

Chapitre 1

Introduction aux vecteurs et matrices

Notation : pour définir un cadre général non limité aux vecteurs, dans tout ce paragraphe E représente un espace vectoriel sur \mathbb{R}

1.1 Vecteurs

Définition 1 On appelle vecteur x un élément de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n sur \mathbb{R} . C'est un ensemble ordonné d'éléments de \mathbb{R} , souvent noté des manières suivantes :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Comme \mathbb{R}^n est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , il est donc muni des propriétés classiques d'un espace vectoriel : soit x et $y \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors :

- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- $1x = x$

où

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)^t \quad \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)^t$$

Définition 2 On appelle produit scalaire sur E une application de $E \times E$ sur \mathbb{R} :

$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle = (x, y)_E$$

possédant les propriétés suivantes :

2 CHAPITRE 1. INTRODUCTION AUX VECTEURS ET MATRICES

- $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Corollaire 1 *Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique sur E .*

Définition 3 *On appelle norme sur E une application de E dans \mathbb{R}_+ :*

$$x \rightarrow \|x\|$$

qui possède les propriétés suivantes :

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Définition 4 *On appelle un espace euclidien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui permet de définir une norme par la relation :*

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

Théorème 1 *(Inégalité de Cauchy-Schwartz)*

Quelque soit x et y appartenant à un espace euclidien, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Preuve

Définition 5 *(Norme euclidienne sur \mathbb{R}^n) Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , on définit la norme euclidienne d'un vecteur x par :*

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

le produit scalaire associé étant :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , d'autres normes que la norme euclidienne peuvent être définies . Par exemple, l'application suivante définit une norme :

$$x \rightarrow \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall p \geq 1$$

les cas les plus usités étant :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} |x_i|$$

respectivement appelé norme 1 et norme infinie.

Définition 6 On appelle une base orthogonale de \mathbb{R}^n tout ensemble de n vecteurs $\{b_1, \dots, b_n\}$ telle :

- $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \exists ! \{\alpha_i\}$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$
- $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ si $i \neq j$

Il existe une base particulière appelée base canonique définie de la manière suivante :

Définition 7 On appelle base canonique la base composée des vecteurs $\{e_i\}_{i=1 \dots n}$ telle que le j -ième élément de e_i vaut 0 sauf si $i = j$ dans ce cas, il vaut 1.

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ième élément}$$

Ainsi tout vecteur x de \mathbb{R}^n se décompose sur la base canonique de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

1.2 Matrices

Définition 8 Une matrice d'éléments de \mathbb{R} est un tableau à deux dimensions composé de m lignes et n colonnes où chaque élément appartient à \mathbb{R} . L'ensemble des matrices de \mathbb{R} de dimensions m, n est noté $\mathcal{M}_{m,n}$ et forme un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

On notera X un élément de $\mathcal{M}_{m,n}$ et $x_{i,j}$ ou $[X]_{i,j}$ l'élément à la i -ième ligne et j -ième colonne de la matrice X .

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,j} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & x_{2,j} & \cdots & x_{2,n} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \cdots & x_{3,j} & \cdots & x_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i,1} & x_{i,2} & x_{i,3} & \cdots & x_{i,j} & \cdots & x_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & x_{m,3} & \cdots & x_{m,j} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix}$$

L'opération d'addition de deux matrices et de multiplication d'une matrice par un scalaire de \mathbb{R} sont définies par les relations suivantes :

$$X + Y = [x_{i,j} + y_{i,j}]_{m,n} \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

$$\alpha X = [\alpha x_{i,j}]_{m,n} \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Définition 9 On appelle transposé de X , la matrice X^t telle que :

$$[X^t]_{i,j} = x_{j,i} \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

1.2.1 Multiplications de matrices

De par sa structure d'espace vectoriels, l'addition de matrices et la multiplication de matrices par un scalaire sont des opérations simples. Cependant, il est possible de définir une multiplication de matrices.

Proposition 1.2.1.1 soit $X \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,p}$ alors le produit $Z \in \mathcal{M}_{m,p}$ des matrices X et Y est donné par la formule suivante :

$$z_{i,j} = \sum_{k=1}^n x_{i,k} y_{k,j} \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p$$

De manière général, le produit de matrices n'est pas commutatif, c'est-à-dire que XY n'est pas toujours égale à YX . Par contre, les quelques propriétés suivantes de la multiplication de matrices sont aisément vérifiables :

Propriété En supposant que les matrices A, B et C sont de dimensions telles que leurs multiplications soient possibles, $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

- $C(A + B) = CA + CB$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $A(BC) = (AB)C = ABC$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Pour les matrices carrés appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$, on définit la matrice identité I la matrice telle que :

$$[I]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et vérifiant la propriété suivante :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,n} \quad AI = IA = A$$

1.2.2 Matrice Bloc

1.2.3 Inversion de matrice

Le concept d'inverse peut être généraliser aux matrices mais doit être utiliser avec précaution.

Définition 10 On dit qu'une matrice $X \in \mathcal{M}_{n,n}$ est non-singulière ou inversible si il existe une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}$ noté X^{-1} telle que :

$$XX^{-1} = X^{-1}X = I$$

1.2.4 Déterminant d'une matrice

A chaque matrice carré A d'ordre n i.e appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$, on peut associer un scalaire appelé le déterminant de A noté habituellement :

$$\det(A) \quad \text{ou} \quad |A|$$

Ce scalaire est indispensable pour l'étude et la recherche des propriétés des matrices carrés et jouent un rôle important dans les systèmes d'équations linéaires.

Pour définir la notion de déterminant, quelques autres points doivent être introduites.

Définition 11 *une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ est une bijection de l'ensemble sur lui-même. On peut également voir cela comme un réarrangement des nombres $1, 2, \dots, n$.*

On appelle transposition une permutation qui n'échange que deux éléments consécutifs : on note τ_j la transposition qui permute j et $j + 1$.

L'ensemble de toutes les permutations est noté S_n et le cardinal de S_n vaut $n!$

une permutation σ est désignée par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \sigma(i) = j_i \quad \forall_i \quad \text{ou} \quad \sigma = j_1 j_2 \cdots j_n$$

Proposition 1.2.4.1 *Toute permutation peut être écrit comme un produit de transpositions. Cette décomposition n'est cependant pas unique mais la parité du nombre de transpositions est constante quelque soit la décomposition considérée.*

Définition 12 *On appelle signature d'une permutation σ le nombre, noté $\text{sign}(\sigma)$, qui vaut 1 si le nombre de transpositions permettant de décomposer la permutation est paire et -1 sinon.*

Définition 13 *On appelle déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ le nombre :*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

Lorsque n augmente, le nombre de termes dans la somme composant le calcul du déterminant augmente de manière drastique et devient rapidement difficile à calculer. Cependant, il est possible de proposer une formulation du déterminant plus aisée à mettre en oeuvre.

On note $A_{|i,j|}$ la matrice mineure de A obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j .

$$A_{|i,j|} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j-1} & a_{m,j+1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Théoreme 2 (Développement selon une colonne)

On peut calculer le déterminant en utilisant le développement suivant une colonne :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} |A_{|i,j|}|$$

Voici maintenant une liste de propriétés fondamentales du déterminant :

- $|I| = 1$
- $|A| = |A^t|$
- si deux colonnes de A sont égales alors $|A| = 0$
- si σ une permutation de S_n alors

$$\det(A^{\sigma(1)}, A^{\sigma(2)}, \dots, A^{\sigma(n)}) = \text{sign}(\sigma) \det(A)$$

- l'application qui a une colonne de A fait correspondre le déterminant de A est linéaire, ainsi pour tout j :

$$\det(A^1, A^2, \dots, \alpha A^j, \dots, A^n) = \alpha \det(A), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

et

$$\det(A^1, A^2, \dots, x+y, \dots, A^n) = \det(A^1, A^2, \dots, x, \dots, A^n) + \det(A^1, A^2, \dots, y, \dots, A^n)$$

- Si une colonne est combinaison linéaire des autres alors $|A| = 0$
- $|AB| = |A||B|$

Une relation importante relie l'inversibilité d'une matrice et le déterminant :

Théoreme 3 Une matrice A est inversible ou non-singulière si son déterminant est non nul.

Chapitre 2

Vecteurs propres et Valeurs propres de matrices

2.1 Définition et propriétés

2.1.1 définitions

Soit A une matrice carrée d'éléments de \mathbb{C} appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}$, un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est appelé une valeur propre de A s'il existe un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que :

$$Ax = \lambda x$$

Le vecteur x satisfaisant cette relation est appelé vecteur propre de A correspondant à la valeur propre λ

Définition 14 *On appelle spectre de la matrice A l'ensemble des valeurs propres de A .*

Définition 15 *Le rayon spectral de A est le nombre $\rho(A) = \max_{i=1 \dots N} |\lambda_i|$*

Remarque 1 *L'ensemble E_λ de tous les vecteurs propres associés à λ est un sous-espace de \mathbb{C}^n appelé sous-espace propre à λ*

Remarque 2 *Un vecteur propre n'est défini qu'à un facteur multiplicatif près :*

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A(\alpha x) = \lambda(\alpha x) \quad \forall \alpha \neq 0$$

On peut donc choisir α de sorte que $\|x\| = 1$.

Le théorème suivant permet d'avoir une règle principale pour calculer les valeurs propres et vecteurs propres.

Théorème 4 *Soit A une matrice carrée sur de n éléments de \mathbb{C} , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

8CHAPITRE 2. VECTEURS PROPRES ET VALEURS PROPRES DE MATRICES

1. un scalaire λ est une valeur propre de A
2. la matrice $M = A - \lambda I$ est singulière
3. le scalaire λ est une racine du polynôme de degré n appelé polynôme caractéristique de A :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Remarque 3 On peut donc déduire grâce aux propriétés des polynômes et leurs racines, que le polynôme caractéristique de A s'écrit :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{k_p}$$

où les λ_i sont les p racines distinctes de $P_A(\lambda)$, k_i est la multiplicité de la racine λ_i .

Remarque 4 Si on se restreint à des matrices d'éléments de \mathbb{R} et des valeurs propres dans \mathbb{R} , certaines matrices peuvent ne pas avoir de valeurs propres et de vecteurs propres.

2.2 Diagonalisation des matrices

2.2.1 Définitions

Définition 16 Soit A une matrice carrée d'ordre n , on dit que la matrice $B \in \mathcal{M}_{n,n}$ est semblable à A si il existe une matrice S telle que :

$$B = S^{-1}AS$$

Définition 17 une matrice A est dite diagonalisable s'il existe une matrice non-singulière P telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale, c'est à dire si A est semblable à une matrice diagonale D .

Le théorème suivant permet de caractériser les matrices diagonalisables.

Théoreme 5 Soit A une matrice carrée d'ordre n . A est diagonalisable si et seulement si A possède N vecteurs propres linéairement indépendants. Dans ce cas, les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres correspondantes de A et $D = P^{-1}AP$ où P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de A .

Preuve

Proposition 2.2.1.1 Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendant.

Preuve

Corollaire 2 Si une matrice A d'ordre n admet n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable

2.3 Algorithme de diagonalisation

Dans ce paragraphe, un algorithme permettant de déterminer les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice A est proposé.

1. Etape 1 - Trouver le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ de A
2. Etape 2 - Calculer les racines de $P_A(\lambda)$ afin de déterminer le spectre de A
3. Etape 3 - répéter (a) et (b) pour chaque valeur propre λ de A
 - (a) Former la matrice $M = A - \lambda I$
 - (b) Trouver une base de l'espace solution du système $Mx = 0$. (les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres linéairement indépendants associés à λ)
4. Soit $S = \{x_1, \dots, x_m\}$ l'ensemble des vecteurs propres obtenus à l'étape précédent. Si $m \neq n$ alors A n'est pas diagonalisable et si $m = n$ alors on pose P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\{x_1, \dots, x_m\}$ alors :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2.4 Diagonalisation des matrices symétriques réelles

Dans ce paragraphe, le problème de diagonalisation des matrices symétriques réelles est considéré. En effet, beaucoup de matrices réelles ne sont pas diagonalisables car elles peuvent ne pas avoir de valeurs propres réelles.

Définition 18 On appelle matrice adjointe de A la matrice notée A^* dont le terme général est :

$$a_{i,j}^* = \bar{a}_{j,i}$$

Définition 19 On dit que une matrice est normale si $A^*A = AA^*$.

Théoreme 6 A est une matrice normale si et seulement si il existe une matrice unitaire U (i.e $U^*U = I$) telle que :

$$A = UDU^*$$

où D est la matrice diagonale formée de valeurs propres. Autrement dit, une matrice normale est diagonalisable et les vecteurs propres sont orthogonaux.

Preuve voir Théodore et Lascaux p 51

Théoreme 2.4.0.1 *Une matrice hermitienne (i.e telle que $A^* = A$) est diagonalisable. Ses valeurs propres sont réelles et ses vecteurs propres orthogonaux.*

Corollaire 3 *Une matrice symétrique et réelle est diagonalisable. Ses valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres sont orthogonaux*

Chapitre 3

Applications linéaires

3.1 Rappels sur les applications

Définition 20 Soit A et B deux ensembles non vides quelconques. Supposons qu'à un élément de A , on fait correspondre un unique élément de B alors l'ensemble de ces correspondances forment les applications de A vers B . Une application f de A vers B est notée :

$$f : A \rightarrow B$$

On note $f(a)$, l'élément de B associé à a par l'application f . $f(a)$ est appelé l'image de a par f .

Soit une application $f : A \rightarrow B$. Si A' est un sous-ensemble de A alors $f(A')$ désigne l'ensemble des images de A' . Si B' est un sous-ensemble de B alors $f^{-1}(B')$ désigne l'ensemble des éléments de A dont l'image appartient à B' :

$$f(A') = \{f(a) : a \in A'\} \quad f^{-1}(B') = \{a \in A : f(a) \in B'\}$$

$f(A')$ est appelé image de A' et $f^{-1}(B')$ image réciproque ou préimage de B' .

Exemple 1 Quelques exemples d'application :

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à tout réel x associe son carré :

$$x \mapsto x^2 \quad \text{ou} \quad f(x) = x^2$$

2. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{2,3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

alors la matrice A détermine une application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 définie par :

$$x \mapsto Ax = F(x) \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}^3$$

Ainsi si $x = (3, 1, 2)^t$ alors $F(x) = (-10, 12)^t$

Définition 21 *Composition de fonctions :*

Soit deux applications $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$. On peut construire une application composée de $A \rightarrow C$ définie par :

$$a \mapsto g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

La composition d'applications est une opération associative.

Définition 22 1. Une application $f : A \rightarrow B$ est injective si deux éléments distincts de A ont des images distinctes :

$$\text{si } a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

2. Une application $f : A \rightarrow B$ est surjective si tout élément b de B est l'image d'au moins un élément de A .

$$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ tel que } b = f(a)$$

3. Soit A un ensemble quelconque : l'application $f : A \rightarrow A$ définie par $f(a) = a$. On appelle cette application l'application identité et elle est notée 1_A .

4. Soit $f : A \rightarrow B$, l'application $g : B \rightarrow A$ est appelée l'inverse de f et notée f^{-1} si :

$$f \circ g = 1_B \quad g \circ f = 1_A$$

Dans ce cas, on dit que f est une application inversible et on peut montrer que f est inversible si et seulement si f est injective et surjective. Ainsi si $b \in B$ alors $f^{-1}(b) = a$ où a est l'unique élément de A tel que $f(a) = b$.

3.2 Applications linéaires

Définition 23 Soit E et F deux espaces vectoriels sur un même corps \mathbb{K} . Une application $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1. $\forall x, y \in E, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Remarque 5 La condition $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ est une autre condition qui s'obtient en appliquant les deux conditions de linéarité. Elle caractérise complètement les applications linéaires et de ce fait et parfois utilisée en tant que définition.

Exemple 2 1. Soit A une matrice $m \times n$ sur un corps \mathbb{K} . A détermine une application $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ par la correspondance $x \mapsto Ax$. On peut montrer grâce aux propriétés des matrices que f est une application linéaire.

3.2.1 Noyau et Image

Définition 24 soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, l'image de f notée $Im f$ est l'ensemble des vecteurs de F images par f des éléments de E :

$$Im f = \{y \in F : f(x) = y, \forall x \in E\}$$

le noyau de f noté $Ker f$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est 0_U .

$$Ker f = \{x \in E : f(x) = 0\}$$

Exemple 3

Théoreme 7 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire de E vers F alors $Im f$ est un sous-espace de F et $Ker f$ un sous-espace de E .

Théoreme 8 Supposons que les vecteurs $\{e^{(1)}, \dots, e^{(n)}\}$ engendrent l'espace E , alors, les vecteurs $\{f(e^{(1)}), \dots, f(e^{(n)})\}$ engendrent $Im f$

Théoreme 9 On a également les équivalences suivantes :

1. f injective $\Leftrightarrow Ker f = 0$
2. f surjective $\Leftrightarrow Im f = F$

Théoreme 10 Soit $\{e^{(1)}, \dots, e^{(n)}\}$ une base de E

1. f injective $\Rightarrow \{f(e^{(1)}), \dots, f(e^{(n)})\}$ forme une base de $Im f$
2. f surjective $\Rightarrow \{f(e^{(1)}), \dots, f(e^{(n)})\}$ engendrent F

3.2.2 Rang et Nullité

Rapellons tout d'abord qu'un espace vectoriel E est dit de dimension finie n si E admet une base ayant n éléments et on note :

$$\dim E = n$$

Théorème 11 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f une application linéaire de E vers F alors,*

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$$

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, alors le rang de f est la dimension de son espace image et la nullité de f la dimension de son noyau :

$$\text{rang } f = \dim \text{Im } f \quad \text{nullité } f = \dim \text{Ker } f$$

Ainsi, l'équation du théorème précédent peut s'écrire :

$$\text{rang } f + \text{nullité } f = \dim E$$

3.2.3 Applications linéaires singulières

3.3 Opérations sur les applications linéaires

Les applications linéaires peuvent être combinées de manière diverses afin d'obtenir d'autres applications linéaires.

Ainsi, si on définit la somme de deux applications linéaires f et g tout deux définies de E vers F comme étant :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in E$$

et la multiplication par un scalaire comme :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in E, \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

alors on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 12 :

Soit E et F deux espaces vectoriels sur un corps \mathbb{K} , alors l'ensemble de toutes les applications linéaires de E vers F munies de l'opération d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire forme un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

De la même manière que pour les applications, on peut définir la composition d'applications linéaires. En effet, si f et g sont deux applications linéaires de sorte que $g \circ f$ soit définies alors cette dernière est également linéaire.

Par ailleurs, les opérations d'additions et de multiplications d'application linéaires et la composition sont reliées de la façon suivante :

Théorème 13 *Soit E, F, G trois espaces vectoriels définis sur \mathbb{K} et f, f' deux application linéaires de E vers F et g, g' deux applications linéaires de F vers G alors, on a :*

1. $g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'$
2. $(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$
3. $\alpha(g \circ f) = \alpha g \circ f = g \circ \alpha f \quad \alpha \in \mathbb{K}$

Chapitre 4

Matrices et Applications linéaires

4.1 Représentation matricielle d'une application linéaire quelconque

Soit A une application linéaire de E dans F où E et F sont des espaces tels que $\dim E = m$ et $\dim F = n$. Soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ et $\{f_1, \dots, f_n\}$ des bases arbitraires de E et F . L'expression des images des vecteurs de la base de E par l'application linéaire est donné par :

$$\begin{aligned} A(e_1) &= a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \dots + a_{1n}f_n \\ A(e_2) &= a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{2n}f_n \\ &\vdots = \vdots \\ A(e_m) &= a_{m1}f_1 + a_{m2}f_2 + \dots + a_{mn}f_n \end{aligned}$$

la matrice notée $[A]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{f}}$, et obtenue par la transposition des coefficients ci-dessus est appelé la représentation matricielle de A relativement à la base \mathbf{e} et \mathbf{f} :

$$[A]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cette matrice permet d'obtenir les coordonnées dans F de l'image d'un vecteur $x \in E$ par la relation suivante :

$$\forall x \in E, [A]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{f}}[x]_{\mathbf{e}} = [A(x)]_{\mathbf{f}}$$

Théorème 14 *L'application qui à A associe $[A]$ est une application linéaire bijective de l'espace des applications linéaires de E dans F sur l'espace vectoriel des matrices.*

Remarque 6 *Une matrice de réel de dimension $m \times n$ a été identifiée à l'application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m définie par $x \mapsto Ax$. Le théorème précédent permet de généraliser cette identification à l'ensemble des applications linéaires d'un espace de dimension finie dans un autre espace de dimension finie. Dans ce cas la matrice est identifiée à l'application qui $x \in E$ associe $[A(x)]_f = [A][x]_e$*

Remarque 7 *La bijectivité entre l'espace des matrices et l'espace des applications linéaires peuvent induire un abus de notation entre A et $[A]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{f}}$.*

La multiplication matricielle a été définie de façon arbitraire dans les chapitres précédents. Cependant, on peut montrer que cette définition est en fait liée à la composition d'applications linéaires.

Théorème 15 *Soit $\{e_i\}$, $\{f_i\}$ et $\{g_i\}$ des bases de E , F , et G respectivement. Soit $A : E \rightarrow F$ et $B : F \rightarrow G$ des applications linéaires, alors :*

$$[B \circ A]_{\mathbf{g}}^{\mathbf{e}} = [A]_{\mathbf{f}}^{\mathbf{g}} [A]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{f}}$$

4.1.1 Changement de base

La représentation matricielle d'une application dépend des bases de E et F et il est possible d'analyser comment se comporte la représentation matricielle lorsque qu'on change de base.

Définition 25 *Soit la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ une autre base de E . On a :*

$$\forall i \quad e'_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} e_j$$

la matrice P de terme général $[P]_{i,j} = p_{j,i}$ est appelé matrice de passage de la base \mathbf{e} à la base \mathbf{e}'

Propriété Soit P une matrice de passage d'une base \mathbf{e} à la base \mathbf{e}' , alors P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de \mathbf{e}' à \mathbf{e} et on a :

$$\forall x \in E, \quad P[x]_{\mathbf{e}'} = [x]_{\mathbf{e}}$$

Théorème 16 *Soit P la matrice de passage d'une base $\{e_i\}$ vers une base $\{e'_i\}$ et Q la matrice de passage de $\{f_i\}$ vers $\{f'_i\}$ alors pour une application linéaire quelconque A de E dans F , on a :*

$$[A]_{\mathbf{e}'}^{\mathbf{f}'} = Q^{-1} [A]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{f}} P$$

En d'autres termes si la matrice A représente une application relativement à des bases données la matrice $B = Q^{-1}AP$ représente la même application dans deux autres bases avec P et Q les matrices de passages.

4.2 Opérateurs linéaires et matrices

Définition 26 *Un opérateur linéaire est une application linéaire d'un espace vectoriel E vers E . On les appelle également endomorphisme de E dans E et on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble de ces opérateurs.*

Définition 27 *Un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(E)$ est dit inversible si il existe un opérateur noté $T^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ tel que :*

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$$

Théoreme 17 *Soit T un opérateur linéaire sur un espace vectoriel E de dimension fini n . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. T est non singulier i.e $\text{Ker } T = \{0\}$
2. T est injectif
3. T est surjectif
4. T est inversible i.e T est bijective.

Preuve

4.2.1 Représentation matricielle des opérateurs linéaires

La représentation matricielle des opérateurs linéaires est un cas particulier du cas général décrit précédemment. Soit T un opérateur linéaire dans E et $\{e_i\}$ une base de E alors de manière générale, on écrit :

$$T(e_i) = \sum a_{ij} e_j$$

est la matrice $[T]$ associée à l'opérateur T est de terme général $[T]_{i,j} = a_{ji}$.

Exemple 4 *Considérons l'opérateur $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui a $(x, y) \mapsto (4x - 2y, 2x + y)$ et les bases de \mathbb{R}^2 suivantes :*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad E : \text{base canonique}$$

alors :

$$[A]_S = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad [A]_E = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Le cas du changement de base reste également un cas particulier du cas général qui a été présenté précédemment :

Théoreme 18 *Soit P la matrice de passage de la base $\{e\}$ à la base $\{e'\}$, alors pour tout opérateur linéaire de $\mathcal{L}(E)$, on a :*

$$[T]_{e'} = P^{-1}[A]_e P$$

Théoreme 19 *Deux matrices A et B représentent le même opérateur linéaire si et seulement si elles sont semblables.*

4.2.2 Diagonalisation d'opérateurs linéaires

Un opérateur linéaire T est dit diagonalisable si T peut être représenté par une matrice diagonale D . Ainsi, T est diagonalisable si il existe une base $E = \{e_i\}$ telle que :

$$\forall i, \quad T(e_i) = \lambda_i e_i$$

Ainsi T est représenté par la matrice D de terme générale $D_{ii} = \lambda_i$ relativement à la base $E = \{e_i\}$.

Les observations précédemment énoncés montrent un lien entre la diagonalisation entre un opérateur linéaire et une matrice. En effet, on peut considérer les λ_i comme étant les valeurs propres de T . Ce lien peut être énoncé formellement par le théorème suivant :

Théorème 20 *Soit A une représentation matricielle de l'opérateur linéaire T . T est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.*

Par conséquent, la diagonalisation d'un opérateur équivaut à diagonaliser une de ces représentations matricielles.

Exemple 5 *Diagonalisation d'opérateurs linéaires :*

1. *Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles engendrés par $\{e^{a_1 t}, \dots, e^{a_n t}\}$, et soit D l'opérateur de différentiation, on peut montrer que ces fonctions sont des fonctions propres de D associés aux valeurs propres a_k*
2. *Soit S un système linéaire défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ qui à un signal $x(t)$ associe $y(t) = h(t) * x(t)$. Soit E l'espace vectoriel réelles engendrés par $\{e^{i2\pi \frac{n}{T} t}\}$. Ces fonctions sont vecteurs propres de S associés aux valeurs propres $H(n/T)$ où H est la transformée de Fourier de $h(t)$.*

Chapitre 5

Résolution d'un système linéaire : méthodes directes

5.1 Introduction

Les problèmes de résolution de système linéaire est un problème classique en science et en ingénierie. Beaucoup de problèmes physiques nécessite la résolution d'un système linéaire (par exemple, un problème électrique avec loi de Kirchoff ou alors un problème de dispersion de la chaleur dans une barre). Nous allons dans ce chapitre faire le lien entre les applications linéaires, les matrices et les méthodes de résolution d'un système linéaires.

5.2 Rang d'une matrice

Définition 28 Soit $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$. Le rang de A est égal au nombre maximum de colonnes de A linéairement indépendant et on le note :

$$\text{rang } A$$

Le rang de A est donc aussi égal à la dimension de l'image de toute application linéaire représenté par A .

Propriété

- $\text{rang } A = \text{rang } A^t$
- si $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$ alors $\text{rang } A \leq \inf(n,p)$
- si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ alors A inversible $\Leftrightarrow \text{rang } A = n$

Définition 29 Soit $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$, on appelle matrice extraite de A une matrice obtenue par sélection de lignes et de colonnes. Par exemple si I et J respectivement un sous-ensemble de $\{1, \dots, p\}$ et $\{1, \dots, n\}$, on peut définir une matrice extraite B de A comme :

$$B = \{a_{i,j}\}_{i \in I, j \in J}$$

Théorème 21 Soit $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$ une matrice de rang r alors,

- le rang de toute matrice extraite de A est inférieur ou égal à r
- toute matrice carrée inversible extraite de A est d'ordre inférieur ou égal à r
- il existe une matrice carrée extraite de A d'ordre r qui est inversible.

5.3 Systèmes linéaires

Définition 30 On appelle système de p équations linéaires à n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n une famille d'équations qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$Ax = b$$

où $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$ est une matrice donnée et $b \in \mathbb{R}^p$

Si $b = 0$, on dit que le système est homogène. Dans le cas où $p < n$, on dit que le système est sous-déterminé et dans le cas où $n < p$ on parle d'un système sur-déterminé.

Théorème 22 Si b appartient à l'espace engendré par les colonnes de A alors le système $Ax = b$ admet au moins une solution.

Théorème 23 Une condition suffisante pour que le système $Ax = b$ admette au moins une solution est que les colonnes de A soient génératrices de \mathbb{R}^p , autrement dit, A doit être surjective ou $\text{rang } A = p$.

Corollaire 4 Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice carrée, une condition nécessaire et suffisante pour que le système $Ax = b$ est que $\det(A) \neq 0$ (ce qui est équivalent à A inversible, ou A bijectif, ou $\text{rang } A = n$). On parle alors d'un système de Cramer et la solution s'obtient par $x = A^{-1}b$

5.4 Résolution d'un système triangulaire supérieur

Considérons le problème de résolution d'un système linéaire lorsque $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice carrée et A de la forme triangulaire supérieure ie :

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$$

Dans ce cas, on parle d'un système triangulaire supérieur.

Remarque 8 Le cas des systèmes triangulaires inférieures n'est pas traité ici mais la technique de résolution est identique à celle abordée ici.

Le système d'équation $Ax = b$ a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & a_{13}x_3 & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 & a_{23}x_3 & \cdots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & = & \vdots \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{pmatrix}$$

Théoreme 24 Soit le système triangulaire supérieur $Ax = b$ où $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Si :

$$a_{kk} \neq 0 \quad \forall k \in [1, n]$$

alors le système admet une solution unique et cette solution x^* est telle que :

$$x_k^* = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}x_j^*}{a_{kk}} \quad k \in \{n, \dots, 1\}$$

5.5 Méthode de Gauss

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche x^* solution du système linéaire :

$$Ax = b$$

Le corollaire 4 donne l'équation de la solution qui nécessite le calcul de l'inverse de A . Nous décrivons dans ce paragraphe une méthode simple et efficace permettant de résoudre le problème sans avoir à calculer explicitement l'inverse de A .

La méthode consiste à construire un système équivalent plus facile à résoudre (une matrice triangulaire supérieure par exemple). Deux systèmes linéaires définis par deux matrices A et U appartenant à \mathcal{M}_{nn} sont dit équivalents si leurs solutions sont identiques.

Les transformations élémentaires suivantes appliquées à un système linéaire engendrent un système linéaire équivalent :

1. une équation peut être remplacée par cette même équation auquel on ajoute ou retranche un certain nombre de fois une autre ligne.
2. multiplication d'une équation par une constante non nulle
3. permutation de deux lignes ou de deux colonnes.

La représentation d'un système linéaire peut se faire à travers une matrice de dimension $n \times n + 1$ appelé matrice augmentée. La matrice augmentée

est notée $[A|B]$ et a pour forme générale :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

La résolution du système linéaire ayant pour matrice augmentée $[A|B]$ peut se résoudre en appliquant des transformations élémentaires permettant d'obtenir un système équivalent.

L'objectif de l'algorithme de Gauss est de construire un système triangulaire supérieur équivalent en mettant à 0 au fur et à mesure les termes en dessous de la diagonale.

Définition 31 On appelle pivot l'élément a_{kk} de la matrice A utilisée pour mettre à zéro les termes $a_{jk}, j > k$. La ligne k est alors appelé ligne pivot.

Théoreme 25 Soit un système linéaire définie par une matrice A d'ordre n et $b \in \mathbb{R}^n$. Si A est non-singulier alors, il existe une matrice U d'ordre n triangulaire supérieure et $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ux = y$ soit équivalent $Ax = b$. La résolution du système $Ax = b$ se fait ensuite par résolution du système triangulaire supérieur.

Preuve

Construisons la matrice augmentée $[A^{(1)}|B^{(1)}] = [A|B]$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right)$$

l'exposant indiquant le nombre de fois qu'une valeur a été stockée à la location i, j donnée. La première étape de l'algorithme de Gauss est de mettre à zéro l'ensemble des coefficients sur la première colonne en dessous de la diagonale. Cela s'obtient si a_{11} est non nulle en réalisant la transformation suivante sur la ligne $i > 1$:

$$a_{ij}^{(2)} \leftarrow a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}^{(1)} \quad j \in [1, n+1]$$

Ainsi, on obtient le système équivalent suivant :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right)$$

Les étapes suivantes consistent à faire de même sur les colonnes suivantes. Ainsi, l'étape k consiste à éliminer l'inconnu x_k dans les équations $k+1, \dots, n$. Ceci conduit aux formules suivantes définies pour les lignes $i = k+1, \dots, n$ en supposant que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$:

$$a_{ij}^{k+1} \leftarrow a_{ij}^k - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \quad j \in [k, n+1]$$

à la dernière étape $k = n$, on obtient le système équivalent suivant :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} & b_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array} \right)$$

la matrice U est donc définie comme étant la matrice $A^{(k)}$ et y le vecteur $b^{(k)}$

Remarque 9

- La ligne i de la matrice $[A^{(k)}|b^{(k)}]$ n'est plus modifiée par l'algorithme dès lors que $i \leq k$.
- A l'étape k , on pratique l'élimination sur une matrice de taille $n-k+1$ lignes et $n-k+2$ colonnes.

Remarque 10 Comment éviter un pivot nul ?

Si lors de l'algorithme de Gauss, l'élément $a_{kk}^{(k)}$ à l'étape k est nul alors la ligne k ne peut pas être utilisée comme ligne pivot. Dans ce cas, la stratégie est de chercher une ligne $j > k$ telle que $a_{jk}^{(k)}$ soit non nulle. Si une telle ligne existe, alors on permute la ligne j et k sinon le système n'admet pas de solution car le système est singulier.

Remarque 11 Comment minimiser les erreurs d'arrondis ?

Choisir le plus grand pivot en valeur absolue.

5.6 Méthodes LU

5.6.1 Principes

La première phase de la méthode de Gauss consiste à transformer le système $Ax = b$ en un système triangulaire $Ux = y$ avec U une matrice triangulaire supérieure. Supposons qu'aucune permutation n'ait été effectuée, on peut alors montrer que U et y ont été obtenues à partir de A et b en les multipliant par une même matrice R triangulaire et inversible, ie :

$$U = RA \quad y = Rb$$

on a donc $A = R^{-1}U$. Et si on pose $L = R^{-1}$ et $U = R$, on peut donc décomposer A en un produit de matrice triangulaire inférieure L (L pour Lower) et une matrice triangulaire supérieure U (U pour Upper). La méthode de Gauss appartient donc à la classe des méthodes LU.

Elles consistent à obtenir une décomposition de A du type LU et à résoudre le système triangulaire $Ly = b$ puis ensuite le système triangulaire $Ux = y$ (L et U étant supposé inversibles) :

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ LUx &= b \\ Ly &= b \quad \text{avec } y = Ux \end{aligned}$$

5.6.2 Décomposition LU

Définition 32 Une matrice non-singulière A admet une factorisation triangulaire si il existe une matrice L et U respectivement triangulaire inférieure et triangulaire supérieure telles que :

$$A = LU$$

Théoreme 26 Soit le système linéaire $Ax = b$ si au cours de l'élimination de Gauss de la matrice A , aucun pivot n'est nul alors il existe L et U respectivement matrice triangulaire inférieure et triangulaire supérieure telle que :

$$A = LU$$

si de plus on impose $L_{kk} = 1$ alors la factorisation est unique.

La matrice U s'obtient naturellement en appliquant la méthode de Gauss tandis que la matrice L s'écrit de la façon suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

où pour $i > 1$ un $\ell_{i,k} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$.

Ainsi, comme on peut le constater par rapport à la formule générale d'élimination de Gauss, la matrice L est composée des facteurs multiplicatifs permettant de mettre à zéro les éléments sous le pivot.

L'hypothèse du théorème précédent est trop forte pour pouvoir être appliquée à une large classe de système linéaire, car il existe des problèmes simples pour laquelle un des pivots est nul. Le théorème suivant permet d'étendre la factorisation LU à un cadre plus générale.

Théorème 27 *Soit A une matrice carrée d'ordre n non-singulière, alors il existe une matrice de permutation P telle que les pivots de PA soient non nulles. Ainsi, il existe deux matrices L et U telles que $PA = LU$.*

Le système linéaire $Ax = b$ est équivalent au système $PAx = Pb$ et la résolution du système se fait selon les étapes suivantes :

1. construire U , L , et P
2. calculer Pb
3. résoudre $Ly = Pb$ (système triangulaire inférieur)
4. résoudre $Ux = y$ (système triangulaire supérieur)

5.7 Algorithmes

5.7.1 Méthode de Gauss : Triangularisation du système

```

pour  $k = 1$  à  $n - 1$ 
  pivot  $\leftarrow a_{kk}$  (stratégie de pivot)
  si pivot  $\neq 0$  alors
    pour  $i = k + 1$  à  $n$ 
       $b_i \leftarrow b_i - \frac{a_{ik}}{\text{pivot}} b_k$ 
      pour  $j = k + 1$  à  $n$ 
         $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{ik}}{\text{pivot}} a_{kj}$ 
      finpour
    finpour
  sinon "problème"
  finsi
finpour

```

5.7.2 Résolution d'un système triangulaire supérieur

```

 $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ 
pour  $i = n - 1$  à  $1$ 
  somme  $\leftarrow b_i$ 
  pour  $j = i + 1$  à  $n$ 
    somme  $\leftarrow$  somme -  $a_{ij} x_j$ 
  finpour
   $x_i \leftarrow \frac{\text{somme}}{a_{ii}}$ 
finpour

```

5.7.3 Résolution d'un système triangulaire inférieur

```

 $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$ 
pour  $i = 2$  à  $n$ 
  somme  $\leftarrow b_i$ 
  pour  $j = 1$  à  $i - 1$ 
    somme  $\leftarrow$  somme -  $a_{ij}x_j$ 
  finpour
 $x_i \leftarrow \frac{\text{somme}}{a_{ii}}$ 
finpour

```

5.7.4 Décomposition LU

```

pour  $k = 1$  à  $n - 1$ 
  pivot  $\leftarrow a_{kk}$  (stratégie de pivot)
  si pivot  $\neq 0$  alors
     $\ell_{kk} = 1$ 
    pour  $i = k + 1$  à  $n$ 
       $\ell_{ik} = \frac{a_{ik}}{\text{pivot}}$ 
      pour  $j = k + 1$  à  $n$ 
         $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \ell_{ik}a_{kj}$ 
      finpour
    finpour
  sinon "problème"
  finsi
finpour
 $U \leftarrow A$ 

```

Chapitre 6

Résolution d'un système linéaire : méthodes directes II

6.1 Introduction

Parmi les systèmes linéaires auxquels les ingénieurs sont confrontés lors de la résolution d'un problème physique, certains présentent des propriétés particulières. Par exemple, les matrices associées à ces systèmes peuvent être : symétrique, à bande, etc ... L'objectif de ce chapitre est d'étudier la résolution de système linéaire pour lequel la matrice associée est définie positive

6.2 Définitions et propriétés des matrices définies positives

Définition 33 *Matrice symétrique*

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On dit que A est symétrique si $A = A^t$.

Définition 34 *Matrice définie positive*

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On dit que A est définie positive si elle vérifie la condition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ et } x \neq 0, \quad x^t A x > 0$$

Remarque 12 *le terme $x^t A x$ peut être interprété comme étant le produit scalaire dans \mathbb{R}^n entre l'image de x par l'application linéaire associée à A et x .*

Propriété si une matrice carrée A d'ordre n est symétrique définie positive alors :

- $a_{ii} > 0$
- $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj} \quad \forall i \neq j$
- $\max_{j,k} |a_{jk}| \leq \max_i |a_{ii}|$

Théorème 28 *si une matrice carrée A d'ordre n est définie positive alors elle est inversible.*

Corollaire 5 *si une matrice carrée A d'ordre n est définie positive, alors le système linéaire $Ax = b$ où x et b appartiennent à \mathbb{R}^n admet une solution unique.*

Théorème 29 *Soit M une matrice carré réel d'ordre n et non-singulière, alors la matrice $A = MM^t$ est symétrique définie positive.*

Preuve

Ce dernier théorème facilite la construction de matrice définie positive.

Exemple 6

- soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ alors comme $\det M = -2$, la matrice $A = MM^t$

est définie positive avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$

- Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors la matrice

$$A = MM^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

est définie positive

Le théorème qui suit est un résultat important dans la mesure où elle caractérise les matrices définies positives.

Théorème 30 Factorisation de Choleski :

Soit A une matrice carré d'ordre n symétrique définie positive alors, A peut se décomposer de manière unique en :

$$A = GG^t$$

où G est une matrice triangulaire inférieure avec des éléments diagonaux positifs.

Ainsi ce théorème permet de déduire que la méthode de construction de matrice symétrique définie positive (théorème 29) engendre en fait l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

L'utilité de la décomposition de Choleski réside dans le fait que G et G^t sont respectivement des matrices triangulaire inférieure et triangulaire supérieure. Ainsi si A est une matrice symétrique définie positive alors le système $Ax = b$ peut être décomposé en $GG^t x = b$ et ce système peut se résoudre efficacement en résolvant les systèmes triangulaires $Gy = b$ et $G^t x = y$.

La décomposition de Choleski peut donc être assimilé à une décomposition LU et ressemblent à une méthode de Gauss.

6.3 Algorithme de décomposition de Choleski

Avant de décrire l'algorithme de décomposition, nous allons étudier la décomposition $A = GG^t$. Ainsi, si on suppose que A est définie positive alors on a $A = GG^t$ soit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

En remarquant que a_{ij} est le produit de la colonne ligne i de G et la colonne j de G^t alors on a :

$$a_{i1} = \sum_{k=1}^n g_{ik} g_{k1}^t = \sum_{k=1}^n g_{ik} g_{1k} = g_{i1} g_{11} + g_{i2} g_{12} + \cdots + g_{in} g_{1n} = g_{i1} g_{11}$$

En particulier si $i = 1$, on a $g_{11} = \sqrt{a_{11}}$ (g_{11} est bien positif). La connaissance de g_{11} permet de calculer les g_{i1} car :

$$g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}}$$

Si on raisonne de la même manière pour la deuxième colonne de G , on a :

$$a_{i2} = \sum_{k=1}^n g_{ik} g_{2k} = g_{i1} g_{21} + g_{i2} g_{22}$$

et si on prend $i = 2$ alors $a_{22} = g_{21}^2 + g_{22}^2$. La seule inconnue dans cette équation étant g_{22} , on obtient :

$$g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2}$$

et une fois que g_{22} est connue, on a :

$$g_{i2} = \frac{a_{i2} - g_{i1}g_{21}}{g_{22}} \quad i = 3, \dots, n$$

Nous pouvons maintenant généraliser la procédure au calcul de la colonne j en supposant que les premières $j - 1$ colonnes ont déjà été calculées. Ainsi :

$$a_{ij} = g_{i1}g_{j1} + g_{i2}g_{j2} + \dots + g_{ik}g_{jk} + \dots + g_{ij}g_{jj}$$

et seul les éléments g_{ij} et g_{jj} sont inconnus. Si on pose $i = j$, on a donc :

$$g_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk}^2} \quad (6.1)$$

et par conséquent :

$$g_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}g_{jk}}{g_{jj}} \quad i = j + 1, \dots, n \quad (6.2)$$

Ces deux dernières équations décrivent complètement l'algorithme de décomposition de Choleski.

Remarque 13

- L'unicité de la décomposition s'obtient par la contrainte $g_{jj} > 0$.
- L'algorithme de décomposition sert également de test de symétrie définie positivité d'une matrice car les théorèmes (29) et (30) démontrent l'équivalence entre la symétrie définie positivité et la décomposition en GG^t .
- Si on compare les coûts de l'algorithme de Gauss et la méthode de Choleski, on a :
 - Gauss : $(n^3 - n)/3$ additions, $(n^3 - n)/3$ multiplications et $(n(n-1)/2)$ divisions, soit un coût de l'ordre de $2n^3/3$
 - Choleski : $\approx n^3/6$ additions, $\approx n^3/6$ multiplications, $\approx n^2/2$ divisions et n extraction de racines soit un coût de l'ordre de $n^3/3$.

6.3.1 Décomposition de Choleski

```
pour  $i = 1$  à  $n$ 
  somme ← 0
  pour  $j = 1$  à  $i-1$ 
    somme ← somme +  $g_{ij}^2$ 
  finpour
   $s \leftarrow a_{ii} - \text{somme}$ 
  si  $s \leq 0$  alors "arrêt car  $A$  n'est pas définie positif
  sinon
     $g_{ii} \leftarrow \sqrt{s}$ 
    pour  $j = i+1$  à  $n$ 
      somme = 0
      pour  $k = 1$  à  $i-1$ 
        somme ← somme +  $g_{ik}g_{jk}$ 
      finpour
       $g_{ji} \leftarrow \frac{a_{ij} - \text{somme}}{g_{ii}}$ 
    finpour
  finsi
```


Chapitre 7

Résolution d'un système linéaire : méthodes itératives

7.1 Introduction

Les méthodes directes de résolution de systèmes linéaires fournissent une solution x au problème $Ax = b$ en un nombre fini d'opérations. Si l'ordre n de la matrice A est élevée, le nombre d'opérations est élevé et de plus, le résultat obtenu n'est pas rigoureusement exact.

Par ailleurs, il existe des cas où les structures du système linéaire ne sont tirés à profit par les méthodes directes. C'est par exemple le cas des systèmes où la matrice A est très creuse.

C'est la raison pour laquelle, dans ce cas, on préfère utiliser des méthodes itératives. L'objectif est de construire une suite de vecteurs $\{x^{(k)}\}_{k=1\dots n}$ qui tend vers un vecteur \bar{x} , solution exacte du problème $Ax = b$. Souvent, on part d'une approximation $\{x^{(0)}\}$ de \bar{x} obtenue en général par une méthode directe.

7.2 Les méthodes itératives

L'objectif est de résoudre un système de type $Ax = b$. Pour cela, nous allons décomposer la matrice A en :

$$A = M - N$$

de sorte que M soit inversible. Ainsi, le système devient :

$$Mx = Nx + b$$

et nous cherchons par récurrence une suite de vecteur $x^{(i)}$ obtenu à partir d'un vecteur $x^{(0)}$ et de la relation :

$$Mx^{k+1} = Nx^k + b$$

c'est à dire

$$x^{k+1} = M^{-1}Nx^k + M^{-1}b$$

Cette relation est une relation de récurrence du premier ordre. Nous pouvons en déduire une relation reliant $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$ à $e^{(k-1)} = x^{(k-1)} - \bar{x}$:

$$M(x^{(k)} - \bar{x}) = N(x^{(k-1)} - \bar{x})$$

puisque $M\bar{x} = N\bar{x} + b$ et donc $e^{(k)} = M^{-1}Ne^{(k-1)}$ pour $k = 1, 2, \dots$

Si on pose $B = M^{-1}N$, nous avons alors :

$$e^{(k)} = B^{(k)}e^{(0)}$$

La convergence de la suite $x^{(k)}$ vers la solution \bar{x} est donnée par le théorème suivant :

Le choix de la décomposition de A devra respecter les directives suivantes :

- $\rho(M^{-1}N)$ doit être strictement inférieur à 1
- La résolution de $Mx^k = Nx^{k-1} + b$ doit être simple et nécessiter le moins d'opérations possibles.
- Pour obtenir la meilleure convergence, $\rho(M^{-1}N)$ doit être le plus petit possible.

On voit que la convergence dépend de la décomposition. Nous allons décrire les principales décompositions utilisées. On écrit A sous la forme :

$$A = D + E + F$$

avec D la matrice diagonale suivante :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & \dots \\ \vdots & a_{22} & 0 & \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

E la matrice triangulaire inférieure suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \dots \\ a_{2,1} & 0 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

F la matrice triangulaire supérieure suivante :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous obtiendrons donc la décomposition $A = M - N$ à partir de différents types de regroupement de ces matrices D, E, F .

7.2.1 La méthode de Jacobi

On pose :

$$M = D \quad N = -(E + F)$$

ainsi, $B = M^{-1}N = D^{-1}(-E - F)$, ce qui implique :

$$x^{k+1} = D^{-1}(-E - F)x^k + D^{-1}b$$

et si on exprime cette relation en fonction des éléments de la matrice A , nous avons :

$$x_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

7.2.2 La méthode de Gauss-Seidel

Cette méthode utilise $M = D + E$ et $N = -F$. D'où $B = -(D + E)^{-1}F$. Alors, on a :

$$x^{k+1} = -(D + E)^{-1}F x^k + (D + E)^{-1}b$$

Le calcul de l'inverse de $D + E$ peut être évité. Si on écrit $(D + E)x^{k+1} = -Fx^k + b$, on obtient :

$$\sum_{j=1}^i a_{ij} x_j^{(k+1)} = - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

d'où

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

pour $i = 1 \dots n$.

7.2.3 La méthode de relaxation

On se pose un paramètre $w \in]0, 2[$, appelé facteur de relaxation, et on pose :

$$M = \frac{D}{w} + E \quad N = \left(\frac{1-w}{w} \right) D - F$$

et par conséquent :

$$\left(\frac{D}{w} + E \right) x^{(k+1)} = \left(\frac{1-w}{w} D - F \right) x^{(k)} + b$$

d'où

$$x_i^{(k+1)} = (1-w)x_i^{(k)} + \frac{w}{a_{ii}} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \right)$$

pour $i = 1 \cdots n$. Comme on peut le constater, la méthode de Gauss-Seidel correspond à la méthode de relaxation pour $w = 1$

7.3 Convergence des méthodes itératives

Comme la convergence des méthodes itératives dépend fortement du rayon spectral de A , nous allons commencer par étudier les propriétés de certaines matrices et la localisation de leur valeurs propres.

Définition 7.3.0.1 Soit A une matrice avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Etant donnée une norme vectorielle sur \mathbb{R}^n , on définit la norme matrice induite (ou subordonnée), une norme matricielle définie par :

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Propriété Soit A et B deux matrices telles que leur multiplication soit compatible alors on a :

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

pour toute norme induite

Théorème 31 *Théorème de Gerschgorin-Hadamard*

Les valeurs propres d'une matrice A appartiennent à l'union des n disques D_k pour $k = 1, \cdots, n$ du plan complexe ($\lambda \in \cup_{k=1}^n D_k$ où D_k , appelé, disque de Gerschgorin, est défini par :

$$|z - a_{kk}| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|$$

7.3.1 Cas général

Considérons une méthode itérative définie comme :

$$\begin{cases} x^0 \\ x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d \end{cases}$$

Théoreme 32 Soit A une matrice d'ordre n , pour que $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$, il faut et il suffit que $\rho(A) < 1$.

Théoreme 33 Si il existe une norme induite telle que $\|C\| < 1$ alors la méthode itérative décrite ci-dessus est convergente quelque soit $x^{(0)}$ et elle converge vers la solution de :

$$(I - C)x = d$$

Théoreme 34 Une condition nécessaire et suffisante de convergence de la méthode ci-dessus est que :

$$\rho(C) < 1$$

La condition de convergence donnée par le rayon spectral n'est pas dépendant de la norme induite, cependant d'un point de vue pratique, elle est peut utile car le calcul du rayon spectral peut être difficile.

7.3.2 Cas des matrices à diagonale strictement dominante

Définition 7.3.2.1 Une matrice est dite à diagonale dominante si :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad |a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

et elle est dite à diagonale strictement dominante si :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

Théoreme 35 Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors A est inversible et en outre, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent.

Preuve Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, on montre que A est inversible en démontrant que 0 n'est pas valeur propre (ie $\text{Ker } A = 0$). Posons $B = M^{-1}N$ et soit λ et v tel que $Bv = \lambda v$ avec $v \neq 0$. Puisque l'on s'intéresse à $\rho(B)$ et on aimerait que $\rho(B) < 1$, on s'intéresse en fait à la plus grande valeur propre de plus grand module de B . Ainsi, on peut supposer que $\lambda \neq 0$. L'équation $Bv = \lambda v$ devient :

$$\left(M - \frac{1}{\lambda} N \right) v = 0$$

1. Jacobi : l'équation devient

$$\left(D + \frac{1}{\lambda} E + \frac{1}{\lambda} F \right) v = 0$$

soit $C = D + \frac{1}{\lambda}E + \frac{1}{\lambda}F$. Si $|\lambda| \geq 1$, on aurait :

$$|c_{ii}| = |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \geq \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{\lambda} \right| = \sum_{j \neq i} |c_{ij}|$$

donc C serait à diagonale strictement dominante et par conséquent inversible. C inversible implique que $Cv = 0 \Rightarrow v = 0$. Or $v \neq 0$, d'où la contradiction et donc $|\lambda| < 1$.

2. Gauss-Seidel : l'équation devient

$$\left(D + E + \frac{1}{\lambda}F \right) v = 0$$

et en posant encore $C = D + E + \frac{1}{\lambda}F$, et en supposant que $|\lambda| \geq 1$, on a :

$$|c_{ii}| = |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \geq \sum_{j < i} |a_{ij}| + \sum_{j > i} \left| \frac{a_{ij}}{\lambda} \right| = \sum_{j \neq i} |c_{ij}|$$

et on obtient le même type de contradiction.

7.3.3 Cas des matrices symétriques définies positives

Pour le cas des matrices réelles symétriques définies positives, le théorème suivant est vérifié :

Théorème 36 *Si A est une matrice symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel et de relaxation pour $(w \in]0, 2[)$ convergent.*

La convergence de la méthode est d'autant plus rapide que $\rho(M^{(-1)}N)$ est petit. Or cette matrice $B = M^{(-1)}N$ dépend de w . Une étude théorique des valeurs propres de B montre que l'allure de la courbe $\rho(B)$ en fonction de w est décroissant entre 0 et w_{opt} et croissant entre w_{opt} et 2. Par ailleurs, on a toujours $1 < w_{opt} < 2$. On a intérêt à choisir w le plus proche possible de w_{opt} .

7.4 La méthode de correction

Soit un vecteur résidu en x défini comme :

$$r(x) = b - Ax$$

et $\{r^{(k)}\}$ le résidu en $\{x^{(k)}\}$ (le résidu de \bar{x} étant nul). On appelle également l'erreur en k le vecteur :

$$e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$$

Si on possède une approximation $\{x^{(0)}\}$ de x , la relation suivante est vérifiée :

$$Ae^{(0)} = A(x^{(0)} - \bar{x}) = Ax^{(0)} - b = -r^{(0)}$$

ce qui signifie que $e^{(0)}$ est la solution du système $Ax = -r^{(0)}$ et théoriquement, on a $\bar{x} = x^{(0)} - e^{(0)}$. Pratiquement, en appliquant au système $Ax = -r^{(0)}$ la méthode directe qui nous a fourni $x^{(0)}$, on n'obtient pas directement $e^{(0)}$, mais une approximation $y^{(0)}$ de $e^{(0)}$.

Si on pose $x^{(1)} = x^{(0)} - y^{(0)}$, $x^{(1)}$ est une nouvelle approximation de \bar{x} , et en itérant les calculs précédents, on obtient :

$$Ae^{(1)} = A(x^{(1)} - \bar{x}) = Ax^{(1)} - b = -r^{(1)}$$

la résolution du système $Ax = -r^{(1)}$ donnera une approximation $y^{(1)}$ de $e^{(1)}$, et une nouvelle approximation $x^{(2)}$ de \bar{x} :

$$x^{(2)} = x^{(1)} - y^{(1)} = x^{(0)} - y^{(0)} - y^{(1)}$$

Ces calculs peuvent être itérés autant de fois que nécessaire, pour s'arrêter lorsque le résidu est suffisamment petit. A la k ème itération, les relations suivantes sont vérifiées :

$$y^{(k-1)} : \text{approximation de } e^{(k-1)}$$

et,

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - y^{(k-1)} = x^{(0)} - \sum_{i=0}^{k-1} y^{(i)}$$

avec $y^{(i)}$ une approximation de $e^{(i)}$, solution de $Ax = -r^{(i)}$ et $i = 1 \dots k-1$.

Si nous arrêtons lorsque $k = N$, il est nécessaire de résoudre $N + 1$ systèmes linéaires : d'abord $Ax = b$, pour obtenir $x^{(0)}$ puis $Ax = -r^{(i)}$ pour $i = 0 \dots N-1$ afin d'obtenir $y^{(i)}$. Une fois la matrice A décomposée (en LU ou Choleski), il s'agit donc de résoudre les systèmes $LUx = -r^{(i)}$ où $r^{(i)}$ a été calculé par la relation $r^{(i)} = b - Ax^{(i)}$.

Il s'avère en général qu'une seule itération suffit pour améliorer la solution et que les itérations suivantes ne donnent aucun gain supplémentaire de précision.

Chapitre 8

Approximation au sens des moindres carrées

8.1 Introduction

Supposons que l'on veuille résoudre le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots = \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

où il s'agit de déterminer x connaissant les a_{ij} et les b_i . En général, on suppose que p est grand devant n , et on se retrouve donc dans le cas d'un système surdéterminé.

Ce genre de problème intervient lorsque l'on cherche à modéliser par exemple un système physique, et pour cette raison, les coefficients a_{ij} et b_i sont souvent des résultats d'expériences ou de mesures, pouvant être entachés d'erreurs.

La mise sous forme matricielle du problème donne :

$$Ax = b$$

où $A \in \mathcal{M}_{p,n}$, $b \in \mathbb{R}^p$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Une condition d'existence d'une solution x est que b appartienne à $\text{Im}A$. Cependant, cette condition n'est pas toujours vérifiée et dans ce cas, l'objectif est de trouver une solution x qui vérifie au mieux le système $Ax = b$. Ainsi, on introduit le vecteur $r(x)$:

$$r(x) = Ax - b$$

appelé le résidu de x . Il s'agit donc de trouver une solution \bar{x} qui rende le résidu le plus petit possible. Comme $x \in \mathbb{R}^n$, la notion de "plus petit possible" doit être associée à une norme $\|\cdot\|_p$. Dans le cas qui nous intéresse,

la norme utilisée est la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ et par conséquent, on définit le problème des moindres carrés de la façon suivante.

Définition 8.1.0.1 Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}$ et $b \in \mathbb{R}^p$ données avec $p \geq n$. On appelle problème de moindres carrés le problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

8.2 Minimisation de fonctions quadratiques

Nous allons aborder dans ce paragraphe une méthode analytique permettant de calculer la solution du problème des moindres carrés.

La norme $E(x)$ du résidu $r(x)$ peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} E(x) &= \|r(x)\|^2 = \|Ax - b\|^2 = (Ax - b)^t (Ax - b) \\ &= x^t A^t A x - 2(A^t b)^t x + \|b\|^2 \end{aligned}$$

Le problème des moindres carrés peut donc se reformuler en :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} x^t G x - 2h^t x$$

avec $G = A^t A$ et $h = A^t b$

Définition 8.2.0.2 On appelle fonction quadratique une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme :

$$f(x) = x^t G x - 2h^t x$$

où G est une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}$ symétrique et h un vecteur donné de \mathbb{R}^n

La résolution d'un problème de moindre carrée nécessite donc la minimisation d'une fonction quadratique. La théorie de la minimisation montre que les conditions nécessaires pour \bar{x} soit le vecteur minimisant f :

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \nabla_x f(\bar{x}) = 0$$

où le gradient $\nabla_x f = [\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}]^t$

Lemme 1 Soit $u(x)$ et $v(x)$ les fonctions de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes, $u(x) = x^t B x$ et $v(x) = h^t x$ alors on a :

$$\nabla_x u = (B + B^t)x \quad \text{et} \quad \nabla_x v = h$$

Théorème 37 Une condition nécessaire pour qu'un vecteur x soit solution du problème de minimisation des moindres carrés et que :

$$A^t A x = A^t b$$

On appelle cette équation, l'équation normale du problème des moindres carrés.

Théorème 38 Si A une matrice de \mathcal{M}_{pn} est une matrice telle que $\text{Rang} A = n$ alors le problème des moindres carrés admet une solution unique \bar{x} vérifiant :

$$A^t A \bar{x} = A^t b$$

Preuve Etapes :

1. $\text{Rang} A = n$ implique que G est définie positive (donc inversible),
2. le système $A^t A x = A^t b$ admet donc une unique solution \bar{x} ,
3. \bar{x} est un minimum de $x^t A^t A x - 2(A^t b)^t x$.

8.3 Le problème des moindres carrés comme un problème de projection

8.3.1 Projection orthogonale

Théorème 39 Dans tout espace euclidien de dimension finie, il existe une base orthonormée.

Théorème 40 Soit E un espace euclidien et S un sous-espace vectoriel de E , alors il existe un sous-espace vectoriel de E , noté S^\perp , appelé orthogonal de S tel que :

$$E = S \oplus S^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in E, \exists ! y \in S, z \in S^\perp, \text{ tel que } x = y + z$$

et

$$y^t z = 0, \forall y \in S, z \in S^\perp$$

Corollaire 6 soit $x \in E$ alors il existe un unique $\hat{x} \in S$ tel que

$$x - \hat{x} \in S^\perp$$

le vecteur \hat{x} étant appelé la projection orthogonale de x sur S .

Théorème 41 Etant donné S un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E , et $y \in E$, alors le problème :

$$\min_{x \in S} \|x - y\|^2$$

admet pour solution \hat{y} la projection orthogonale de y sur S .

Preuve

On a :

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \|x - \hat{y} - (y - \hat{y})\|^2 \\ &= \|x - \hat{y}\|^2 + \|y - \hat{y}\|^2 - \langle x - \hat{y}, y - \hat{y} \rangle \\ &= \|x - \hat{y}\|^2 + \|y - \hat{y}\|^2\end{aligned}$$

puisque $x - \hat{y} \in S$ et $y - \hat{y} \in S^\perp$ donc $\|x - y\|^2$ est minimal pour $x = \hat{y}$.

8.3.2 Moindres carrés et projection

Si on se place dans l'espace euclidien \mathbb{R}^p et que $S = \text{Im}A = \{y \in \mathbb{R}^p, \exists x \in \mathbb{R}^n Ax = y\}$ alors le problème de moindres carrés :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

peut se formuler également comme un problème de projection orthogonale de b sur le sous-espace S de \mathbb{R}^p . L'orthogonal S^\perp peut être caractériser par le théorème suivant :

Théorème 8.3.2.1 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $x \in (\text{Im } A)^\perp$
2. $x \in \text{Ker } A^t$
3. $A^t x = 0$

D'après les théorèmes sur la projection orthogonale, la solution du problème des moindres carrés appartient à S et donc il existe \bar{x} tel que \bar{x} minimise $\|Ax - b\|^2$ (on a donc montré l'existence d'une solution, la condition $\text{Ker } A = \{0\}$ permettrait de démontrer l'unicité de la solution par l'injectivité).

Par ailleurs, on sait également que le résidu $A\bar{x} - b$ appartient à S^\perp . Par conséquent, on a la relation suivante :

$$A^t(A\bar{x} - b) = 0$$

ce qui nous permet de retrouver les équations normales du paragraphe précédent.

8.4 Approximation polynomiales au sens des moindres carrés

On suppose que l'on dispose de n points $\{x_i, y_i\}$ de \mathbb{R}^2 (résultats d'expériences, mesures, ...). On se propose de déterminer le polynôme de degré inférieur à d de x passant "au mieux" par à travers le nuage de points $\{x_i, y_i\}$.

Cela revient à trouver $p \in \mathbb{R}^{d+1}$ ($p = [p_0, p_1, \dots, p_d]^t$ correspond aux coefficients du polynôme à déterminer) tel que les quantités $y_i - \sum_{j=0}^d p_j x_i^j$ soient les plus faibles. Posons :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^d \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^d \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & & x_n^d \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Au sens des moindres carrés, cela revient donc à trouver \bar{p} solution du système :

$$M^t M \bar{p} = M^t y$$

Chapitre 9

Résolution des problèmes de moindres carrés

9.1 Introduction

La résolution d'un problème de moindres carrés peut être effectué à partir de l'équation normale :

$$A^t Ax = A^t b$$

Cependant, l'approche algébrique permet de présenter le problème des moindres carrés comme un problème de projection orthogonale et de résolution d'un problème de pré-image ensuite. Cette dernière méthode ouvre une autre perspective à la résolution des problèmes des moindres carrés.

9.2 Résolution par projection orthogonale

Le principe de la résolution d'un problème $Ax = b$ par la méthode de moindres carrés consiste tout d'abord à trouver la projection orthogonale \hat{b} de b sur l'espace $\text{Im}A$ et ensuite de résoudre le problème $Ax = \hat{b}$. Les étapes de la résolution sont :

1. Calculer une famille génératrice B de $\text{Im}A$.
2. Orthonormaliser cette famille en une base $\{q_1, \dots, q_n\}$ (par exemple par l'algorithme de Gram-Schmidt).
3. Calculer la projection orthogonale de b sur $\text{Im}A$. On peut montrer que \hat{b} s'écrit :

$$\hat{b} = QQ^t b$$

où Q est la matrice constituée en colonnes par $\{q_1, \dots, q_n\}$.

4. Résoudre $Ax = \hat{b} = QQ^t b$.

La résolution du système $Ax = QQ^t b$ reste un problème délicat dans la mesure où $A \in \mathcal{M}_{p,n}$. Pour s'affranchir de ce problème, il suffit de considérer le problème :

$$Q^t Ax = Q^t QQ^t b$$

et comme $Q \in \mathcal{M}_{p,n}$, et que les colonnes de Q sont orthonormales, on a $Q^t Q = I$, ce qui donne le système de n équations :

$$Q^t Ax = Q^t b$$

Par construction de la base $\{q_1, \dots, q_n\}$, on peut écrire que :

$$A = QR$$

où $R \in \mathcal{M}_{n,n}$ et est une matrice triangulaire supérieure. De par l'orthogonalité de Q , on a également $Q^t A = R$ et donc la solution du système consiste à résoudre le problème :

$$Rx = Q^t b$$

9.3 Factorisation QR par la méthode de Householder

Ainsi, l'objectif de la résolution du problème des moindres carrés est de factoriser la matrice A en $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure.

Définition 9.3.0.1 On appelle transformation orthogonale une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n dont la matrice associée A dans la base canonique est orthogonale (ou unitaire) (ie $A^t A = I$).

Propriété Une matrice A unitaire vérifie $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$

Propriété Une matrice carré A est unitaire si et seulement si : $A^{-1} = A^t$

9.3.1 Transformation de Householder

Le but de ce paragraphe est d'introduire une transformation orthogonale particulière : la transformation de Householder qui est une symétrie plane.

Définition 9.3.1.1 On appelle transformation de Householder, une transformation dont la matrice est de la forme

$$H = I - 2yy^t$$

avec $y \in \mathbb{R}^n$ et $\|y\| = 1$

9.3. FACTORISATION QR PAR LA MÉTHODE DE HOUSEHOLDER 51

Propriété H est une matrice symétrique et orthogonale :

$$HH^t = HH = (I - 2yy^t)(I - 2yy^t) = I - 2yy^t - 2yy^t + 4yy^t$$

Propriété H est une symétrie par rapport à l'ensemble des vecteurs $z \in \mathbb{R}^n$ tels que $z^t y = 0$.

$$Hy = y - 2yy^t y = -y$$

si $z^t y = 0$ alors,

$$Hz = z - 2yy^t z = z$$

Théoreme 42 Soit a et b deux vecteurs quelconques de \mathbb{R}^n , non colinéaires, avec $\|b\|_2 = 1$. On peut déterminer un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$, avec $\|u\|_2 = 1$ et un réel α tel que si $H = I - 2uu^t$, alors $Ha = \alpha b$.

Corollaire 7 Soit $x \in \mathbb{R}^n$ avec $\|x\| = 1$ et $x \neq e_1$, alors si $y = \alpha(x - e_1)$ et $\alpha = \|x - e_1\|_2^{-1}$ la matrice $H = I - 2yy^t$ est telle que $Hx = e_1$

9.3.2 Factorisation QR

Théoreme 43 Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}$ avec $p \geq n$, alors il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_{p,p}$ et une matrice triangulaire supérieure $R \in \mathcal{M}_{n,n}$ telle que

$$A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Preuve La démonstration de ce théorème est constructif, c'est-à-dire qu'elle donne l'algorithme pour obtenir la factorisation. On va chercher à obtenir la matrice R comme le résultat de n transformations orthogonales successives $U^{(k)}$, soit :

$$\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} = A^{(n+1)} = U^{(n)}U^{(n-1)} \dots U^{(1)}A$$

les matrices $U^{(k)}$ étant construites à l'aide de transformations de Householder. Si la matrice A a déjà la forme, on pose $U^{(1)} = I$. Sinon, on sait qu'il existe une transformation de Householder $H^{(1)}$ qui transforme A_1 (la première colonne de A) en $[\alpha_1, \dots, 0] \in \mathbb{R}^p$ avec $\alpha_1 = \|A_1\|$. En posant $U^{(1)} = H^{(1)}$, on a :

$$A^{(2)} = U^{(1)}A = \begin{pmatrix} \times & \times & \dots & \times \\ 0 & \times & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$$

Pour continuer, il suffit d'appliquer une transformation analogue à la sous-matrice formée des $M - 1$ dernières lignes et $N - 1$ dernières colonnes et ainsi de suite, jusqu'à $A^{(n+1)}$ qui a la structure recherchée et que l'on appelle R . Ainsi, supposons que l'on a obtenu $A^{(k)}$ dont les $k - 1$ premières colonnes forment une matrice trapézoïdale supérieure (les éléments en dessous de la diagonale sont nuls). Si on note $v_k \in \mathbb{R}^{p-k+1}$ le vecteur dont les éléments sont $[a_{ik}^{(k)}]_{i=k \dots m}$, alors

il existe une transformation de Householder $H^{(k)}$ qui transforme v_k en $[\alpha_k, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{m-k+1}$, avec $\alpha_k = \|v_k\|$. Cette transformation $H^{(k)}$ est :

$$H^{(k)} = I_k - 2 \frac{y_k y_k^t}{y_k^t y_k}$$

avec $y_k = v_k \pm \|v_k\| e_{1k}$.

On définit alors $U^{(k)}$ comme :

$$U^{(k)} = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & H^{(k)} \end{pmatrix}$$

et on obtient $A^{(k+1)} = U^{(k)} A^{(k)}$. On continue ce procédé jusqu'à obtenir une matrice $A^{(n+1)}$:

$$A^{(n+1)} = U^{(n)} U^{(n-1)} \dots U^{(1)} A$$

qui par construction à la structure désirée. On a donc bien :

$$\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} = UA$$

avec $U = U^{(n)} U^{(n-1)} \dots U^{(1)}$. Et on obtient la factorisation QR en posant $Q = U^t$.

9.4 Application de la factorisation QR aux moindres carrés

On part de la factorisation QR de A , on a donc :

$$A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $R \in \mathcal{M}_{nn}$ est triangulaire supérieure. Notons que pour tout vecteur $y \in \mathbb{R}^p$, on a :

$$\|Q^t y\|^2 = y^t y$$

puisque Q^t est orthogonale. Ainsi, on a :

$$\|Ax - b\|^2 = \|Q^t(Ax - b)\|^2 = \|Q^t Ax - Q^t b\|^2$$

Définissons $c \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^{p-n}$ par :

$$Q^t b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

alors, on a :

$$Q^t Ax - Q^t b = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} x - Q^t b = \begin{pmatrix} Rx - c \\ d \end{pmatrix}$$

et par conséquent :

$$\|Ax - b\|^2 = \|Rx - c\|^2 + \|d\|^2$$

9.4. APPLICATION DE LA FACTORISATION QR AUX MOINDRES CARRÉES 53

et le vecteur minimisant $\|Ax - b\|^2$ est donc le vecteur tel que :

$$Rx = c$$

La solution de ce problème est unique si R est inversible ce qui est le cas si $\text{Rang } A = n$.