Chapitre 2

Langage: notions de base et propriétés

Concepts de base: Alphabet

- Un alphabet X est un ensemble fini, non vide, de symboles comme par exemple les lettres et les chiffres.
- Exemple:

Concepts de base: Mot

- Un mot w est défini sur l'alphabet X est une suite finie et ordonnée, éventuellement vide, d'éléments de l'alphabet.
- C'est une concaténation de chiffres, de lettres ou de symboles appartenant à X.
- Le mot vide, noté ε correspond à la suite de symboles vide.

Concepts de base: Mot

- Exemple:

Concepts de base: langage

- Un langage L défini sur l'alphabet X est un ensemble de mots défini sur l'alphabet en question. Cet ensemble de mots peut être fini comme il peut être infini.
- Exemple:

Concepts de base: langage

- Formellement, si X est un alphabet alors un langage sur X est par définition un sous-ensemble du monoïde X^*
- Exemple: soit x= {a, b, c}
- Problème: on cherche l'ensemble des mots qui commencent par a suivi de zéro ou plusieurs c et se terminent par bb.
- Solution:

Concepts de base: Monoïde

- Pour un alphabet fini X, le monoïde X* librement engendré par X est l'ensemble des suites finies $u= u_1u_2...u_n$ où u_i est une lettre de X et n désigne la longueur de u avec n>= 0.
- La loi de composition interne du monoïde X* est la concaténation.
- Si X = {a, b}, alors l'ensemble X* = {ε, a, b, aa, ab, bb, aab, bba, aba, aaa, bbb,…}
- L'élément neutre ε appelé aussi le mot vide est l'unique mot de longueur 0.

Concepts de base: Monoïde

- Définissons tout d'abord les éléments X^* et X^+:
- Soit un alphabet X. L'ensemble X^+ des mots définis sur X de longueur supérieur ou égale à un est défini par:

1. Tout élément de X^+ appartient à X
2. Si $a \in X$ et $w \in X^+$, alors $aw \in X^+$
3. X^+ ne contient que des objets obtenus en appliquant un nombre fini de fois les règles 1 et 2.
4. $X^* = X^+ \cup \{\varepsilon\}$

Concepts de base: Monoïde

- Exemple:

Opérations sur les mots: Egalité

- Deux mots sont égaux si et seulement si ils sont formés de la même suite de lettre.
- Soit X un alphabet et soient $u \in X^*$ et $v \in X^*$ / $u= u_1.u_2\ldots u_n$ et
- $v= v_1.v_2\ldots v_m$ / $u_i, v_i \in X$.

- $u = v$ si et seulement si $n = m$ et $\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ / $u_i = v_i$

Opérations sur les mots: Egalité

- Exemple:

Opérations sur les mots: Longueur

- Soit X un alphabet et soit w un mot de X*. La longueur de w est définie par le nombre d'occurrences de lettres de X dans w.
- Nous la notons par |w|

- Exemple :

Opérations sur les mots: Longueur

Remarque:

- Le mot vide ε n'est composé d'aucun caractère, sa longueur est dont nulle ($|\varepsilon| = 0$). Pour tout mot w appartenant à un langage L, on a : $w.\varepsilon = \varepsilon.w = w$
- Nous notons $|w|_a$ le nombre d'occurrences de la lettre a dans w.
- Exemple :

Opérations sur les mots: Concaténation

- La concaténation de deux mots $u \in X^*$ et $v \in X^*$ tels que $u=u_1.u_2\ldots u_n$ avec $u_i \in X$, $\forall$ $i \in \{1, 2,\ldots,n\}$ et $v = v_1.v_2\ldots v_m$ avec $v_i \in X$, $\forall$ $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ est notée par $u.v = u_1.u_2\ldots u_n.v_1.v_2\ldots v_m$.

- Remarque: l'opération de concaténation est associative mais non commutative.
- Soit $w = u.v$ alors $|w| = |u| + |v|$
- Soit $w \in X^*$ alors$(u.v).w = u.(v.w)$ (associativité)
- Soit $u, v \in X^*$ alors $u.v \neq v.u$
- Soit l'élément neutre ε alors $u.\varepsilon = \varepsilon.u = u$ (élément neutre)

Opérations sur les mots: Concaténation

- Soient u et v deux mots définies comme suit:
- $u=u_1u_2u_3\ldots u_n$ et $v=v_1v_2v_3\ldots v_n$
- La concaténation de u et v est le mot:

$w= u_1u_2u_3\ldots u_n . v_1v_2v_3\ldots v_n$

Exemple:

Opérations sur les mots

Exercice:

Soit $X = \{a, b\}$; ε est il un langage?

……………………………………………….

Soit $X = \{a, b\}$; $\emptyset$ est il un langage?

……………………………………………….

Soit $A = \{x, y\}$ et $B = \{y, x\}$ $A^* - B^* = A^*$?

………………………………………………

Soit $X = \{a, b\}$; $\{\varepsilon\}$ est il un langage?

………………………………………………

Opérations sur les mots: Facteur

- Soit X un alphabet et $w \in X^*$. Le mot $u \in X^*$ est un facteur de w si et seulement si $w=u'.u.u''$ avec $u', u'' \in X^*$.
- Si $u'.\ u'' \neq \varepsilon$ alors dans ce cas nous désignons par u un facteur propre de w.
- Si $u' = \varepsilon$ alors $w=u.u''$ et dans ce cas nous désignons par u un facteur gauche de w ou préfixe de w.
- Si $u'' = \varepsilon$ alors $w=u'.u$ et dans ce cas nous désignons par u un facteur droit de w ou suffixe de w.

Opérations sur les mots: Facteur

- Exemple1:

Opérations sur les mots: Facteur

- Exemple 2:

Opérations sur les mots: Miroir

- L'opération miroir associe à un mot $w=u_1u_2\ldots u_n$ le même mot mais renversé. On le note $w^R=u_n\ldots u_2u_1$.
- Pour les mots w, w_1, w_2 définis sur l'alphabet X ont les propriétés suivantes:
- 1- si $w = w^R$, alors le mot w est appelé un palindrome
- 2- $(w^R)^R = w$
- 3- $(w_1w_2)^R = w_2^R w_1^R$

Opérations sur les mots: Miroir

- Exemple 1:

Opérations sur les mots: Puissance

- La puissance d'un mot w, noté w_n où $n \geq 0$ est définie par:
- 1- $w^0 = \varepsilon$
- 2- $w^{n+1} = w^n w$

- Soit X un alphabet et soit $w \in X^*$
- Les deux écritures suivantes sont équivalentes
- $W= abbbba = ab^4a$

Opérations sur les mots: Puissance

- Pour le mot w= abcc défini sur l'alphabet X = {a, b, c}, on a :
- w^1= abcc
- w^3 = abcc abcc abcc

- Exemple:

Représentation des langages:
Définition par propriétés (qualitative)

- Définition textuelle: L1 est un langage définie sur l'alphabet X composé des mots formés d'une suite de a suivi d'une suite de b avec le nombre de a égale au nombre de b.

- Définition qualitative:
- $L1 = \{ w \in X^* \ / \ w = a^n b^n \ ; \ n \geq 1 \}$

Représentation des langages:
Définition par propriétés (qualitative)

- Exemple:

Représentation des langages:
Définition récursive

- La définition des éléments d’un langage fait référence aux éléments de ce même langage. On dit alors que cette définition est récursive.

Exercice:

- 1- Donner la définition qualitative (par propriété) du langage dont les mots commencent par le chiffre 0, suivit de 0 ou plusieurs occurrences du chiffre 1 et se termine par 0.
- 2- Donner une définition par propriété du langage dont les mots sont formés par 0 ou plusieurs occurrences du facteur ab.
- 3- Soit X = {a, b}. Donner la définition qualitative du langage dont la taille des mots est impair.

Solution

Opération sur les langages

- Les langages sont des ensembles de mots.
- Les opérations habituelles concernant les ensembles telles que l'*union*, l'*intersection*, et la *complémentarité* sont alors tout à fait applicables aux langages.

Opération sur les langages: Egalité

- Soit L_1 et L_2 deux langages engendré sur X^*. On dit que les deux langages sont égaux ($L_1 = L_2$) si et seulement si $\forall\ w \in L_1$ alors $w \in L_2$ et $\forall\ w \in L_2$ alors $w \in L_1$.

Opération sur les langages: Union, Intersection

- L'union de deux langages L_1 et L_2 définis sur l'alphabet X ($L_1 \cup L_2$) et leur intersection ($L_1 \cap L_2$) correspondent exactement à l'union et à l'intersection d'ensembles.

- Soit X un alphabet et soit deux langages L_1 et L_2 engendrés sur X*.
- $L_1 \cup L_2 = \{w \in X^* \ / \ w \in L_1 \text{ ou } w \in L_2\}$
- $L_1 \cap L_2 = \{ w \in X^* \ / \ w \in L_1 \text{ et } w \in L_2\}$

Opération sur les langages: Union, Intersection

- Exemple:

Opération sur les langages:
Complémentarité

- Soit un langage L défini sur l'alphabet X. La complémentarité de L noté $\overline{L}$, est définie par:

- $\overline{L} = X^* \setminus L = \{w \in X^* \,/\, w \notin L\}$

Opération sur les langages:
Concaténation

- Soient L_1 et L_2 deux langages définis sur l'alphabet X, l'opération de concaténation est définie comme suit:
- $L_1.L_2 = \{w \in X^* / w = u.v$ avec $u \in L_1$ et $v \in L_2\}$
- L'élément neutre de l'opération de concaténation est donc l'ensemble $L\varepsilon = \{\varepsilon\}$ ($L.L_\varepsilon = L_\varepsilon . L = L$) et l'élément absorbant le langage $\emptyset$ ($L. \emptyset = \emptyset.L = \emptyset$)

Opération sur les langages:
Concaténation

- Exemple:

Opération sur les langages:
Puissance

- La puissance d'un langage L, noté Ln où $n \geq 0$ est définie par:
- 1- $L^0 = L_\varepsilon = \{\varepsilon\}$
- 2- $L^{n+1} = L^n.L$

- Exemple:

Opération sur les langages:
Fermeture itérative

- La fermeture itérative d'un langage L, notée L* est l'ensemble des mots résultant d'une concaténation d'un nombre fini de mots de L.

- Formellement on a:
- $L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots = \bigcup_{i \geq 0} L^i$

- Le mot vide appartient donc à L* mais pas forcement à L^+ qui est définie comme suit:
  $L^+ = L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \ldots = \bigcup_{i \geq 1} L^i = L^*.L$

Opération sur les langages:
Fermeture itérative

- La concaténation de langage est distributive par rapport à l'union.
- Soit X un alphabet et L_1, L_2 et L_3 engendrés sur X*
- $L_1.(L_2 \cup L_3) = (L_1.L_2) \cup (L_1.L_3)$
- $(L_1 \cup L_2).\ L_3 = (L_1.L_3) \cup (L_2.L_3)$
- Si $L_1 \subseteq L_2$ alors $L_1.L_3 \subseteq L_2.L_3$