta(\theta) = \dfrac{\pi e^{-i\beta\theta}}{\sin(\beta\pi)}$.

12 Équations différentielles linéaires

12.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

12.1.1 Un exercice de révision

Nous avons étudié en première année les équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre. Vous pouvez tester vos connaissances avec l'exercice suivant :

Exercice 12.1

CCP PC 2006

1) Résoudre l'équation différentielle (E) $xy' + 2y = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

2) Soit h la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \mathrm{Arctan}(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que (E) possède une unique solution f définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Comme le coefficient de y' s'annule pour $x = 0$, l'énoncé propose d'effectuer la résolution sur $I_1 =]0,+\infty[$ et sur $I_2 =]-\infty,0[$ dans un premier temps, puis d'étudier le raccordement éventuel d'une solution définie sur I_1 et d'une solution définie sur I_2.

1) Les solutions définies sur I_k $(k = 1, 2)$ de l'équation homogène associée $xy' + 2y = 0$ sont les fonctions y_k telles que : $\quad \forall x \in I_k,\ y_k(x) = \dfrac{\lambda_k}{x^2}$.

Pour la résolution de l'équation complète, nous pouvons utiliser la méthode de variation de la constante : les solutions de l'équation (E) sur I_k sont les fonctions y_k définies par : $\forall x \in I_k,\ y_k(x) = \dfrac{\lambda_k(x)}{x^2}$, où λ_k est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\forall x \in I_k,\ \dfrac{\lambda_k'(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2+1}$. On en déduit que $\lambda_k'(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$, et donc $\lambda_k(x) = x - \mathrm{Arctan}(x) + a_k$ où a_k est une constante réelle.

Les solutions de (E) sur I_k sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto y_k(x) = \frac{x - \operatorname{Arctan} x + a_k}{x^2}$$

où a_k est une constante réelle.

2) La fonction h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. On sait par ailleurs que la fonction Arctan est développable en série entière :

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \ \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

On en déduit que : $\forall x \in \left]-1, 1\right[, \ h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n-1}$. La restriction de h à $\left]-1, 1\right[$ est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ puisque c'est la somme d'une série entière, et il en résulte finalement que h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3) Soit y une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$. Notons y_1 (resp. y_2) sa restriction à I_1 (resp. I_2). Ce sont des solutions de (E) et il existe donc deux constantes a_1 et a_2 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{Arctan} x + a_1}{x^2} & \text{si } x \in I_1, \\[2ex] \dfrac{x - \operatorname{Arctan} x + a_2}{x^2} & \text{si } x \in I_2. \end{cases}$$

Comme y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, y_1, y_2, y_1', y_2' ont des limites finies en 0 telles que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} y_1(x) = \lim_{x\to 0^-} y_2(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} y_1'(x) = \lim_{x\to 0^-} y_2'(x)$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x - \operatorname{Arctan} x) = 0$, la condition concernant les limites en 0 de y_1 et y_2 entraîne $a_1 = a_2 = 0$. On a donc $y(x) = h(x)$ pour tout $x \neq 0$, et $y(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^2} = 0$.

Réciproquement la fonction h vérifie la relation $xh'(x) + 2h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, et aussi au point $x = 0$ puisque $h(0) = 0$. C'est donc une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$, et elle est unique.

4) En partant de la relation $2f(x) = -xf'(x) + \dfrac{x}{1+x^2}$, on obtient, à l'aide d'une intégration par parties :

$$2\int_0^1 f(x)dx = \left[-xf(x)\right]_0^1 + \int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1,$$

d'où $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = -f(1) + \frac{\ln 2}{2} = -1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$.

12.1.2 Équation différentielle linéaire scalaire du second ordre

Ce qu'il faut savoir

On considère une équation différentielle de la forme

$$\forall x \in I,\ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \tag{1}$$

où a, b, c, d sont des fonctions numériques (à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et où l'inconnue y est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de I dans $\mathbb{K}$.

L'équation différentielle

$$\forall x \in I,\ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{2}$$

est appelée l'équation homogène associée à (1). **Dans la suite nous supposons que a ne s'annule pas sur I.**

Théorème (Cauchy-Lipschitz) : Soit $x_0 \in I$, et soit $(v_0, v_1) \in \mathbb{K}^2$. Alors il existe une unique solution y de (E) sur l'intervalle I vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = v_0$ et $y'(x_0) = v_1$.

L'ensemble $\mathscr{E}$ des solutions[1] de (2) est un **sous-espace vectoriel de dimension 2** du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Une base de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ est appelée un **système fondamental de solutions**.

Soient y_1 et y_2 deux solutions de (2). La fonction $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ est appelée **Wronskien** du couple (y_1, y_2). Elle est solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in I,\ a(x)W' + b(x)W = 0.$$

Pour que (y_1, y_2) forme un système fondamental de solutions de (2), il faut et il suffit que W ne s'annule pas sur I, et il suffit, pour cela, qu'il soit non nul en un point x_0 de I.

L'ensemble $\mathscr{F}$ des solutions de l'équation complète (1) est un sous-espace affine de dimension 2 de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$, dont la direction est l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ des solutions de l'équation homogène : si y_0 est une solution particulière de (1), les solutions de (1) sont les fonctions de la forme $y_0 + y$, avec $y \in \mathscr{E}$.

Exercice 12.2

CCP PC 2006

1) Résoudre l'équation différentielle (E) $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Indication de l'examinateur : on pourra chercher des solutions évidentes (une fonction exponentielle, et une fonction affine).

1. Dans le cas où les fonctions a, b, c et d sont à valeurs réelles on recherche généralement les solutions à valeurs réelles.

2) Déterminer les solutions de (E) définies et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

3) Existe-t-il une solution définie et de classe $\mathscr{C}^2$sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$?

1) Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre. On observe que les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x + 1$ et $v(x) = e^x$ sont des solutions de (E).

Attention : *pour pouvoir appliquer le théorème général concernant la dimension de l'espace vectoriel des solutions il faut se placer sur des intervalles où le coefficient de y'' ne s'annule pas !*

Plaçons nous, par exemple, sur l'intervalle $I_1 =]0, +\infty[$. Les fonctions u et v forment un système fondamental de solutions sur cet intervalle puisque leur Wronskien $W(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = xe^x$ est non nul.

Les solutions de (E) sur I_1 sont donc les fonctions y_1 définies par

$\forall x \in I_1,\ y_1(x) = a_1e^x + b_1(x + 1)$ où a_1 et b_1 sont deux constantes réelles.

De même, les solutions définies sur $I_2 =]-\infty, 0[$ sont les fonctions y_2 telles que $y_2(x) = a_2e^x + b_2(x + 1)$ avec $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$.

2) Cherchons maintenant les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

Soit $y_1 : x \mapsto a_1e^x+b_1(x+1)$ une solution définie sur I_1 et $y_2 : x \mapsto a_2e^x+b_2(x+1)$ une solution définie sur I_2. Pour qu'elles soient les restrictions d'une solution y définie sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que :

$$\lim_{x\to 0^+} y_1(x) = \lim_{x\to 0^-} y_2(x)$$

$$\lim_{x\to 0^+} y_1'(x) = \lim_{x\to 0^-} y_2'(x)$$

$$\lim_{x\to 0^+} y_1''(x) = \lim_{x\to 0^-} y_2''(x)$$

c'est-à-dire $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$, $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ et $a_1 = a_2$.

Ces conditions (appelées conditions de raccordement) sont vérifiées si, et seulement si, $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

Il en résulte que les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $y : x \mapsto ae^x + b(x + 1)$ où a et b sont deux constantes réelles.

3) La relation (E) montre que si y est une solution définie sur $\mathbb{R}$, alors $y'(0) = y(0) = a+b$. Il n'existe donc pas de solution vérifiant les conditions initiales indiquées.

Remarque

On voit sur cet exemple que le théorème de Cauchy peut être mis en défaut si le coefficient de y'' dans l'équation (E) s'annule en un point.

12.1.3 Méthodes de résolution

a) La méthode de variation des constantes

Dans le cas où on connaît un système fondamental de solutions de l'équation homogène, mais où on ne connaît pas de solution particulière de l'équation complète, on utilise généralement la méthode de variation des constantes :

Ce qu'il faut savoir

Soit (y_1, y_2) un système fondamental de l'équation homogène. Alors les solutions de l'équation complète sont toutes les fonctions de la forme $y = \lambda y_1 + \mu y_2$, où λ et μ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I dont les dérivées vérifient

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 &= 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' &= d/a \end{cases}$$

Exercice 12.3

CCP PSI 2006

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$ sur $I =]0, \pi[$.

Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ forment un système fondamental de solutions de l'équation homogène. On sait alors que les solutions de l'équation complète sont de la forme $y\colon x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$ où λ et μ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ telles que

$$\forall x \in I, \begin{cases} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x &= 0 \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x &= \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

On en déduit aisément $\lambda'(x) = -1$ et $\mu'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, d'où $\lambda(x) = -x + a$ et $\mu(x) = \ln(\sin x) + b$ où a et b sont deux constantes réelles. Les solutions sont donc les fonctions y définies sur I par $y(x) = -x\cos x + \sin x \ln(\sin x) + a\cos x + b\sin x$ où a et b sont deux constantes réelles.

b) Changement de fonction inconnue

Ce qu'il faut savoir

Lorsque h est une solution de l'équation homogène **ne s'annulant pas**, on peut résoudre l'équation (1) à l'aide du changement de fonction inconnue $y = zh$. La fonction z' est alors solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Exercice 12.4

CCP PSI 2006

On considère l'équation différentielle (E) $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$.

1. Montrer qu'elle admet une solution de la forme $h(x)=e^{\alpha x}$.
2. Résoudre (E) sur $I_1=\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[$ et sur $I_2=\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

1) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Comme le coefficient de y'' s'annule pour $x=-\dfrac{1}{2}$, nous cherchons les solutions définies sur $I_1=\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[$ et les solutions définies sur $I_2=\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

Soit h une solution définie sur I_1 ou I_2 de la forme $h(x)=e^{\alpha x}$. On a alors $h'(x)=\alpha e^{\alpha x}$ et $h''(x)=\alpha^2e^{\alpha x}$, d'où

$$\begin{aligned}(2x+1)h''(x)+(4x-2)h'(x)-8h(x)&=(\alpha^2(2x+1)+\alpha(4x-2)-8)e^{\alpha x}\\&=((2\alpha^2+4\alpha)x+\alpha^2-2\alpha-8)e^{\alpha x}\end{aligned}$$

Ainsi, pour que h soit solution de (E), il faut et il suffit que $2\alpha^2+4\alpha=0$ et $\alpha^2-2\alpha-8=0$, c'est-à-dire que $\alpha=-2$.

2) On cherche donc les solutions de (E) sous la forme $y=e^{-2x}z$: de façon précise, si y est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I_k $(k=1,2)$, alors la fonction $z=ye^{2x}$ est elle aussi de classe $\mathscr{C}^2$, et on a $y'=(z'-2z)e^{-2x}$ et $y''=(z''-4z'+4z)e^{-2x}$.

On a alors

$$\begin{aligned}(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y&=((2x+1)(z''-4z'+4z)+(4x-2)(z'-2z)-8z)e^{-2x}\\&=((2x+1)z''-(4x+6)z')e^{-2x}.\end{aligned}$$

Pour que y soit solution de (E), il faut et il suffit que $u=z'$ soit solution de l'équation différentielle (E_1) $(2x+1)u'-(4x+6)u=0$, c'est-à-dire :

$$u'=\frac{4x+6}{2x+1}u=\left(2+\frac{4}{2x+1}\right)u.$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre dont les solutions u_1 (resp. u_2) définies sur I_1 (resp. I_2) sont définies par :

$u_1(x)=a_1e^{2x+\ln(2x+1)^2}=a_1(2x+1)^2e^{2x}$, et $u_2(x)=a_2e^{2x+\ln(2x+1)^2}=a_2(2x+1)^2e^{2x}$

où a_1 et a_2 sont des constantes réelles.

Une primitive de $(2x+1)^2e^{2x}$ est $\dfrac{1}{2}(1+4x^2)e^{2x}$, donc y_1 (resp. y_2) est de la forme

$$\forall x\in I_k,\ y_k(x)=a_k(1+4x^2)+b_ke^{-2x}$$

où a_k et b_k sont des constantes réelles.

c) Raccordement de solutions

Exercice 12.5

CCP PSI 2006 (suite du précédent)

Déterminer la dimension de l'espace vectoriel S des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$

Nous avons effectué la résolution de (E) sur les intervalles $I_1 = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$ et $I_2 = \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ dans l'exercice précédent.

Soit $y_k : x \mapsto a_k(1+4x^2) + b_k e^{-2x}$ une solution définie sur I_k ($k = 1$ ou 2). On a $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} y_k(x) = 2a_k + eb_k$, $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} y_k'(x) = -2(2a_k+eb_k)$ et $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} y_k''(x) = 4(2a_k+eb_k)$.

Il en résulte que y_1 et y_2 sont les restrictions d'une solution y définie sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $2a_1 + eb_1 = 2a_2 + eb_2$ (condition de raccordement). Les constantes a_1, a_2 et b_1 peuvent être choisies arbitrairement dans $\mathbb{R}$, la condition de raccordement déterminant b_2 de manière unique. En d'autres termes l'application de $\mathbb{R}^3$ dans S qui à (a_1, a_2, b_1) associe la solution y telle que $y(x) = a_1(1+4x^2) + b_1 e^{-2x}$ si $x < -\dfrac{1}{2}$ et $y(x) = a_2(1+4x^2) + (b_1 + 2e^{-1}(a_1 - a_2))e^{-2x}$ si $x > -\dfrac{1}{2}$ est bijective. Comme elle est aussi linéaire, on a $\dim(E) = 3$.

d) Changement de variable

Ce qu'il faut savoir

Il est souvent utile d'effectuer un changement de variable dans une équation différentielle du second ordre. Pour être licite, un changement de variable doit être défini par un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^2$.

Exercice 12.6

CCP PC 2006

Soit y une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que y est solution de (E) : $xy'' - y' - 4x^3y = 0$ si et seulement si $Y(t) = y(\sqrt{t})$ est solution d'une équation différentielle à coefficients constants.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$.

L'application $t \mapsto x = \sqrt{t}$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^2$ de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ sur lui même dont le difféomorphisme réciproque est l'application $x \mapsto t = x^2$.

Soit y une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors la fonction Y définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $Y(t) = y(t^{1/2})$ est elle aussi de classe $\mathscr{C}^2$ comme composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = Y(x^2)$, $y'(x) = 2xY'(x^2)$ et $y''(x) = 2Y'(x^2)+4x^2Y''(x^2)$, d'où $xy''(x)-y'(x)-4x^3y(x) = 4x^3(Y''(x^2)-Y(x^2))$. Il en résulte que y est solution de (E) si et seulement si Y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle à coefficients constants $Y'' - Y = 0$.

Les solutions de cette dernière équation sont les fonctions Y définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $Y(t) = a_1 \operatorname{ch} t + b_1 \operatorname{sh} t$, et les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions telles que $y(x) = a_1 \operatorname{ch}(x^2) + b_1 \operatorname{sh}(x^2)$ où a_1 et b_1 sont deux constantes réelles.

Soit y une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_-^*$, et soit z la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $z(x) = y(-x)$. La fonction z est de classe $\mathscr{C}^2$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$xz''(x) - z'(x) - 4x^3z(x) = -\big((-x)y''(-x) - y'(-x) - 4(-x)^3y(-x)\big)$$

Ainsi y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}_+^*$. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont donc les fonctions définies par $y(x) = a_2 \operatorname{ch}(x^2) + b_2 \operatorname{sh}(x^2)$ où a_2 et b_2 sont deux constantes réelles.

e) Recherche de solutions développables en série entière

Exercice 12.7

CCP PC 2006

On considère l'équation différentielle (E) : $xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$.

1. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
2. Vérifier que l'application $x \mapsto \dfrac{\operatorname{ch}(x^2)}{x^2}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

1) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Comme le coefficient de y'' s'annule pour $x = 0$, rien ne permet d'affirmer l'existence d'une solution non nulle définie au voisinage de 0, encore moins l'existence d'une solution (non nulle) développable en série entière !

Nous cherchons a priori une série entière $\sum a_nx^n$ de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme S soit solution de (E).

On a alors, pour tout $x \in]-R, R[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ et

$S''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1}$. On a ensuite

$$xS''(x)+3S'(x)-4x^3S(x) = 3a_1+8a_2x+15a_3x^2+\sum_{n=3}^{+\infty}((n+1)(n+3)a_{n+1}-4a_{n-3})x^n.$$

L'unicité du développement en série entière de la fonction nulle montre que S est solution de (E) si et seulement si $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et $\forall n \geqslant 3, a_{n+1} = \dfrac{4a_{n-3}}{(n+1)(n+3)}$.
On en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $a_{4p+1} = 0$, $a_{4p+2} = 0$, $a_{4p+3} = 0$ et $a_{4p} = \dfrac{a_0}{(2p+1)!}$ (par récurrence sur p).

On a donc $S(x) = a_0 \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{4p}}{(2p+1)!} = a_0 f(x)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}(x^2)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Comme le rayon de convergence de la série entière est infini, S est une solution définie sur $\mathbb{R}$, pour tout $a_0 \in \mathbb{R}$.

2) La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}(x^2)}{x^2}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on calcule

$$g(x) = x^{-2}\,\mathrm{ch}\left(x^2\right), \qquad g'(x) = -2x^{-3}\,\mathrm{ch}\left(x^2\right) + 2x^{-1}\,\mathrm{sh}\left(x^2\right)$$
$$\text{et} \qquad g''(x) = 6x^{-4}\,\mathrm{ch}\left(x^2\right) - 6x^{-2}\,\mathrm{sh}\left(x^2\right) + 4\,\mathrm{ch}\left(x^2\right),$$

et on vérifie que $xg''(x) + 3g'(x) - 4x^3 g(x) = 0$.
Les restrictions de f et g à $\mathbb{R}_+^*$ étant linéairement indépendantes, elles forment un système fondamental de solutions sur cet intervalle. Il en est de même sur $\mathbb{R}_-^*$.
3) Etudions le raccordement éventuel en 0 d'une solution $f_1 = a_1 f + b_1 g$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'une solution $f_2 = a_2 f + b_2 g$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. L'existence d'une limite en 0 entraîne $b_1 = b_2 = 0$. Comme de plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, l'égalité des limites de f_1' et f_2' en 0 entraîne $a_1 = a_2$. Ainsi les seules solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme af, avec $a \in \mathbb{R}$.

12.1.4 Système différentiel linéaire à coefficients constants

Ce qu'il faut savoir

On considère un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad \cdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{3}$$

où les a_{ij} sont des nombres réels ou complexes, et où $x_i : t \mapsto x_i(t)$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On peut écrire le système sous forme matricielle

$$X' = AX, \tag{4}$$

$$\text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X : t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Théorème de Cauchy-Lipschitz : Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, et soit $Y_0 \in \mathbb{K}^n$. Alors il existe une unique solution X de (4) vérifiant la condition initiale $X(t_0) = Y_0$.

Lorsque X est une solution, la courbe de $\mathbb{K}^n$ définie par la paramétrisation $t \mapsto X(t)$ est appelée une courbe intégrale.

Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des solutions de (4). C'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ des applications de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. On déduit du théorème de Cauchy que l'application qui à $X \in \mathscr{E}$ associe $X(t_0)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Il en résulte que $\mathscr{E}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Une base $(X_1, \dots, X_n)$ de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ est appelée un système fondamental de solutions.

Si $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille de n solutions de (4), et si $t \in \mathbb{R}$, on note $W(t) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$ le déterminant du système $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions.

b) $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

c) Il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $W(t_0) \neq 0$.

L'application $W : t \mapsto W(t)$ est appelée le Wronskien de la famille $(X_1, \dots, X_n)$.

Un cas particulier important : Supposons la matrice A diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de vecteurs propres de A, soient $\lambda_1 \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées, et soit pour tout k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, $X_k : t \mapsto e^{\lambda_k t} u_k$. Alors $(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions.

Exercice 12.8

CCP PC 2006

Résoudre le système $\begin{cases} x' &= x + 2y - z \\ y' &= 2x + 4y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases}$

Il s'agit d'un système différentiel du premier ordre à coefficients constants dont la matrice est : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On voit que $f(e_2 - 2e_1) = 0$ et $f(e_3 + e_1) = 0$. Ainsi 0 est une valeur propre de A, et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Comme la trace de A est égale à 6, on en déduit que 6 est aussi valeur propre de A, et on voit aisément que le sous-espace propre associé à la valeur propre 6 est la droite vectorielle engendrée par $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. La matrice A est diagonalisable. Les solutions du système sont donc les fonctions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = a \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + ce^{6t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

où a, b et c sont trois constantes réelles.

12.1.5 Equation différentielle linéaire du premier ordre : cas général. (Filière PSI uniquement)

Ce qu'il faut savoir

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie n. On note $\mathscr{L}(F)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de F.

Soit a une application définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathscr{L}(F)$, et soit $t \in I$; afin d'alléger les notations, l'image d'un vecteur $x \in F$ par l'endomorphisme $a(t)$ sera notée $a(t)x$.

Une équation différentielle vectorielle du premier ordre est une équation de la forme

$$\forall t \in I,\ x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \tag{5}$$

où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(F)$, et où b est une application continue de I dans F.

L'équation différentielle $\quad \forall t \in I,\ x'(t) = a(t)x(t) \quad (6)$

est appelée l'équation homogène associée à (5).

Théorème de Cauchy-Lipschitz : Soient $t_0 \in I$ et $v_0 \in F$. Alors il existe une unique solution x de (5) sur I vérifiant la condition initiale $x(t_0) = v_0$.

La courbe définie par le paramétrage $t \mapsto x(t)$ est appelée une courbe intégrale.

Structure de l'ensemble des solutions :

L'ensemble $\mathscr{E}$ des solutions de l'équation homogène (6) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ des applications de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$. Si t_0 est un point de I, l'application qui à $x \in \mathscr{E}$ associe $x(t_0)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ sur l'espace vectoriel F. Il en résulte que la dimension de $\mathscr{E}$ est égale à la dimension de F.

Une base $(x_1, \dots, x_n)$ de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ est appelée un système fondamental de solutions.

Soit $\mathscr{B}$ une base de F, et soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n solutions de (6). L'application $W : t \mapsto \det_{\mathscr{B}}(x_1(t), \dots, x_n(t))$ est appelée Wronskien de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $(x_1, \dots, x_n)$ un système fondamental de solutions,

2) $\forall t \in I,\ W(t) \neq 0$,

3) $\exists t_0 \in I,\ W(t_0) \neq 0$.

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des solutions de l'équation (5). Si x_0 est une solution particulière de (5), alors les solutions de (5) sont toutes les fonctions de la forme $x_0 + x$, avec $x \in \mathscr{E}$.

L'ensemble $\mathscr{F}$ est donc un sous-espace affine de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^1(I, F)$, dont la direction est l'espace vectoriel $\mathscr{E}$.

La méthode de variation des constantes : lorsqu'on connaît un système fondamental $(x_1, \dots, x_n)$ de solutions de l'équation homogène (6), alors les solutions de l'équation complète (5) sont toutes les fonctions de la forme $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des fonctions numériques de classe $\mathscr{C}^1$ sur I dont les dérivées vérifient $\lambda_1' x_1 + \dots + \lambda_n' x_n = b$.

Exercice 12.9

Résoudre le système différentiel linéaire $\mathscr{S}$ $\begin{cases} x' = x - ty \\ y' = tx + y \end{cases}$ (On cherchera à mettre en évidence un système fondamental de solutions à valeurs réelles.)

Nous cherchons les solutions à valeurs réelles.

En posant $z = x + iy$, le système s'écrit

$$z' = (x - ty) + i(tx + y) = (1 + it)(x + iy) = (1 + it)z.$$

Il s'agit alors d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre dont les solutions sont les fonctions z telles que $\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = \lambda e^{t + i\frac{t^2}{2}}$, où λ est une constante complexe.

En posant $\lambda = a + ib$ (où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$), on obtient

$$\begin{aligned} x(t) + iy(t) &= (a + ib)e^t(\cos(t^2/2) + i\sin(t^2/2)) \\ &= e^t(a\cos(t^2/2) - b\sin(t^2/2)) + ie^t(b\cos(t^2/2) + a\sin(t^2/2)). \end{aligned}$$

Les solutions de $\mathscr{S}$ sont donc les fonctions $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(a\cos(t^2/2) - b\sin(t^2/2)) \\ e^t(b\cos(t^2/2) + a\sin(t^2/2)) \end{pmatrix}$$
$$= ae^t \begin{pmatrix} \cos(t^2/2) \\ \sin(t^2/2) \end{pmatrix} + be^t \begin{pmatrix} -\sin(t^2/2) \\ \cos(t^2/2) \end{pmatrix}.$$

Les fonctions $X_1 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} \cos(t^2/2) \\ \sin(t^2/2) \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} -\sin(t^2/2) \\ \cos(t^2/2) \end{pmatrix}$ forment un système générateur de l'espace vectoriel S des solutions à valeurs réelles. Comme S est un espace vectoriel de dimension 2, elles forment une base de S.

12.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

De nombreux exercices de concours portent sur la résolution des équations d'Euler : il s'agit d'équations différentielles de la forme $ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = d(x)$, où a, b et c sont des constantes réelles ou complexes.

Exercice 12.10

CCP PC 2006

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. On se propose de déterminer les solutions de l'équation différentielle (1) $ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0$ définies sur $]0, +\infty[$.

1. Justifier le changement de variable $t = \ln x$ et indiquer comment il permet de résoudre (1).
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, selon les valeurs de α :

$$x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = \sin(\alpha \ln x). \qquad (E)$$

1. La fonction logarithme est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^2$ de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ dont le difféomorphisme réciproque est la fonction exponentielle. Cela justifie le changement de variable $x = e^t$.
   A chaque fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, associons la fonction g définie par
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(e^t).$$
   g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = e^t f'(e^t)$ et $g''(t) = e^t\left(f'(e^t)) + e^t f''(e^t)\right)$, c'est-à-dire en posant $x = e^t$, $g'(t) = xf'(x)$ et $g''(t) = x(f'(x) + xf''(x))$. On en déduit $x^2f''(x) = g''(t) - g'(t)$, d'où $ax^2f''(x) + bxf'(x) + cf(x) = ag''(t) + (b - a)g'(t) + cg(t)$. Ainsi f est solution de (1) si et seulement si g est solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (2) : $az''(t) + (b - a)z'(t) + cz(t) = 0$. Les solutions de (1) sont donc les fonctions de la forme $f(x) = g(\ln x)$, où g est solution de (2).

2. Le changement de variable précédent transforme l'équation (E) en

$$z''(t) + z(t) = \sin(\alpha t).$$

Les solutions de l'équation homogène $z''(t)+z(t) = 0$ sont les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $z(t) = A\cos t + B\sin t$, où A et B sont deux constantes réelles. Pour la résolution de l'équation complète distinguons trois cas :

- Cas où $\alpha \notin \{-1, 1\}$. On observe que la fonction z_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $z_0(t) = \dfrac{1}{1-\alpha^2}\sin(\alpha t)$ est une solution particulière de l'équation complète.
- Cas où $\alpha = 1$. Il est bien connu que $z_0 : t \mapsto -\dfrac{1}{2}t\cos t$ est une solution particulière de l'équation complète (résonance).
- Cas où $\alpha = -1$. Une solution particulière de l'équation complète est ici $z_0 : t \mapsto \dfrac{1}{2}t\cos t$.

Dans tous les cas les solutions de l'équation complète sont de la forme

$$z(t) = A\cos t + B\sin t + z_0(t).$$

Les solutions sur $]0, +\infty[$ de (E) sont donc de la forme :

- $y(x) = A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x) + \dfrac{1}{1-\alpha^2}\sin(\alpha \ln x)$ si $\alpha \notin \{-1, 1\}$,
- $y(x) = (A - \dfrac{1}{2}\ln x)\cos(\ln x) + B\sin(\ln x)$ si $\alpha = 1$,
- $y(x) = (A + \dfrac{1}{2}\ln x)\cos(\ln x) + B\sin(\ln x)$ si $\alpha = -1$.

où A et B désignent des constantes réelles.

Exercice 12.11

TPE PC 2006

Soit α un nombre réel. Résoudre l'équation différentielle

$$(E)\ :\ x''' + x'' + x' + x = e^{\alpha t}.$$

Indication de la rédaction : On pourra faire le changement de fonction inconnue $y = x + x'$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3, que nous allons résoudre à l'aide du changement de fonction inconnue $y = x + x'$. Nous sommes ainsi ramenés à l'équation différentielle du second ordre $(E_1)\ :\ y'' + y = e^{\alpha t}$.

Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont les fonctions y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $y(t) = A\cos t + B\sin t$, où A et B sont deux constantes réelles.

On cherche une solution particulière de la forme $y_0(t) = Ce^{\alpha t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a alors $y_0''(t) + y_0(t) = C(1+\alpha^2)e^{\alpha t}$, et on obtient donc $y_0(t) = \dfrac{1}{1+\alpha^2}\, e^{\alpha t}$.

Les solutions de (E_1) sont donc toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = A\cos t + B\sin t + \frac{1}{1+\alpha^2}\, e^{\alpha t}.$$

Les solutions de (E) sont alors les solutions de l'équation différentielle $(E_2)\ :\ x' + x = A\cos t + B\sin t + \dfrac{e^{\alpha t}}{1+\alpha^2}$. Les solutions de l'équation homogène sont ici les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x(t) = Ce^{-t}$ $(C \in \mathbb{R})$.

Cherchons une solution particulière x_1 de l'équation $x' + x = A\cos t + B\sin t$ de la forme $x_1(t) = a\cos t + b\sin t$. On a alors $x_1'(t) + x_1(t) = (a+b)\cos t + (-a+b)\sin t$, d'où $a = \dfrac{A-B}{2}$, $b = \dfrac{A+B}{2}$, et $x_1(t) = \dfrac{A-B}{2}\cos t + \dfrac{A+B}{2}\sin t$.

Cherchons de même une solution particulière x_2 de l'équation $x' + x = \dfrac{1}{1+\alpha^2}\, e^{\alpha t}$.

Lorsque $\alpha \neq -1$, on cherche x_2 telle que $x_2(t) = ce^{\alpha t}$. On a alors $c(1+\alpha) = \dfrac{1}{1+\alpha^2}$, d'où $x_2(t) = \dfrac{1}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)}\, e^{\alpha t}$.

Lorsque $\alpha = -1$, on cherche une solution telle que $x_2(t) = dte^{-t}$. On a alors $x_2'(t) + x_2(t) = de^{-t}$, d'où $d = \dfrac{1}{2}$ et $x_2(t) = \dfrac{te^{-t}}{2}$.

Par superposition on en déduit la solution générale de l'équation (E) :

$$\text{Si } \alpha \neq -1,\quad x(t) = Ce^{-t} + \frac{A-B}{2}\cos t + \frac{A+B}{2}\sin t + \frac{1}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)}\, e^{\alpha t}.$$

$$\text{Si } \alpha = -1,\quad x(t) = Ce^{-t} + \frac{A-B}{2}\cos t + \frac{A+B}{2}\sin t + \frac{te^{-t}}{2}.$$

où A, B, C sont trois constantes réelles.

Exercice 12.12

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et soit K un vecteur non nul de E. Quelles sont les courbes intégrales de l'équation différentielle $X' = K \wedge X$?

Posons $a = \|K\|$, et choisissons une base orthonormale directe $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ telle que $\mathbf{k} = \dfrac{1}{a} K$. L'application $X \mapsto K \wedge X$ est une application linéaire dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions X de $\mathbb{R}$ dans E définies par $X(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ avec $x' = -ay,\ y' = ax,\ z' = 0$.

On a donc $z = h$, où h est une constante réelle. (Cela signifie que les courbes intégrales sont situées dans des plans parallèles au plan xOy).

Les relations $x' = -ay$ et $y' = ax$ montrent que x est de classe $\mathscr{C}^2$ et est solution de l'équation différentielle du second ordre $x'' = -a^2x$: il existe donc des constantes réelles A et B telles que $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = A\cos at + B\sin at$. On a alors $y(t) = -\dfrac{1}{a}x'(t) = A\sin at - B\cos at$.

En écrivant le nombre complexe $A + iB$ sous forme trigonométrique, on voit qu'il existe un nombre réel positif r et un nombre réel φ tels que $A = r\cos\varphi$ et $B = r\sin\varphi$, et on a donc $x(t) = r\cos(at - \varphi)$ et $y(t) = r\sin(at - \varphi)$.

Les courbes intégrales sont donc des cercles d'axe Oz.

Exercice 12.13

D'après Mines Ponts 2006

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système différentiel (E) :

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour gagner du temps, on utilisera sans démonstration les résultats suivants : le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$; A est donc trigonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$: $A = PTP^{-1}$, avec

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit $X : t \mapsto X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$Y = P^{-1}X$ est également de classe $\mathscr{C}^1$, et elle vérifie $Y' = P^{-1}X'$. Pour que X soit solution de (E), il faut et il suffit que $X' = PY' = AX = APY$, c'est-à-dire que Y soit solution de $Y' = P^{-1}APY = TY$. En posant $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, on obtient

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - y_3 \\ y_2' = y_2 + 2y_3 \\ y_3' = y_3 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système différentiel linéaire triangulaire.

La dernière équation montre que $y_3(t) = ae^t$ où a est une constante réelle. La seconde équation s'écrit alors $y_2' = y_2 + 2ae^t$. Ses solutions sont de la forme $y_2(t) = (2at+b)e^t$ où b est une constante réelle. Enfin y_1 est solution de l'équation différentielle $y_1' = y_1 + (2at+b-a)e^t$, et on obtient $y_1(t) = \left(at^2+(b-a)t+c\right)$, où c est une constante réelle arbitraire.

On en déduit :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(at^2+(b-a)t+c\right)e^t \\ (2at+b)e^t \\ ae^t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} at^2+(a+b)t+a+b+c \\ -at^2-(a+b)t-b-c \\ -at^2-(b-a)t-c \end{bmatrix}.$$

Exercice 12.14

TPE PC, PSI 2005 K

Résoudre (E) : $X'(t) = AX + B$ avec $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ -te^t \end{bmatrix}$.

Il s'agit d'un système différentiel linéaire à coefficients constants.
En utilisant un logiciel de calcul formel, on obtient que A est diagonalisable, et $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Effectuons le changement de fonction inconnue $Y = P^{-1}X$. Le système s'écrit alors

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX + P^{-1}B = P^{-1}APY + P^{-1}B = DY + P^{-1}B\,.$$

En posant $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, ce dernier système s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & 2y_1(t) + \dfrac{1}{2}(-e^t + e^{2t} - te^t) \\ y_2'(t) & = & 4y_2(t) + \dfrac{1}{2}(e^t - e^{2t} - te^t) \\ y_3'(t) & = & 6y_3(t) + \dfrac{1}{2}(e^t + e^{2t} + te^t) \end{array} \right.$$

On obtient trois équations différentielles linéaires du premier ordre, à coefficients constants.

Indiquons le détail de la résolution de la première équation : les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $y_1(t) = \lambda e^{2t}$, où λ est une constante réelle. Les solutions de l'équation complète sont alors les fonctions de la forme $y_1(t) = \lambda(t)e^{2t}$ où λ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\lambda'(t)e^{2t} = \dfrac{1}{2}(-e^t + e^{2t} - te^t)$.

On a donc $\lambda'(t) = \frac{1}{2}(-e^{-t} + 1 - te^{-t})$. On en déduit que $\lambda(t) = \frac{1}{2}(t + (t+2)e^{-t} + a)$ où a est une constante réelle, puis $y_1(t) = \frac{1}{2}(t + a)e^{2t} + \frac{1}{2}(t + 2)e^{t}$.

On obtient par des calculs analogues :

$$y_2(t) = \frac{1}{18}(3t - 2)e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + be^{4t}$$

où b est une constante réelle arbitraire, puis

$$y_3(t) = -\frac{1}{50}(6 + 5t)e^t - \frac{1}{4}e^{2t} + ce^{6t}$$

où c est une constante réelle arbitraire.

On a pour finir $X = PY$.

Remarque : les étudiants de la filière PSI disposent d'une autre méthode pour la résolution de l'équation complète. En effet, la diagonalisation de la matrice A montre qu'un système fondamental de l'équation homogène $X' = AX$ est formé par les fonctions U, V et W, définies sur $\mathbb{R}$, par $U(t) = e^{2t}u$, $V(t) = e^{4t}v$ et $W(t) = e^{6t}w$, où u, v et w sont les colonnes de la matrice P. La méthode de variation des constantes montre alors que les solutions de l'équation complète sont les fonctions de la forme $\lambda U + \mu V + \nu W$, où λ, μ et ν sont des fonctions numériques de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que $\lambda' U + \mu' V + \nu' W = B$.

Exercice 12.15

CCP PC 2004

Soit $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n} = 0$. Résoudre le système différentiel

$$\frac{dX}{dt} = AX(t)\,.$$

Notons que si $X : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\dfrac{dX}{dt} = AX$, alors X est de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie $\dfrac{d^2X}{dt^2} = A^2X = -X$.

Les composantes x_i $(i = 1 \ldots 2n)$ de X vérifient donc $x_i'' = -x_i$, et on en déduit qu'il existe des constantes réelles u_i et v_i tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_i(t) = u_i \cos t + v_i \sin t.$$

En posant $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{2n} \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2n} \end{bmatrix}$, on a $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \cos t.U + \sin t.V$.

On a alors $X'(t) = -\sin t.U + \cos t.V$, et la relation $X' = AX$ s'écrit

$$-\sin t.U + \cos t.V = \cos t.AU + \sin t.AV.$$

En particulier pout $t = 0$, on obtient $V = AU$, et donc $X(t) = \cos t.U + \sin t.AU$. Réciproquement si $U \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, alors la fonction $t \mapsto \cos t.U + \sin t.AU$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $AX(t) = \cos t.AU + \sin t.A^2U = \cos t.AU - \sin t.U = X'(t)$. Les solutions sont donc toutes les fonctions X telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \cos t.U + \sin t.AU$$

où U est un élément arbitraire de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 12.16

TPE PSI 2007

On désigne par F l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si u est un élément de F, on note L_u l'endomorphisme de F défini par :

$$\forall y \in F,\ L_u(y) = y' + uy.$$

1) Soit $u \in F$. Déterminer l'endomorphisme $L_u \circ L_u$.

2) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 2\tanh x\, y' + y = 0$.

1) Soit $y \in F$. On a $(L_u \circ L_u)(y) = L_u(y' + uy) = y'' + 2uy' + (u' + u^2)y$.
2) On montre facilement par récurrence sur n que les solutions de (E) sont de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n, donc appartiennent à F. Prenons $u\colon x \mapsto \tanh x$. C'est un élément de F, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) + u^2(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = 1$. Les solutions de (E) sont donc les fonctions y de F qui appartiennent au noyau de $L_u \circ L_u$. Le noyau de L_u est formé des solutions de l'équation différentielle $z' = -z \tanh x$, c'est-à-dire les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch} x}$ où λ est une constante réelle. Les solutions de (E) sont alors les solutions de l'équation différentielle $y' + y\tanh x = \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch} x}$. Elles sont de la forme $y\colon x \mapsto \dfrac{A(x)}{\operatorname{ch} x}$ où A est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\dfrac{A'(x)}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch} x}$, c'est-à-dire $A'(x) = \lambda$, et donc $A(x) = \lambda x + \mu$ où μ est une constante réelle. Les solutions de (E) sont donc les fonctions y telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \dfrac{\lambda x + \mu}{\operatorname{ch} x}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 12.17

ENSEA PSI 2006 K

Trouver les solutions de l'équation différentielle (E) $xy'' + 2y' + xy = 0$ développables en série entière au voisinage de 0, puis les solutions maximales de cette équation.

• Cherchons une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme S est solution de (E) sur $I =]-R, R[$. On a alors, pour tout $x \in I$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,\ \text{et } S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1}.$$

$xS''(x) + 2S'(x) + xS(x)$ apparaît alors comme la somme d'une série entière dont le coefficient constant est $2a_1$ et où, pour $n \geqslant 1$, le coefficient de x^n est $n(n+1)a_{n+1}+2(n+1)a_{n+1}+a_{n-1} = (n+2)(n+1)a_{n+1}+a_{n-1}$. L'unicité du développement en série entière donne alors $a_1 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $(n+2)(n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$.

On en déduit aisément, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{(-1)^p}{(2p+1)!}\,a_0$.

Comme $\left|\dfrac{a_{2p+2}}{a_{2p}}\right| = \dfrac{1}{(2p+3)(2p+2)} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$, la règle de d'Alembert montre que le rayon de convergence est infini.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = a_0 \left(\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p+1)!}\right) = \begin{cases} a_0 \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ a_0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

• Le théorème de Cauchy montre que l'équation possède des solutions (maximales) sur l'un ou l'autre des intervalles $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_+^*$.

Déterminons les solutions à l'aide du changement de fonction inconnue $z = xy$. Si y est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'un de ces intervalles, alors $z\colon x \mapsto xy(x)$ est aussi de classe $\mathscr{C}^2$, et on a $z' = y + xy'$, $z'' = 2y' + xy''$, d'où $xy'' + 2y' + xy = z'' + z$. Ainsi y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle $z''+z = 0$.

On en déduit que les solutions de (E) sur I_1 (ou I_2) sont les fonctions y telles que $y(x) = a\dfrac{\sin x}{x} + b\dfrac{\cos x}{x}$ où a et b sont des constantes réelles.

Si b est non nul, alors $y(x)$ n'a pas de limite finie en 0, et il n'est pas possible de prolonger la solution y à un intervalle contenant strictement I_1 (ou I_2).

Supposons maintenant $b = 0$, et étudions le raccordement éventuel d'une solution $y_1(x) = a_1\dfrac{\sin x}{x}$ sur I_1 et d'une solution $y_2(x) = a_2\dfrac{\sin x}{x}$ sur I_2. On a alors $\lim\limits_{x\to 0^-} y_1(x) = a_1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} y_2(x) = a_2$. Si y_1 et y_2 sont les restrictions d'une solution y définie sur $\mathbb{R}$, alors $a_1 = a_2$, et y est l'une des solutions développables en série entière.

Récapitulons : Les solutions maximales de (E) sont :

• $y\colon x \mapsto a\dfrac{\sin x}{x} + b\dfrac{\cos x}{x}$ $((a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*)$ sur I_1 (ou sur I_2).

• $y\colon x \mapsto a\dfrac{\sin x}{x}$ $(a \in \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12.18

Saint-Cyr PC 2006

Résoudre avec `Maple` $x(x^2-1)y' + (x^2+1)y + 2x^2 = 0$. Donner les solutions sur $\mathbb{R}$.

Avec `Maple`, la commande

```
> dsolve(x*(x*x-1))(diff(y(x),x)+(x*x+1)*y(x)+2*x*x,y(x))
```

donne $y(x) = \dfrac{x(a-2x)}{x^2-1}$ où a est une constante réelle.

Il faut en réalité se placer sur des intervalles où la fonction $x \mapsto x(x^2-1)$ ne s'annule pas, et on obtient donc quatre familles de solutions :

- Les fonctions de la forme $y_1(x) = \dfrac{x(a_1-2x)}{x^2-1}$ sur l'intervalle $I_1 =]-\infty, -1[$,
- Les fonctions de la forme $y_2(x) = \dfrac{x(a_2-2x)}{x^2-1}$ sur l'intervalle $I_2 =]-1, 0[$,
- Les fonctions de la forme $y_3(x) = \dfrac{x(a_3-2x)}{x^2-1}$ sur l'intervalle $I_3 =]0, 1[$,
- Les fonctions de la forme $y_4(x) = \dfrac{x(a_4-2x)}{x^2-1}$ sur l'intervalle $I_4 =]1, +\infty[$,

où a_1, a_2, a_3 et a_4 sont quatre constantes réelles arbitraires.

Etudions le raccordement éventuel en -1 d'une solution y_1 définie sur I_1 avec une solution y_2 définie sur I_2. Si a_1 est différent de -2, alors $\dfrac{x(a_1-2x)}{x^2-1}$ n'a pas de limite finie quand x vers -1^-, et y_1 ne peut pas être prolongée en -1. On voit de même que si $a_2 \neq -2$, alors y_2 ne peut pas être prolongée en -1.

En revanche si $a_1 = a_2 = -2$, on a $y_1(x) = \dfrac{-2x}{x-1}$ pour tout $x \in I_1$ et $y_2(x) = \dfrac{-2x}{x-1}$ pour tout $x \in I_2$, de sorte que la fonction définie par $Y_1(x) = \dfrac{-2x}{x-1}$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et c'est une solution de E.

On démontre avec le même raisonnement que la fonction définie par $Y_2(x) = \dfrac{-2x}{x+1}$ est l'unique solution de (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Pour finir nous devons étudier le raccordement éventuel de Y_1 et de Y_2 en 0.

On observe d'abord que $\lim\limits_{x \to 0^-} Y_1(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} Y_1(x)$ et nous devons également étudier les limites de Y_1' et Y_2' en 0.

On calcule $Y_1'(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$ et $Y_2'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$. On a donc $\lim\limits_{x\to 0^-} Y_1'(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} Y_2'(x) = -2$, de sorte que les solutions Y_1 et Y_2 ne se raccordent pas en tant que fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Il n'y a donc pas de solution définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12.19

Mines-Ponts PSI 2006

1) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + y = 0$.
Indication de la rédaction : chercher des solutions de la forme $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$.
2) En déduire les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

1) (E) est une équation d'Euler que l'on peut résoudre avec la méthode exposée dans l'exercice 12.10, ou en cherchant une solution sous la forme $y(x) = x^\alpha$. On a alors $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et $y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$.
Il en résulte que y est solution de (E) si et seulement si $\alpha(\alpha-1)+1 = \alpha^2-\alpha+1 = 0$.
Le polynôme $\alpha^2 - \alpha + 1$ admet deux racines complexes :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On obtient ainsi deux solutions (à valeurs complexes) de (E) définies sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y_1(x) = e^{\alpha_1 \ln x} = \sqrt{x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$$

$$y_2(x) = e^{\alpha_2 \ln x} = \sqrt{x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right).$$

Ces solutions sont linéairement indépendantes puisque leur Wronskien vérifie

$$W(1) = y_1(1)y_2'(1) - y_1'(1)y_2(1) = \alpha_1\alpha_2 = 1 \neq 0.$$

Elles forment donc une base de l'espace vectoriel $S_{\mathbb{C}}$ des solutions de (E) à valeurs complexes.

$u_1 = \dfrac{y_1+y_2}{2} = \mathrm{Re}(y_1)$ et $u_2 = \dfrac{y_1-y_2}{2i} = \mathrm{Im}(y_1)$ sont alors des solutions à valeurs réelles :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ u_1(x) = \sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right),\quad \text{et}\quad u_2(x) = \sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

Elles sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$ puisque la matrice du système (u_1, u_2) dans la base (y_1, y_2) : $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$ est inversible (son déterminant est égal à $\frac{i}{2}$).

Elle sont donc aussi linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$, et forment donc une base de l'espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}$ des solutions de (E) à valeurs réelles.

Les solutions réelles de (E) définies sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \sqrt{x}\left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$$

où a et b sont deux nombres réels.

2) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

La fonction f' est la composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$: elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$. Il en résulte que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}f(x).$$

La fonction f est donc une solution de l'équation différentielle (E) $x^2y'' + y = 0$, et il existe donc des constantes réelles A et B telles que :

$$f(x) = \sqrt{x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right).$$

Il s'agit maintenant de vérifier dans l'équation initiale :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(\frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \left(\frac{B}{2} - \frac{A\sqrt{3}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) - B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$$

En prenant en particulier la valeur $x = x_0$ telle que $\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x_0) = \pi$, puis la valeur $x = x_1$ telle que $\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x_1) = \frac{\pi}{2}$, on voit que la relation $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ équivaut à $\frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2} = A$ et $\frac{B}{2} - \frac{A\sqrt{3}}{2} = -B$, c'est-à-dire à $A = B\sqrt{3}$. les fonctions cherchées sont donc les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) &= B\sqrt{x}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)\\ &= 2B\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

Exercice 12.20

Centrale PSI 2005 K

1) Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y'' + y = \cos nx$.

2) Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente.

Résoudre l'équation différentielle (E_2) : $y'' + y = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$.

1) Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto a\cos x + b\sin x$.

Lorsque $n \neq 1$, la fonction $f_0 : x \mapsto \dfrac{1}{n^2-1}\cos nx$ est une solution particulière de l'équation complète. Les solutions de (E_1) sont donc les fonctions de la forme $y : x \mapsto a\cos x + b\sin x + \dfrac{1}{n^2-1}\cos nx$, où a et b sont des constantes réelles arbitraires.

Dans le cas $n = 1$ (où il y a résonance), on cherche une solution particulière de la forme $f_0(x) = x(A\sin x + B\cos x)$. On peut simplifier un peu les calculs en remarquant que la partie paire de f_0 est elle aussi une solution de (E_1) ; on peut donc chercher f_0 de la forme $x \mapsto Ax\sin x$. On obtient facilement $A = \dfrac{1}{2}$.

Les solutions sont donc les fonctions y telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{x}{2}\sin x + a\cos x + b\sin x$$

où a et b sont des constantes réelles.

2) Pour tout $n \geqslant 2$, notons u_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = \dfrac{a_n}{n^2-1}\cos nx$. u_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$u_n'(x) = -\frac{na_n}{n^2-1}\sin nx \quad \text{et} \quad u_n''(x) = -\frac{n^2 a_n}{n^2-1}\cos nx.$$

Les suites $\left(\dfrac{|a_n|}{n^2-1}\right)$, $\left(\dfrac{|na_n|}{n^2-1}\right)$ et $\left(\dfrac{|n^2a_n|}{n^2-1}\right)$ sont dominées par la suite $(|a_n|)$. Il en résulte que les séries de fonctions $\sum u_n$, $\sum u_n'$ et $\sum u_n''$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$. La fonction $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n''(x) = -\sum_{n=2}^{+\infty} n^2 u_n(x).$$

On en déduit que la fonction f définie par $f(x) = \frac{a_1}{2} x \sin x + S(x)$ est une solution de l'équation différentielle (E_2). Les solutions sont donc toutes les fonctions telles que $f(x) = \frac{a_1 x}{2}\sin(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n^2-1}\cos nx + a\cos x + b\sin x$ où a et b sont deux constantes réelles.

12.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 12.21

Centrale PSI 2006 K

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f + f'' \geqslant 0$. Montrer que $f(x+\pi) + f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Indication de la rédaction : on pourra poser $q = f + f''$ et résoudre l'équation différentielle $y'' + y = q$ par la méthode de variation des constantes.

Posons $q = f + f''$. La fonction q est continue sur $\mathbb{R}$, et $q(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est alors une solution de l'équation différentielle (E) $y'' + y = q$.

Les fonctions cos et sin forment un système fondamental de solutions de l'équation homogène $y + y'' = 0$. La méthode de variation des constantes montre qu'il existe deux fonctions λ et μ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda'(x)\cos x + \mu'(x)\sin x & = & 0 \\ -\lambda'(x)\sin x + \mu'(x)\cos x & = & q(x) \end{array} \right.$$

Il en résulte que $\lambda'(x) = -q(x)\sin x$ et $\mu'(x) = q(x)\cos x$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda(x) & = & -\displaystyle\int_0^x q(t)\sin t\, dt \quad + \quad a \\ \mu(x) & = & -\displaystyle\int_0^x q(t)\cos t\, dt \quad + \quad b \end{array} \right.$$

où a et b sont des constantes réelles, et donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda(x)\cos x + \mu(x)\sin x \\ &= \int_0^x q(t)\big[\sin x\cos t - \cos x \sin t\big] dt + a\cos x + b\sin x \\ &= \int_0^x q(t)\sin(x-t)\, dt + a\cos x + b\sin x. \end{aligned}$$

On a alors, compte tenu des relations $\cos x + \cos(x+\pi) = 0$ et $\sin x + \sin(x+\pi) = 0$,

$$\begin{aligned} f(x) + f(x+\pi) &= \int_0^x q(t)\sin(x-t)\,dt + \int_0^{x+\pi} q(t)\sin(x+\pi-t)\,dt \\ &= \int_0^x q(t)\,[\sin(x-t)+\sin(x+\pi-t)]\,dt + \int_x^{x+\pi} q(t)\sin(x+\pi-t)\,dt \\ &= -\int_x^{x+\pi} q(t)\sin(x-t)\,dt \end{aligned}$$

Avec le changement de variable $t = x + u$ on obtient :

$$f(x) + f(x+\pi) = \int_0^{\pi} q(x+u)\sin u\,du$$

et donc $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$ puisque $q(x+u)$ et $\sin u$ sont positifs ou nuls pour tout $u \in [0, \pi]$.

Exercice 12.22

Centrale PSI 2006

Soit f la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) $y'' - (x^4+1)y = 0$ telle que $f(0) = f'(0) = 1$.

1. Justifier l'existence de f.
2. Montrer que $g = f^2$ est convexe ; calculer $g(0)$ et $g'(0)$.
3. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) \geqslant 1$.
4. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{g(t)}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?
5. Montrer que $h\colon x \mapsto f(x)\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{g(t)}$ est solution de l'équation différentielle (E).

1. (E) est une équation différentielle du second ordre dont les coefficients sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comme le coefficient de y'' ne s'annule pas, le théorème de Cauchy montre qu'il existe une et une seule solution de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = f'(0) = 1$.
2. $g = f^2$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a $g' = 2ff'$ et
$g''(x) = 2f'(x)^2 + 2f(x)f''(x) = 2f'^2(x) + 2(x^4+1)f^2(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
g est donc convexe sur $\mathbb{R}$.
On a de plus $g(0) = f(0)^2 = 1$ et $g'(0) = 2f(0)f'(0) = 2$.
3. Comme g est convexe, la courbe d'équation $y = g(x)$ est située au-dessus de sa tangente, notamment au point d'abscisse $x = 0$. On a donc $g(x) \geqslant 1 + 2x$, et en particulier $g(x) \geqslant 1$ pour tout $x \geqslant 0$, c'est-à-dire $|f(x)| \geqslant 1$. Comme f est

continue, elle est de signe constant sur $\mathbb{R}^+$, et comme $f(0) = 1$, f est positive, donc $f(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

4. La relation $g''(x) = 2f'^2(x) + 2(x^4+1)f^2(x)$ montre que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g''(x) \geqslant 2x^4$.
   Il en résulte que $g'(x) \geqslant g'(0) + 2\displaystyle\int_0^x x^4\,dx \geqslant \frac{2x^5}{5}$.
   On a donc $g(x) \geqslant g(0) + \dfrac{x^6}{15} = 1 + \dfrac{x^6}{15}$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{g(x)} \leqslant \dfrac{1}{1+\dfrac{x^6}{15}}$, ce qui démontre que $\dfrac{1}{g}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

5. On a $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{dt}{g(t)} = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{g(t)} - \int_0^x\frac{dt}{g(t)}$. L'application $u : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{dt}{g(t)}$ est donc une primitive de $-\dfrac{1}{g}$. En particulier elle est de classe $\mathscr{C}^2$.
   Il en résulte que h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h'(x) = f'(x)\int_x^{+\infty}\frac{dt}{g(t)} - \frac{f(x)}{g(x)} = f'(x)\int_x^{+\infty}\frac{dt}{g(t)} - \frac{1}{f(x)}$$

puis

$$\begin{aligned} h''(x) &= f''(x)\int_x^{+\infty}\frac{dt}{g(t)} - \frac{f'(x)}{g(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \\ &= (x^4+1)h(x) \end{aligned}$$

La fonction h est donc bien une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

> **Remarque**
> On retrouve la méthode de variation de la constante permettant de trouver une base de solutions à partir d'une solution ne s'annulant pas.

Exercice 12.23

Mines-Ponts MP 2006, TPE PC 2006

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + qy = 0$, où q est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que si f est une solution bornée de (E), alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
2. Soit (f, g) un système fondamental de solutions de (E). Démontrer que leur Wronskien $W = fg' - f'g$ est une constante.
3. (E) admet-elle des solutions non bornées ?

1. Soient f une solution bornée de (E), et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On a alors $|f''| \leqslant M\,|q|$, ce qui montre que f'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Il en résulte que f' admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Démontrons, par l'absurde, que $\ell = 0$. Supposons $\ell \neq 0$.
   Quitte à remplacer f par $-f$ (qui est aussi une solution bornée de (E)), on peut supposer $\ell > 0$. Il existe alors $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f'(x) \geqslant \dfrac{\ell}{2}$ pour tout $x \geqslant x_0$, et on a alors $\forall x \geqslant x_0,\ f(x) = f(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)dt \geqslant f(x_0) + \frac{\ell}{2}(x - x_0)$. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ce qui est absurde.
2. Le Wronskien $W = fg' - f'g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et
$$W' = fg'' - f''g = -qfg + qfg = 0.$$
   Ainsi W est constant.
3. Démontrons, par l'absurde, que (E) admet au moins une solution non bornée. Pour cela supposons toutes les solutions de (E) bornées.
   Soit (f, g) un système fondamental de solutions de (E). Posons $W = fg' - f'g$. D'après 2.,W est une constante, et comme f et g sont bornées, f' et g' tendent vers 0 en $+\infty$. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = 0$, et donc que $W = 0$, ce qui est absurde (le wronskien d'un système fondamental de solutions est non nul).

Exercice 12.24

Mines-Ponts PSI 2007 K

Montrer l'existence et l'unicité d'une solution bornée sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) $y'' - y = e^{-x^2}$. Expliciter cette solution.

(E) est une équation différentielle linéaire du second ordre. Les solutions de l'équation homogène associée sont toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = ae^x + be^{-x}$ où a et b sont deux constantes réelles. Notons que la seule solution bornée de l'équation homogène est la fonction nulle, puisque, par exemple si a est non nul, $y(x)$ tend vers l'infini avec le signe de a lorsque $x \to +\infty$.

La méthode de « variation des constantes » montre que les solutions de l'équation (E) sont de la forme $y(x) = a(x)e^x + b(x)e^{-x}$ où a et b sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont les dérivées vérifient
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} a'(x)e^x + b'(x)e^{-x} & = & 0 \\ a'(x)e^x - b'(x)e^{-x} & = & e^{-x^2} \end{array}\right.$$
On en déduit $a'(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x^2-x}$ et $b'(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2+x}$.

Il en résulte que $a(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2-t}dt + \alpha$ et $b(x) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2+t}dt + \beta$ où α et β sont deux constantes réelles.

Les fonctions $f_1 : t \mapsto \dfrac{1}{2}e^{-t^2-t}$ et $f_2 : t \mapsto \dfrac{1}{2}e^{-t^2+t}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, et négligeables devant la fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ au voisinage de $\pm\infty$. Elles sont donc intégrables sur $\mathbb{R}$.

Posons

$$L_1 = \int_0^{+\infty} f_1(t)dt,\ \ L_2 = \int_0^{+\infty} f_2(t)dt,\ \ L_1' = \int_{-\infty}^0 f_1(t)dt \ \text{ et } \ L_2' = \int_{-\infty}^0 f_2(t)dt.$$

Le changement de variable $u = -t$ montre que $L_1 = L_2'$ et $L_2 = L_1'$.

On a de plus $y(x) = \left(\alpha + \displaystyle\int_0^x f_1(t)dt\right)e^x + \left(\beta - \displaystyle\int_0^x f_2(t)dt\right)e^{-x}$.

Si $\alpha \neq -L_1$, alors $\left(\alpha + \displaystyle\int_0^x f_1(t)dt\right)e^x$ tend vers l'infini quand $x \to +\infty$, tandis que $\left(\beta + \displaystyle\int_0^x f_2(t)dt\right)e^{-x}$ tend vers 0. Il en résulte que $y(x)$ tend vers l'infini en $+\infty$, donc n'est pas bornée.

On voit de même (en étudiant la limite quand x tend vers $-\infty$), que si $\beta \neq -L_2'$, alors y n'est pas bornée.

Montrons que la solution y_1 définie par

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(-L_1 + \int_0^x f_1(t)dt\right)e^x + \left(-L_2' - \int_0^x f_2(t)dt\right)e^{-x} \\ &= -e^x \int_x^{+\infty} f_1(t)dt - e^{-x}\int_{-\infty}^x f_2(t)dt \end{aligned}$$

est bornée.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f_1(t) = \mathrm{o}(e^{-t})$ quand t tend vers $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que $\forall t > A,\ f_1(t) \leqslant \varepsilon e^{-t}$, d'où $\forall x > A,\ e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} f_1(t)dt \leqslant \varepsilon e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}dt \leqslant \varepsilon$, donc il en résulte que $-e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} f_1(t)dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et donc que $y(x)$ tend vers 0 tend x tend vers $+\infty$. On montre de la même manière que $y(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$. (On voit d'ailleurs aisément que y est impaire).

Comme y est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle admet des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$, elle est bornée sur $\mathbb{R}$, et c'est la seule d'après ce qui précède.

Exercice 12.25

(une équation de Bessel) Polytechnique PC 2005 K

On considère l'équation différentielle $(E) : xy'' + y' + xy = 0$.

1. Trouver les solutions de (E) développables en série entière. Préciser la solution J telle que $J(0) = 1$.

2. Montrer que $J(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta)d\theta$.

3. Soit f une fonction développable en série entière ; montrer qu'il existe des solutions de (E') $xy'' + y' + xy = f(x)$ développables en série entière.

1) Cherchons une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme S soit solution de (E) sur $I =]-R, R[$. On a alors, pour tout $x \in I$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,\ \text{et } S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1}.$$

$xS''(x) + S'(x) + xS(x)$ apparaît alors comme la somme d'une série entière dont le coefficient constant est a_1 et où, pour $n \geqslant 1$, le coefficient de x^n est

$$n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = (n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}.$$

L'unicité du développement en série entière montre alors que S est solution de (E) si et seulement si $a_1 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $(n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} = 0$. On en déduit par récurence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{(-1)^p}{4^p(p!)^2} a_0$. Comme $\left|\dfrac{a_{2p+2}}{a_{2p}}\right| = \dfrac{1}{4(p+2)^2} \to 0$ quand p tend vers $+\infty$, la règle de d'Alembert montre que le rayon de convergence R est infini. En particulier, la solution J telle que $J(0) = a_0 = 1$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ J(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4^p(p!)^2} x^{2p}$$

2) L'application φ définie par $\varphi(x, \theta) = \cos(x \sin\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et on a $|\varphi(x, \theta)| \leqslant 1$, $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant 1$ et $\left|\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x, t)\right| \leqslant 1$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Les hypothèses de domination du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre sont ainsi vérifiées, et il en résulte que que l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta)d\theta$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -\sin\theta \sin(x \sin\theta)d\theta \text{ et } g''(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -\sin^2\theta \cos(x \sin\theta)d\theta$$

On a alors

$$\begin{aligned} xg''(x) + g'(x) + xg(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \big(x \cos^2\theta \cos(x \sin\theta) - \sin\theta \sin(x \sin\theta)\big)d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \big[\cos\theta \sin(x \sin\theta)\big]' d\theta \\ &= \big[\cos\theta \sin(x \sin\theta)\big]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il en résulte que g est une solution de (E), et comme $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$, on a $g = J$.

3) Soient (b_n) une suite de réels et $a > 0$ tels que, pour tout $x \in]-a, a[$, on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. On procède comme dans la question 1) : on cherche une série entière $\sum a_n x^n$ dont la somme S soit solution de l'équation (E'). Les coefficients a_n doivent alors vérifier $a_1 = b_0$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} = b_n$. Ces relations déterminent de façon unique les termes d'une suite (a_n) : on peut en effet choisir arbitrairement $a_0 \in \mathbb{R}$, par exemple $a_0 = 0$, et si $n \geqslant 1$ est un entier pour lequel sont définis $a_0, \ldots, a_n$, alors a_{n+1} est défini de façon unique par la relation $a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_{n-1}}{(n+1)^2}$.

Il suffit alors de vérifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est non nul. Pour cela commençons par démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant \sum_{p=0}^{n} |b_p|$.

L'inégalité est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$. Pour un entier $n \geqslant 1$, supposons la vérifiée jusqu'à l'ordre n. On a alors

$$|a_{n+1}| \leqslant (n+1)^2\, |a_{n+1}| \leqslant |a_{n-1}| + |b_n| \leqslant \sum_{p=0}^{n-1} |b_p| + |b_n| \leqslant \sum_{p=0}^{n} |b_p| \leqslant \sum_{p=0}^{n+1} |b_p|\,.$$

L'inégalité est donc vérifiée à l'ordre $n+1$, et elle est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit alors r un nombre réel tel que $0 < r < \min(1, a)$. La suite $(b_n r^n)$ est bornée, et il existe donc un réel M tel que $\forall \in \mathbb{N},\ |b_n| \leqslant \dfrac{M}{r^n}$. Il en résulte que

$$|a_n| \leqslant M \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{r^p} \leqslant M \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{r^n} \leqslant \frac{(n+1)M}{r^n}.$$

Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{(n+1)M}{r^n}$ est égal à r, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $\geqslant r$, et S est bien une solution développable en série entière de (E').

Équations différentielles non linéaires

13

13.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

13.1.1 Equation non linéaire $y' = f(x, y)$

Ce qu'il faut savoir (en PC et PSI)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application continue de U dans $\mathbb{R}$.

• Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et y une application de I dans $\mathbb{R}$, on dit que le couple (I, y) est solution de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ lorsque y est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ (x, y(x)) \in U$ et $y'(x) = f(x, y(x))$.

• De même, on dit que le couple (I, y) est solution du problème de Cauchy en (x_0, y_0) s'il est solution de l'équation précédente et si $y(x_0) = y_0$.

• S'il n'existe pas de solution prolongeant y sur un intervalle contenant strictement I, on dit que la solution est maximale.

Théorème de Cauchy-Lipschitz 1 : Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors pour tout $(x_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy $(y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0)$ admet une unique solution maximale et son intervalle de définition I est ouvert.

• **Equation à variables séparables** : Soit a une application de classe $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle J dans $\mathbb{R}$, et b une application de classe $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. L'équation différentielle $a(y)y' - b(x) = 0$ est dite à variables séparables.

Si $x \mapsto y(x)$ est une solution telle que $y(x_0) = y_0$, alors on a pour tout x $\displaystyle\int_{y_0}^{y(x)} a(u)\,du = \int_{x_0}^{x} b(s)\,ds$. Ceci fournit une relation implicite entre x et $y(x)$.

Exercice 13.1

TPE PSI 2006

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $y' = f(y)$. Montrer que y est monotone.

• Supposons d'abord qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y'(x_0) = 0$. En posant $y_0 = y(x_0)$, on a $f(y_0) = 0$, donc la fonction constante $x \mapsto y_0$ est solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $(z' = f(z),\ z(x_0) = y_0)$, et la fonction y également, donc par unicité, y est constante (donc monotone).

• Supposons à présent que y' ne s'annule pas. Comme elle est continue, elle garde un signe constant, donc y est monotone.

Exercice 13.2

Montrer que le problème de Cauchy $(2xyy' = x^2 + y^2,\ y(1) = 2)$ admet une solution maximale que l'on déterminera (on pourra poser $z = y^2$).

En posant $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[^2$, donc le théorème de Cauchy garantit l'existence et l'unicité d'une solution maximale y définie sur un intervalle I inclus dans $]0, +\infty[$ et ne s'annulant pas donc positive car $y(1) = 2$. En posant $z = y^2$, on a $z' = 2yy'$, donc on obtient l'équation $xz' = x^2 + z$, qui est linéaire. L'équation homogène a pour solution $z = Ax$ et la variation de la constante conduit à chercher une solution particulière sous la forme $z = A(x)x$ avec $x^2A' = x^2$, donc $z = x^2$ convient, d'où la solution générale $z = x^2 + Ax$. On doit avoir $z(1) = 4$, d'où $A = 3$, d'où finalement $y^2 = x^2 + 3x$. Comme y est positive, on en déduit $y(x) = \sqrt{x(x+3)}$ et l'intervalle maximal est $I =]0, +\infty[$.

Exercice 13.3

Centrale PSI 2006

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le problème de Cauchy $(y' = \operatorname{ch}(x+y),\ y(x_0) = y_0)$.
Indication de la rédaction : poser $z = x + y$.

Comme dans l'exercice précédent, le théorème de Cauchy s'applique. On pose $z = x + y$, l'équation devient $z' = \operatorname{ch} z + 1$ avec la condition $z(x_0) = z_0 = x_0 + y_0$. On tombe sur une équation autonome (à variables séparables) qu'on peut écrire $\dfrac{z'}{1+\operatorname{ch} z} = 1$. En intégrant de x_0 à x, on obtient

$$x - x_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{z'(s)}{\operatorname{ch} z(s) + 1}\,ds = \int_{z_0}^{z(x)} \frac{dt}{1+\operatorname{ch} t} = \int_{z_0}^{z(x)} \frac{2e^t}{(1+e^t)^2}\,dt = \left[-\frac{2}{e^t+1}\right]_{z_0}^{z(x)}$$

d'où $\dfrac{2}{e^{z(x)}+1} = C - x$ avec $C = x_0 + \dfrac{2}{e^{x_0+y_0}+1}$. Finalement, on trouve $y(x) = \ln\left(\dfrac{2-C+x}{C-x}\right) - x$. L'intervalle maximal I est le plus grand intervalle ouvert contenant x_0 sur lequel $C - x$ et $2 - C + x$ sont non nuls et de même signe. Etant donné que $C - 2 < x_0 < C$, on obtient $I =]C-2, C[$.
A partir de la courbe correspondant à $C = 0$, on obtient les autres courbes intégrales par des translations de vecteur (C, C).

13.1.2 Systèmes autonomes

Ce qu'il faut savoir (dans la filière PC)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f et g deux applications continues de U dans $\mathbb{R}$. Une solution du système différentiel $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ sur un intervalle I est un couple (x,y) d'applications de I dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$, vérifiant $\forall t \in I,\ (x(t), y(t)) \in U$ et $x'(t) = f(x(t), y(t)),\ y'(t) = g(x(t), y(t))$.
Une solution maximale de ce système est une solution sur un intervalle I qu'on ne peut pas prolonger en une solution sur un intervalle contenant strictement I.
Théorème de Cauchy-Lipschitz 2 : Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, alors pour tout $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times U$, il existe une unique solution maximale (x,y) du système différentiel vérifiant $(x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0)$. Son intervalle de définition est ouvert.
On dit que (x,y) est la solution du problème de Cauchy associé au système en (t_0, x_0, y_0).
Invariance par translation : Si (x,y) est une solution sur $I =]a, b[$ et si t_1 est un réel, alors la fonction $t \mapsto (x(t-t_1), y(t-t_1))$ est solution sur $]a+t_1, b+t_1[$.

Exercice 13.4

Soient f et g deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$, et (Σ) le système différentiel $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$
Soient $(x_0, y_0) \in U$ et (x,y) la solution maximale, définie sur l'intervalle I, du problème de Cauchy en (t_0, x_0, y_0).

1. A quelle condition la fonction constante $t \mapsto (x_0, y_0)$ est-elle solution de (Σ) ?
2. On suppose que $(f(x_0, y_0), g(x_0, y_0)) \neq (0,0)$.
   Montrer que $\forall t \in I,\ (f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t))) \neq (0,0)$.
3. On suppose qu'il existe $t_1 \in I$ tel que $t_1 > t_0$ et $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_0), y(t_0))$.
   Montrer que $I = \mathbb{R}$ et que les fonctions x et y sont périodiques de période $t_1 - t_0$.

1. Une fonction constante a une dérivée nulle, donc $t \mapsto (x_0, y_0)$ est solution du système si et seulement si $f(x_0, y_0) = 0$ et $g(x_0, y_0) = 0$.
2. Supposons qu'il existe $t_1 \in I$ tel que $f(x(t_1), y(t_1)) = g(x(t_1), y(t_1)) = 0$. La fonction constante $t \mapsto (x(t_1), y(t_1))$ est alors solution du système sur $\mathbb{R}$, avec les mêmes conditions initiales en t_1 que la solution (x,y), donc par unicité, on a $\forall t \in I,\ x(t) = x(t_1)$ et $y(t) = y(t_1)$. En particulier, $f(x_0, y_0) = f(x(t_0), y(t_0)) = f(x(t_1), y(t_1)) = 0$ et de même $g(x_0, y_0) = 0$ ce qui apporte une contradiction.

3. En notant I' l'intervalle translaté de I par la valeur $t_0 - t_1$, la fonction $t \mapsto (x(t+t_1-t_0), y(t+t_1-t_0))$ est une solution maximale du système sur I' avec les mêmes conditions initiales en t_0 que la solution (x, y), donc par unicité, $I' = I$ et les deux solutions sont égales.
   On en déduit que $I = \mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t+t_1-t_0) = x(t),\ y(t+t_1-t_0) = y(t)$, donc x et y sont périodiques de période $t_1 - t_0$.

Exercice 13.5

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$

Que dire des courbes intégrales ?

Le théorème de Cauchy-Lipschitz 2 s'applique, et du fait de l'invariance par translation, on se limite à l'étude du problème de Cauchy en $(0, x_0, y_0)$.
Si $x_0 = 0$, le couple de fonctions constantes $t \mapsto (0, y_0)$ convient, donc par unicité est la solution cherchée, sur $\mathbb{R}$.
Si $x_0 \neq 0$, la fonction x ne s'annule pas (si elle s'annule en t_1, elle est identiquement nulle par unicité du problème de Cauchy en t_1). En notant I l'intervalle maximal, la première équation, à variables séparables, s'intègre de la manière suivante :
$\forall t \in I,\ t = \displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)}$, d'où $x(t) = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$.
On reporte l'expression de x dans la deuxième équation, ce qui donne l'équation linéaire $y' = \dfrac{2x_0}{1-x_0 t} y$, qui se résout en $y = y_0 e^{\int_0^t \frac{2x_0}{1-x_0 u} du} = \dfrac{y_0}{(1-x_0 t)^2}$.
L'intervalle maximal I est le plus grand intervalle ouvert contenant 0 sur lequel $1 - x_0 t$ ne s'annule pas, donc si $x_0 > 0$, alors $I = \left]-\infty, \dfrac{1}{x_0}\right[$ et si $x_0 < 0$, alors $I = \left]\dfrac{1}{x_0}, +\infty\right[$.
Pour $x_0 > 0$, exprimons y en fonction de x. On obtient $y = \dfrac{y_0}{x_0^2} x^2$, où x décrit $]0, +\infty[$, donc la courbe intégrale est une demi parabole.

13.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 13.6

TPE PSI 2005

Soit y une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $y' = e^{-y} - e^{-3y} + e^{-5y}$.
Que dire de la limite de y en $+\infty$?

Le trinôme $t^2 - t + 1$ a un discriminant négatif donc est toujours strictement positif. En remplaçant t par e^{-2y} et en multipliant par e^{-y}, on en déduit que $\forall y,\ e^{-5y} - e^{-3y} + e^{-y} > 0$, donc $y' > 0$ et y est strictement croissante. Supposons que y admette une limite finie l en $+\infty$, on aurait alors

$$y'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{-5l} - e^{-3l} + e^{-l} = p > 0.$$

Par conséquent, il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geqslant A$, $y'(t) \geqslant p/2$, donc en intégrant, $\forall x \geqslant A,\ y(x) \geqslant p/2(x - A) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, ce qui est contraire à notre hypothèse. Finalement, y a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 13.7

Mines-Ponts MP, PC 2005

Soit (E) l'équation différentielle non linéaire $2y' + y^2 + \dfrac{1}{x^2} = 0$.

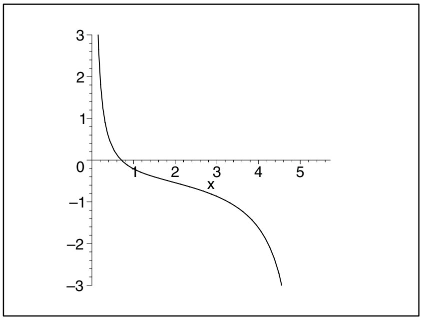
Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est solution de (E). En posant $y(x) = z(x) + \dfrac{1}{x}$, déterminer les solutions maximales de (E) sur $]0, +\infty[$ (on pourra poser $u = 1/z$).

On a pour tout $x > 0$, $2(-\dfrac{1}{x^2}) + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} = 0$, donc $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

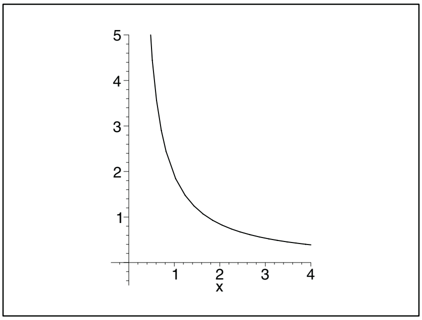
En posant $y(x) = z(x) + \dfrac{1}{x}$, l'équation (E) équivaut à $2z' - \dfrac{2}{x^2} + z^2 + 2\dfrac{z}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} = 0$, c'est-à-dire à l'équation $(E') : 2z' + z^2 + \dfrac{2z}{x} = 0$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz 1 garantit l'existence et l'unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy en (x_0, z_0) pour (E'), donc en (x_0, y_0) pour (E). Il y a deux cas à distinguer :

- Si $y_0 = 1/x_0$, alors $z_0 = 0$. Or la fonction nulle est solution de (E'), donc par unicité $z = 0$, et $y(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Si $y_0 \neq 1/x_0$, alors $z_0 \neq 0$, donc z ne s'annule pas (sinon elle serait identiquement nulle par unicité du problème de Cauchy posé en un point d'annulation de z), donc en posant $u = \dfrac{1}{z}$, on obtient l'équation équivalente $-2u' + \dfrac{2}{x}u + 1 = 0$. Cette équation est linéaire, la solution de l'équation homogène est $x \mapsto Ax$, et la méthode de variation de la constante conduit à chercher u sous la forme $A(x)x$, ce qui donne $-2A'(x)x + 1 = 0$. On en déduit que $u = \dfrac{1}{2}x\ln x$ est solution, donc la solution générale pour u est $u(x) = \dfrac{1}{2}x\ln x + Ax$, d'où $y(x) = \dfrac{2}{x\ln x + 2Ax} + \dfrac{1}{x}$. On détermine A à l'aide de la condition initiale $y(x_0) = y_0$, ce qui donne finalement $y(x) = \dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{2}{\ln x - \ln x_0 + \frac{2}{x_0y_0 - 1}}\right)$. On remarque que cette fonction est

définie sur $]0, +\infty[\setminus\{x_1\}$, avec $x_1 = x_0 \exp\left(-\dfrac{2}{x_0 y_0 - 1}\right)$. L'intervalle maximal de définition de y est donc le plus grand intervalle ouvert contenant x_0 inclus dans $]0, +\infty[\setminus\{x_1\}$.
– Si $y_0 < 1/x_0$, alors $x_1 > x_0$, donc $I =]0, x_1[$.
– Si $y_0 > 1/x_0$, alors $x_1 < x_0$, donc $I =]x_1, +\infty[$.



cas $y_0 < 1/x_0$



cas $y_0 > 1/x_0$

Exercice 13.8

Centrale PSI 2005

On note f la solution maximale de $y' = e^{-xy}$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que f possède une limite finie ℓ en $+\infty$.
3. Montrer que $\ell \geqslant 1$.

1. D'après le théorème de Cauchy, f est définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$, avec $a < 0 < b$. La fonction $g : x \mapsto -f(-x)$ vérifie $g(0) = 0$ et $g'(x) = f'(-x) = e^{xf(-x)} = e^{-xg(x)}$, donc est solution du même problème de Cauchy sur $]-b, -a[$. Par unicité, on en déduit que $]-b, -a[\subset]a, b[$, d'où $a = -b$ et $g = f$, donc f est impaire.
2. f est croissante donc possède une limite, finie ou $+\infty$, en b. Supposons la limite infinie. Dans ce cas, il existe $c \in]0, b[$ tel que $\forall x \geqslant c,\ f(x) \geqslant 1$, d'où $0 \leqslant f'(x) \leqslant e^{-x}$, d'où $f(x) \leqslant f(c) + \displaystyle\int_c^x e^{-t}\,dt \leqslant f(c) + e^{-c}$, donc f est bornée au voisinage de b : contradiction, donc f a une limite finie ℓ en b.
Si b est fini, alors $f'(x) \to e^{-b\ell}$ quand $x \to b$, donc f est prolongeable en une solution sur $]a, b]$, ce qui contredit la maximalité de $]a, b[$. On en déduit que $b = +\infty$, et comme f est impaire, en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Si $\ell < 1$, alors $\forall x \geqslant 0,\ y(x) < 1$, donc $y(x) = \int_0^x e^{-ty(t)}dt > \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}$.
En passant à la limite pour x tendant vers $+\infty$, on obtient $\ell \geqslant 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On conclut que $\ell \geqslant 1$.

Exercice 13.9

Mines-Ponts PSI 2006

Déterminer la solution maximale du problème de Cauchy

$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = y'(0) = 1$$

• Il s'agit d'une équation autonome du second ordre. y est solution de ce problème de Cauchy si et seulement si (y, y') est solution du système autonome $\begin{cases} y' = z \\ z' = 2y^3 \end{cases}$ avec les conditions initiales $y(0) = 1,\ z(0) = 1$. Le théorème de Cauchy garantit l'existence et l'unicité de la solution cherchée.
• Pour la trouver, on multiplie la relation $y'' = 2y^3$ par y', on obtient $y'y'' = 2y'y^3$, puis on l'intègre entre 0 et x : $y'(x)^2 - 1 = y(x)^4 - 1$, d'où $y'(x)^2 = y(x)^4$. S'il existe x_1 tel que $y'(x_1) = 0$, alors $y(x_1) = 0$, or la fonction nulle est solution du problème de Cauchy en $(x_1, 0, 0)$, donc par unicité, y est nulle, ce qui est absurde. On en déduit que y' ne s'annule pas et garde un signe constant, en l'occurrence strictement positif, d'où $\forall x \in I,\ y'(x) = y(x)^2$. On obtient une équation autonome du premier ordre que l'on résout par les techniques vues précédemment. Comme $y(0) \neq 0$, y ne s'annule pas, donc $\forall x \in I,\ \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{du}{u^2} = x$, d'où $1 - \frac{1}{y(x)} = x$, d'où $y(x) = \frac{1}{1-x}$. L'intervalle I est le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel $1 - x$ ne s'annule pas, par conséquent $I =]-\infty, 1[$.
N.B. : La technique consistant à multipliant par y' et à intégrer de x_0 à x permet d'obtenir une intégrale première (c'est-à-dire une équation du premier ordre) pour toute équation différentielle de la forme $y'' = f(y)$ (équation de Newton).

13.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 13.10

Mines-Ponts PC K

Soit (E) l'équation différentielle $xy' - 2|y| = x$.

1. Résoudre sur $]0, +\infty[$ les équations différentielles (E_1) $xy' - 2y = x$ et (E_2) $xy' + 2y = x$.
2. Soit f une solution de (E) sur $]0, +\infty[$. Démontrer que f change de signe. Trouver toutes les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

En déduire que le problème de Cauchy admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer que si f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $f(0) = 0$ et $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$. En déduire que (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$.

1. (E_1) et (E_2) sont des équations linéaires du premier ordre.
La solution homogène de (E_1) est $x \mapsto Ax^2$ et $x \mapsto -x$ est solution particulière, donc la solution générale est $x \mapsto -x + Ax^2$.
La solution homogène de (E_2) est $x \mapsto Ax^{-2}$ et $x \mapsto x/3$ est solution particulière, donc la solution générale est $x \mapsto x/3 + Ax^{-2}$.

2. $\forall x > 0,\ xf'(x) = 2|f(x)| + x$, donc $f'(x) > 0$, et f est strictement croissante.
Trois cas peuvent se présenter :
• Si $f > 0$, l'équation (E) coïncide avec (E_1), donc il existe A tel que pour tout x, $f(x) = -x + Ax^2 = x(-1 + Ax)$. Or A est positif à cause du comportement en $+\infty$, mais alors f change de signe en $1/A$, ce qui est contradictoire.
• Si $f < 0$, (E) coïncide avec (E_2), donc il existe A tel que pour tout x, $f(x) = x/3 + Ax^{-2}$. On en déduit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ce qui est contradictoire.
• Il en résulte qu'il existe $x_1 > 0$ tel que $f(x_1) = 0$ et $\forall x < x_1,\ f(x) < 0$, $\forall x > x_1,\ f(x) > 0$.
Sur $]0, x_1[$, (E) se ramène à (E_2), d'où $f(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{x_1^3}{3x^2}$ (pour qu'elle s'annule en x_1). On remarque en outre que $f_g'(x_1) = 1$.
Sur $]x_1, +\infty[$, (E) se ramène à (E_1), d'où $f(x) = -x + \dfrac{x^2}{x_1}$. On observe que $f_d'(x_1) = 1$. Par conséquent, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
Etudions le problème de Cauchy en (x_0, y_0). On distingue trois cas.
• Si $y_0 = 0$, on doit choisir $x_1 = x_0$.
• Si $y_0 > 0$, alors $x_1 < x_0$, et $\forall x > x_1$, $f(x) = -x + Ax^2$, avec $A = (x_0 + y_0)x_0^{-2}$.
Ceci impose la valeur de x_1, égale à $\dfrac{x_0^2}{x_0 + y_0}$.
• Si $y_0 < 0$, alors $x_0 < x_1$, et $\forall x < x_1$, $f(x) = x/3 + Ax^{-2}$, avec $A = x_0^2(y_0 - x_0/3)$, d'où $x_1 = (x_0^2(x_0 - 3y_0))^{1/3}$.
Dans tous les cas, la solution est unique et définie sur $]0, +\infty[$.

3. En prenant $x = 0$ dans (E), on obtient $f(0) = 0$. Comme $xf'(x) = 2|f(x)| + x$, $x > 0$ implique $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et comme $f(0) = 0$, f est strictement positive sur $]0, +\infty[$. (E) coïncide donc avec (E_1) sur cet intervalle, donc $\exists A,\ \forall x > 0,\ f(x) = -x + Ax^2$. En particulier, $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} -1$, donc f est négative au voisinage de 0 à droite : contradiction.

4. Soit y une solution sur $]-\infty, 0[$.
   • On suppose d'abord qu'il existe un intervalle ouvert non vide sur lequel $y > 0$, et on note I un tel intervalle maximal. (E) s'écrit $xy' - 2y = x$, donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = -x + Ax^2 = x(Ax - 1)$. Cela impose $Ax - 1 < 0$.
   $*$ Si $A \geqslant 0$, y ne s'annule pas, donc $I =]-\infty, 0[$.
   $*$ Si $A < 0$, $I =]1/A, 0[$, donc $y \leqslant 0$ sur $]-\infty, 1/A]$.
   Par suite, pour tout $x \leqslant 1/A$, $y = x/3 + Bx^{-2} = x^{-2}(B + x^3/3)$. Comme y doit s'annuler en $1/A$, on obtient $B = -\dfrac{1}{3A^3}$, et la fonction obtenue est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$.
   • On suppose pour finir que $y \leqslant 0$ sur $]-\infty, 0[$. (E) s'écrit $xy' + 2y = x$, donc $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{A}{x^2}$, avec $A \leqslant 0$.
   Inversement, ces trois familles de solutions conviennent.

Exercice 13.11

Centrale PC 2005 K
Soient $a > 0$ et Σ le système différentiel $\left(x' = x + \dfrac{xy}{a},\ y' = y - x^2\right)$.

1. On note (x, y) une solution maximale de Σ. Déterminer l'expression de $ax^2 + y^2$ en fonction de t. Montrer que (x, y) est définie sur un intervalle non majoré.
2. On suppose désormais $a = 1$. Exprimer (x, y) sous la forme $(r\cos u, r\sin u)$, où r et u sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Déterminer r et u. En déduire une équation polaire de l'arc décrit par la solution.
   Indication de la rédaction : on utilisera le théorème de relèvement suivant : soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\forall t \in I,\ \|f(t)\|_2 = 1$. Alors il existe une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\forall t \in I,\ f(t) = (\cos u(t), \sin u(t))$.

1. En dérivant $ax^2 + y^2$, on obtient :
$$(ax^2 + y^2)' = 2axx' + 2yy' = 2ax^2 + 2x^2y + 2y^2 - 2yx^2 = 2(ax^2 + y^2)\,.$$
   La fonction $ax^2 + y^2$ est solution de l'équation différentielle linéaire $z' = 2z$, donc il existe un réel C tel que $\forall t,\ (ax^2 + y^2)(t) = Ce^{2t}$.
   On note $I =]b, c[$ l'intervalle maximal de définition de (x, y), t_0 un point de I. On suppose que c est fini. Le calcul précédent montre que $ax^2 + y^2$ est bornée sur $[t_0, c[$, donc x et y également. En utilisant le système, x' et y' sont également bornées sur $[t_0, c[$. Comme l'intervalle $[t_0, c[$ est borné et les fonctions $|x'|$ et $|y'|$ sont majorées par une constante, les intégrales $\displaystyle\int_{t_0}^{c} x'$ et $\displaystyle\int_{t_0}^{c} y'$ sont absolument convergentes, donc convergentes, ce qui implique que x et y ont une limite

finie en c. En utilisant le système, il en est de même pour x' et y', ce qui permet de prolonger la solution (x, y) au point c, ce qui contredit sa maximalité. En conséquence $c = +\infty$, donc I est non majoré.

2. Le système est autonome, donc on se ramène au problème de Cauchy en $t_0 = 0$. On pose $(x_0, y_0) = (x(0), y(0))$. Si $(x_0, y_0) = (0, 0)$, le couple de fonctions nulles est solution du même problème de Cauchy que (x, y) en 0, donc par unicité, x et y sont les fonctions nulles.

Sinon, d'après 1, $\forall t,\ x(t)^2 + y(t)^2 = (x_0^2 + y_0^2)e^{2t}$. On pose $r(t) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}e^t$, de sorte que r est $\mathscr{C}^1$ et la fonction $(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$ est de classe $\mathscr{C}^1$, à valeurs dans le cercle unité. D'après le théorème de relèvement rappelé dans l'énoncé, il existe une fonction u de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telle que $(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}) = (\cos u, \sin u)$. On pose $u_0 = u(0)$ et $r_0 = r(0)$. On a alors $x' = r' \cos u - ru' \sin u$ et $y' = r' \sin u + ru' \cos u$. (Σ) équivaut à $\begin{cases} r' \cos u - ru' \sin u = r \cos u + r^2 \cos u \sin u \\ r' \sin u + ru' \cos u = r \sin u - r^2 \cos^2 u \end{cases}$

En multipliant la première ligne par $-\sin u$, la deuxième par $\cos u$ et en ajoutant, on obtient en simplifiant par r $(*)$ $u' = -r \cos u = -r_0 e^t \cos u$, qui est une équation autonome du premier ordre en u.

Si $u_0 \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$, alors $x_0 = 0$. Le couple $t \mapsto (0, y_0 e^t)$ est solution de Σ et prend même valeur que (x, y) en $t_0 = 0$, donc par unicité est égal à (x, y). La courbe intégrale est une droite.

Sinon, par unicité du problème de Cauchy pour $(*)$, u ne prend aucune valeur congrue à $\pi/2 \pmod{\pi}$. La fonction u étant continue, elle reste dans un intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$. On suppose par exemple $x_0 > 0$. Par périodicité, on peut se ramener au cas où $u(I) \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On obtient alors $-\frac{u'}{\cos u} = r_0 e^t$, d'où en intégrant de 0 à t : $-\int_{u_0}^{u(t)} \frac{dv}{\cos v} = r_0(e^t - 1)$, d'où $r_0(e^t - 1) = -\ln(\tan(\frac{u(t)}{2} + \frac{\pi}{4})) + \ln(\tan(\frac{u_0}{2} + \frac{\pi}{4}))$. On en déduit :

$u(t) = 2 \operatorname{Arctan}\left(\exp(C - r_0 e^t)\right) - \frac{\pi}{2}$, avec $C = r_0 + \ln(\tan(\frac{u_0}{2} + \frac{\pi}{4}))$.

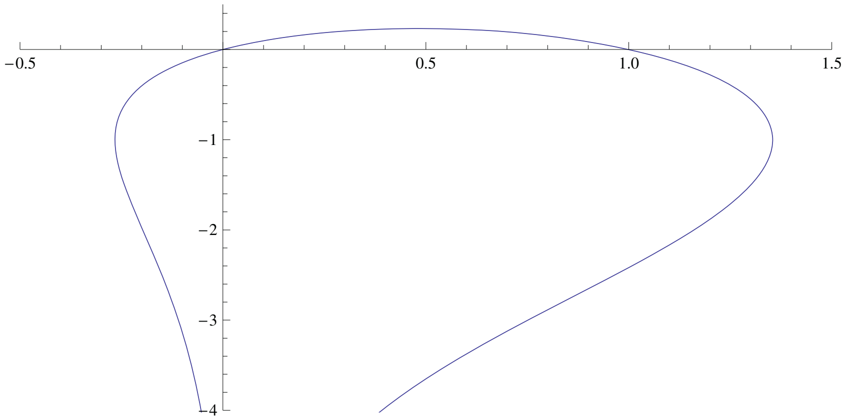
On se ramène par rotation à la situation où $u_0 = 0$, auquel cas la courbe intégrale admet la représentation polaire $r = r_0 - \ln(\tan(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}))$.

En Maple, on obtient la courbe à l'aide de l'instruction suivante :

```
plot([1-ln(tan(u/2+Pi/4)),u,u=-Pi..Pi],coords=polar);
```

ou, avec Mathematica

```
PolarPlot[1-Log[Tan[t/2+Pi/4]],{t,-Pi, Pi}]
```



Exercice 13.12

Polytechnique PC 2006 K

1. Justifier l'existence d'une solution maximale (I, f) de l'équation différentielle $\theta' = 1 + \sin\theta$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $I = \mathbb{R}$, puis donner l'expression de f. En déduire ses limites en $\pm\infty$.

2. Déterminer les solutions $g : t \mapsto (x(t), y(t))$ du système différentiel $\begin{cases} x' = -1 - y + x^2 \\ y' = x + xy \end{cases}$ pour lesquelles il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(t_0) = (1, 0)$.
   Indication de la rédaction : on montrera que la fonction $u = x^2 + y^2$ est constante, puis on utilisera le théorème de relèvement rappelé dans l'exercice précédent.

1. • La fonction $\theta \mapsto 1 + \sin\theta$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale $(\,]a, b[\,, f)$ du problème de Cauchy en $(0, 0)$. En outre, $f' \geqslant 0$ donc f est croissante. Si b est fini, $0 \leqslant f' \leqslant 2$, donc $\forall t \in [0, b[\,,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant 2t \leqslant 2b$, donc f est bornée et admet une limite finie en b, et f' également grâce à l'équation différentielle, donc f est prolongeable en une solution sur $]a, b]$, ce que réfute sa maximalité. En conséquence, $b = +\infty$, et par un raisonnement analogue, $a = -\infty$, donc $I = \mathbb{R}$.

   • S'il existe t_1 tel que $f(t_1) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, la fonction constante égale à $f(t_1)$ est solution du même problème de Cauchy que f en t_1, donc lui est égal par unicité, or $f(0) = 0 \neq f(t_1)$, contradiction.

   • Sinon, f étant continue et nulle en 0, elle prend ses valeurs dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

En écrivant que $\dfrac{f'}{1+\sin f} = 1$ et en intégrant de 0 à t, on obtient

$$t = \int_0^{f(t)} \frac{du}{1+\sin u} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+f(t)} \frac{dv}{1+\cos v} = \left[\tan \frac{v}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+f(t)}$$

d'où $t = \tan\left(\dfrac{f(t)}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$. On obtient finalement $f(t) = \dfrac{\pi}{2} + 2\operatorname{Arctan}(t-1)$.

On en déduit que $f(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} -\dfrac{\pi}{2}$ et $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \dfrac{3\pi}{2}$.

2. Le système proposé admet une solution maximale unique g tel que $g(t_0) = (1,0)$. La fonction $u = x^2 + y^2$ est dérivable et on a

$$u' = 2xx' + 2yy' = 2x(-1-y+x^2) + 2y(x+xy) = 2x(u-1)\,.$$

Comme $u(t_0) = 1$ et que la fonction constante égale à 1 est solution de l'équation $u' = 2x(u-1)$, on en déduit par application du théorème d'unicité que u est constante égale à 1. On en déduit que la trajectoire est circulaire.

On peut alors appliquer à g le théorème de relèvement : il existe θ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\theta(t_0) = 0$ et $\forall t \in I,\ g(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$. En remplaçant dans le système, on obtient $\begin{cases} -\theta'\sin\theta = -\sin\theta(1+\sin\theta) \\ \theta'\cos\theta = \cos\theta(1+\sin\theta) \end{cases}$ Comme le sinus et le cosinus ne s'annulent pas simultanément, cela équivaut à $\theta' = 1 + \sin\theta$, ce qui nous ramène à la première question. Si on pose $f(t) = \theta(t+t_0)$, la fonction f est solution du problème de Cauchy de 1). On en déduit $\theta(t) = \dfrac{\pi}{2} + 2\operatorname{Arctan}(t-t_0-1)$.

En utilisant les formules $\sin(2\operatorname{Arctan} u) = \dfrac{2u}{1+u^2}$ et $\cos(2\operatorname{Arctan} u) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, on obtient finalement $\begin{cases} x = -\sin(2\operatorname{Arctan}(t-t_0-1)) = \dfrac{-2(t-t_0-1)}{1+(t-t_0-1)^2} \\ y = \cos(2\operatorname{Arctan}(t-t_0-1)) = \dfrac{1-(t-t_0-1)^2}{1+(t-t_0-1)^2} \end{cases}$

Calcul différentiel 14

14.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

14.1.1 Dérivées partielles, fonction de classe $\mathscr{C}^1$

Ce qu'il faut savoir

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, f une application de U dans $\mathbb{R}^n$ et $a = (a_1, \ldots, a_p) \in U$.

- Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^p$. On dit que f admet une dérivée en a selon le vecteur u lorsque la fonction $t \mapsto f(a + tu)$ définie au voisinage de 0 est dérivable, c'est-à-dire que l'expression $\dfrac{f(a+tu) - f(a)}{t}$ a une limite finie lorsque t tend vers 0. On note $D_u f(a)$ cette limite.
- Soit $j \in \{1, \ldots, p\}$, lorsque l'application
$$p_j : t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_p)$$
est dérivable au point a_j, on dit que f admet une j-ième dérivée partielle au point a, et on pose $p'_j(a_j) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.
- On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U lorsque pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, f admet une j-ième dérivée partielle en chaque point x de U, et lorsque les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ sont continues sur U.

Exercice 14.1

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et calculer ses dérivées partielles.
3. Calculer les dérivées partielles de f en $(0, 0)$.
4. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Par les théorèmes généraux, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Par ailleurs, on a $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$. Or $|\cos^4\theta + \sin^4\theta| \leqslant 2$, donc $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leqslant 2r^2$, d'où $|f(x,y)| \leqslant 2(x^2+y^2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, ce qui montre la continuité de f en $(0,0)$.
2. Par les théorèmes généraux, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x^5 + 4x^3y^2 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$. Comme $f(y,x) = f(x,y)$, on a aussi par symétrie,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \frac{2y^5 + 4y^3x^2 - 2yx^4}{(x^2+y^2)^2}\,.$$
3. Pour tout $x \neq 0$, on a $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \dfrac{x^2}{x} = x$, de limite nulle lorsque x tend vers 0. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Par symétrie de f, on a de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
4. Pour $r > 0$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = r(2\cos^5\theta + 4\cos^3\theta\sin^2\theta - 2\cos\theta\sin^4\theta)$, d'où $|\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leqslant 8r$. Par conséquent, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 8\sqrt{x^2+y^2}$, ce qui montre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$. La symétrie de la formule entraîne le même résultat concernant $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ce qu'il faut savoir

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, f une application de U dans $\mathbb{R}^n$ et $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$.

- **Fonction différentiable (filière PSI)**
  - On dit que f est différentiable en a lorsqu'il existe une application linéaire $\ell \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, V un voisinage de 0 et $\varepsilon : V \to F$ tels que $\forall h \in V$, $f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \|h\|\varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Cette application linéaire est appelée différentielle de f au point a. On la note $df(a)$.
  - Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f est différentiable en tout point de U, et pour tout $a \in U$, on a
$$df(a) : h = (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_h f(a)$$

- **Différentielle en un point (filière PC)**
Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f admet en tout point de U une dérivée selon tout vecteur $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ donnée par $D_h f(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$. L'application $h \mapsto D_h f(a)$ est linéaire. On l'appelle différentielle de f en a et on la note $df(a)$.

Exercice 14.2

spécifique PSI

Soient $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et u un endomorphisme de E. Montrer que l'application $f : E \to E$ définie par $f(x) = x \wedge u(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa différentielle.

Soit $x \in \mathbb{R}^3$. En décomposant le vecteur x dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on observe que les coordonnées de $f(x)$ sont polynomiales (du second degré) par rapport à celles de x, donc f admet des dérivées partielles qui sont continues sur E, d'où f est de classe $\mathscr{C}^1$. Soit h dans $\mathbb{R}^3$, on a

$$f(x+h) = (x+h) \wedge (u(x) + u(h)) = f(x) + x \wedge u(h) + h \wedge u(x) + h \wedge u(h).$$

L'application $h \mapsto x \wedge u(h) + h \wedge u(x)$ est linéaire. De plus, on a

$$\|h \wedge u(h)\| \leqslant \|h\| \|u(h)\| \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} u(h) = 0$$

puisque toute application linéaire sur $\mathbb{R}^3$ est continue, donc $\|h \wedge u(h)\| = o(\|h\|)$. Il en résulte que $df(x)(h) = x \wedge u(h) + h \wedge u(x)$.

14.1.2 Matrice jacobienne, composition

Ce qu'il faut savoir

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^n$ et $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$.

- On appelle matrice jacobienne de f en a, la matrice de l'application linéaire $df(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$. On la note $J_f(a)$. Le terme général de $J_f(a)$ est $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ où $f_1, \dots, f_n$ désignent les composantes de f.
Lorsque $n = p$, on appelle jacobien de f en a le déterminant de la matrice $J_f(a)$, et on le note $j_f(a)$.
- Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $f(U)$ et g une application de classe $\mathscr{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}^q$. La fonction $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et
$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$
Par conséquent $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a))\, J_f(a)$.

En notant $x = (x_1, \dots, x_p)$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on a , pour $i \in \{1, \dots, p\}$ et $j \in \{1, \dots, q\}$,

$$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a).$$

Exercice 14.3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f_1, f_2, f_3 trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = g(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et calculer sa dérivée.

L'application $f : t \mapsto (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et a pour dérivée l'application $t \mapsto (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$. Par composition, l'application $h = g \circ f$ est également de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et on a, pour tout $t \in I$:

$$h'(t) = f_1'(t)\frac{\partial g}{\partial x}(f(t)) + f_2'(t)\frac{\partial g}{\partial y}(f(t)) + f_3'(t)\frac{\partial g}{\partial z}(f(t)).$$

14.1.3 Fonction de classe $\mathscr{C}^k$

Ce qu'il faut savoir

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application de classe de U dans $\mathbb{R}^n$. Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et lorsque les p dérivées partielles de f sont elles mêmes de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. La dérivée partielle $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ est notée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Théorème de Schwarz : si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, et si $i, j \in \{1, \dots, p\}$, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

On définit par le même procédé la notion de fonction de classe $\mathscr{C}^k$.

Exercice 14.4

Centrale PC 2007

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

   Indication de la rédaction : calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ d'après les théorèmes sur les sommes, produits et quotients de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont donc continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   • Montrons tout d'abord que f est continue en $(0,0)$. Puisque, pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a $|x^2 - y^2| \leqslant x^2 + y^2$, on en déduit que $|f(x,y)| \leqslant |xy|$, et donc $f(x,y)$ tend vers $f(0,0) = 0$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$. Il en résulte que f est continue en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

   • Calculons les dérivées partielles premières.

   On remarque que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) = -f(y,x)$. Il en résulte que pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$. En dérivant par rapport à x on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = y\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$.

   Par ailleurs, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ est la dérivée en 0 de la fonction $x \mapsto f(x,0)$, et puisque cette fonction est nulle, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

   • Etudions la continuité des dérivées partielles premières. En utilisant l'inégalité $4uv \leqslant (u+v)^2$, valable pour tout couple (u,v) de réels, on obtient $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant |y|\left(\dfrac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} + \dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \leqslant 2|y|$, et il en résulte que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ tend vers $0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$, et finalement sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. Il en est de même de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, et cela prouve que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Le problème est visiblement en $(0,0)$. Remarquons que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$. Alors, comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)$ est la dérivée en 0 de la fonction $y \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$, on obtient $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$. De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ et on obtient cette fois $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$. On constate donc que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

   Il résulte alors du théorème de Schwarz que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 14.5

St-Cyr PC 2005

Soit $h :]0,\ 1[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On pose, pour $y > 0$, $f(x, y) = h\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition U de f.
2. Calculer les dérivées partielles premières puis secondes de f. Vérifier au passage le théorème de Schwarz.
3. Démontrer que f est solution sur U de l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \dfrac{x}{y^3}$ si et seulement si h vérifie l'équation différentielle $(1 - t^2)h''(t) - 2th'(t) = t$ sur $]0, 1[$.
4. Résoudre cette équation différentielle.

1. La fonction f est définie sur l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 < x < y\}$.
2. La fonction h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,\ 1[$ et la fonction $(x, y) \mapsto x/y$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U donc leur composée f est également de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. En calculant les dérivées partielles premières, on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y}h'\left(\dfrac{x}{y}\right)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}h'\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   Le calcul des dérivées partielles secondes donne
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{y^2}h''\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{y^2}h'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^3}h''\left(\frac{x}{y}\right)$$
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2}h'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^3}h''\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}h'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^4}h''\left(\frac{x}{y}\right)$$
   On vérifie ainsi, conformément au théorème de Schwarz, que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
3. On déduit du calcul précédent que pour tout $(x, y) \in U$,
   $$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{y^2 - x^2}{y^4}h''\left(\frac{x}{y}\right) - 2\frac{x}{y^3}h'\left(\frac{x}{y}\right)\\ &= \frac{1}{y^2}\left((1 - \frac{x^2}{y^2})h''\left(\frac{x}{y}\right) - 2\frac{x}{y}h'\left(\frac{x}{y}\right)\right).\end{aligned}$$
   Ainsi f vérifie l'équation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{x}{y^3}$ sur U si et seulement si h vérifie sur l'intervalle $]0,\ 1[$ l'équation différentielle $(1 - t^2)h''(t) - 2th'(t) = t$.

4. La fonction h' est solution de l'équation linéaire $(1-t^2)z' - 2tz = t$. La solution de l'équation homogène est de la forme $\dfrac{C}{1-t^2}$ (C est une constante). La fonction constante égale à $-1/2$ est solution particulière, donc $h'(t)$ est de la forme $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{C}{1-t^2}$, d'où $h(t) = -\dfrac{t}{2} + A\ln\dfrac{1+t}{1-t} + B$, où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 14.6

CCP PSI 2006

Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Soient $n \geqslant 2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(r)$ où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. On note $\Delta f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ le laplacien de f.

1. Montrer que $\Delta f(x) = g''(r) + \dfrac{n-1}{r} g'(r)$.
2. En déduire toutes les fonctions g telles que $\Delta f = 0$.

1. La racine carrée est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, donc par théorème de composition, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En dérivant deux fois par rapport à x_i, on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \dfrac{x_i}{r} g'(r)$.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) g'(r) + \frac{x_i^2}{r^2} g''(r) = \frac{r^2 - x_i^2}{r^3} g'(r) + \frac{x_i^2}{r^2} g''(r).$$
En sommant pour i variant de 1 à n, et sachant que $r^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, on a alors
$$\Delta f = \frac{n-1}{r} g'(r) + g''(r).$$
2. $\Delta f = 0$ si et seulement si g' est solution de l'équation linéaire du premier ordre $y' + \dfrac{n-1}{r} y = 0$, c'est-à-dire $g'(r) = \dfrac{A_1}{r^{n-1}}$ (avec $A_1 \in \mathbb{R}$), d'où finalement $g(r) = \dfrac{A}{r^{n-2}} + B$ si $n \geqslant 3$ et $g(r) = A\ln r + B$ si $n = 2$ (où A et B sont deux constantes réelles).

14.1.4 Difféomorphismes

Ce qu'il faut savoir

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^p$.

- On dit que φ est un difféomorphisme de U sur V lorsque φ est une bijection de U sur V, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.

- **Caractérisation des difféomorphismes :** soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit φ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^p$. Si φ est injective et si le jacobien de φ est non nul en chaque point de U, alors $V = \varphi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et φ est un difféomorphisme de U sur V.
- Si φ est un difféomorphisme de U sur V, alors pour tout $a \in U$, la matrice $J_\varphi(a)$ est inversible et $\left(J_\varphi(a)\right)^{-1} = J_{\varphi^{-1}}(\varphi(a))$.

Exercice 14.7

CCP PSI 2006

Montrer que $\varphi : (x, y, z) \mapsto \left(x + y + z, \dfrac{y+z}{x+y+z}, \dfrac{z}{y+z}\right)$ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de l'ouvert $U = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ x + y + z < 1\}$ sur $V =]0, 1[^3$. Déterminer φ^{-1}.

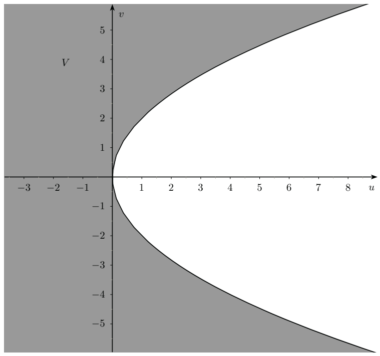
Pour $(x, y, z) \in U$, on pose $(u, v, w) = \varphi(x, y, z)$. On remarque que $(u, v, w) \in V$, et que $z = uvw$, d'où $uv = y + z$, d'où $y = uv - uvw = uv(1 - w)$, et enfin $x = u - (y + z) = u(1 - v)$.
L'application $\psi : V \to \mathbb{R}^3$ définie par $\psi(u, v, w) = (u(1 - v), uv(1 - w), uvw)$ est à valeurs dans U car $u(1 - v) + uv(1 - w) + uvw = u \in]0, 1[$ et vérifie par construction $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_U$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_V$, donc $\psi = \varphi^{-1}$. D'autre part, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V, donc φ est un difféomorphisme de U sur V.

Exercice 14.8

CCP PC 2007

1. Montrer que l'application $\phi : (x, y) \mapsto (xy, x + y)$ est un difféomorphisme de l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y > 0\}$ sur un ouvert V à préciser et à représenter.
2. Transformer l'équation aux dérivées partielles
$$(*)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 3(x - y)f(x, y) = 0$$
à l'aide du changement de variables : $u = xy,\ v = x + y$.
3. En déduire toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ vérifiant $(*)$.

1. Soit $(x, y) \in U$. On pose $(u, v) = \phi(x, y)$, de sorte que x et y sont les racines du trinôme $X^2 - vX + u$, dont le discriminant $v^2 - 4u$ est strictement positif. On pose $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ v^2 - 4u > 0\}$. Il s'agit de l'extérieur de la parabole d'équation $v^2 - 4u = 0$.



Soit $(u, v) \in V$. On note x et y les racines (distinctes) du trinôme précédent, x étant la plus grande, ce qui entraîne que $(u, v) = \phi(x, y)$. On en déduit que ϕ est une bijection de U sur V. Le jacobien de ϕ en (x, y) est égal à $\begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = y - x < 0$.

Il ne s'annule pas sur U, donc ϕ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de U sur V.

2. On pose $g = f \circ \phi^{-1}$, de sorte que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V si et seulement si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. On a alors $f(x, y) = g(xy, x + y)$. Par la formule de dérivation d'une composée, on obtient pour $(x, y) \in U$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y\frac{\partial g}{\partial u}(xy, x + y) + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x + y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x\frac{\partial g}{\partial u}(xy, x + y) + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x + y) \end{aligned}$$

L'équation $(*)$ équivaut à $(y - x)\dfrac{\partial g}{\partial u} + 3(x - y)g = 0$, d'où $\dfrac{\partial g}{\partial u} = 3g$.

3. On résout l'équation ci-dessus à v fixé : il existe un réel $A(v)$ tel que pour tout réel u tel que $(u, v) \in V$, on a $g(u, v) = A(v)e^{3u}$. Pour montrer que A est bien de classe $\mathscr{C}^1$, on écrit la relation précédente pour $u = -1$ (ce qui permet d'obtenir toutes les valeurs de v - voir dessin ci-dessus), ce qui donne, pour tout $v \in \mathbb{R}$, $g(-1, v) = A(v)e^{-3}$, c'est-à-dire $A(v) = g(-1, v)e^3$. La fonction A est donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que les solutions de $(*)$ sont les fonctions de la forme

$$(x, y) \mapsto A(x + y)e^{3xy} \text{ où } A \text{ décrit } \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\,.$$

14.1.5 Fonctions numériques de classe $\mathscr{C}^1$

Ce qu'il faut savoir

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$.

- Soit a un point de U, le vecteur $\operatorname{grad} f_a = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)$ est appelé **gradient** de f au point a.

- Un point a de U est appelé **point critique** de f lorsque le gradient de f au point a est nul.
- Si f présente un extremum (minimum ou maximum) local en un point a de l'ouvert U, alors a est un point critique de f. La réciproque est fausse (voir exercice 14.9).

Exercice 14.9

CCP PSI 2007

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^3$.

1. Existe-t-il des points pour lesquels $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$?
2. La fonction g possède-t-elle des extremums locaux ? (on calculera $g(x,x)$)

1. On a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2+6xy$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3x^2+3y^2$. La dérivée partielle $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ s'annule uniquement en $(0,0)$, et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$, donc $(0,0)$ est le seul point critique de g.
2. Si g présente un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique, donc ne peut être que $(0,0)$, or $g(0,0) = 0$ et $g(x,x) = 5x^3$, qui est du même signe que x, donc g n'a pas d'extremum local à l'origine, donc elle n'en a nulle part.

Exercice 14.10

Centrale PC 2006

Soit $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 16\}$. On pose pour $(x,y) \in K$,

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + x^2 - 3\,.$$

1. Justifier l'existence d'un minimum et d'un maximum de f sur K.
2. En quels points sont-ils atteints ?
3. Illustrer vos résultats avec un logiciel de calcul formel.

1. L'ensemble K est un disque fermé, donc une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. La fonction f est continue sur K, donc est bornée et atteint ses bornes.
2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le disque ouvert privé de l'origine, que l'on notera U. On cherche d'abord ses points critiques dans U :
   On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

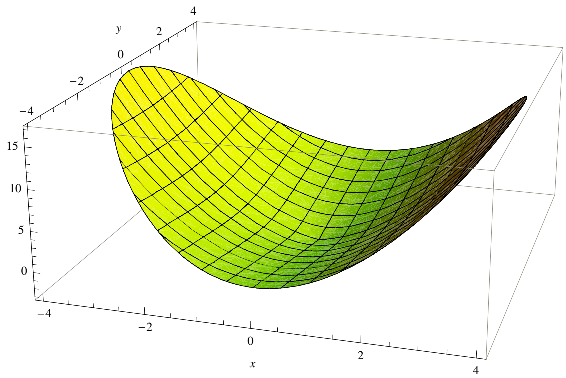
Si (x, y) est un point critique, alors $y = 0$ puis $\dfrac{x}{|x|} + 2x = 0$. Si $x > 0$, on obtient $1 + 2x = 0$ ce qui est impossible, et si $x < 0$ on obtient $-1 + 2x = 0$, ce qui est également impossible. Il n'y a aucun point critique dans U. Il en résulte que f atteint ses bornes en $(0, 0)$ ou sur le cercle frontière de K. Si $(x, y) \in K \setminus \{(0, 0)\}$, alors $f(x, y) > -3 = f(0, 0)$, donc le minimum absolu de f est atteint à l'origine, et il est strict.
Le maximum est atteint sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 16$, sur lequel on a $f(x, y) = 1 + x^2$. Le maximum est atteint lorsque $x = \pm 4$, donc $y = 0$, et il vaut 17.

3. On trace la surface à l'aide de Maple :

```
with(plots):
plot3d(sqrt(x^2+y^2)+x^2-3,x=-4..4,y=-4..4);
```

ou, avec Mathematica :

```
Plot3D[Sqrt[x^2+y^2]+x^2-3,{x,-4,4},{y,-4,4},
RegionPlot->Function[{x,y,z},x^2+y^2<=16]]
```



14.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 14.11

CCP PC 2007

On pose $f(x, y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{x^n + y^n}$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |y| > |x|\}$.
2. Justifier que D est un ouvert.
3. Pour $t \in]-1,\ 1[$, on pose $\varphi(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{1 + t^n}$. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,\ 1[$.

4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D. Exprimer ses dérivées partielles à l'aide de φ'.

1. On pose $u_n(x, y) = \dfrac{x^n}{x^n + y^n}$.
   - Si $x = y$, alors $u_n(x, y) = 1/2$ donc la série $\sum u_n(x, y)$ diverge.
   - Si $x = -y$, alors $u_n(x, y)$ n'est pas défini pour n impair.
   - Si $|x| > |y|$, alors la suite $u_n(x, y)$ tend vers 1, et donc la série $\sum u_n(x, y)$ diverge.
   - Si $|x| < |y|$, alors $|u_n(x, y)| \underset{n\to\infty}{\sim} |\dfrac{x}{y}|^n$, la série $\sum u_n(x, y)$ converge absolument donc converge. On en déduit que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| > |x|\}$.
2. L'ensemble D est symétrique par rapport aux deux axes Ox et Oy. On va donc se limiter à montrer que $D \cap]\,0, +\infty\,[^2$ est un ouvert.
   Soit $(x_0, y_0) \in D$, avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. La distance de ce point à la droite $y = x$ est égale à $r_0 = \dfrac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}}$. On en déduit que le disque de centre (x_0, y_0) et de rayon r_0 est inclus dans D, donc $D \cap]\,0, +\infty\,[^2$ est un ouvert, et D également.
3. On pose, pour $t \in]-1, 1\,[$, $f_n(t) = \dfrac{t^n}{1 + t^n}$. La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f_n'(t) = \dfrac{nt^{n-1}}{(1 + t^n)^2}$. Soit $a \in]\,0, 1\,[$. On a $\forall t \in [-a, a\,]$, $|f_n'(t)| \leqslant \dfrac{na^{n-1}}{(1 - a^n)^2} = \alpha_n$.
   Or $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, donc la règle de d'Alembert entraîne la convergence de la série $\sum \alpha_n$, et donc la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a, a\,]$. Comme la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1, 1\,[$ (car $|t| < 1$), on en déduit par théorème sur les séries de fonctions que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1\,[$ et $\varphi'(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{(1 + t^n)^2}$.
4. On observe que pour tout $(x, y) \in D$, $f(x, y) = \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D, ainsi que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{1}{y}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{x}{y^2}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Exercice 14.12

Centrale PSI 2005

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : E \to E$ définie par $f(M) = M^3$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa différentielle.

Les coefficients de M^3 sont des polynômes par rapport aux coefficients de M, donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur E. Pour calculer sa différentielle au point M, plutôt que de chercher les dérivées partielles de f par rapport aux n^2 variables de M, on va déterminer un endomorphisme ℓ de E tel que pour tout H au voisinage de 0, on a $f(M+H) = f(M) + \ell(H) + o(\|H\|)$. On aura alors $\ell = df(M)$.
On a $(M+H)^3 = M^3 + M^2H + MHM + HM^2 + H^2M + HMH + MH^2 + H^3$.
On remarque que l'application $H \mapsto M^2H + MHM + HM^2$ est linéaire.
On munit E d'une norme subordonnée, pour laquelle $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$ pour toutes matrices A et B. On obtient alors

$$\|H^2M + HMH + MH^2 + H^3\| \leqslant \big(3\|M\| + \|H\|\big)\ \|H\|^2.$$

Cette expression est négligeable devant $\|H\|$. Il en résulte que

$$\forall M \in E,\ \forall H \in E,\ df(M)(H) = M^2H + MHM + HM^2\ .$$

Exercice 14.13

CCP PC 2007

Soit $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ et a un nombre réel donné. Pour $f \in \mathscr{E}$, on pose $\Omega_a(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + a\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
1) Démontrer que Ω_a est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.
2) Soit f dans $\mathscr{E}$. Etablir l'existence d'une unique application F de $\mathscr{E}$ vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = F(x, y-ax)$. Exprimer les dérivées partielles premières de F en fonction de celles de f. En déduire le noyau de Ω_a.
3) Déterminer le noyau de $\Omega_a \circ \Omega_a$.

1) Quel que soit $f \in \mathscr{E}$, les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathscr{E}$, donc $\Omega_a(f)$ également, et Ω_a est une application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$. Alors, en utilisant la linéarité des dérivations partielles, on vérifie que, quels que soient λ dans $\mathbb{R}$, f et g dans $\mathscr{E}$, on a $\Omega_a(\lambda f + g) = \lambda\Omega_a(f) + \Omega_a(g)$, ce qui montre que Ω_a est une application linéaire.

2) • Considérons l'application linéaire φ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même qui à (x,y) associe $(x, y-ax)$. Si (u,v) appartient à $\mathbb{R}^2$, alors l'équation $\varphi(x,y) = (u,v)$ a comme unique solution $(x,y) = (u, au+v)$, et donc φ est bijective. Posons $\psi = \varphi^{-1}$. La propriété $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = F(x, y-ax)$ est équivalente à $f = F \circ \varphi$ puis à $F = f \circ \psi$. Il existe donc bien une application F et une seule vérifiant la propriété demandée.
• L'application ψ étant linéaire est une application $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Alors la composée $f \circ \psi$ est une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. De plus, on obtient les dérivées partielles de F :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \circ \psi\, \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \circ \psi\, \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \circ \psi + a\frac{\partial f}{\partial y} \circ \psi.$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \circ \psi \, \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \circ \psi \, \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y} \circ \psi.$$

• D'après ce qui précède, $\Omega_a(f) \circ \psi = \dfrac{\partial F}{\partial u}$. Dire que f appartient à $\operatorname{Ker} \Omega_a$ équivaut donc à dire que $\dfrac{\partial F}{\partial u} = 0$, c'est-à-dire à $F(u, v) = A(v)$, où A appartient à $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Conclusion : $\operatorname{Ker} \Omega_a = \{(x, y) \mapsto A(y - ax) \mid A \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$.

3) De la relation $\Omega_a(f) \circ \psi = \dfrac{\partial F}{\partial u}$ on déduit $\Omega_a^2(f) \circ \psi = \dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}$. Donc f appartient à $\operatorname{Ker} \Omega_a^2$ si et seulement si $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0$, c'est-à-dire $F(u, v) = B(v)u + C(v)$ où B et C sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Conclusion : $\operatorname{Ker} \Omega_a^2 = \{(x, y) \mapsto xB(y - ax) + C(y - ax) \mid (B, C) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2\}$.

Exercice 14.14

TPE PC 2005

Soient $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ u - v > 0\}$ et $\phi : U \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(u, v) = (u^2 + v^2, u + v)$. Montrer que ϕ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de U sur un ouvert V à déterminer.

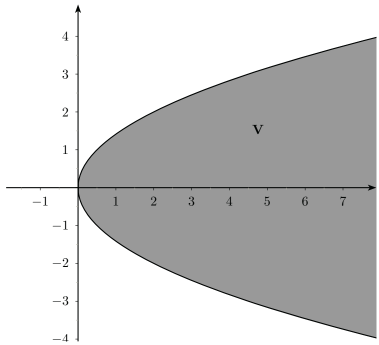
L'application ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U et son jacobien est égal à $\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, c'est-à-dire $2(u - v)$ qui est strictement positif sur U.

Soient $(u, v) \in U$ et $(u', v') \in U$ tels que $\phi(u, v) = \phi(u', v')$. Alors $u - u' = v' - v$ et $u^2 - u'^2 = v'^2 - v^2$. Si $u \neq u'$, alors $v \neq v'$, donc on obtient en divisant la deuxième relation par la première que $u + u' = v + v'$. Il reste à ajouter à la première pour obtenir que $u = v'$, ce qui entraine $v = u'$, mais $u > v$, d'où $v' > u'$, ce qui est absurde. Finalement, $(u, v) = (u', v')$, d'où ϕ est injective. Par caractérisation des difféomorphismes, on en déduit que ϕ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de U sur $V = \phi(U) = \{(u^2 + v^2, u + v),\ u - v > 0\}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le couple (x, y) appartient à V si et seulement si il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u > v$ et $\begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = u + v \end{cases}$

En élevant au carré la deuxième et en soustrayant, on obtient le système équivalent :

$\begin{cases} uv = \dfrac{1}{2}(y^2 - x) \\ u + v = y \end{cases}$, donc u et v sont racines du trinôme $X^2 - yX + \dfrac{1}{2}(y^2 - x)$. La condition cherchée est que ce trinôme admette deux racines réelles distinctes (u sera la plus grande), donc que son discriminant soit strictement positif. On en déduit que $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - y^2 > 0\}$. Il s'agit de l'intérieur de la parabole d'équation $y^2 = 2x$, voir dessin ci-après.



Exercice 14.15

Mines-Ponts PSI 2005

Soient $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et g la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $g(x,y) = f\left(\dfrac{x^2+y^2}{y}\right)$. Déterminer les fonctions f telles que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par théorèmes généraux. On dérive :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{y} f'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{y^2} f'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{4x^2}{y^2} f''\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right) + \frac{2}{y} f'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \left(\frac{y^2-x^2}{y^2}\right)^2 f''\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right) + \frac{2x^2}{y^3} f'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)$$

On pose $t = \dfrac{x^2+y^2}{y}$, qui décrit $]\,0, +\infty\,[$ quand (x,y) décrit $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

L'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ équivaut à $\forall t > 0,\ t f''(t) + 2 f'(t) = 0$.

La fonction f' est solution d'une équation linéaire du premier ordre, qui se résout en $f'(t) = A_1/t^2$. En intégrant, on en déduit que les solutions du problème sont les fonctions f de la forme $t \mapsto \dfrac{A}{t} + B$, où A et B sont des constantes réelles.

Exercice 14.16

CCP PC 2007

Soit ϕ définie sur $U =]\,0, +\infty\,[\times \mathbb{R}$ par $\phi(x,y) = (x, y/x)$.

1. Montrer que ϕ définit un $\mathscr{C}^2$ difféomorphisme de U sur U.

2. Soit $f \in \mathscr{C}^2(U, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction $g : (u, v) \mapsto g(u, v)$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur U telle que $f = g \circ \phi$.
3. Démontrer que, pour tout $(u, v) \in U$, on a :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, uv) + 2v\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, uv) + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, uv) .$$

4. Trouver les fonctions $f \in \mathscr{C}^2(U, \mathbb{R})$ vérifiant : $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

1. Soit $\psi : U \to U$ défini par $\psi(u, v) = (u, uv)$. Les fonctions ϕ et ψ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, et $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi = \mathrm{Id}_U$, donc ϕ est un $\mathscr{C}^2$ difféomorphisme de U sur lui-même, dont le difféomorphisme réciproque est ψ.
2. La relation $f = g \circ \phi$ est équivalente à $g = f \circ \psi$, et si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, alors g également en tant que composée de deux applications de classe $\mathscr{C}^2$.
3. D'après la question précédente, $g(u, v) = f(u, uv)$ pour tout $(u, v) \in U^2$.
   On dérive cette relation par rapport à u : $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u, uv)+v\dfrac{\partial f}{\partial y}(u, uv)$. On recommence :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, uv) + v\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u, uv) + v\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, uv) + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, uv)\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, uv) + 2v\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, uv) + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, uv)\end{aligned}$$

   par théorème de Schwarz.
4. En multipliant la relation précédente par u^2, on obtient en posant $(x, y) = \psi(u, v)$, l'égalité $u^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
   La fonction f est solution de l'équation proposée si et seulement si la fonction $g = f \circ \psi$ satisfait à la relation $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$ dans U, ce qui équivaut à l'existence d'une fonction A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (u, v) \in U,\ \dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v) = A(v)$.
   En intégrant, cela revient à l'existence de deux fonctions A et B de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (u, v) \in U,\ g(u, v) = A(v)u + B(v)$.
   En particulier, $g(1, v) = A(v) + B(v)$ et $g(2, v) = 2A(v) + B(v)$ ce qui donne $A(v) = g(2, v) - g(1, v)$ et $B(v) = 2g(1, v) - g(2, v)$. On en déduit que A et B sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Finalement, les solutions sont de la forme

$$f(x, y) = A(y/x)x + B(y/x) .$$

   où A et B décrivent à $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   N.B. On aurait également pu résoudre cette équation en passant en polaires, c'est-à-dire à l'aide du changement de variables $(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$.

Exercice 14.17

CCP PC 2007

Soient α un réel et E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha\ .$$

1. Montrer que la fonction $\phi : (x, y) \mapsto (2x + y, 2x - y)$ est un $\mathscr{C}^2$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que f appartient à E si et seulement si la fonction $g = f \circ \phi^{-1}$ vérifie $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \dfrac{\alpha}{16}$. En déduire l'ensemble E.
3. Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $a > 0$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ et a pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \psi(at + y)\,dt + \lambda\left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16}\right)$ appartienne à E quelle que soit la fonction ψ.

1. L'application ϕ est linéaire de déterminant égal à $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$ donc est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, donc un $\mathscr{C}^2$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.
2. La relation $g = f \circ \phi^{-1}$ équivaut à $f = g \circ \phi$, donc f est de classe $\mathscr{C}^2$ si et seulement si g l'est. On pose $f(x, y) = g(2x + y, 2x - y)$, et on écrit $(u = 2x + y,\ v = 2x - y)$. Les dérivées partielles de f sont évaluées en (x, y) et celles de g en (u, v), ce qu'on ne précisera pas afin d'alléger les notations.
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\dfrac{\partial g}{\partial u} + 2\dfrac{\partial g}{\partial v}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u} - \dfrac{\partial g}{\partial v}.$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}) + 2(2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}) = 4\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 8\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 4\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$
De même, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$. Ainsi, $f \in E$ équivaut à $16\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \alpha$,
c'est-à-dire qu'il existe $A_1 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\alpha}{16}u + A_1(v)$,
ce qui équivaut à l'existence de deux fonctions A et B dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u, v) = \dfrac{\alpha}{16}uv + A(u) + B(v)$. Finalement,
$$E = \{(x, y) \mapsto \frac{\alpha}{16}(4x^2 - y^2) + A(2x + y) + B(2x - y),\ A, B \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\}\ .$$
3. Le changement de variable $u = at + y$ donne
$$f(x, y) = \frac{1}{a}\int_{-ax+y}^{ax+y} \psi(u)\,du + \lambda\left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16}\right)\ .$$

On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ (intégrale fonction de ses bornes), et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \psi(ax+y)+\psi(-ax+y)+\lambda\frac{x}{2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{a}\psi(ax+y)-\frac{1}{a}\psi(-ax+y)-\lambda\frac{y}{8}\end{aligned}$$

Comme ψ est de classe $\mathscr{C}^1$, f est aussi de classe $\mathscr{C}^2$, et en dérivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= a\psi'(ax+y)-a\psi'(-ax+y)+\frac{\lambda}{2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{1}{a}\psi'(ax+y)-\frac{1}{a}\psi'(-ax+y)-\frac{\lambda}{8}\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\left(a-\frac{4}{a}\right)\big(\psi'(ax+y)-\psi'(-ax+y)\big)+\lambda.$$

On en déduit que $f \in E$ pour tout choix de ψ si et seulement si $\lambda=\alpha$ et $a-\dfrac{4}{a}=0$, d'où $a=2$.

Exercice 14.18

CCP PC 2007

Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on pose $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=|\sin(x+iy)|^2$. Soit $D'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

1) Montrer que f admet sur D' un maximum et un minimum. Déterminer la valeur du minimum de f sur D'.

2) Montrer que pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a l'égalité

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}(2y)-\cos(2x)).$$

3) Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$.

3.a Déterminer les points critiques de f sur D.

2.b Montrer qu'il existe $\theta_0\in\mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\max_{(x,y)\in D'} f(x,y)=f(\cos\theta_0,\sin\theta_0)$.

4) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)$.

4.a Vérifier que pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, on a $\operatorname{sh} t\geqslant t$ et $\sin t\leqslant t$.

4.b Montrer que g est croissante sur $[0,\ \pi/2]$.

4.c En déduire la valeur du maximum de f sur D'.

1) Comme f est une fonction continue sur D' qui est un ensemble fermé borné, alors f est bornée sur D' et y atteint ses bornes. De plus, pour tout couple $(x,y)\in D'$, on a $f(x,y)\geqslant 0=f(0,0)$. Donc f atteint son minimum en $(0,0)$ et ce minimum est nul.

2) On a $\sin(x+iy) = \dfrac{1}{2i}(e^{ix-y} - e^{-ix+y}) = \dfrac{1}{2i}((e^{-y} - e^{y})\cos x + i(e^{-y} + e^{y})\sin x)$.
Donc $f(x, y) = \dfrac{1}{4}((e^{-y} - e^{y})^2 \cos^2 x + (e^{-y} + e^{y})^2 \sin^2 x)$. En développant, il vient
$f(x, y) = \dfrac{1}{4}(e^{-2y} + e^{2y} - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}(2y) - \cos(2x))$.

3.a On cherche les points (x, y) de D tels que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, c'est-à-dire $\sin(2x) = \mathrm{sh}(2y) = 0$, ou encore $x = k\pi/2$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $y = 0$. Comme $\pi/2 > 1$, la seule solution dans D est le point $(0, 0)$.

3.b Si f atteignait son maximum en un point (x_0, y_0) de D, ce serait un point critique de f. Mais le seul point critique de f dans D est le point $(0, 0)$ où f atteint son minimum. Il en résulte que le maximum est atteint au bord de D', donc sur le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Il existe alors θ_0 tel que $(x_0, y_0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$.

4.a On peut démontrer les inégalités proposées de diverses manières : en étudiant les variations des fonctions $t \mapsto \mathrm{sh}\, t - t$ et $t \mapsto t - \sin t$, en utilisant le théorème des accroissements finis pour les fonctions sinus et sinus hyperbolique, ou encore en utilisant la convexité.

4.b La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(\theta) = \cos\theta\, \mathrm{sh}(2\sin\theta) - \sin\theta \sin(2\cos\theta)$. Sur $[\,0,\ \pi/2\,]$, on a $\sin\theta \geqslant 0$ et donc $\mathrm{sh}(2\sin\theta) \geqslant 2\sin\theta$. On a également $\cos\theta \geqslant 0$, donc $\sin(2\cos\theta) \leqslant 2\cos\theta$.

On en déduit que $g'(\theta) \geqslant 2\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta = 0$. La fonction g est donc croissante sur $[\,0,\ \pi/2\,]$

4.c La fonction g est $2\pi-$périodique et paire. De plus $g(\pi - \theta) = g(\theta)$. Il en résulte que $\displaystyle\max_{(x,y)\in D'} f(x, y) = \max_{\theta\in\mathbb{R}} g(\theta) = \max_{\theta\in[\,0,\ \pi/2\,]} g(\theta) = g(\pi/2) = \frac{\mathrm{ch}\, 2 - 1}{2}$.

Exercice 14.19

CCP PC 2005, Centrale PC 2005

1) Montrer que la fonction φ définie par $\varphi(t) = \dfrac{\ln t}{t - 1}$ se prolonge en une fonction $\tilde{\varphi}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0,\ +\infty\,[$ et donner les valeurs de $\tilde{\varphi}(1)$ et $\tilde{\varphi}'(1)$.

2) Pour x et y dans $\mathbb{R}_+^*$, on pose $I(x, y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + xt)(1 + yt)}$.

2.a Montrer que $I(x, y)$ est une intégrale convergente.

2.b Pour $x > 0$, calculer $I(x, x)$.

2.c Pour x et y distincts dans $\mathbb{R}_+^*$, montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{(1 + xt)(1 + yt)} = \dfrac{a}{1 + xt} + \dfrac{b}{1 + yt}$. En déduire la valeur de $I(x, y)$ en fonction de x et de y.

3) Démontrer que la fonction I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Pour $x > 0$ et $y > 0$, quelle est la valeur de $\dfrac{\partial I}{\partial x}(x, y)$?

1) On remarque tout d'abord que, pour $t \neq 1$, $\varphi(t)$ est le taux de variation de la fonction $f : t \mapsto \ln t$ entre 1 et t et a pour limite $f'(1) = 1$ quand t tend vers 1. Donc on peut prolonger φ en une fonction $\tilde{\varphi}$ continue en 1. On aura alors $\tilde{\varphi}(1) = 1$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Etudions $\tilde{\varphi}$ dans l'ensemble $]0, 2[$. L'application $u \mapsto 1 - u$ étant une bijection de $]-1, 1[$ sur $]0, 2[$, on peut considérer la fonction ψ définie sur $]-1, 1[$ par $\psi(u) = \tilde{\varphi}(1 - u)$. En utilisant le développement en série entière dans l'intervalle $]-1, 1[$ de la fonction $u \mapsto -\ln(1 - u)$. Pour $u \in]-1, 1[$, on a $-\ln(1 - u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$, et donc $\psi(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n+1}$ lorsque u est non nul, mais aussi pour $u = 0$ car $\psi(0) = 1$. Il en résulte que ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$, et donc que $\tilde{\varphi} : t \mapsto \psi(1 - t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, 2[$.
Finalement $\tilde{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. De plus $\tilde{\varphi}'(1) = -\psi'(0) = -1/2$.

2.a Pour x et y dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{1}{(1 + xt)(1 + yt)} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{xyt^2} > 0$, et comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, il en résulte que l'intégrale $I(x, y)$ converge.

2.b On obtient $I(x, x) = \displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{dt}{(1 + xt)^2} = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{-1}{x(1 + xt)}\right]_0^A = \frac{1}{x}$.

2.c Soient x et y distincts dans $\mathbb{R}_+^*$. Par réduction au même dénominateur, on obtient que, pour tout $t \geqslant 0$, on a $\dfrac{1}{(1 + xt)(1 + yt)} = \dfrac{x}{x - y}\,\dfrac{1}{1 + xt} - \dfrac{y}{x - y}\,\dfrac{1}{1 + yt}$. Donc

$$\begin{aligned}
I(x, y) &= \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{dt}{(1 + xt)(1 + yt)} \\
&= \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{1}{x - y} \ln(1 + xt) - \frac{1}{x - y} \ln(1 + yt)\right]_0^A \\
&= \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{x - y} \ln \frac{1 + Ax}{1 + Ay} = \frac{1}{x - y} \ln \frac{x}{y} = \frac{\ln x - \ln y}{x - y}.
\end{aligned}$$

3) On peut exprimer $I(x, y)$ en fonction de $\tilde{\varphi}$. En effet, lorsque $x \neq y$, on a $I(x, y) = \dfrac{1}{y}\,\tilde{\varphi}\left(\dfrac{x}{y}\right)$, et cette formule est encore vraie lorsque $x = y$ puisque $\tilde{\varphi}(1) = 1$. Donc I est obtenue par composition et produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Elle est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et l'on obtient

$$\frac{\partial I}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y^2}\,\tilde{\varphi}'\left(\frac{x}{y}\right).$$

On peut expliciter le résultat obtenu :

$$\frac{\partial I}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(x - y)\frac{1}{x} - (\ln x - \ln y)}{(x - y)^2} & \text{si } x \neq y \\ -\dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x = y \end{cases} .$$

14.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 14.20

Mines-Ponts PSI 2005 K

Soient $k \in]0, 1[$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leqslant k$. Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$. Montrer que g est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et son jacobien est égal à $\begin{vmatrix} 1 & f'(y) \\ f'(x) & 1 \end{vmatrix}$, qui est égal à $1 - f'(x)f'(y)$. Cette expression est supérieure ou égale à $1 - k^2$, donc ne s'annule pas.

Montrons que g est bijective. Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, on cherche à résoudre le système $\begin{cases} X = x + f(y) \\ Y = y + f(x) \end{cases}$, dont les inconnues sont x et y.

Ce système est équivalent au système $\begin{cases} x + f(Y - f(x)) = X \\ y = Y - f(x) \end{cases}$

Pour montrer que la première équation admet une solution unique, on étudie la fonction $\varphi : t \mapsto t + f(Y - f(t))$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(t) = 1 - f'(t)f'(Y - f(t))$, donc $\varphi'(t) \geqslant 1 - k^2 > 0$ pour tout réel t, donc φ est strictement croissante.

Pour tout $t > 0$, on intègre cette inégalité de 0 à t, ce qui donne $\varphi(t) - \varphi(0) \geqslant (1 - k^2)t$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$. Pour tout $t < 0$, on intègre de t à 0, ce qui donne $\varphi(0) - \varphi(t) \geqslant -(1 - k^2)t$, donc $\lim\limits_{t \to -\infty} \varphi(t) = -\infty$. En conséquence, φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, donc il existe un unique réel x tel que $\varphi(x) = X$. Le système proposé admet une unique solution, donc g est bijective, c'est donc un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 14.21

Centrale PC 2007 K

• Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, et $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t, x)\, dt$. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer F' en fonction de g et de ses dérivées.

Indication de la rédaction : s'intéresser à la fonction $(x, y) \mapsto \int_0^y g(t, x)\, dt$.

- *Question de la rédaction* : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt$. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, que $F^{(k)}(0) = 0$ pour tout k compris entre 0 et $n-1$, et que $F^{(n)} = f$.

- On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $G(x, y) = \int_0^y g(t, x)\, dt$.

– Soit $a > 0$. La fonction g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc $\frac{\partial g}{\partial x}$ est bornée sur le compact $[-a, a]^2$, donc $\exists M > 0$, $\forall (t, x) \in [-a, a]^2$, $|\frac{\partial g}{\partial x}(t, x)| \leqslant M$. La constante M est intégrable sur $[0, y]$, donc par théorème sur les intégrales à paramètre (avec hypothèses de domination locale), G admet une dérivée partielle par rapport à x sur tout pavé $[-a, a]^2$ donc sur $\mathbb{R}^2$, et $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \int_0^y \frac{\partial g}{\partial x}(t, x)\, dt$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$.
– En tant qu'intégrale fonction de sa borne supérieure, G admet une dérivée partielle par rapport à y et $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = g(y, x)$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$. Finalement, on a bien montré que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
– Étant donné que $F(x) = G(x, x)$, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $F'(x) = \frac{\partial G}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial G}{\partial y}(x, x) = g(x, x) + \int_0^x \frac{\partial g}{\partial x}(t, x)\, dt$.

- On considère la fonction $g : (t, x) \mapsto f(t)\frac{(x-t)^k}{k!}$, où $k \in \mathbb{N}^*$. Cette fonction est continue et admet une dérivée partielle par rapport à x, égale à $f(t)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$, également continue sur $\mathbb{R}^2$. L'existence de la dérivée partielle de g par rapport à la variable t n'intervient pas dans la première question, donc on peut appliquer le résultat qui précède, et on obtient que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et $g'(x) = \int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\, dt$. En particulier, $g'(0) = 0$. En itérant le processus à partir de $k = n-1$ et jusqu'à $k = 1$, on en déduit que la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$ et que $F^{(p)}(x) = \int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{n-p-1}}{(n-p-1)!}\, dt$ pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$. En particulier, $F^{(n-1)}(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, donc F est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $F^{(n)} = f$.

Finalement, on a trouvé une expression à l'aide d'une seule intégrale de l'unique primitive $n^{\text{ième}}$ de f dont toutes les dérivées d'ordre $\leqslant n-1$ s'annulent en 0, ce qu'on pouvait également obtenir en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à cette fonction.

Exercice 14.22

Centrale PSI 2005 K

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $f(0) = 0$. On suppose $df(0)$ diagonalisable sur $\mathbb{R}$ à valeurs propres dans $]-1, 1[$.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in [0, 1[$ et une norme $\|\,.\,\|$ sur $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|df(0)(x)\| \leqslant \lambda\|x\|\,.$$

2. Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in V$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = x$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} = f(x_k)$ converge vers 0.

1. Soit $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de vecteurs propres de $df(0)$. On a donc $df(0)(\varepsilon_j) = \lambda_j \varepsilon_j$, avec $\lambda_j \in]-1, 1[$ pour tout $j \in [\![1\,, n]\!]$. On pose $\lambda = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |\lambda_j|$, on a $\lambda \in [0, 1[$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, il se décompose sous la forme $\sum_{j=1}^{n} u_j\varepsilon_j$. On pose alors $\|x\| = \sup_{1\leqslant j\leqslant n} |u_j|$. D'après le cours, on obtient ainsi une norme sur $\mathbb{R}^n$ (norme infinie dans la base $\mathscr{B}$). Avec les mêmes notations, on obtient $df(0)(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j\lambda_j\varepsilon_j$, d'où $\|df(0)(x)\| = \sup_{1\leqslant j\leqslant n} |u_j\lambda_j| \leqslant \lambda\|x\|$.

2. On écrit la différentielle de f à l'origine : il existe un voisinage W de 0 tel que $\forall x \in W,\ f(x) = df(0)(x) + \|x\|\varepsilon(x)$, où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

   Il existe un réel $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset W$ et $\forall x \in B(0, r),\ \|\varepsilon(x)\| \leqslant \dfrac{1-\lambda}{2}$.

   On pose $V = B(0, r)$, de sorte que $\forall x \in V,\ \|f(x)\| \leqslant \|df(0)(x)\| + \|x\|\dfrac{1-\lambda}{2}$.

   D'après la question 1, $\|f(x)\| \leqslant \dfrac{1+\lambda}{2}\|x\| \leqslant \|x\|$. Par conséquent, $\|f(x)\| < r$, donc $f(x) \in V$. Le voisinage V est stable par f. On en déduit par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ x_k \in V$ et $\|x_k\| \leqslant \dfrac{1+\lambda}{2}\|x_{k-1}\| \leqslant \left(\dfrac{1+\lambda}{2}\right)^k \|x_0\|$.

   Or $0 < \dfrac{1+\lambda}{2} < 1$, donc la suite (x_k) converge vers 0.

Exercice 14.23

Centrale PSI 2007 K

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{2t}}\, ds\ .$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et qu'elle vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Soit $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t,s) = g(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{2t}}$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^3$ et admet des dérivées partielles à tout ordre par rapport aux variables x et t, également continues sur $\mathbb{R}^3$. On a $\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t,s) = \dfrac{(x-s)^2}{2t^2} h(x,t,s)$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t,s) = -\dfrac{x-s}{t} h(x,t,s)$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t,s) = \left(-\dfrac{1}{t} + \dfrac{(x-s)^2}{t^2}\right) h(x,t,s)$.

On note M un majorant de $|g(s)|$ sur $\mathbb{R}$. Soient a, b, c trois réels strictement positifs tels que $b < c$. On pose $P = [-a,\ a] \times [b,\ c] \times \mathbb{R}$. Soit $(x,t,s) \in P$.

Soit $s \geqslant a$. On a $s - x \geqslant s - a \geqslant 0$, donc $e^{-\frac{(x-s)^2}{2t}} \leqslant e^{-\frac{(s-a)^2}{2c}}$.

Soit $s \leqslant -a$. On a $x - s \geqslant -a - s \geqslant 0$, donc $e^{-\frac{(x-s)^2}{2t}} \leqslant e^{-\frac{(s+a)^2}{2c}}$.

Soit $s \in [-a,\ a]$. On a $e^{-\frac{(x-s)^2}{2t}} \leqslant 1$.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\varphi(s) = \begin{cases} e^{-\frac{(s+a)^2}{2c}} \text{ si } s \leqslant -a \\ 1 \text{ si } -a \leqslant s \leqslant a \\ e^{-\frac{(s-a)^2}{2c}} \text{ si } s \geqslant a \end{cases}$

La fonction φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, car négligeable devant s^{-2} au voisinage de $\pm\infty$. De plus $\forall (x,t,s) \in P,\ |h(x,t,s)| \leqslant M\varphi(s)$.

On pose $f_1(x,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,t,s)\, ds$. D'après un théorème sur les intégrables à paramètre (avec hypothèses de domination locale), f_1 est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

De même, $|x - s| \leqslant |s| + |x| \leqslant |s| + a$, donc pour (x,t,s) appartenant à P, on a :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial t}(x,t,s)\right| \leqslant \frac{(|s|+a)^2}{2b^2} M\varphi(s) = \varphi_1(s)$$

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t,s)\right| \leqslant \frac{|s|+a}{b} M\varphi(s) = \varphi_2(s)$$

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t,s)\right| \leqslant \left(\frac{1}{b} + \frac{(|s|+a)^2}{b^2}\right) M\varphi(s) = \varphi_3(s)$$

Les fonctions $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ (négligeables à l'infini devant s^{-2}), donc on dispose des hypothèses de domination locale pour appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre. Le principe est le même pour les autres dérivées partielles secondes, on en déduit donc que f_1 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, et qu'on peut dériver "sous le signe intégral". Comme la fonction racine carrée est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on conclut que f est également de classe $\mathscr{C}^2$. En calculant les dérivées partielles, on obtient :

$$\sqrt{t}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + \frac{1}{2\sqrt{t}} f(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{t}\, f)(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-s)^2}{2t^2} h(x,t,s)\, ds\ .$$

$$\sqrt{t}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{(x-s)^2}{t^2} - \frac{1}{t}\right) h(x,t,s)\, ds\ .$$

d'où

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{(x-t)^2}{2t^2\sqrt{t}} - \frac{1}{2t\sqrt{t}} - \frac{(x-s)^2}{2\sqrt{t}\, t^2} + \frac{1}{2\sqrt{t}\, t}\right) h(x,t,s)\, ds = 0\ .$$

La fonction f est bien une solution sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ de l'équation de la chaleur à une dimension.

Exercice 14.24

Centrale PC 2005 K

Soient $a \in]\,0,\ 1\,[$ et f définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x^2 + 2axy + y^2) \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\ .$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et donner ses points critiques.
2. Montrer que $(0,0)$ est un extremum local. Est-ce un minimum ou un maximum ? Est-il global ?
3. Montrer qu'on peut ramener l'étude des quatre autres points critiques à l'étude de deux d'entre eux seulement.
4. Etude du point $(1,1)$.
5. Etude du point $(1,-1)$.

1. Les fonctions $(x,y) \mapsto x^2 + 2axy + y^2$ et $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et l'exponentielle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc par théorèmes généraux, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. En dérivant par rapport à x et y, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x + 2ay - x(x^2 + 2axy + y^2)) \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2ax + 2y - y(x^2 + 2axy + y^2)) \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right).$$

Les points critiques vérifient le système $\begin{cases} x(x^2+2axy+y^2) = 2(x+ay) \\ y(x^2+2axy+y^2) = 2(ax+y) \end{cases}$

On remarque que x est nul si et seulement si y est nul.

Si x et y sont non nuls, alors $x^2 + 2axy + y^2 = (x + ay)^2 + (1 - a^2)y^2 > 0$. En divisant les deux équations, on obtient $y(x + ay) = x(ax + y)$, d'où $x^2 = y^2$.
Si $x = y$, alors $2x^3(a + 1) = 2x(a + 1)$, d'où $x = \pm 1$.
Si $x = -y$, alors $2x^3(1 - a) = 2x(1 - a)$, d'où $x = \pm 1$.
En vérifiant dans le système, on obtient finalement les 5 points critiques suivants :

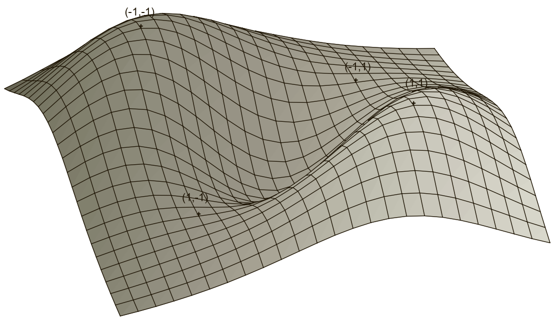
$$(0, 0),\ (1, 1),\ (-1, -1),\ (1, -1),\ (-1, 1)\,.$$

On visualise la surface d'équation $z = f(x, y)$, ce qui permet de se faire une idée géométrique de la nature des points critiques précédents. On utilise pour cela les commandes suivantes avec Maple :

```
with(plots) :
plot3d((x^2+x*y+y^2)*exp(-x^2/2-y^2/2),x=-2..2,y=-2..2);
```

ou, avec Mathematica :

```
Plot3D[(x^2+x*y+y^2)*Exp[-(x^2+y^2)/2],{x,-2,2},{y,-2,2}]
```



2. On sait que $x^2 + 2axy + y^2 > 0$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, or $f(0, 0) = 0$, donc f présente un minimum absolu strict en $(0, 0)$.
3. La fonction f est paire, c'est-à-dire $f(-x, -y) = f(x, y)$, ce qui permet de limiter l'étude des points critiques à $(1, 1)$ et $(-1, 1)$.
4. Il semble graphiquement y avoir un maximum local, et même absolu, en $(1, 1)$. Pour le justifier, on peut remarquer que $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2(1+a\sin 2\theta)e^{-r^2/2}$, d'où $0 \leqslant f(x, y) \leqslant 2r^2e^{-r^2/2}$ avec $r^2 = x^2 + y^2$, donc $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x, y) = 0$.

   Par conséquent, il existe $R > 0$, que l'on choisit supérieur à 1, tel que

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 > R^2 \Rightarrow 0 \leqslant f(x, y) \leqslant 1/2 f(1, 1).$$

   Le disque fermé D' de centre $(0, 0)$ et de rayon R est compact, donc f est bornée et atteint ses bornes sur ce disque, sa borne supérieure est donc au moins égale à $f(1, 1)$. On en déduit que f est bornée sur $\mathbb{R}^2$ et atteint son maximum sur $\mathbb{R}^2$ en un point situé à l'intérieur de D'. Ce point est a fortiori un maximum local, donc c'est un point critique de f. Or $f(1, 1) = 2(1+a)e^{-1}$ et $f(1, -1) = 2(1-a)e^{-1}$, d'où $f(1, 1) > f(1, -1)$, ce qui prouve que f atteint son maximum absolu en $(1, 1)$ (ainsi qu'en $(-1, -1)$ par parité).

5. Il semble y avoir un col en $(-1,1)$. Pour le vérifier, on effectue un développement limité de f au voisinage de $(-1,1)$ en calculant $f(-1+x,1+y)$ où (x,y) est proche de $(0,0)$, l'infiniment petit de référence étant x^2+y^2. On indique les étapes du calcul :

$$f(-1+x,1+y) = \frac{2-2a}{e}\left(1-x+y+\frac{x^2+2axy+y^2}{2-2a}\right)e^{-1+x-y-x^2/2-y^2/2}$$
$$= \frac{2-2a}{e}\left(1-x+y+\frac{x^2+2axy+y^2}{2-2a}\right)(1+x-y-xy+o(x^2+y^2))$$

On pose $\delta(x,y) = f(-1+x,1+y) - f(-1,1)$. On obtient après calcul que :

$$\delta(x,y) = \frac{1}{e}((2a-1)x^2+2xy+(2a-1)y^2+o(x^2+y^2))$$

On en déduit que $\delta(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{1}{e}r^2(2a-1+\sin 2\theta+\varepsilon(r))$, avec $\lim\limits_{r\to 0}\varepsilon(r)=0$. Il existe donc $\eta>0$ tel que pour tout $r\in\,]0,\,\eta\,[$,

$$|\varepsilon(r)| < \min(a, 1-a).$$

On en déduit en prenant $\theta = \pi/4$ que :

$$\forall r\in\,]0,\,\eta\,[,\ \delta(r\sqrt{2}, r\sqrt{2}) = \frac{1}{e}(2a+\varepsilon(r)) > \frac{a}{e} > 0$$

et en prenant $\theta = -\pi/4$ que :

$$\forall r\in\,]0,\,\eta\,[,\ \delta(r\sqrt{2}, -r\sqrt{2}) = \frac{1}{e}(2a-2+\varepsilon(r)) < \frac{a-1}{e} < 0$$

Cela montre que f ne présente pas d'extremum local en $(-1,1)$.

Exercice 14.25

Polytechnique, ENS PSI 2006 K

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2,\ \|f(x)-f(y)\|\geqslant\|x-y\|$.

1. Montrer que $\forall (x,h)\in(\mathbb{R}^n)^2,\ \|df_x(h)\|\geqslant\|h\|$.
2. Démontrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $f(\mathbb{R}^n)$.
3. En admettant que les seules parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^n$ sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$, montrer que $f(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$.

1. Soient $x,h\in\mathbb{R}^n$, et t un réel >0. Par hypothèse, $\left\|\dfrac{f(x+th)-f(x)}{t}\right\|\geqslant\|h\|$.

   On sait que le taux d'accroissement $\dfrac{f(x+th)-f(x)}{t}$ tend vers $df(x)(h)$ quand t tend vers 0. Par continuité de la norme, on obtient en faisant tendre t vers 0 dans l'inégalité précédente que $\|df(x)(h)\|\geqslant\|h\|$. Par conséquent, $df(x)$ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^n$, donc un isomorphisme, donc son déterminant, qui est le jacobien de f, ne s'annule pas.

2. L'énoncé implique que f est injective, car si $f(x) = f(y)$, alors $\|x - y\| \leqslant 0$, donc $x = y$. On peut alors appliquer la caractérisation des difféomorphismes, et on obtient que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur son image.

3. On montre à présent que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.
   Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $f(\mathbb{R}^n)$ qui converge, soit y sa limite. Pour tout entier k, il existe $x_k \in \mathbb{R}^n$ tel que $y_k = f(x_k)$. Par hypothèse, on a $\|y_k - y_j\| \geqslant \|x_k - x_j\|$ pour tous entiers j et k. La suite (y_k) converge, donc elle est de Cauchy. L'inégalité ci-dessus entraîne que la suite (x_k) est également de Cauchy, donc ses suites coordonnées sont de Cauchy, donc elles convergent, ce qui signifie que la suite (x_k) converge. En notant x sa limite, on déduit de la continuité de f que la suite $(f(x_k))$ converge vers $f(x)$, d'où $y = f(x)$ par unicité de la limite. Finalement, la limite de (y_k) appartient à $f(\mathbb{R}^n)$.
   Il en résulte que $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$, ouverte et fermée, donc est égale à $\mathbb{R}^n$ compte tenu de la propriété admise, ce qui achève de prouver que f est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Intégrales doubles et curvilignes

15

15.1 L'ESSENTIEL DU COURS ET EXERCICES D'ASSIMILATION

15.1.1 Intégrales doubles

Ce qu'il faut savoir

- **Formule de Fubini sur un rectangle :** soit f une fonction continue sur $[a,b]\times[c,d]$. Alors
$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$
- Soit $\mathscr{D}$ le domaine $\mathscr{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 a\leqslant x\leqslant b \text{ et } \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$ où $a<b$ et φ_1 et φ_2 sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que $\varphi_1<\varphi_2$ sur $]a,b[$. Soit f une fonction continue sur $\mathscr{D}$ à valeurs réelles, on définit
$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$
- Soit $\mathscr{D}$ le domaine $\mathscr{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 c\leqslant y\leqslant d \text{ et } \psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)\}$ où $c<d$ et ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions continues sur $[c,d]$ telles que $\psi_1<\psi_2$ sur $]c,d[$. Soit f une fonction continue sur $\mathscr{D}$ à valeurs réelles, on définit
$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy.$$
- **Formule de Fubini sur un domaine simple :** lorsqu'un domaine peut être décrit des deux façons précédentes, les deux intégrales sont égales.

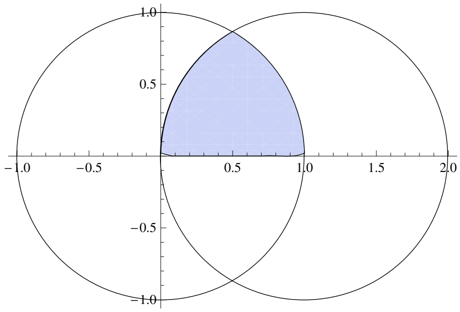
Exercice 15.1

ICNA 2005

Soit $\mathscr{C}_1$ le disque de centre 0 de rayon 1 et $\mathscr{C}_2$ celui de centre $(1,0)$ de rayon 1.

On note $\mathscr{D}=\{(x,y)\in\mathscr{C}^1\cap\mathscr{C}^2, y\geqslant 0\}$. Calculer $I=\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} xy\,dx\,dy$.

On commence par tracer le domaine d'intégration $\mathscr{D}$. Le point d'intersection entre les deux cercles dans le domaine $y > 0$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.



On peut paramétrer le domaine $\mathscr{D}$ en balayant sur la coordonnée y (un balayage sur x obligerait à découper en deux sous-domaines, $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ et $1/2 \leqslant x \leqslant 1$ pour exprimer l'intervalle des valeurs prises par y à x fixé) :

$$\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 - \sqrt{1 - y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1 - y^2}\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
I &= \int_{y=0}^{y=\sqrt{3}/2} \left(\int_{x=1-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} xy\,dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=\sqrt{3}/2} y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=1-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy \\
&= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{y}{2} \left((1 - y^2) - (1 - \sqrt{1 - y^2})^2 \right) dy \\
&= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{y}{2} \left(2\sqrt{1 - y^2} - 1 \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{3}(1 - y^2)^{3/2} - \frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}(1 - \frac{1}{8}) - \frac{3}{8} \right) = \frac{5}{48}.
\end{aligned}$$

15.1.2 Changement de variables

Ce qu'il faut savoir

- Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et φ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U sur V. Si Δ est un fermé borné (compact) simple de U dont l'image D par φ est encore un compact simple et si f est continue sur D alors

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f \circ \varphi(u, v)\,|j_\varphi(u, v)|\,du\,dv$$

Remarque

Par commodité, on note $j_\varphi(u,v) = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ le jacobien de φ, ce qui permet d'écrire la dernière intégrale sous la forme $\displaystyle\iint_\Delta f \circ \varphi(u,v) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du\, dv.$

- **En pratique** : en général, le domaine est défini par des conditions sur les variables x et y. Après avoir justifié que la fonction

$$\varphi : (u,v) \mapsto (x = x(u,v), y = y(u,v))$$

est un difféomorphisme, on traduit les conditions sur x et y en conditions sur u et v, ce qui donne le nouveau domaine d'intégration. On peut alors effectuer le changement de variables.

- **Cas particulier important : passage en coordonnées polaires**
Soit $\varphi : (r,\theta) \mapsto (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$, on obtient la formule

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta.$$

Remarque

La fonction φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ vers $\mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R}^- \times \{0\})$, qui n'est normalement pas utilisable lorsque le domaine D contient 0 ou rencontre la demi-droite $\mathbb{R}^- \times \{0\}$. On admet que par un passage à la limite, on peut effectuer ce changement sur un domaine inclus dans $\mathbb{R}^+ \times [-\pi,\pi]$.

Exercice 15.2

CCP PSI 2004

Soient a, b et R trois réels strictement positifs. Calculer

$$I = \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx\,dy$$

où D est le disque de centre 0 de rayon R.

Puisque le domaine d'intégration est le disque de centre 0 et de rayon R, on calcule cette intégrale à l'aide d'un passage en coordonnées polaires.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} r^2 \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} \right) r\,dr\,d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} \right) d\theta \right) \left(\int_0^R r^3\,dr \right) \end{aligned}$$

On linéarise $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$ et $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$, ce qui donne $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \pi$. Ainsi

$$I = \pi \frac{R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

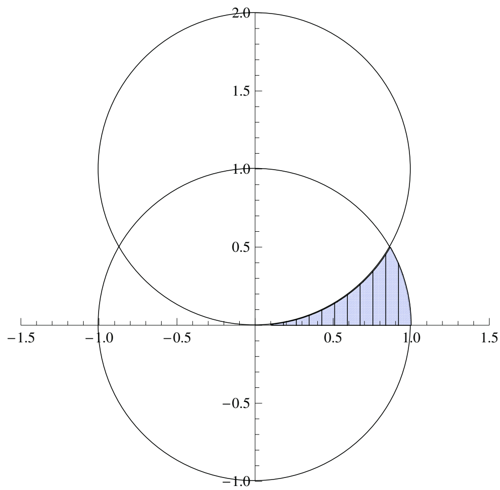
Exercice 15.3

CCP PSI 2006

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 1, x^2 + y^2 \geqslant 2y\}$ et $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$.

1. Dessiner D.
2. Calculer I.

1. L'inéquation $x^2 + y^2 \leqslant 1$ donne l'intérieur du cercle de centre 0 de rayon 1. La dernière inéquation se réécrit $x^2 + (y-1)^2 \geqslant 1$, ce qui correspond à l'extérieur du cercle de centre $(0, 1)$ et de rayon 1. On obtient le domaine tracé ici.



2. Différents éléments nous invitent à effectuer un changement en coordonnées polaires : d'une part la présence d'arcs de cercle dans le domaine, d'autre part la fonction à intégrer. On commence par exprimer le domaine D à l'aide de conditions sur r et θ. L'inéquation $x^2 + y^2 \leqslant 1$ devient $r \leqslant 1$. Les deux premières inéquations $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ deviennent $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. La dernière inéquation devient $r^2 \geqslant 2r\sin\theta$, c'est-à-dire $r \geqslant 2\sin\theta$. Les conditions $2\sin\theta \leqslant r \leqslant 1$ donnent $\sin\theta \leqslant 1/2$ et $\theta \in [0, \pi/6]$. Après un changement de variables en

coordonnées polaires, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/6}\left(\int_{r=2\sin\theta}^{r=1} r^2\,dr\right)d\theta = \int_0^{\pi/6}\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{3}\sin^3\theta\right)d\theta \\ &= \frac{\pi}{18}-\frac{8}{3}\int_0^{\pi/6}\left((1-\cos^2\theta)\sin\theta\right)d\theta = \frac{\pi}{18}-\frac{8}{3}\left[\frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta\right]_0^{\pi/6} \\ &= \frac{\pi}{18}-\frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) = \frac{\pi}{18}-\frac{16}{9}+\sqrt{3} \end{aligned}$$

15.1.3 Intégrales curvilignes

Ce qu'il faut savoir

- Soit $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ une forme différentielle continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $\Gamma = ([a,b], f)$ une arc de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans U, avec, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = (x(t), y(t))$. On définit l'intégrale curviligne de ω sur l'arc orienté Γ par
$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \left(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right)\,dt.$$
- Si ω est une forme différentielle exacte sur U et si F est une primitive de ω, alors $\displaystyle\int_\Gamma \omega = F(f(b)) - F(f(a))$.
- **Formule de Green-Riemann :** Soit D une partie fermée et bornée du plan délimitée par un arc de classe $\mathscr{C}^1$ sans point double. Si $\omega = P\,dx + Q\,dy$ est une forme différentielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U contenant D. On appelle ∂D la frontière de D parcourue dans le sens direct. On a
$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Exercice 15.4

CCP MP 2007

Soit γ la courbe constituée des deux portions de courbes comprises entre les points d'intersection de la droite d'équation $y = x$ et de la parabole d'équation $y = x^2$, orientée dans le sens trigonométrique.

1. Calculer $\displaystyle\int_\gamma (y + xy)\,dx$.

2. En utilisant la formule de Green-Riemann, retrouver la valeur de cette intégrale.

1. On note $O(0,0)$, $A(1,1)$ et $\omega = (y + xy)\,dx$. Soient

$$\gamma_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, t^2) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \gamma_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (1-t, 1-t) \end{array} \right. .$$

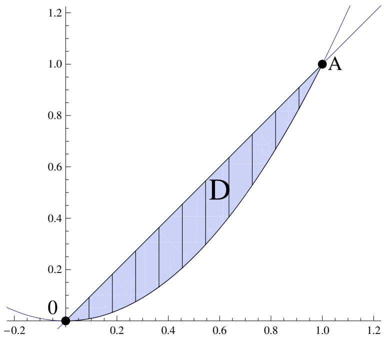
Le support de γ_1 est l'arc de parabole allant de O à A et celui de γ_2 le segment $[AO]$.

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^1 (t^2 + t^3)\, 1\, dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^1 ((1-t) + (1-t)^2)(-1)\, dt = \left[\frac{(1-t)^2}{2} + \frac{(1-t)^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{5}{6}.$$

Ainsi $\displaystyle\int_{\gamma} \omega = \frac{7}{12} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{4}$.

2. On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant x\}$, le domaine borné délimité par γ.



Avec $P(x,y) = y + xy$, on obtient, en utlisant la formule de Green-Riemann

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} -(1+x)\, dy \right) dx \\ &= -\int_0^1 (1+x)(x - x^2)\, dx = \int_0^1 (x^3 - x)\, dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

15.2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 15.5

TPE-EIVP PSI 2007

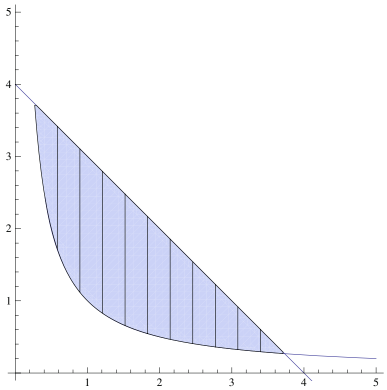
Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x + y \leqslant 4, xy \geqslant 1\}$.

1. Dessiner D.
2. Montrer que $\Phi : (u,v) \mapsto (u - v, u + v)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

3. À l'aide du changement de variables $x = u - v$, $y = u + v$, calculer

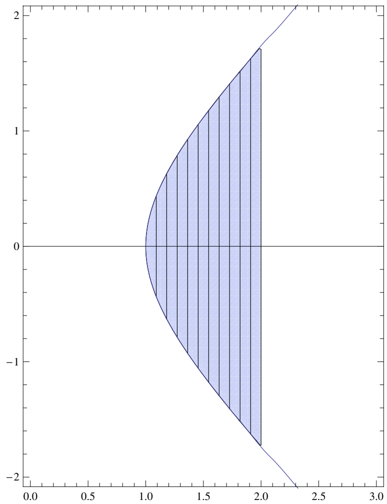
$$I = \iint_D (x^2 - y^2)\cos(xy)\, dx\, dy.$$

1. On obtient facilement le domaine suivant



2. L'application Φ est de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche les antécédents de (x, y) par Φ. On a $\Phi(u, v) = (x, y)$ si et seulement si $u = \dfrac{x + y}{2}$ et $v = \dfrac{y - x}{2}$. Donc Φ est bijective et sa réciproque est de classe $\mathscr{C}^1$. L'application Φ est bien un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$. Le jacobien de ce difféomorphisme est $j_\Phi(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

3. On réécrit les différentes conditions pour u et v. La condition $0 \leqslant x + y \leqslant 4$ est équivalente à $0 \leqslant u \leqslant 2$, et la condition $xy \leqslant 1$ est équivalente à $u^2 - v^2 \geqslant 1$. Cela donne le nouveau domaine d'intégration suivant :



On obtient alors $I = \displaystyle\int_{u=1}^{u=2}\left(\int_{v=-\sqrt{u^2-1}}^{v=\sqrt{u^2-1}}(-4uv)\cos(u^2-v^2)\,2\,dv\right)du$. Or la fonction $v \mapsto -8uv\cos(u^2-v^2)$ est impaire, l'intégrale est donc nulle.

> **Remarque**
> Le domaine d'intégration est symétrique par rapport à la première bissectrice. En effectuant le changement de variables $x = y'$ et $y = x'$, la quantité $x^2 - y^2$ devient $-(x'^2 - y'^2)$ et le changement de variables donne $I = -I$.

Exercice 15.6

Centrale PC 2006

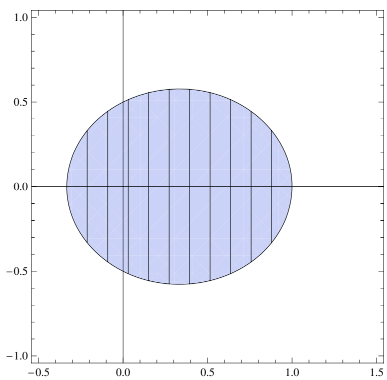
Soit a un réel strictement positif. On note E_a la conique d'équation

$$3x^2 + 4y^2 - 2ax - a^2 = 0$$

et K_a la partie bornée délimitée par E_a.

1. Déterminer E_a.
2. Montrer que $I = \displaystyle\iint_{K_a}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{a^3}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(2-\cos\theta)^3}$ et déterminer la valeur de cette dernière intégrale à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

1. Puisqu'il n'y a pas de terme xy, il suffit d'utiliser une mise sous forme canonique des trinômes du second degré. On écrit $3x^2+4y^2-2ax-a^2 = 3(x-\frac{a}{3})^2+4y^2-\frac{4}{3}a^2$, ce qui donne l'équation $\frac{9}{4a^2}(x-\frac{a}{3})^2+\frac{3}{a^2}y^2 = 1$. Ainsi la conique est une ellipse, ce centre $\Omega(\frac{a}{3},0)$ avec des demi-axes de longueur $\alpha = \frac{2a}{3}$ et $\beta = \frac{a}{\sqrt{3}}$.



2. Le problème ici est le choix de la méthode pour paramétrer le domaine. Le terme à intégrer semble indiquer un passage en coordonnées polaires (mais le paramétrage

de K_a semble moins facile) alors qu'un paramétrage du domaine serait

$$K_a = \{(\frac{a}{3} + \alpha r \cos\theta, \beta r \sin\theta) \mid r \in [0,1] \text{ et } \theta \in [-\pi, \pi]\}.$$

Mais dans ce cas la quantité $\sqrt{x^2+y^2}$ semble plus difficile à simplifier. On s'oriente toutefois vers le changement en coordonnées polaires. Le point $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est dans K_a si et seulement si

$$g(r,\theta) = 3r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta - 2ar\cos\theta - a^2 \leqslant 0.$$

Or $g(r,\theta) = 4r^2 - r^2\cos^2\theta - 2ar\cos\theta - a^2 = 4r^2 - (r\cos\theta + a)^2$. Cela donne $-(r\cos\theta + a) \leqslant 2r \leqslant r\cos\theta + a$. La première inégalité est équivalente à $r(2+\cos\theta) \geqslant -a$ et est par conséquent inutile (car on doit avoir $r \geqslant 0$). La seconde inégalité est équivalente à $r(2-\cos\theta) \leqslant a$. Ainsi

$$K_a = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid \theta \in [-\pi,\pi] \text{ et } r \in [0, \frac{a}{2-\cos\theta}]\}.$$

Remarque
Il est normal que l'expression soit de ce type car O est le foyer de l'ellipse.

L'intégrale cherchée vaut donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\frac{a}{2-\cos\theta}} r^2\,dr\right)d\theta = \frac{a^3}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(2-\cos\theta)^3}$.
On calcule cette intégrale à l'aide d'un logiciel de calcul formel :
Mathematica : `Integrate[1/(2-(Cos[t])^3),{t,-pi,pi}`
Maple : `int(1/(2-(cos(t))^3),t=-pi..pi))`

On obtient finalement $I = \dfrac{\pi a^3}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 15.7

CCP PC 2007

On note, pour $R > 0$, $\mathscr{C}_R$ le quart du disque $\{(x, y \in (\mathbb{R}^+)^2, x^2+y^2 \leqslant R^2\}$.

1. Montrer que

$$\iint_{\mathscr{C}_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leqslant \left(\int_0^R e^{-t^2}\,dt\right)^2 \leqslant \iint_{\mathscr{C}_{R\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

1. On note C_R le carré $[0,R]\times[0,R]$. On a

$$\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^R\left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)e^{-y^2}\,dy = \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Puisque $\mathscr{C}_R \subset C_R \subset \mathscr{C}_{R\sqrt{2}}$ et que $e^{-(x^2+y^2)} \geqslant 0$ pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a

$$\iint_{\mathscr{C}_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leqslant \iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leqslant \iint_{\mathscr{C}_{R\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

ce qui donne l'encadrement demandé.

2. On calcule l'intégrale $\displaystyle\iint_{\mathscr{C}_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ à l'aide d'un passage en coordonnées polaires. On a

$$\iint_{\mathscr{C}_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} re^{-r^2}\,d\theta\right) dr = -\frac{\pi}{4}\left[e^{-r^2}\right]_0^R = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}).$$

Par encadrement, on obtient $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\left(\int_0^R e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$ et comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable en $+\infty$ devant $t \mapsto e^{-t}$) et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \geqslant 0$, on obtient finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 15.8

TPE MP 2004

Calculer $I = \displaystyle\int_\gamma (2y^3x + 3xy^2)\,dx + (3y^2x^2 + 3yx^2)\,dy$ où γ est un arc $\mathscr{C}^1$ d'extrémités $A(2,0)$ et $B(1,1)$.

Le fait que le chemin ne soit pas imposé semble indiquer que l'intégrale ne va pas dépendre de l'arc mais seulement de ses extrémités. On montre que la forme différentielle $\omega = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ est fermée (avec $P(x, y) = (2y^3x + 3xy^2)$ et $Q(x, y) = (3y^2x^2 + 3yx^2)$). En effet, on a $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 6xy^2 + 6xy = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$. La forme différentielle étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est étoilé, elle est exacte et il existe F de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\omega = dF$. On cherche F telle que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) & = & 2y^3x + 3xy^2 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) & = & 3y^2x^2 + 3yx^2 \end{array}\right. .$$

La première équation donne $F(x, y) = x^2y^3 + \dfrac{3}{2}x^2y^2 + f(y)$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à déterminer. En reportant dans la seconde équation, $f' = 0$ et f est constante. On choisit par exemple $f = 0$. On rappelle que si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ avec

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ est un arc de classe $\mathscr{C}^1$ d'extrémités $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$, alors

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t))y'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\, dt = F(B) - F(A) = (1 + \frac{3}{2}) - 0 = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

15.3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 15.9

ENSAM PSI 2005

1. À l'aide de $I(u) = \iint_{[0,u]^2} (\sin x)e^{-xy}\, dx\, dy$, montrer que
$$\int_0^u \frac{\sin x}{x}(1 - e^{-xu})\, dx = \int_0^u \frac{1 - e^{-uy}(\cos u + y \sin u)}{1 + y^2}\, dy$$
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$.

1. La fonction $(x, y) \mapsto (\sin x)e^{-xy}$ est continue sur $[0, u]^2$. On utilise la formule de Fubini afin d'exprimer l'intégrale sous deux formes différentes :
$$\begin{aligned}I(u) &= \int_{x=0}^{x=u} \left(\int_{y=0}^{y=u} \sin x e^{-xy}\, dy \right) dx \\ &= \int_0^u \left[-\frac{\sin x}{x} e^{-xy} \right]_0^u dx = \int_0^u \frac{\sin x}{x}(1 - e^{-xu})\, dx \\ &= \int_{y=0}^{y=u} \left(\int_{x=0}^{x=u} \sin x e^{-xy}\, dx \right) dy = \int_0^u \left(\int_0^u \operatorname{Im}\left(e^{-x(y-i)}\right) dx \right) dy \\ &= \int_0^u \left[\operatorname{Im}\left(\frac{e^{x(i-y)}}{i - y} \right) \right]_0^u dy = \int_0^u \left[-\operatorname{Im}\left((y + i)e^{ix}\right) \frac{e^{-xy}}{y^2 + 1} \right]_0^u dy \\ &= -\int_0^u \left[(\cos x + y \sin x)\frac{e^{-xy}}{y^2 + 1} \right]_0^u dy = \int_0^u \frac{1 - (\cos u + y \sin u)e^{-uy}}{y^2 + 1}\, dy.\end{aligned}$$
2. On cherche bien entendu à faire tendre u vers $+\infty$. Les intégrales contenant e^{-xu} ou e^{-yu} vont sûrement tendre vers 0. On les sépare du reste de l'expression. Pour la première intégrale, on a $I(u) = \displaystyle\int_0^u \frac{\sin x}{x}\, dx - \int_0^u e^{-xu} \frac{\sin x}{x}\, dx$. En utilisant le fait que $\left| \dfrac{\sin x}{x} \right|$ est majoré par 1, on obtient
$$\left| \int_0^u e^{-xu} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leqslant \int_0^u e^{-xu}\, dx = \frac{1 - e^{-u^2}}{u} \leqslant \frac{1}{u}.$$

Donc $\lim\limits_{u\to+\infty}\displaystyle\int_0^u e^{-xu}\frac{\sin x}{x}\,dx = 0$. La seconde intégrale se sépare en deux parties $\displaystyle\int_0^u \frac{1}{1+y^2}\,dy - \int_0^u \frac{e^{-uy}(\cos u + y\sin u)}{1+y^2}\,dy$. On a $|\cos u + y\sin u| \leqslant 1+y$ et $1+y\leqslant 1+y^2$ si $y\geqslant 1$. Donc $\dfrac{1+y}{1+y^2}$ est majoré par 1 sur $[1,+\infty[$ et par une constante M sur $[0,1]$ (le fonction de y est continue sur $[0,1]$. Soit M un majorant de $\dfrac{1+y}{1+y^2}$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient

$$\left|\int_0^u \frac{e^{-uy}(\cos u + y\sin u)}{1+y^2}\,dy\right| \leqslant M\int_0^u e^{-uy}\,dy \leqslant \frac{M}{u}.$$

Remarque
En utilisant la formule de Cauchy-Schwarz, on peut obtenir la majoration plus pratique ici : $|1.\cos u + y\sin u| \leqslant \sqrt{1+y^2}$.

Finalement $\lim\limits_{u\to+\infty} I(u) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}$. Cela donne, en même temps, la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$, à savoir $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 15.10

Centrale PC 2007

1. Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, à valeurs réelles et nulles en 0 et 1. Déterminer une fonction polynomiale P de degré 2 telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 P(t)f''(t)\,dt$ et en déduire qu'il existe une constante $k\geqslant 0$ telle que, $\forall f\in E$, $\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leqslant k\sup\limits_{x\in[0,1]}|f''(x)|$ $(*)$.
   Justifier l'existence d'une borne inférieure pour l'ensemble des constantes k qui vérifient $(*)$ et déterminer cette borne inférieure.
2. Soit $C=[0,1]^2$ et ∂C le bord de ce domaine. On définit
   $$F=\{f\in\mathscr{C}^4(C,\mathbb{R}),\ f \text{ nulle sur } \partial C\}.$$
   2.a Justifier l'existence de $M_f = \sup\limits_{(x,y)\in C}\left|\dfrac{\partial^4 f}{\partial^2 x\partial^2 y}(x,y)\right|$.

   2.b Montrer l'existence de $k'\in\mathbb{R}_+$ telle que
   $$\forall f\in E, \left|\iint_C f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant kM_f.$$
   2.c Chercher la borne inférieure des constantes k vérifiant la relation précédente.

1. On intégre par parties en partant de la formule finale (les fonctions ont la régularité souhaitée sur le segment $[0, 1]$) avec P polynôme du second degré.

$$\begin{aligned}\int_0^1 P(t)f''(t)\,dt &= \left[P(t)f'(t)\right]_0^1 - \int_0^1 P'(t)f'(t)\,dt \\ &= \left[P(t)f'(t)\right]_0^1 - \left[P'(t)f(t)\right]_0^1 + \int_0^1 P''(t)f(t)\,dt\end{aligned}$$

Afin que la formule demandée soit vérifiée, il suffit de choisir P de sorte que $P'' = 1$ et $P(0) = P(1) = 0$. Le polynôme $P = \frac{1}{2}X(X-1)$ convient. Si f est dans E alors $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t(t-1)f''(t)\,dt$. Ainsi, lorsque $f \in E$, on obtient

$$\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{x\in[0,1]}|f''(x)|\int_0^1 t(1-t)\,dt = \frac{1}{12}\sup_{x\in[0,1]}|f''(x)|.$$

L'ensemble des constantes k qui vérifient $(*)$ est non vide et minoré par 0. Donc il admet une borne inférieure. Afin de déterminer la meilleure (c'est-à-dire la plus petite) constante k vérifant $(*)$, on regarde à quelles conditions les majorations précédentes deviennent des égalités. On a

$$\left|\int_0^1 t(t-1)f''(t)\,dt\right| = \sup_{x\in[0,1]}|f''(x)|\int_0^1 |t(t-1)|\,dt = \sup_{x\in[0,1]}|f''(x)|\int_0^1 t(1-t)|\,dt$$

si et seulement si f'' est constante, avec $t(1-t)f''(t)$ de signe fixe sur $[0, 1]$, ce qui revient à f'' est constante. On choisit, par exemple, $f_0(t) = t(1-t)/2$. On a $f_0''(t) = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $\int_0^1 f_0(t)\,dt = \frac{1}{12}$. Ainsi $k \geqslant 1/12$ (k doit vérifier $(*)$ pour tout fonction $f \in E$ donc notamment pour f_0). Finalement la meilleure constante possible est $\frac{1}{12}$.

2.

2.a. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^4$ sur C donc $\frac{\partial^4 f}{\partial^2 x\partial^2 y}$ est continue sur C qui est fermé et borné (compact). Cela justifie l'existence de M_f.

2.b. Soit $y \in [0, 1]$, on considère $\int_0^1 f(x, y)\,dx$. On peut appliquer les résultats de la première question à la fonction $x \mapsto f(x, y)$, puisque $f(0, y) = f(1, y) = 0$. Ainsi $\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\,dx = \int_0^1 f(x, y)\,dx$ et

$$I = \iint_C f(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^1 x(x-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\,dx\right)dy.$$

La formule de Fubini permet d'intervertir l'ordre d'intégration ce qui donne

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)\left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

Soient $x \in [0,1]$ et $g_x : y \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$. La fonction g_x est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$. De plus $g_x(0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,0) = 0$ puisque, pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(x,0) = 0$. La dérivée seconde de $x \mapsto f(x,0)$ est nulle. On a le même résultat pour $g_x(1)$. Cela permet d'appliquer le résultat de la première question :

$$\int_0^1 g_x(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y(y-1)g_x''(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y(y-1)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\,dy.$$

On aboutit enfin à l'égalité

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\int_0^1 x(x-1)y(y-1)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

On obtient alors comme précédemment la majoration

$$\left|\iint_C f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \frac{M_f}{4}\left(\int_0^1 x(1-x)\,dx\right)\left(\int_0^1 y(1-y)\,dy\right) = \frac{1}{144}M_f.$$

2.c. On s'inspire de la méthode utilisée dans le cas d'une variable et on cherche une fonction nulle sur le bord ∂C avec $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}$ constante. La fonction f définie sur C par $f(x,y) \mapsto x(x-1)y(y-1)$ convient et donne l'égalité $\left|\displaystyle\iint_C f(x,y)\,dx\,dy\right| = \dfrac{M_f}{144}$. La meilleure constante lui est donc supérieure et finalement égale.

EL-HAJ LAAMRI • PHILIPPE CHATEAUX • GÉRARD EGUETHER
ALAIN MANSOUX • DAVID RUPPRECHT • LAURENT SCHWALD

100% LICENCE
100% BTS/DUT
100% CONCOURS

TOUS LES EXERCICES D'ANALYSE PC-PSI

Pour assimiler le programme, s'entraîner et réussir son concours

Ce livre d'exercices corrigés d'Analyse est un outil **d'apprentissage quotidien** destiné aux élèves de seconde année des classes préparatoires **PC** et **PSI**. Le respect scrupuleux de chacun des programmes (PC et PSI) a guidé en permanence la rédaction ; en particulier tout exercice et tout rappel de cours faisant appel à une notion qui n'est pas commune aux deux programmes est signalé de façon explicite.

Les premiers chapitres (Suites numériques, Fonctions réelles d'une variable réelle, Intégration sur un segment) assurent la transition entre la première et la seconde année. Ils pourront servir de support aux **révisions** « **estivales** » précédant le début de la deuxième année.

Chaque chapitre (excepté les deux premiers) est constitué de trois parties :

– une présentation synthétique de **l'essentiel du cours** suivi d'exercices d'**assimilation** ;
– des exercices d'**entraînement** dont l'objectif est d'amener le lecteur à la compréhension et à une bonne maîtrise des notions étudiées ;
– des exercices d'**approfondissement** destinés à mettre l'élève en situation de concours ; ils fourniront une **référence** et une excellente base de travail pendant les périodes de révisions.

Les candidats aux concours du CAPES et de l'Agrégation pourront également trouver dans cet ouvrage une aide précieuse pour leur préparation.

El-Haj Laamri
Agrégé de Mathématiques
Maître de Conférences à Nancy-Université

Philippe Chateaux
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Henri Poincaré en MP*

Gérard Eguether
Maître de Conférences à Nancy-Université

Alain Mansoux
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Henri Poincaré en PC

David Rupprecht
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Henri Loritz en PSI

Laurent Schwald
Agrégé en Mathématiques
Professeur au Lycée Henri Poincaré en BCPST

EdiScience

ISBN 978-2-10-053963-5

www.ediscience.net