QCM

QUESTIONS ET RÉPONSES COMMENTÉES

Mathématiques

ALGÈBRE ET PROBABILITÉS

DUNOD

François Guénard Patricia Hug

QCM de Mathématiques

HEC

Volume 2

Algèbre, Probabilités, Statistiques

Dunod

Dans la collection
QCM DUNOD

CULTURE GÉNÉRALE
par Daniel Fouquet et Yves Stalloni

L'HISTOIRE DE 1880 À 1945
L'HISTOIRE DE 1945 À NOS JOURS
par Jeanne Cazier

MATHÉMATIQUES, PREMIER CYCLE SCIENTIFIQUE
par François Guénard et Patricia Hug

MATHÉMATIQUES HEC : ANALYSE ET ALGORITHMIQUE
par François Guénard et Patricia Hug

LITTÉRATURE
par Mathieu Lindon

A paraître (rentrée 93/94)

PHYSIQUE, PREMIER CYCLE UNIVERSITAIRE
PHYSIQUE GÉNÉRALE
CHIMIE GÉNÉRALE
BIOCHIMIE
BIOLOGIE CELLULAIRE
BIOLOGIE ANIMALE
BIOLOGIE VÉGÉTALE

ISSN 1159 1595
ISBN 2 10 001113 8

Table des matières

12

[1] Questions

[2] Réponses

Avant-Propos

Voici le deuxième volume d'un recueil de QCM destiné aux étudiants des classes préparatoires au Haut Enseignement Commercial, option générale et option économique.

Ce volume contient 13 questionnaires couvrant les probabilités et les statistiques, ainsi que l'ensemble du programme d'algèbre. Chaque chapitre regroupe 10 questions comportant chacune cinq affirmations dont l'une au moins est vraie.
Nous avons voulu faire de ce livre un véritable outil de travail, utile dans les différentes phases de la préparation : apprentissage, assimilation, consolidation et révision.

▸ Dans ce but, les questions de chaque chapitre sont classées par difficulté croissante :

— les quatre ou cinq premières questions sont très faciles ; elles permettent de s'assurer que l'on a bien appris le cours.

— les trois ou quatre suivantes sont des exercices permettant de vérifier que l'on a compris le cours.

— les deux dernières sont de véritables compléments de cours, des exercices parfois difficiles, du niveau des oraux de concours.

▸ Les réponses constituent la deuxième moitié de l'ouvrage. Elles comportent les solutions développées, mais aussi des commentaires, des rappels de cours et quelques compléments.

▸ Dans chaque chapitre, les questions sont orientées vers les sujets qui posent le plus de problèmes aux étudiants. Par exemple, les questions sur les nombres complexes sont orientées vers les interprétations géométriques, trop souvent ignorées, tandis que dans le chapitre sur les probabilités, l'accent a été mis sur les définitions des différents concepts.

Nous croyons que les Questionnaires à Choix Multiples constituent un outil de travail efficace, adapté aux étudiants des années 90 : finies les mathématiques tristes et ardues ; place à l'apprentissage ludique. Nous espérons que les lecteurs apprécieront l'esprit dans lequel nous avons rédigé les questions et leurs réponses, et qu'il partageront notre foi dans ce nouvel outil. Toutes les remarques, critiques et suggestions seront bienvenues.

Université de Paris-Sud
Département de mathématiques
Bât 425
91405 Orsay Cedex

QCM n°1
Combinatoire et dénombrements

(Résultats p. 121)

1. Un questionnaire comporte dix questions, auxquelles on répond par vrai ou faux. Deux feuilles de réponses au questionnaire sont considérées comme différentes si elles diffèrent dans l'une au moins des réponses aux questions. Combien peut-il y avoir de feuilles de réponses différentes ?

(1) 10 ☐

(2) 20 ☐

(3) 100 ☐

(4) 1024 ☐

(5) Une infinité ☐

2. Soit abc un entier de trois chiffres en base dix, avec $a > c$. On note def l'entier de trois chiffres obtenu par la soustraction $abc - cba$ (même si $d = 0$). Que peut-on dire de $def + fed$? (Par exemple, pour $abc = 231$, on a $def = 099$, et $def + fed = 099 + 990 = 1089$).

(1) Cela vaut 1089, comme dans l'exemple. ☐

(2) Le résultat n'est pas constant ; il dépend de abc. ☐

(3) Le résultat vaut 1089, sauf si abc est un multiple de 11. ☐

(4) Le résultat vaut 1089 ou 1189, selon que b est supérieur, ou strictement inférieur à $a + c$. ☐

(5) Le résultat s'écrit c089. ☐

3. On prend 8 entiers x_i, $1 \leq i \leq 8$, vérifiant $2 \leq x_i \leq 360$. Que peut-on affirmer ?

(1) Qu'ils ne sont pas tous premiers. ☐

(2) Qu'il y en a au moins deux qui ne sont pas premiers entre eux. ☐

(3) Qu'il y en a au moins deux dont la différence est divisible par 7. ☐

(4) Que l'un d'eux est premier, ou qu'il y en a deux qui ne sont pas premiers entre eux. ☐

(5) Qu'il existe x_i, $n \in \mathbb{N}$, et x_j tels que $(x_i)^n$ soit divisible par x_j. ☐

4. Coefficients binomiaux. Quelles sont les formules de récurrence correctes ?

(1) Pour tout entier $n > 0$, et tout entier p, $1 \leq p \leq n$, ☐

$$p\binom{n}{p}x^{n-p} = \frac{d}{dx}\left[\binom{n}{p-1}x^{n-p+1}\right]$$

(2) Pour tout entier $n > 1$, et tout entier $p \in [1;n]$, □

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

(3) Pour tout entier $n > 1$, et tout entier $p \in [1;n]$, □

$$\binom{n}{p} = \sum_{i=p-1}^{n-1} \binom{i}{p-1}$$

(4) Pour tout entier $n > 1$, et tout entier $p \in [1;n]$, □

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

(5) Pour tout entier $n > 0$, et tout entier $p \in [0;n]$, □

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

5. LES RÈGLES DU POKER. Le poker est un jeu de cartes où chaque joueur reçoit 5 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes ; ces 5 cartes forment ce que l'on appelle une *main,* dont la valeur est fonction des cartes qui la constituent. Cette valeur est évaluée en fonction inverse de la probabilité d'obtention de cette main. L'ordre est donc, par valeur croissante :

— plus forte carte,
— une paire (deux cartes de même valeur, et les trois autres de valeurs différentes),
— deux paires,
— brelan (trois cartes de même valeur, et deux autres cartes de valeurs différentes),
— suite (= quinte = straight, cinq cartes dont les valeurs se suivent, mais qui ne sont pas toutes de la

même couleur, l'as pouvant être placé avant le 2 ou après le roi),
— flush (couleur, i.e. cinq cartes de la même couleur),
— full (un brelan + une paire),
— carré (quatre cartes d'un même niveau).
— straight flush (= quinte flush, cinq cartes de la même couleur, dont les valeurs se suivent)
— royal flush

Pourquoi joue-t'on avec 5 cartes, plutôt qu'avec 4, 6, 7 ou 8 ? Les assertions suivantes proposent des explications. Quelles sont-celles qui sont exactes ?

(1) Avec seulement 4 cartes, les probabilités d'avoir 2 paires, une couleur ou une suite sont trop proches (différence $< 2\,10^{-4}$) ☐

(2) Avec 4 cartes, la probabilité d'avoir un full est trop proche de celle d'avoir un carré. ☐

(3) Avec six cartes, la probabilité d'avoir un brelan est supérieure à celle d'avoir 2 paires. ☐

(4) Avec six cartes, tout comme avec 7 cartes, la probabilité d'avoir une paire est supérieure à celle de ne rien avoir. ☐

(5) Avec 7 cartes, la probabilité d'avoir la probabilité d'avoir une ou deux paires est supérieure à celle de ne rien avoir. ☐

6. **?** Combien le mot A N A G R A M M E en a-t-il ?

(1) $9!$ ☐

(2) $6!$ ☐

(3) $\dfrac{9!}{6!}$ ☐

(4) $\dfrac{9!}{3!\,2!}$ ☐

(5) $\dfrac{6!}{3!\,2!}$ ☐

7. COMPTAGE DE PAIRES, DE COUPLES ET JEU DE DOMINOS. Deux entiers > 0, n et $p \leq n/2$ étant donnés, on considère les nombres $f(n;p)$, $g(n;p)$, et $h(n;p)$ définis par :

$f(n;p)$: nombre de façons de prendre p paires deux à deux disjointes, formées chacune de deux objets consécutifs pris dans une liste ordonnée de n objets x_1, x_2, ..., x_n ;

$g(n;p)$: nombre de façons de choisir p objets non consécutifs dans une liste ordonnée de n objets x_1, x_2, ..., x_n ;

$h(n;p)$: nombre de façons de former p paires deux à deux disjointes, formées chacune de deux objets consécutifs pris dans une liste ordonnée de n objets x_1, x_2, ..., x_n placés le long d'un cercle (x_1 et x_n sont alors consécutifs).

Que peut-on dire des nombres $f(n;p)$, $g(n;p)$, et $h(n;p)$?

(1) $f(n;p) = g(n;p)$. ☐

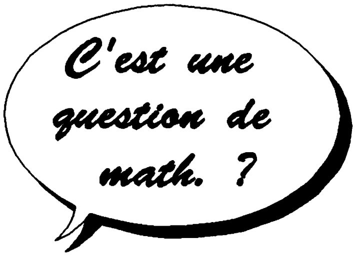
(2) $g(n;p) = f(n+1;p)$. ☐

(3) $f(n;p) = h(n;p)$. ☐

(4) $g(n;p) = h(n;p)$. ☐

(5) $g(n;p) = h(n+1;p)$. ☐

8. En combien de morceaux n coups de couteaux peuvent-ils couper un gâteau ? (Les coups de couteau sont plans, et l'on s'intéresse au cas $n \geq 3$.)



(1) 2^n ☐

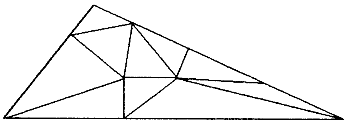
(2) $2n$ ☐

(3) $\dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{3}$ ☐

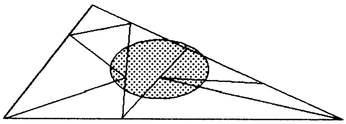
(4) $\dfrac{(n+1)\,(n^2-n+6)}{6}$ ☐

(5) $1+n+\dbinom{n}{2}+\dbinom{n}{3}$ ☐

9. On triangule un triangle dont les sommets sont numérotés 1, 2 et 3 ; autrement dit, on découpe ce triangle en petits triangles en rajoutant des sommets que l'on relie à **tous** les sommets voisins.



Triangulation correcte



Triangulation incomplète

On numérote les sommets selon la règle suivante :

— Un sommet placé sur le côté $[i;j]$ du grand triangle est numéroté i ou j (i, $j \in \{1;2;3\}$).

— Un sommet placé à l'intérieur du grand triangle est numéroté 1, 2 ou 3.

Combien y-a-t-il de petits triangles dont les sommets sont numérotés 1, 2 et 3 ?

(1) $1 + E[n/3]$, où n est le nombre de sommets que l'on a rajoutés. ☐

(2) N'importe quel nombre inférieur à la moitié du nombre de sommets que l'on a rajoutés. ☐

(3) Un nombre pair. ☐

(4) Un nombre impair. ☐

(5) $n - p/3$, où n est le nombre de sommets numérotés 3 sur les côtés [1;3] et [2;3], et où p est le nombre de sommets à l'intérieur du triangle. ☐

10. UN PROBLÈME DE VOISINAGE : On considère un jeu de cartes ne comportant que 2 types de cartes, que nous noterons 1 et 2. On assimile ces cartes à des chiffres, et on modélise une disposition de ces cartes côte à côte sur une table par une séquence (suite finie) formée avec ces chiffres. Cela étant, si l'on dispose de P 1, et de $(N-P)$ 2, on note $W(N;P,n)$ le nombre de suites que l'on peut former avec ces P et $N-P$ objets de telle sorte qu'il y ait n 2 voisins d'un 1. Par exemple, si $N=5$, si $P=2$, l'arrangement 11222 correspond à $n=1$, tandis que 12221 correspond à $n=2$ (les "voisins" sont soulignés). On note également $W(N;P,n;i)$ le nombre des suites précédentes commençant par un i ($i=$ 1 ou 2). Quelles sont les formules de récurrence vérifiées par les $W(N;P,n)$ et $W(N;P,n;i)$?

(1) $$W(N;P,n) = W(N;P,n\text{–}1;1) + W(N;P,n\text{–}1;2)$$ ☐

(2) $$W(N;P,n) = W(N;P,n;1) + W(N;P,n;2)$$ ☐

(3) $$W(N;P,n,1) = W(N\text{–}1;P\text{–}1,n;1) + W(N\text{–}2;P\text{–}1;n\text{–}1)$$ ☐

(4) $$W(N;P,n,2) = W(N\text{–}1;P;n;2) + W(N\text{–}1;P,n\text{–}1;1)$$ ☐

(5) $$W(N;P,n,2) = W(N\text{–}1;P,n\text{–}2;1) + W(N\text{–}2;P,n\text{–}1;2)$$ ☐

QCM n°2
Structures algébriques élémentaires

(Résultats p. 134)

1. UNE DRÔLE DE RÉCURRENCE.

> Tous les nombres entiers positifs sont égaux. En effet, soit $P(n)$ l'énoncé : "*Si le maximum de deux entiers positifs est n, alors ces deux entiers sont égaux*". Clairement, $P(0)$ est vrai, car si deux entiers positifs ont un maximum égal à 0, c'est que ces deux entiers sont tous deux égaux à 0. Supposons à présent la propriété établie pour n, et montrons-la pour $n+1$. Soient u et v deux entiers positifs dont le maximum vaut $n+1$. Alors le maximum de $u-1$ et de $v-1$ vaut n, et d'après l'hypothèse de récurrence, on a $u-1 = v-1$, et par suite, $u = v$, ce qui achève la récurrence.

Que peut-on dire de ce raisonnement par récurrence ?

(1) Il est correct. ☐

(2) Il est faux parce que la propriété $P(n)$ est fausse pour $n = 0$. ☐

(3) Il est faux parce que la propriété $P(n)$ est fausse pour $n = 1$. ☐

(4) Il est correct, mais les nombres entiers ne sont pas tous égaux parce que leur maximum n'est en général pas défini. ☐

(5) Il est faux parce que dans une raisonnement par récurrence on doit d'abord vérifier la propriété pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, puis dire que par analogie, la propriété est vraie pour tout n. ☐

2. LOIS DE COMPOSITION : PARTIES STABLES. Soit E un ensemble muni d'une loi de composition $\star$. Quelles sont les assertions correctes ?

(1) Pour tout $x \in E$, et tout $A \subset E$, $A \star \{x\}$ est une partie stable de E. ☐

(2) Si $\star$ est associative, pour tout $x \in E$, $E \star \{x\}$ et $\{x\} \star E$ sont des parties stables de E. ☐

(3) Pour tout $A \subset E$, $A \star A$ est une partie stable de E. ☐

(4) Pour tout $x \in E$, le commutant de x, c'est-à-dire $\{y \in E \mid y \star x = x \star y\}$ est une partie stable de E. ☐

(5) Si A est une partie de E telle que la restriction à $A \times A$ de $\star$ soit commutative, alors A est une partie stable de E. ☐

3. MORPHISMES DE LOIS DE COMPOSITIONS. Soient E et F deux ensembles munis respectivement d'une loi de composition $\star$ et d'une loi de composition $\bullet$. Soit f un morphisme de $(E;\star)$ dans $(F;\bullet)$. Quelles sont les affirmations vraies ?

(1) Si A est une partie stable de E, alors $f(A)$ est une partie stable de F. ☐

(2) Si B est une partie stable de F, alors $f^{-1}(B)$ est une partie stable de E. ☐

(3) Si A est une partie commutative de E (c'est-à-dire telle que, pour tous x et $y \in A$, $x\star y = y\star x$), alors $f(A)$ est une partie commutative de F. ☐

(4) Si B est une partie commutative de F, alors $f^{-1}(B)$ est une partie commutative de E. ☐

(5) Si A est une partie de E, l'image du commutant de A (c'est-à-dire de l'ensemble des $x \in E$ tels que $x\star y = y\star x$ pour tout $y \in A$) est le commutant de $f(A)$. ☐

4. STRUCTURE DE GROUPE. Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$, associative. Dans quels cas peut-on dire que G est un groupe ?

(1) Si, pour tout $a \in G$, il existe $e \in$ G tel que $e\star a = a\star e = a$ et $a' \in G$ tel que $a'a = aa' = e$. ☐

(2) S'il existe $e \in$ G tel que $a\bigstar e = e\bigstar a = a$ pour tout $a \in G$, et si, pour tout $a \in G$, il existe $a' \in G$ tel que $aa' = e$, ou $a'a = e$. ☐

(3) S'il existe $e \in$ G tel que $e\bigstar a = a$ pour tout $a \in G$, et si, pour tout $a \in G$, il existe $a' \in G$ tel que $a'a = e$. ☐

(4) S'il existe $e \in$ G tel que $e\bigstar a = a\bigstar e = e$ pour tout $a \in G$, et si, pour tout $a \in G$, il existe $a' \in G$ tel que $a'a = aa'. = a$. ☐

(5) S'il existe $e \in$ G tel que $e\bigstar a = a\bigstar e = a$ pour tout $a \in G$, et si, pour tout $a \in G$, il existe $a' \in G$ tel que $a'a = aa' = e$. ☐

5. EXEMPLES DE GROUPES. Les ensembles suivants sont-ils des groupes ?

(1) $(\mathbb{N}; +)$ ☐

(2) $(\mathbf{Z}; +)$ ☐

(3) $(\mathbf{Z}; \times)$ ☐

(4) $(\mathbf{Q}; \times)$ ☐

(5) L'ensemble des nombres irrationnels, noté $\mathbb{I}$, muni de la multiplication (autrement dit, $(\mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}; \times)$). ☐

6. TABLE D'UN GROUPE. La table ci-dessous donne quelques informations sur la table de la loi $\perp$ d'un groupe G, ayant quatre éléments, a, b, c, et d. Quel est l'inverse de b pour la loi $\perp$?

$\perp$	a	b	c	d
a	d	c		
b	c			
c			c	
d	b			

(1) a ☐

(2) b ☐

(3) c ☐

(4) d ☐

(5) La table ne permet pas de déterminer quel est l'inverse de b. ☐

7. SOUS-GROUPES. Soit $(G;\star)$ un groupe, d'élément neutre e, et soit $a \in G$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-groupes de G ?

(1) Une partie non vide H de G qui est stable et commutative pour la loi $\star$. ☐

(2) Le centre de G, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in G$ tels que, pour tout $y \in G$, on ait $x \star y = y \star x$. ☐

(3) Une partie H de G, qui est finie, non vide et stable pour la loi $\star$. ☐

(4) $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{e\}$ ☐

(5) $\{a \star x \mid x \in G\}$. ☐

8. PERMUTATIONS. On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1\,;2\,;...\,;n\}$, et $(x_1\,;x_2\,;\ldots\,;x_n)$ la permutation cyclique $x_1 \mapsto x_2 \mapsto \ldots \mapsto x_n \mapsto x_1$. Comment peut-on finir la phrase "*Tout élément de S_n peut s'écrire comme composée d'éléments de l'ensemble ...*"

(1) des transpositions. ☐

(2) $\{(1;2)\ ;\ (1;3)\ ;\ \ldots\ ;\ (1;n)\}$ ☐

(3) $\{(1;2)\ ;\ (2;3)\ ;\ \ldots\ ;\ (n-1;n)\}$ ☐

(4) $\{(1;2)\ ;\ (1;2;3;\ldots;n)\}$ ☐

(5) $\{(1;2)\ ;\ (3;4)\ ;\ \ldots\ ;\ (2p-1;2p)\}$, si $n = 2p$. ☐

9. SOUS-GROUPES DE $\mathbf{Z}$ ET DE $\mathbb{R}$. On considère $\mathbf{Z}$ et $\mathbb{R}$ munis de leur structure de groupe pour l'addition. Quelles sont les propriétés de leurs sous-groupes ?

(1) $\{-1;0;1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z};+)$. ☐

(2) Si $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbf{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z};+)$. ☐

(3) Si Δ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z};+)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta = n\mathbf{Z}$. ☐

(4) Si Δ est un sous-groupe de $(\mathbb{R};+)$, il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $\Delta = \mathbf{Z}x$. ☐

(5) Si Δ est un sous-groupe de $(\mathbb{R};+)$, tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient un point de Δ. ☐

10. Racines. Soient U l'ensemble des nombres complexes de module 1, n un entier > 1, et U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Pour tout k, on pose $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Que peut-on dire des z_k, de U et de U_n ?

(1) Tout élément de $\mathbb{C}$ admet exactement n racines n-ièmes (distinctes). ☐

(2) U_n est un sous-groupe de U qui est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$. ☐

(3) Pour tout $z_k \in U_n$, il existe $p \in \{1;\ 2;\ ...;\ n\}$ tel que $z_k = z_{-1}^p$. ☐

(4) Pour tous z_k et $z_q \in U_n$, il existe $p \in \{1;\ 2;\ ...;\ n\}$ tel que $z_k = z_q^p$. ☐

(5) $\sum_{k=1}^{n} z_k = 1$ ☐

QCM n°3

Nombres complexes

(Résultats p. 141)

On utilise dans ce QCM les notations normalisées : $\Im(z)$ désigne la partie imaginaire de z, $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z, et $\bar{z}$ désigne le complexe conjugué de z.

1. Soit $$z = \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(1+i)^3 - (2+i)^2}.$$

Quelles sont les affirmations exactes ?

(1) $$\Re(z) = -\frac{7}{29}$$ ☐

(2) $$\Im(z) = \frac{4}{5}$$ ☐

(3) $$|z| = \left|\frac{5-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-5}\right| = 1$$ ☐

(4) $$\bar{z} = \frac{(1+2i)^2 + (1-i)^3}{(1+i)^3 + (2+i)^2}$$ ☐

(5) $$\arg(z) = \frac{2\arg(1+2i) - 3\arg(1-i)}{3\arg(1+i) - 2\arg(2+i)}$$ ☐

2. MODULES. Soient u, v, et w trois nombres complexes de module 1. Quelles sont les relations correctes ?

(1) $$|uv + vw + wu| = |u + v + w|$$ ☐

(2) $$|uv + vw + wu| < |u + v + w|$$ ☐

(3) $$|uv + vw + wu| > |u + v + w|$$ ☐

(4) $$|uv + vw + wu| = \frac{|u^2 + v^2 + w^2|^2}{|u + v + w|^2}$$ ☐

(5) $$|uv + vw + wu| = |u^2 + v^2 + w^2|$$ ☐

3. Quelle est la signification géométrique de la relation

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \ ?$$

(1) L'aire d'un triangle est égale au demi-produit de la base par la hauteur. ☐

(2) L'aire d'un parallélogramme est égale au demi-produit des longueurs des diagonales. ☐

(3) Dans un losange, les diagonales découpent quatre triangles dont les aires sont égales. ☐

(4) La composée des symétries vectorielles par rapport à deux droites est égale à la rotation vectorielle dont l'angle est le double de l'angle de ces deux droites. ☐

(5) Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale au double de la somme des carrés des longueurs de deux côtés adjacents. ☐

4. Soient E et F les demi-plans ouverts supérieurs et inférieurs,

$E = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$, et $F = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) < 0\}$.
Soient a, b, c, et $d \in \mathbb{R}^*$ tels que $ad - bc < 0$. Soit enfin f l'application définie par $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$.

Quelles sont les propriétés de f ?

(1) f est une application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. ☐

(2) $f_{|E}$ est une application $E \to F$. ☐

(3) $f_{|F}$ est une application $F \to E$. ☐

(4) $f_{|E}$ est injective. ☐

(5) $f_{|F}$ est une surjection $F \to E$. ☐

5. Quelles sont les formules exactes, lorsqu'elles sont définies ?

(1) $\sin^4 x \cos^3 x$ ☐
$$= \frac{1}{2^6}(\cos 7x + \cos 5x + 3\cos 3x - 3\cos x)$$

(2) $$\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} = 1 + \frac{1}{2}\sin 2x$$ ☐

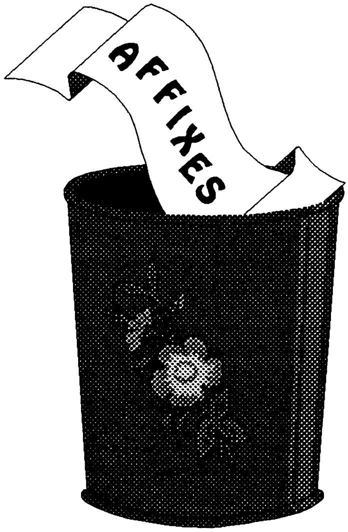
(3) $$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$ ☐

(4) $\tan(x + y + z)$ ☐
$$= \frac{\tan x + \tan y + \tan z}{1 - \tan x \tan y - \tan y \tan z - \tan z \tan x}$$

(5) $$\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x} = \tan 3x$$ ☐

6. Quel est l'ensemble des nombres complexes z vérifiant

$$\left|\frac{z+1-2i}{z-1-i}\right| = 1 \ ?$$



(1) Le cercle dont un diamètre a $-1+2i$ et $1+i$ comme extrémités. ☐

(2) La droite passant par $-1+2i$ et $1+i$, privée de $1+i$. ☐

(3) La droite médiatrice du segment d'extrémités $-1+2i$ et $1+i$. ☐

(4) L'ellipse dont $-1+2i$ et $1+i$ sont les foyers. ☐

(5) L'hyperbole de foyers $-1+2i$ et $1+i$. ☐

7. Quel est l'ensemble des nombres complexes z vérifiant

$$\frac{z-3}{z-5+2i} \in \mathbb{R}^* \ ?$$

(1) Le cercle dont un diamètre a 3 et $5-2i$ comme extrémités. ☐

(2) La droite passant par 3 et $5-2i$, privée de $5-2i$. ☐

(3) Le demi-plan ouvert contenant 0, délimité par la droite passant par les points 3 et $5-2i$. ☐

(4) L'ellipse dont 3 et $5-2i$ sont les foyers. ☐

(5) L'intervalle ouvert d'extrémités 3 et $5-2i$. ☐

8. Quel est l'ensemble des nombres complexes z vérifiant

$$\frac{z+2+3i}{z-2i} \in \mathbb{R}i \ ?$$

(1) L'intérieur du disque dont le segment d'extrémités $-2-3i$ et $2i$ forme un diamètre. ☐

(2) Le cercle dont le segment d'extrémités $-2-3i$ et $2i$ forme un diamètre, privé du point $2i$. ☐

(3) L'ellipse de foyers $-2-3i$ et $2i$. ☐

(4) L'intervalle ouvert dont les extrémités sont $-2-3i$ et $2i$. ☐

(5) La médiatrice du segment reliant $-2-3i$ et $2i$. ☐

9. Soit a un complexe tel que $\Re(a) > 0$. Quel est l'ensemble des complexes z tels que

$$\left|\frac{a-z}{\overline{a}+z}\right| < 1 \ ?$$

(1) Le demi-plan droit ouvert. ☐

(2) Le demi-plan gauche ouvert. ☐

(3) Le demi-plan supérieur ouvert. ☐

(4) L'intérieur du disque de rayon $\Re(a)$. ☐

(5) L'extérieur du disque de rayon $\Re(a)$. ☐

10. FORMULES DE MACHIN ET CIE. La formule de Machin (prononcer "Mètchinn"),

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239},$$

est un exercice de trigonométrie aussi traditionnel que pénible. Si l'on utilise les nombres complexes, la vérification de la formule devient facile, puisqu'elle se déduit immédiatement de l'égalité

$$(5 - i)^4 (1 + i) = (24 - 10i)^2 (1 + i) = 4(239 - i)$$

en identifiant les arguments des différents membres.

Chacune des assertions suivantes propose d'abord une identité en nombres complexes, puis une relation trigonométrique reliée à l'identité par un symbole d'implication. Quelles sont les assertions donnant deux égalités correctes et telles que la relation trigonométrique se déduise bien de l'égalité complexe ?

(1) $(2+i)(3+i) = 5(1+i)$ ☐

$\Rightarrow$

$$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

(2) $(2+i)(5+i)(8+i) = 65(1+i)$ ☐

$\Rightarrow$

$$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

(3) $(3+i)^2(7+i) = 50(1+i)$ ☐

$\Rightarrow$

$$2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$$

(4) $(7+i)^5(79+3i)^2 = 50 \times 1250^2\,(1+i)$ ☐

$\Rightarrow$

$$5\arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{3}{79} = \frac{\pi}{4}$$

(5) $(70+i)(99-i) = 29(239+i)$ ☐

$\Rightarrow$

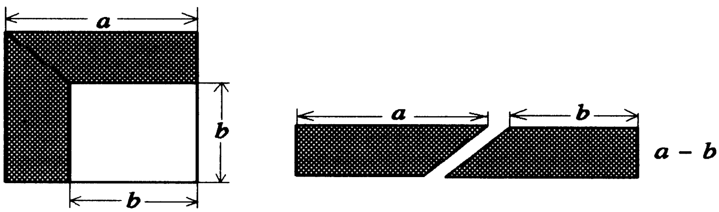
$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{70} + \arctan\frac{1}{99} = \frac{\pi}{4}$$

QCM n°4

Polynômes

(Résultats p. 153)

1. Quelle est l'identité remarquable illustrée par la figure ci-dessous ?



(1) $a^2 + ab = a(a + b)$ ☐

(2) $a^2 - ab = a(a - b)$ ☐

(3) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ ☐

(4) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ☐

(5) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ☐

2. Soit f une fonction polynôme réelle vérifiant $f(x+1) = f(x)$ pour tout réel x, et $f(3) = 5$. Que vaut $f\left(\frac{7}{2}\right)$?

(1) Les informations de l'énoncé ne permettent pas de répondre à la question. ☐

(2) $\frac{35}{2}$ ☐

(3) -5 ☐

(4) $-\frac{35}{2}$ ☐

(5) 5 ☐

3. FORMULE DU BINÔME ET COEFFICIENTS BINOMIAUX. Le développement de $(1 + 1)^n$ par la formule du binôme permet d'établir la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Chacune des assertions suivantes propose un calcul suivi d'une relation de récurrence sur les coefficients binomiaux. Quelles sont les assertions suggérant une formule correcte qui se déduit effectivement du calcul indiqué ?

(1) Le développement de $(1 - 1)^n$ conduit à la relation ☐

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

(2) Le développement de $\frac{1}{2}[(1+1)^n - (1-1)^n]$ conduit à la relation ☐

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}.$$

(3) La comparaison des termes en x^n dans le développement des deux membres de l'égalité ☐

$$(1+x)^p\,(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$$

conduit à la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

(4) La dérivation, effectuée pour $x = 1$, du développement de $(1 + x)^n$ conduit à la relation ☐

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

(5) L'intégration, sur l'intervalle $[0;1]$ du développement de la fonction $x \mapsto (1+x)^n$ conduit à la relation ☐

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

4. FORMULES DU BINÔME FINIES ET INFINIES. La formule du binôme donne le développement de $(a+b)^n$. Quelle est la formule qui donne le développement de

$$A = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)^2 \text{ ?}$$

(1) $$A = \sum_{k=0}^{2n} (k+1)\,x^k$$ ☐

(2) $$A = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2n}$$ ☐

(3) $$A = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + \ldots + 2x^{2n-1} + x^{2n}$$ ☐

(4) $$\begin{aligned} A = {} & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} \\ & + (n+1)x^n + nx^{n+1} + (n-1)x^{n+2} \\ & + \ldots + 3x^{2n-2} + 2x^{2n-1} + x^{2n} \end{aligned}$$ ☐

(5) $$A = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\left(x^k + x^{2n-k}\right)$$ ☐

5. A quelle condition le polynôme réel

$$P(x) = x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n + 1$$

est-il divisible par

$$Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\ ?$$

(1) P est divisible par Q si n est un multiple de 5. ☐

(2) P est divisible par Q si n est congru à 1 modulo 5. ☐

(3) P est divisible par Q seulement si n n'est pas divisible par 5. ☐

(4) P est divisible par Q seulement si n est congru à 3 modulo 5. ☐

(5) P est toujours divisible par Q. ☐

6. EQUATIONS PALINDROMIQUES. On dit qu'une équation polynomiale est palindromique si les coefficients sont les mêmes quand on lit de gauche à droite, ou de droite à gauche. Par exemple, une équation palindromique du quatrième degré est de la forme

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Quelles sont les propriétés de ces équations ?

(1) Le changement de variable $z = x + \frac{1}{x}$ transforme une équation palindromique du quatrième degré en une équation du second degré en z que l'on peut résoudre pour en déduire ensuite x. ☐

(2) Une équation du quatrième degré quelconque,
$$x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$$
peut être transformée en une équation palindromique par le changement de variable $x = y - \frac{1}{4}c_3$. ☐

(3) Toute équation du cinquième degré
$$x^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$$
peut être transformée en une équation palindromique puis résolue grâce au changement de variable $x = y - \frac{1}{5}c_4$. ☐

(4) -1 est racine de tout polynôme palindromique de degré impair. ☐

(5) Si P est un polynôme palindromique de degré pair, $2n$, on a $P(x) = x^{2n} P\left(\frac{1}{x}\right)$. ☐

7. Soient n et $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$. On pose $P_n(x) = x^{n+2} - kx + 1$. Combien le polynôme P_n a-t-il de racines dans l'intervalle $]0;1[$?

(1) 0 si $k = 2$, 1 si $k > 2$. ☐

(2) 0 si $k < n+2$, 1 si $k = n+2$, 2 si $k > n+2$. ☐

(3) 1 si $k \leq n+2$, 2 si $k > n+2$. ☐

(4) 1, dans tous les cas. ☐

(5) 2, dans tous les cas. ☐

8. Que peut-on affirmer de la division de

$$P(X) = aX^n + bX^{n-1} + 1 \ (n \geq 1)$$

par

$$Q(X) = (X+1)^2 \ ?$$

(1) P n'est jamais divisible par Q. ☐

(2) P est toujours divisible par Q. ☐

(3) P est divisible par Q si et seulement si $a = (-1)^n(n-1)$ et $b = (-1)^n n$. ☐

(4) Lorsque P est divisible par Q, le quotient de P par Q vaut ☐

$$1 + 2X + 3X^2 + \ldots + (n-1)X^{n-2}$$

(5) Lorsque P est divisible par Q, le quotient de P par Q vaut ☐

$$1 - 2X + 3X^2 - \ldots + (-1)^{n-2}(n-1)X^{n-2}$$

9. Quelles sont les propriétés du polynôme

$$P(X) = (X-2)^5 - X^5 \ ?$$

(1) P est un polynôme de degré 5. ☐

(2) Dans le plan complexe, les racines de P sont alignées sur la droite d'équation $x = 1$. ☐

(3) Dans le plan complexe, les racines de P sont alignées sur la droite d'équation $y = 1$. ☐

(4) Les racines de P ont des arguments de la forme $\theta = \pi\left(1 - \dfrac{2k}{5}\right)$, $k = 1,\ldots,4$. ☐

(5) ☐

$$P(X) = \left(X^2 - 2X + \frac{10 + 2\sqrt{5}}{15}\right) \times \left(X^2 - 2X + \frac{20 - 4\sqrt{5}}{15}\right)$$

10. EQUATIONS FONCTIONNELLES. Quelles sont les affirmations correctes ?

(1) Le polynôme nul est l'unique polynôme P vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x+y) = P(x)\ P(y)$. ☐

(2) Le polynôme nul est l'unique polynôme P vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(xy) = \mathrm{P}(x)\ P(y)$. ☐

(3) Le polynôme nul est l'unique polynôme P vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x+y) = P(x) + P(y)$. ☐

(4) Le polynôme nul est l'unique polynôme P vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(xy) = P(x) + P(y)$. ☐

(5) Le polynôme nul est l'unique polynôme P vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x-y) = P(x)\ P(y)$. ☐

QCM n°5

Espaces vectoriels

(Résultats p. 165)

1. Sous-espaces vectoriels. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont suffisantes pour qu'une partie F d'un espace vectoriel E sur un corps commutatif K soit un sous-espace vectoriel ?

(1) F est un sous-groupe additif de E tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in F$, on ait $nx \in F$. ☐

(2) F est une partie de E telle que, pour tout x et tout $y \in F$, et pour tout $\lambda \in K$, on ait $x + \lambda y \in F$. ☐

(3) F est une partie non vide de E telle que, pour tous x et $y \in F$, et tout $\alpha \in K$, on ait $x + y \in F$ et $\alpha x \in F$. ☐

(4) F est une partie non vide de E telle que, pour tous x et $y \in F$, et tous α et $\beta \in K$, on ait $\alpha x + \beta y \in F$. ☐

(5) F est une partie non vide de E telle que, pour tous x et $y \in F$, et tout $\alpha \in K$, on ait $x + \alpha y \in F$. ☐

2. EXEMPLES DE SOUS-ESPACES VECTORIELS. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

(1) $W_1 = \{(a;b;0) : a,\ b \in \mathbb{R}\}$ ☐

(2) $W_2 = \{(a;b;c) : a \geq 0,\ b,\ c \in \mathbb{R}\}$ ☐

(3) $W_3 = \{(a;b;c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 0\}$ ☐

(4) $W_4 = \{(a;b;c) \in \mathbb{R}^3 : a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$ ☐

(5) $W_5 = \{(a;b;c) \in \mathbf{Q}^3\}$ ☐

3. OPÉRATIONS SUR LES SOUS-ESPACES VECTORIELS. Soient E un espace vectoriel sur un corps commutatif K, F, G, deux sous-espaces vectoriels de E, et $(H_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de E. Quelles sont les opérations valides pour former des sous-espaces vectoriels ?

(1) L'intersection : $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-espace vectoriel de E. ☐

(2) Le passage au complémentaire : F^c est un sous-espace vectoriel de E. ☐

(3) La somme : ☐

$$F + G = \{x \in E : \exists\, y \in F \land \exists\, z \in G,\ x = y + z\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

(4) La différence ensembliste : $F \setminus G$ est un sous-espace vectoriel de E. ☐

(5) La différence algébrique : ☐

$$F - G = \{y - z : y \in F,\ z \in G\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

4. COMBINAISONS LINÉAIRES. Les affirmations suivantes sont-elles correctes ?

(1) Le vecteur $u = (2, -5; 3) \in \mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, -3; 2)$, $v_2 = (2, -4; -1)$ et $v_3 = (1, -5; 7)$. ☐

(2) Le polynôme réel $P(X) = X^2 + 4X - 3$ est combinaison linéaire des polynômes ☐

$$Q(X) = X^2 + 2X + 5$$
$$R(X) = 2X^2 - 3X$$

et $$S(X) = X + 3.$$

(3) La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des matrices ☐

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et

$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(4) Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1;2;3)$, $e_2 = (0;1;2)$ et $e_3 = (0;0;1)$. ☐

(5) Le plan $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$ est engendré par $v = (2;3;0)$ et $w = \left(\frac{1}{6};\frac{1}{4};0\right)$. ☐

5. DIMENSION ET INTERSECTION. Soit E un espace vectoriel de dimension 7, et soient V et W deux sous-espaces vectoriels de dimensions respectives 4 et 5. Est-il possible que $V \cap W$ soit de dimension

(1) 1 ? ☐

(2) 2 ? ☐

(3) 3 ? ☐

(4) 4 ? ☐

(5) 5 ? ☐

6. RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS. On considère un système de n équations à p inconnues,

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ki} x_i = b_k,\ (k = 1,\ 2,\ldots,n).$$

Quelles sont les manipulations valides pour résoudre ce système, et quelles sont les situations possibles ?

(1) Si l'on arrive à des équations de la forme ☐

(2) $x_1 = c_1, \ldots, x_p = c_p,$

par des combinaisons linéaires des équations de départ, le système (2) fournit les solutions du système de départ.

(2) On peut remplacer une équation du système par une combinaison linéaire des autres équations sans changer la nature du système. ☐

(3) Le système ne peut admettre une solution unique que si $n = p$. ☐

(4) Si le nombre d'équations est strictement inférieur au nombre p d'inconnues, le système admet une infinité de solutions. ☐

(5) Le système est impossible seulement si l'un des vecteurs lignes (a_{ij}) est combinaison linéaire des autres vecteurs lignes. ☐

7. OPÉRATEURS NILPOTENTS. Soient E un espace vectoriel de dimension n, et f une application linéaire nilpotente $E \to E$, c'est-à-dire une application linéaire telle qu'il existe un entier p tel que $f^p = 0$, et que $f^{p-1} \neq 0$ (On dit que p est l'index de f). Quelles sont les propriétés de décomposition de f ?

(1) Si $\mathrm{Ker} f^q = \mathrm{Ker} f^{q+1}$, alors $q \geq p$. ☐

(2) Si $\mathrm{Im} f^q = \mathrm{Im} f^{q+1}$, alors $q \geq p$. ☐

(3) Si x_1, x_2, ..., x_m sont des vecteurs de E tels que $\{f^{p_1}(x_1)\,;f^{p_2}(x_2)\,;\ldots;f^{p_m}(x_m)\}$ soit une famille libre, alors

$$\{x_1\,;f(x_1)\,;\ldots;f^{p_1}(x_1)\,;x_2\,;f(x_2)\,;\ldots$$
$$\ldots;f^{p_2}(x_2)\,;\ldots;x_m\,;\ldots f^{p_m}(x_m)\}$$

forme aussi une famille libre. ☐

(4) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme ☐

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(5) $p \leq n$. ☐

8. Soient U et V deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et H un sous-espace vectoriel de U. Soient f une application linéaire $U \to V$ et f_H sa restriction à H.

Que peut-on dire de f_H ?

(1) f_H est une application linéaire $H \to V$. ☐

(2) $\operatorname{Ker} f_H = \operatorname{Ker} f$ ☐

(3) $\operatorname{Ker} f_H = (\operatorname{Ker} f) \cap H$ ☐

(4) $\operatorname{Im} f_H = f(H)$ ☐

(5) $\operatorname{Im} f_H = \operatorname{Im} f \cap f(H)$ ☐

9. ENDOMORPHISMES DE RANG 1. Soient E un espace vectoriel, et f un endomorphisme de E de rang 1. Que peut-on dire de f ?

(1) $\forall x \in E,\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ f^2(x) = \lambda f(x)$ ☐

(2) $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ f^2(x) = \lambda f(x)$ ☐

(3) f est un projecteur. ☐

(4) $f - \mathrm{Id}_E$ est un isomorphisme de E. ☐

(5) Il existe des applications linéaires $g \in L(\mathbb{R};E)$, et $h \in L(E;\mathbb{R})$ telles que $f = h \circ g$. ☐

10. Soient E un espace vectoriel, et F un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f \in L(E;F)$, et

$$V_f = \{g \in L(F;E) : f \circ g \circ f = 0\}$$

Que peut-on dire de f et de V_f ?

(1) V_f est un sous-espace vectoriel de $L(F;E)$. ☐

(2) Si $V_f = L(F;E)$, alors f est bijective. ☐

(3) Si $V_f = \{0\}$, alors f est injective. ☐

(4) Si $V_f = \{0\}$, alors f est surjective. ☐

(5) Si E est de dimension finie, alors $V_f = \{0\}$. ☐

QCM n°6

Matrices

(Résultats p. 176)

1. Quelle est l'écriture développée de la matrice

$$\left((-1)^i j + i\right)_{1\leqslant i\leqslant 3,\ 1\leqslant j\leqslant 2}\ ?$$

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ☐

(2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ☐

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐

(4) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐

(5) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ ☐

2. CALCUL DE COÛT. Une société fabrique trois produits A, B, et C dans quatre usines W, X, Y, Z. Le coût de fabrication de chaque produit est le même dans chaque usine, et fait intervenir trois ressources R, S et T. Le tableau suivant donne le coût unitaire :

	A	*B*	*C*
R	1	2	3
S	4	3	2
T	5	7	4

Les quantités de chaque produit fabriquées chaque mois par les différentes usines, sont données par le tableau suivant :

	W	*X*	*Y*	*Z*
A	20	30	40	45
B	20	12	13	70
C	10	50	50	5

Les matrices peuvent-elles être utilisées pour calculer le coût annuel dépensé, pour chacune des ressources R, S et T dans chaque usine. ?

(1) Les matrices n'ont rien à voir avec le problème. ☐

(2) Pour calculer le coût, on additionne les vecteurs colonnes de la matrice de coût, ce qui donne □

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1+2+3 \\ 4+3+2 \\ 5+7+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix}$$

On additionne ensuite les vecteurs lignes de la matrice des quantités de fabrication, ce qui donne

$$F_1 = \begin{pmatrix} 20+20+10 & 30+12+50 & 40+13+50 & 45+70+5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 50 & 92 & 103 & 120 \end{pmatrix}$$

On effectue enfin le produit $12\, C_1 F_1$.

(3) On élève à la puissance 12 la matrice de coût, ce qui donne □

$$C_2 = C^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}^{12}$$

On effectue ensuite le produit $C_2 F$, où F est la matrice de fabrication,

$$F = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 40 & 45 \\ 20 & 12 & 13 & 70 \\ 10 & 50 & 50 & 5 \end{pmatrix}$$

(4) On effectue le produit $12\, CF$, où C est la matrice de coût définie en (2), et où F est la matrice de fabrication définie en (3). □

(5) On calcule $(CF)^{12}$, où C est la matrice de coût définie en (2), et où F est la matrice de fabrication définie en (3). ☐

3. MATRICES REMARQUABLES. Quelles sont les définitions correctes ?

(1) Une matrice est dite carrée si chacun de ses coefficients est un carré. ☐

(2) La matrice inverse de la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est définie si chacun des a_{ij} est non nul ; c'est la matrice $(1/a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$. ☐

(3) La matrice identité d'ordre $(n;p)$, notée $\mathrm{Id}_{n,p}$, est la matrice $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ définie par $a_{ij} = 1$ si $i = j$, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. ☐

(4) Une matrice est dite antisymétrique si elle est égale à la transposée de son opposée, ou si elle est égale à l'opposée de sa transposée. ☐

(5) Une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est dite hermitienne si elle est égale à la transposée de sa matrice conjuguée. ☐

4. MATRICES DE PERMUTATION : On appelle *matrice de permutation* toute matrice dont les coefficients valent 0 ou 1, et qui a exactement un 1 sur chaque ligne et chaque colonne. Que peut-on dire de ces matrices ?

(1) Les matrices de permutations sont des matrices d'isomorphismes. ☐

(2) Toute matrice d'isomorphisme est une matrice de permutation. ☐

(3) Les matrices de permutation sont appelées ainsi parce que ce sont les matrices associées aux applications linéaires qui effectuent des permutations des vecteurs de l'espace vectoriel. ☐

(4) Une matrice de permutation est forcément une matrice carrée. ☐

(5) La transposée d'une matrice de permutation est égale à son inverse. ☐

5. DÉCOMPOSITION EN BLOCS DE MATRICES. Quelles sont les affirmations correctes ?

(1) Si deux matrices de même taille A et B sont décomposées en blocs sous la forme ☐

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

le produit AB est donné par

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}$$

où A_1B_1, ..., A_4B_4 sont les produits des blocs.

(2) Si A est une matrice décomposée en blocs sous la forme $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, la transposée de A s'écrit ☐

$$^tA = \begin{pmatrix} ^tA_1 & ^tA_3 \\ ^tA_2 & ^tA_4 \end{pmatrix}$$

(3) Si A est une matrice décomposée en blocs sous la forme $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, l'inverse de A est $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & A_2^{-1} \\ A_3^{-1} & A_4^{-1} \end{pmatrix}$ ☐

(4) Soit A une matrice carrée inversible décomposée en blocs sous la forme $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, où A_1, ..., A_4 sont des matrices carrées inversibles de même taille. On suppose que A, A_1, ..., A_4 admettent une décompostion de la forme $A = LU$, $A_1 = L_1U_1$, ..., $A_4 = L_4U_4$, où L, L_1, ..., L_4 sont des matrices triangulaires unipotentes inférieures, et où M, M_1, ..., M_4 sont des matrices triangulaires supérieures. Alors, ☐

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}.$$

(5) Une matrice carrée A décomposée en blocs carrés sous la forme $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, est diagonale si et seulement si chacun des blocs A_1, ..., A_4 est diagonal. ☐

6. Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que vaut M^{1992} ?

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐

7. On munit $\mathbb{R}_2[X]$ de la base $B = \{1;\ X;\ X^2\}$, et l'on considère l'application

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto (1 - X^2)\,P(0) + 2X(1 - X)\,P\left(\frac{1}{2}\right) + X^2\,P(1) \end{cases}$$

et la famille $C = \{(1 - X^2);\ X(1 - X);\ X^2\}$. Quelles sont les affirmations correctes ?

(1) C est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ ☐

(2) La matrice $M_B(u)$ de u dans la base B est donnée par ☐

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} P(0) & -2\,P(0) & P(0) \\ 0 & 2\,P\left(\frac{1}{2}\right) & -2\,P\left(\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & P(1) \end{pmatrix}$$

(3) La matrice Q, de passage de B à C est inversible, et s'écrit ☐

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) La matrice de u dans la base C est ☐

$$M_C(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) La matrice $M_{B,C}(u)$ de u lorsque l'espace de départ est muni de la base B, et l'espace d'arrivée de la base C est définie par $M_{B,C}(u) = M_C(u)\ Q$. ☐

8. DANSEZ MAINTENANT : «Lors d'un rallye où se trouvent réunis n filles et n garçons, chaque fille a été présenté à k garçons, et chaque garçon a été présentée à k filles ($k > 1$). Ils vont tous danser. Est-il possible de former des couples de telle façon que chaque garçon et chaque fille danse avec quelqu'un qui lui a été présenté ? »

Ce problème important a été résolu en 1950 par König. Parmi les assertions suivantes, quelles sont celles qui peuvent être utilisées à différentes étapes de la démonstration du résultat de König ?

(1) Le problème n'a généralement pas de solution, et l'étude de la matrice ☐

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le montre.

(2) Si M est une matrice carrée $n \times n$ dont les coefficients valent 0 ou 1, et telle que la somme des termes sur chaque ligne et sur chaque colonne soit constante, égale à k, alors, M s'écrit comme somme de k matrices de permutation. : ☐

$$M = P_1 + P_2 + \ldots + P_k$$

(3) Une matrice à coefficients entiers positifs est somme de matrices de permutations si et seulement si elle est inversible. ☐

(4) Soit E un ensemble, et F_1, F_2, ..., F_n des parties de E. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes : ☐

— Il existe n éléments distincts deux à deux a_1, a_2, ..., a_n de E tels que $a_1 \in, F_1$, $a_2 \in F_2$, ..., $a_n \in F_n$;

— Pour toute combinaison $\{i_1;i_2;...;i_p\}$ d'éléments de $\{1;2;...;n\}$, $p \in \{1;2;...;n\}$, $S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_p}$ a au moins p éléments.

(5) Le problème a une solution, car si cinq points du plan n'ont pas trois points alignés, quatre de ces points sont les sommets d'un quadrilatère convexe. ☐

9. MATRICES DE $M_n(\mathbb{R}_+)$ INVERSIBLES DANS $M_n(\mathbb{R}_+)$. Soit A l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}_+$, inversibles, et dont l'inverse est aussi à coefficients dans $\mathbb{R}_+$. Que peut-on dire de A ?

(1) $A = \varnothing$. ☐

(2) A est un sous-espace vectoriel non vide de $M_n(\mathbb{R})$. ☐

(3) A est non vide et est stable par produit. ☐

(4) A contient l'ensemble des matrices de permutations (carrées d'ordre n). ☐

(5) A est égal à l'ensemble des matrices de permutations (carrées d'ordre n). ☐

10. EXEMPLES DE MATRICES INVERSIBLES. Parmi les matrices suivantes, à coefficients réels, quelles sont celles qui sont inversibles ?

(1) $$\begin{pmatrix} 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 \\ 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 \\ 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 & 9^3 \end{pmatrix}$$ ☐

(2) A, matrice carrée d'ordre n telle qu'il existe une matrice carrée d'ordre n, B, telle que $AB = \mathrm{Id}_n$. ☐

(3) $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ avec, pour tout i, $1 \leq i \leq n$. $| a_{ii}| > \sum_{k \neq i} | a_{ik}|$. ☐

(4) $$\begin{pmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & a_1 - b_3 & a_1 - b_4 \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & a_2 - b_3 & a_2 - b_4 \\ a_3 - b_1 & a_3 - b_2 & a_3 - b_3 & a_3 - b_4 \\ a_4 - b_1 & a_4 - b_2 & a_4 - b_3 & a_4 - b_4 \end{pmatrix}$$ ☐

avec $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1$,

et $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = 1$.

(5) $$\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos 2\alpha & \cdots & \cos(n-1)\alpha \\ \cos\alpha & \cos 2\alpha & \cos 3\alpha & \cdots & \cos n\alpha \\ \cos 2\alpha & \cos 3\alpha & \cos 4\alpha & \cdots & \cos(n+1)\alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(n-1)\alpha & \cos(n\alpha) & \cos(n+1)\alpha & \cdots & \cos(2n-1)\alpha \end{pmatrix}$$ ☐

avec $\alpha \notin \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

QCM n°7
Réduction des endomorphismes

(Résultats p. 185)

1. Soient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de période n, et P_n l'ensemble des suites réelles de période n. Les affirmations suivantes sont-elles exactes ?

(1) F_n et P_n sont des espaces vectoriels. ☐

(2) $F_2 + F_3 = F_6$ ☐

(3) $F_p + F_q = F_p \oplus F_q$ si p et q sont premiers entre eux. ☐

(4) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} P_n$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ sont des espaces vectoriels. ☐

(5) Les suites (F_n) et (P_n) sont croissantes. ☐

2. Applications linéaires couplées. Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K, et f et g deux endomorphismes $E \to E$. Comment ces deux applications peuvent-elles être reliées ?

(1) Il est possible d'avoir ☐
$$f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

(2) Si $f \circ g = g \circ f = 0$, f est le projecteur sur $\operatorname{Ker} g$ parallèlement à $\operatorname{Im} g$, et g est le projecteur sur $\operatorname{Ker} f$ parallèlement à $\operatorname{Im} f$. ☐

(3) Si, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in K$ tel que $g(x) = \lambda_x f(x)$, alors il existe $\lambda \in \mathrm{K}$ tel que $g(x) = \lambda f(x)$. ☐

(4) Si $f \circ g = g \circ f$, tout vecteur propre de f est aussi vecteur propre de g. ☐

(5) Si $f \circ g = g \circ f$, g est inclus dans l'algèbre d'endomorphismes engendrée par f, c'est-à-dire s'exprime en fonction de Id_E, de f, ... de f^p. ☐

3. VALEURS PROPRES. Soient a, b et c trois réels non nuls, $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$. Que peut-on dire des valeurs propres des matrices formées à partir de U, V, ${}^tU$ et ${}^tV$?

(1) Les valeurs propres de UV sont 0, 0 et 3. ☐

(2) 3 est l'unique valeur propre de VU. ☐

(3) Les valeurs propres de ${}^tV\,V$ sont 0, 0, et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. ☐

(4) Les valeurs propres de ${}^t(UV)\,UV$ sont 0, 0 et 9. ☐

(5) Les valeurs propres de ${}^t(UV)\,UV$ sont ☐
0, 0 et $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$.

4. PUISSANCES D'UNE MATRICE. Soient

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

$a \in \mathbb{R}$, et

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Que peut-on dire de ces matrices et de leurs puissances successives ?

(1) $M^2 = M + 2Id_3$ ☐

(2) $N^2 = N + 2Id_2$ ☐

(3) -1 et 2 sont valeurs propres de M et de N. ☐

(4) $M^n = (-1)^n M + \frac{1}{3}\left[2^n + 2(-1)^n\right] Id_3$ ☐

(5) $N^n = \frac{1}{3}\left[2^n - (-1)^n\right] N + \frac{1}{3}\left[2^n + 2(-1)^n\right] Id_2$ ☐

5. EVOLUTION DU CHÔMAGE ET PUISSANCES DE MATRICES. Dans une ville dont la population totale est stationnaire, on étudie l'évolution de l'emploi, en mesurant chaque année à la même date le nombre de personnes ayant un emploi, et celui des chômeurs. La situation du chômage à la date 0 de mesure est la suivante : il y a 10.000 personnes en activité, parmi lesquelles 7.000 ont un emploi, et 3.000 sont au chômage. L'évolution du chômage d'une année sur la suivante se fait selon les règles suivantes :

— 10% des personnes qui ont un emploi à la date n sont au chômage à la date $n+1$;

— 60% de ceux qui sont au chômage à la date n ont un emploi à la date $n+1$.

Qu'est ce que les matrices permettent de dire de l'évolution future du chômage ?

(1) Les matrices ne peuvent pas aider dans l'étude de ce problème. ☐

(2) Le chômage tend vers une limite non nulle. ☐

(3) Le chômage tend vers un cycle de période 2, c'est-à-dire vers une valeur les années paires, et vers une autre valeur les années impaires. ☐

(4) Asymptotiquement, toute la population sera au chômage. ☐

(5) Le chômage s'annulera l'année 33. ☐

6. Si A est une matrice $m \times n$, et si B est une matrice $p \times q$, on définit le produit direct $A \otimes B$ comme étant la matrice $mp \times nq$ définie, en matrice-bloc, par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Quelles sont les propriétés du produit direct ?

(1) Si A, B et C sont trois matrices, et si A et B sont de même taille, alors ☐

$$(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$$

(2) Si A, B, C et D sont quatre matrices de tailles respectives $m \times n$, $p \times q$, $n \times s$, et $q \times t$, alors ☐

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

(3) Si u est un vecteur propre de la matrice $m \times m$ A pour la valeur propre λ, et si v est un vecteur propre de la matrice $n \times n$ B pour la valeur propre μ, alors $u \otimes v$ est vecteur propre de $A \otimes B$ pour la valeur propre $\lambda\mu$. ☐

(4) Si u est un vecteur propre de la matrice $m \times m$ A pour la valeur propre λ, et si v est un vecteur propre de la matrice $n \times n$ B pour la valeur propre μ, alors $u \otimes v$ est vecteur propre de $A \otimes B$ pour la valeur propre $\lambda + \mu$. ☐

(5) Si u est un vecteur propre de la matrice $m \times m$ A pour la valeur propre λ, et si v est un vecteur propre de la matrice $n \times n$ B pour la valeur propre μ, alors $u \otimes v$ est vecteur propre de
$$C = (A \otimes Id_n) + (Id_m \otimes B)$$
pour la valeur propre $\lambda + \mu$. ☐

7. DIAGONALISATION. Comment peut-on compléter la phrase "*Une matrice carrée M d'ordre n est diagonalisable...*" ?

(1) seulement si elle a n valeurs propres distinctes. ☐

(2) s'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $P^{-1} M Q$ soit une matrice diagonale. ☐

(3) seulement s'il existe une famille libre de n vecteurs colonnes qui soient vecteurs propres de M. ☐

(4) si et seulement s'il existe une famille libre de n vecteurs colonnes qui soient vecteurs propres de M. ☐

(5) seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1} M P$ soit une matrice diagonale. ☐

8. MATRICES DIAGONALISABLES. Quelles sont les matrices diagonalisables (sur $\mathbb{R}$) ?

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐

(4) $\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ 1-a-b & 1-a-b & 1-a-b \end{pmatrix}$ ☐

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐

9. PROBLÈME DE POPULATION. Dans une population de lapins et de fouines, on a observé les faits suivants :
— Chaque année, le nombre de lapins est égal à 4 fois le nombre de lapins moins deux fois le nombre de fouines de l'année précédente.
— Chaque année, le nombre de fouines est égal à la somme du nombre de lapins et du nombre de fouines de l'année précédente.

Sachant qu'il y a actuellement 100 lapins et 10 fouines, que peut-on dire de l'évolution future du nombre de lapins et du nombre de fouines ?

(1) Rien : les hypothèses sont visiblement incomplètes. ☐

(2) Si l'évolution de poursuit selon les règles énoncées, les deux populations augmenteront indéfiniment. ☐

(3) L'évolution s'arrêtera forcément au bout de 14 années, lorsque la population des lapins se sera éteinte. ☐

(4) Asymptotiquement, il y aura deux fois plus de lapins que de fouines. ☐

(5) Asymptotiquement, il y aura infiniment plus de lapins que de fouines. ☐

10. RÉCURRENCE LINÉAIRE. Soit w_n le nombre de mots de n lettres prises dans l'alphabet $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ et tels que deux lettres consécutives diffèrent d'une unité. Soient également a_n, b_n et c_n le nombre de ces mots qui se terminent par respectivement 0, 1 et 2. Que peut-on dire de ces quatre suites (w_n), (a_n), (b_n) et (c_n) ?

(1) Elles satisfont à la relation de récurrence ☐

$$w_n = a_n + b_n + c_n.$$

(2) Elles satisfont à la relation de récurrence ☐

$$w_n = 2a_n + 2b_n + c_n.$$

(3) Elles satisfont à la relation de récurrence ☐

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + c_n. \\ c_{n+1} = 2b_n \end{cases}$$

(4) La suite (b_n) vérifie $b_{2n} = b_{2n+1} = 3^n$. ☐

(5) La suite (w_n) vérifie $w_{2n} = 3^{n-1}$ si $n > 4$. ☐

QCM n°8

Statistiques descriptives

(Résultats p. 200)

1. POPULATION ET VARIABLES STATISTIQUES. On relève l'opinion, favorable ou défavorable, de 50 élèves des classes préparatoires, à propos d'un livre de QCM. On note X la variable d'opinion, et x_i l'opinion du i-ième consommateur interrogé. Que peut-on dire de cette expérience statistique ?

(1) La population est formée de l'ensemble des étudiants interrogés. ☐

(2) La population est formée de tous les élèves des classes préparatoires concernées par le livre. ☐

(3) X est une variable quantitative continue. ☐

(4) X est une variable quantitative discrète. ☐

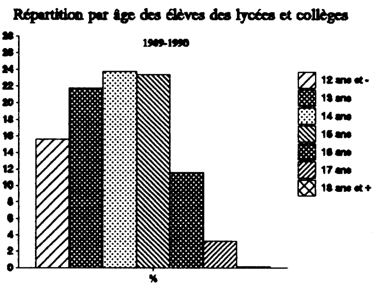
(5) X est une variable qualitative nominale. ☐

2. Représentation des données. Voici la répartition par âge des élèves des collèges et des lycées fournie par le ministère de l'Education Nationale en 1989-1990 :

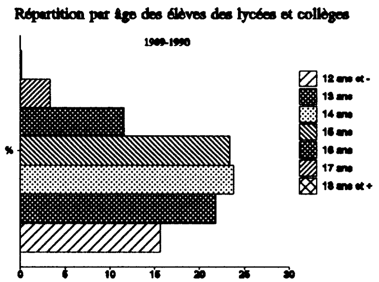
Age	%
12 ans et moins	15,6
13 ans	21,8
14 ans	23,8
15 ans	23,4
16 ans	11,6
17 ans	3,3
18 ans et plus	0,15

Quels sont les graphiques qui représentent ces données ?

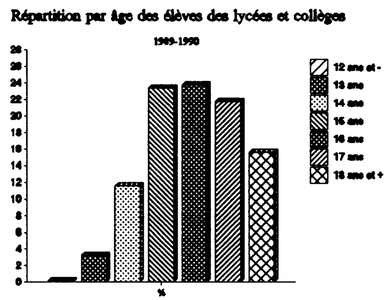
(1) □



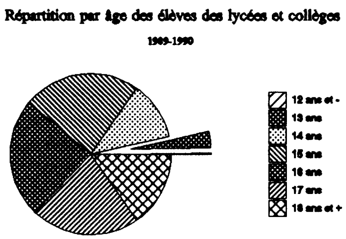
(2)


Répartition par âge des élèves des lycées et collèges
1989-1990
%
0
5
10
15
20
25
30
12 ans et -
13 ans
14 ans
15 ans
16 ans
17 ans
18 ans et +

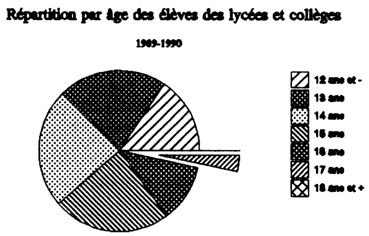
(3)


Répartition par âge des élèves des lycées et collèges
1989-1990
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
%
12 ans et -
13 ans
14 ans
15 ans
16 ans
17 ans
18 ans et +

(4)


Répartition par âge des élèves des lycées et collèges
1989-1990
12 ans et -
13 ans
14 ans
15 ans
16 ans
17 ans
18 ans et +

(5) ☐



3. CARACTÉRISTIQUES DE POSITION. Voici la répartition de taille des lycées et collèges en 1989-1990.

Effectif	**% dans l'ensemble des lycées**	**% dans l'ensemble des collèges**
moins de 300	5,0	19,1
de 300 à 399	3,9	13,6
de 400 à 499	4,8	16,1
de 500 à 599	5,2	16,5
de 600 à 699	6,8	13,3
de 700 à 899	13,7	16,4
de 900 à 1499	36,5	5,0
de 1500 à 4000	24,1	—

Quelles sont les caractéristiques de ces deux populations ?

(1) La classe modale des effectifs des lycées est [900;1499]. ☐

(2) La classe modale des effectifs des lycées est [700;899]. ☐

(3) La classe médiane des effectifs des lycées est [600;699]. ☐

(4) La classe médiane des effectifs des lycées est [900;1499]. ☐

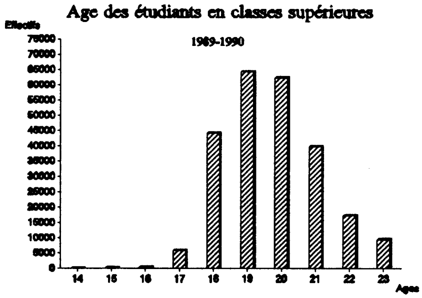
(5) Les quatre quartiles des effectifs des collèges sont [0;300[, [400;499], [600;699] et [900;1499]. ☐

4. L'ÂGE DES ÉTUDIANTS. Voici la répartition des âges des étudiants des classes préparatoires en 1989-1990 (données du ministère de l'Education Nationale)

Age	**Nombre d'étudiants**
14	3
15	40
16	258
17	5751
18	44142
19	64355
20	62295
21	39779
22	17258
23	9445

Quelles sont les caractéristiques de cette population ?

(1) L'histogramme de cette population est le suivant ☐



(2) La moyenne d'âge des étudiants est de 18 ans. ☐

(3) La moyenne d'âge des étudiants est de 19,7 ans. ☐

(4) La médiane de la population est 20 ans. ☐

(5) Le mode de la population est 19 ans. ☐

5. Propriétés de la moyenne arithmétique. Soient $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_j)_{1\leq j\leq p}$ deux séquences[3] de nombres réels (deux "séries statistiques"), et soient $\overline{x}$ et $\overline{y}$ les

[3] ***Séquence*** : suite finie. En statistiques, on parle plutôt de *série statistique*, mais en mathématiques, le terme *série* peut être ambigu.

moyennes arithmétiques de ces deux séquences. Quelles sont les propriétés de ces nombres ?

(1) La moyenne arithmétique de la séquence $((x_i)_{1\leq i\leq n};(y_j)_{1\leq j\leq p})$ réunion des deux séries $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_j)_{1\leq j\leq p}$ est égale à la moyenne arithmétique de $\overline{x}$ et $\overline{y}$, $\dfrac{\overline{x}+\overline{y}}{2}$. ☐

(2) La somme des écarts à la moyenne est nulle : ☐

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)=0$$

(3) La somme des carrés des écarts à la moyenne est nulle : ☐

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=0$$

(4) La somme des carrés des écarts à la moyenne est minimale : ☐

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\inf_{a\in\mathbb{R}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right\}$$

(5) Pour tout entier $p\geq 2$, la somme des puissances p-ièmes des écarts à la moyenne est minimale : ☐

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^p=\inf_{a\in\mathbb{R}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^p\right\}$$

6. FONCTION D'ÉCART ABSOLU. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une séquence (série statistique). Soit f la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|t - x_i|$; on dit que f est la *fonction d'écart moyen* de la séquence. Quelles sont les propriétés de cette fonction ?

(1) Le minimum de f est atteint en $\bar{x}$, la moyenne arithmétique des x_i. ☐

(2) La fonction f est constante sur tout intervalle I contenant $\bar{x}$, la moyenne arithmétique des x_i, et ne contenant aucun des x_i. ☐

(3) Le minimum de f est atteint en m, médiane des x_i. ☐

(4) La fonction f est constante sur tout intervalle I contenant une médiane m des x_i, et ne contenant aucun des x_i. ☐

(5) La fonction f est constante sur tout intervalle I ne contenant aucun des x_i. ☐

7. FONCTION D'ÉCART QUADRATIQUE. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une séquence (série statistique). Soit f la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t - x_i)^2$; on dit que f est la *fonction d'écart quadratique* de la séquence. Quelles sont les propriétés de cette fonction ?

(1) Si $n = 2p$, f est constante sur l'intervalle $[x_k; x_{k+1}]$. ☐

(2) Si $n = 2k+1$, l'ensemble des minimums de f est réduit à $\{x_{k+1}\}$. ☐

(3) Si m est médiane des x_i, $f(m) = 0$. ☐

(4) Si $\bar{x}$ est la moyenne arithmétique des x_i, $f(\bar{x}) = 0$. ☐

(5) f est minimale en $\bar{x}$, la moyenne arithmétique des x_i, ☐

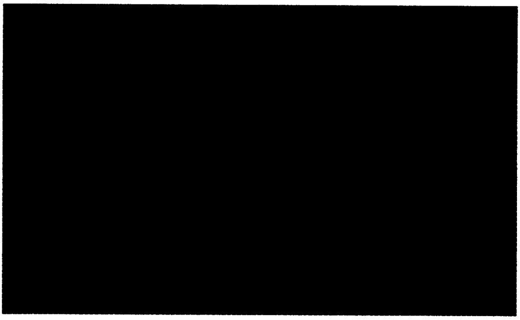
8. LE PRIX D'UN LIVRE EST-IL FONCTION DU NOMBRE DE PAGES ? Voici un tableau donnant en parallèle le nombre de pages et le prix des livres d'un échantillon d'une collection d'un grand éditeur scientifique parisien (devinez lequel!) :

Pages	**Prix**	**Pages**	**Prix**	**Pages**	**Prix**
192	95	96	80	256	130
176	100	176	100	288	130
192	95	264	140	320	145
224	120	256	110	380	152
240	138	320	156	272	152

Soient X la variable associée au nombre de pages, et Y celle associée au prix. Que peut-on dire de ces distributions statistiques ?

(1) La distribution marginale de X est $\{192\ ;\ 176\ ;\ 192\ ;\ 224\ ;\ 240\ ;\ 96\ ;\ 176\ ;\ 264\ ;\ 256\ ;\ 320\ ;\ 256\ ;\ 288\ ;\ 320\ ;\ 380\ ;\ 272\}$ ☐

(2) Le nuage de points de ces données peut être représenté ainsi ☐



(3) Le coefficient de corrélation de X et de Y vaut approximativement 0,8946. ☐

(4) Une approximation numérique d'une équation de la droite de regression de Y en X est ☐

$$x - 243{,}466 = \left(\frac{1460{,}996}{567{,}982}\right) \times (y - 122{,}866)$$

(5) Une approximation numérique d'une équation de la droite de regression de X en Y est ☐

$$y - 122{,}866 = \left(\frac{1460{,}996}{4695{,}182}\right) \times (x - 243{,}466)$$

9. Voici les résultats des ventes trimestrielles de cartes à puces d'une société qui monte :

	Année 1				Année 2				Année 3	
Trimestre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quantités vendues	100	250	350	900	1500	3800	6000	13000	25000	55000

On désigne par $f(x)$ la quantité de cartes vendues durant le trimestre x. Quelles informations peut-on tirer d'un tel tableau ?

(1) On peut légitimement effectuer un ajustement linéaire de f, c'est-à-dire approcher f par une fonction de la forme $x \mapsto ax + b$. ☐

(2) On peut légitimement approcher f par une fonction de la forme ☐

$$x \mapsto a \ln(x) + b.$$

(3) On peut légitimement approcher f par une fonction exponentielle, de la forme ☐

$$x \mapsto b\, a^x.$$

(4) On peut légitimement approcher f par une fonction puissance, de la forme ☐

$$x \mapsto a\, x^n.$$

(5) On peut légitimement approcher f par une fonction quadratique, de la forme ☐

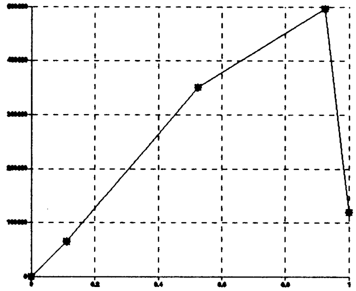
$$x \mapsto ax^2 + bx + c.$$

10. L'ÂGE DU ~~CAPITAINE~~ TRAVAILLEUR. Voici un tableau donnant les prévisions de l'INSEE concernant le nombre des actifs en l'an 2000, en fonction de leur âge :

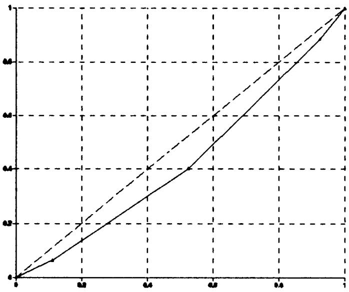
Classes d'âge	[20;24]	[25;39]	[40;54]	[55;65]
Nombre total d'actifs (en milliers)	2956	10933	10571	1989

Quelle est la courbe de Gini (*i.e.* la courbe de concentration) de cette distribution ?

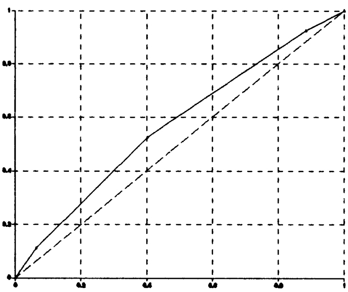
(1) □



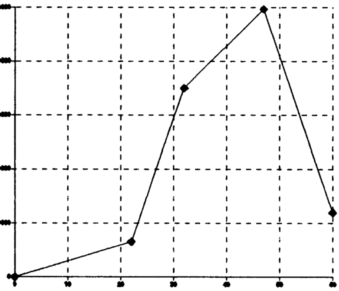
(2) □



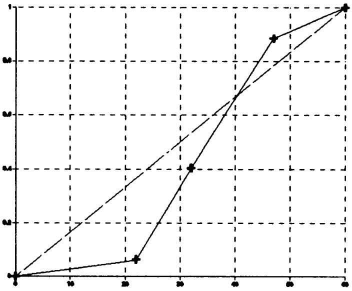
(3) □



(4) □



(5) □



QCM n°9

Calculs de probabilités

(Résultats p. 219)

1. ESPACE PROBABILISÉ. Les espaces suivants peuvent-ils servir d'espace probabilisable pour modéliser le jeu de Loto ?

(1) L'ensemble des parties à 6 éléments de $\{1;2;...;49\}$. ☐

(2) L'ensemble $\{1;2;...;49\}^6$. ☐

(3) L'ensemble des suites finies à valeurs dans l'ensemble des parties à 6 éléments de $\{1;2;...;49\}$. ☐

(4) L'ensemble des parties à 7 éléments de $\{1;2;...;49\}$. ☐

(5) L'ensemble des suites à valeurs dans l'ensemble des parties à 6 éléments de $\{1;2;...;49\}$. ☐

2. TRIBUS. Soient Ω un ensemble, T une tribu de parties de Ω, et E une partie propre de Ω, c'est-à-dire une partie non vide de Ω différente de Ω. Les familles suivantes de parties de Ω sont-elles des tribus ?

(1) $E \cup T$, c'est-à-dire la famille des parties de Ω de la forme $E \cup A$, avec $A \in \mathrm{T}$. ☐

(2) $E \cap T$, c'est-à-dire la famille des parties de Ω de la forme $E \cap A$, avec $A \in \mathrm{T}$. ☐

(3) T^c, c'est-à-dire la famille des parties de Ω de la forme A^c, avec $A \in \Omega$. ☐

(4) $\varnothing \cup (E \cup T) \cup (E^c \cup T)$, c'est-à-dire la famille de parties de Ω formée de la partie vide et des parties de Ω de la forme $E \cup A$ ou $E^c \cup A$, avec $A \in \mathrm{T}$. ☐

(5) La famille U des parties de Ω formée de la partie vide et des parties de Ω incluant soit E soit E^c. ☐

3. PROBABILITÉS. Les formules suivantes définissent-elles des lois de probabilité sur $\mathbb{N}$?

(1) Pour tout $n \geq \mathrm{e}$, $P_1(n) = \dfrac{1}{n \ln n}$. ☐

(2) ☐

$$P_2(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \mapsto \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right),$$

et, pour tout $n \geq 1$,

$$P_2(n) = \int_{(n-1)2\pi + \frac{\pi}{2}}^{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \left(x \mapsto \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right)$$

(3) Pour tout $n \geq 0$, ☐

$$P_3(n) = p^{\alpha}\binom{-\alpha}{n}(-1)^n(1-p)^n,$$

avec α $\mathbb{R}_+^*$, $p \in]0;1[$, et

$$\binom{-\alpha}{n} = \frac{(-\alpha)_n}{n!} = \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\ldots(-\alpha-n+1)}{n!}$$

(4) Pour tout $k \leq N$, ☐

$$P_4(k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

où N, m et n sont des entiers vérifiant $n \leq N$ et $m \leq N$.

(5) Pour tout $k \leq N$, ☐

$$P_5(k) = \binom{n}{k}\frac{(m)_k\,(N-m)_{n-k}}{(N)_n}$$

où N, m et n sont des entiers vérifiant $n \leq N$ et $m \leq N$.

4. Formule de Poincaré. Soient (Ω, A, P) un espace probabilisé, et $E_1, E_2, \ldots, E_5$ des événements de cet espace probabilisé. Pour tout i, $1 \leq i \leq 5$, on désigne par P_i l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, 5\}$ ayant i éléments, par χ_{E_i} la fonction caractéristique (indicatrice) de E_i, définie par

$$\chi_{E_i}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in E_i \\ 0 \text{ si } x \notin E_i \end{cases}$$

et par a_i, le réel défini par

$$a_j = \sum_{J \in P_j} P\left(\bigcap_{i \in J} E_i\right)$$

On a donc par exemple

$$a_1 = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_5)$$

$$a_2 = P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + \ldots + P(E_4 \cap E_5)$$

$$a_5 = P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_5)$$

Quelles sont les probabilités correctes ?

(1) $P\left(\bigcup_{i=1}^{5} E_i\right) = a_1$ ☐

(2) $P\left(\left\{\omega \in \Omega : \text{card}\{i : \omega \in E_i\} = 2\right\}\right)$
$= a_2 - 3a_3 + 6a_4 - 10a_5$ ☐

(3) $P\left(\left\{\omega \in \Omega : \text{card}\{i : \omega \in E_i\} = 3\right\}\right)$
$= a_3 - 4a_4 + 10a_5$ ☐

(4) $P\left(\left\{\omega \in \Omega : \text{card}\{i : \omega \in E_i\} = 4\right\}\right)$
$= a_4 + 5a_5$ ☐

(5) $P\left(\left\{\omega \in \Omega : \text{card}\{i : \omega \in E_i\} = 5\right\}\right) = a_5$ ☐

5. EVÉNEMENTS INDÉPENDANTS. On lance n pièces de monnaie bien équilibrées (la probabilité d'obtenir face vaut 1/2), $n \geq 2$. Soit A l'événement "Toutes les pièces tombent du même côté". Soit B l'événement "Au plus une pièce donne face". Que peut-on dire de l'indépendance de A et de B ?

(1) A et B sont toujours dépendants. ☐

(2) A et B sont toujours indépendants. ☐

(3) A et B sont indépendants si et seulement si $n = 3$. ☐

(4) A et B sont indépendants si et seulement si $n \neq 3$. ☐

(5) A et B sont indépendants si et seulement si $n > 2$. ☐

6. UNE QUESTION CONTROVERSÉE. Un jeu télévisé se déroule de la façon suivante : un candidat est face à trois portes fermées, A, B et C. Derrière l'une des portes se trouve une voiture, et derrière les deux autres une chèvre. Le candidat choisit d'abord une porte, qui reste fermée. L'animateur du jeu ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle se trouve une chèvre, et demande au candidat s'il désire changer de choix de porte. Le candidat peut alors soit garder la première porte, soit choisir l'autre porte encore fermée. On ouvre alors la porte qu'il a finalement choisie, et il part avec ce qu'il y a derrière.

On admet qu'au départ, la voiture est placée de manière équiprobable derrière l'une des portes, et que lorsque le candidat a, lors de son premier choix, choisi la porte derrière laquelle se trouve la voiture, le présentateur ouvre avec la même probabilité l'une ou l'autre des deux autres portes.

Le problème est le suivant : Quelle stratégie le candidat doit-il adopter pour optimiser ses chances de gagner la voiture ?

(1) Le candidat doit choisir la porte A, et la garder. ☐

(2) Le candidat peut choisir n'importe quelle porte au départ, mais il doit ensuite modifier son choix. ☐

(3) Le candidat peut choisir n'importe quelle porte au départ, mais il a ensuite intérêt à ne pas modifier son choix initial. ☐

(4) Le candidat peut choisir n'importe quelle porte au départ, et le fait qu'il change ou non son choix n'a pas d'effet sur ses chances de gagner. ☐

(5) Le candidat peut choisir n'importe quelle porte au départ, mais la stratégie optimale qu'il doit ensuite adopter est probabiliste : il doit changer son choix initial avec la probabilité $1/3$, et le garder avec la probabilité $2/3$. ☐

7. SQUASH. Les règles du jeu du squash sont les suivantes : Le joueur au service gagne le point s'il remporte l'échange. Le joueur qui n'est pas au service remporte le service s'il remporte l'échange (s'il remporte aussi l'échange suivant, il gagne le point). Le premier joueur qui arrive à 9 points gagne le jeu, sauf si les deux joueurs sont à égalité à 8 points partout. Dans ce cas, au moment où l'on arrive pour la première fois du jeu à 8-8, le joueur qui n'a pas le service doit prendre une décision : ou bien le gagnant sera celui qui arrivera le premier à 9 points, ou bien le gagnant sera le premier des deux joueurs à avoir 10 points. Dans ce dernier cas, reprenant la terminologie anglo saxonne, nous dirons qu'il "set". Bien entendu, une fois que ce joueur a pris sa décision lors de l'égalité, le choix qui a été fait s'impose jusqu'à la fin du jeu. En particulier, celui qui a choisi ne peut plus changer d'avis si c'est lui qui arrive le premier à 9 point !

Considérant que si les joueurs sont arrivés à l'égalité à 8 points chacun, c'est qu'ils sont de force sensiblement égale, on supposera que chaque joueur a une probabilité 1/2 de gagner un échange. Quelle est la stratégie optimale du joueur qui doit choisir comment sera gagné le jeu ?

(1) Les deux stratégies sont équivalentes. ☐

(2) Le joueur a toujours intérêt à choisir le jeu gagnant en 9 points. ☐

(3) Le joueur a toujours intérêt à choisir le jeu gagnant en 10 points. ☐

(4) S'il a gagné le dernier échange, le joueur a intérêt a choisir le jeu gagnant en 10 points ; sinon il a intérêt à choisir le jeu gagnant en 9 points. ☐

(5) S'il a gagné l'avant dernier échange et perdu le dernier, le joueur a intérêt a choisir le jeu gagnant en 9 points ; s'il a perdu les deux derniers échanges, il a intérêt à choisir le jeu gagnant en 10 points. ☐

8. TROIS ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS. Trois événements indépendants A, B et C ont pour probabilités respectives a, b et c. Par ailleurs, on note x la probabilité pour que ni A ni B ni C ne se produise, y la probabilité pour qu'au moins l'un des trois événements A, B et C ne se produise pas, et enfin z la probabilité pour que C se produise sans que ni A ni B ne le fasse. Quelles sont les relations entre a, b, c, x, y et z ?

(1) $x = 1 - abc$ ☐

(2) $y = (1 - a)(1 - b)(1 - c)$ ☐

(3) $z = c(1 - a)(1 - b)$ ☐

(4) $c = \dfrac{z}{x + z}$ ☐

(5) $b = \dfrac{(1 - y)(x + z)}{az}$ ☐

9. CALCULS DE PROBABILITÉS. Soient A, B et C trois événements d'un espace probabilisé tels que

$$P(A) = 0{,}4 \qquad P(B) = 0{,}5$$
$$P(C) = 0{,}7 \qquad P(A \cap B) = 0{,}2$$
$$P(B \cap C) = 0{,}3 \qquad P(A \cap C) = 0{,}2$$

Quelles sont les probabilités correctes ?

(1) $P(A^c \cap B \cap C) = 0{,}2$ ☐

(2) $P\big((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)\big) = 0{,}5$ ☐

(3) $P\big((A \cap B) \mid A\big) = 0{,}5$ ☐

(4) $P((A \cap B \cap C) \mid (A \cup B \cup C)) = 0{,}1$ ☐

(5) $P(A \cup B \mid A) = \frac{7}{4}$ ☐

10. PARI. François propose à Patricia le pari suivant : *Dans ce jeu de 52 cartes, choisis deux niveaux de cartes, par exemple Roi et Dame, puis bats le jeu. Je te parie qu'en retournant le jeu, on trouvera côte à côte deux cartes appartenant aux deux niveaux que tu auras choisis, par exemple un Roi et une Dame l'une à la suite de l'autre.* Que doit-on penser d'un tel pari ?

(1) François a plus de chances que Patricia de gagner le pari. ☐

(2) Patricia a plus de chances de gagner le pari que François. ☐

(3) François et Patricia ont exactement la même probabilité de gagner leur pari. ☐

(4) On ne peut dire qui a le plus de chances de gagner, car cela dépend du choix que fera Patricia pour les deux niveaux. ☐

(5) François gagnera forcément, car quels que soient les deux niveaux que choisira Patricia, deux des cartes ayant ces niveaux seront côte à côte. ☐

QCM n°10
Variables aléatoires discrètes

(Résultats p. 237)

☞ Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles, on note si elles existent EX ou $E(X)$ l'espérance de X, $\mathrm{Var}(X)$ la variance de X, et $\mathrm{Cov}(X\,;Y)$ la covariance de X et de Y (*cf.* l'encadré de la page 242). ☜

1. DÉPENDANCE, INDÉPENDANCE. Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $(X;Y)$ prenne les valeurs (–1;0), (0;–1), (0;1) et (1;0) avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
Que peut-on dire des variables aléatoires X et Y ?

(1) $XY = 0$. ☐

(2) $EX = EY = 0$. ☐

(3) $E(XY) = EX\,EY$. ☐

(4) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. ☐

(5) $\mathrm{Cov}(X;Y) = 0$. ☐

2. QUI VA COMMENCER ? Pour déterminer qui va jouer en premier, N personnes qui sont assises autour d'une table lancent à tour de rôle un dé. Ce dé, peut-être pipé, a la probabilité p de produire un 6 lorsqu'il est lancé. La personne qui commence le jeu est la première à obtenir un 6. On note X la variable aléatoire indiquant la personne qui commence à jouer, sachant que l'on numérote les joueurs de 1 à N, dans l'ordre des lancers, en donnant le 1 à celle qui lance le dé en premier.

Quelle est la loi de X ?

(1) X suit une loi uniforme ☐

$$P(X=k) = \frac{1}{N} \quad 1 \leq k \leq N.$$

(2) X suit une loi arithmétique (les probabilités sont en progression arithmétique), ☐

$$P(X=k) = \frac{N+1-k}{N(N+1)} \quad 1 \leq k \leq N.$$

(3) X suit une loi binomiale de paramètres N et p, ☐

$$P(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad 1 \leq k \leq N.$$

(4) X suit une loi de Poisson circulaire, ☐

$$P(X=k) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-p}\, p^{k+iN}}{(k+iN)!}, \quad 1 \leq k \leq N$$

(5) X suit une loi géométrique tronquée, ☐

$$P(X=k) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} p(1-p)^{i-1}}\, p(1-p)^{k-1}$$

$$= \frac{p(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)^N}, \quad 1 \leq k \leq N$$

3. CALCUL DE LOI. On tire deux boules dans une urne comportant n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$). Soient A et B les numéros des boules tirées, $X = \min\{A;B\}$ et $Y = \max\{A;B\}$. Que peut-on dire des lois de X, de Y et de $(X;Y)$?

(1) La variable aléatoire $(X;Y)$ suit une loi uniforme sur $\{1;2;...;n\}^2$. ☐

(2) X suit une loi uniforme sur $\{1;2;...;n-1\}$. ☐

(3) Y suit une loi uniforme sur $\{2;3;...;n\}$. ☐

(4) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si $n = 2$. ☐

(5) Les variables aléatoires X et Y sont dépendantes quel que soit $n \geq 2$. ☐

4. CALCULS DE LOIS. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ (*i.e.* $P(X = k) = p(1-p)^k$ si $k \in \mathbb{N}$, 0 sinon). Quelles sont les lois et probabilités correctes ?

(1) La loi de $Z = \min(X;Y)$ est une loi géométrique de paramètre $1 - p$. ☐

(2) La variable aléatoire ☐
$$T = \max(0;X-Y)$$
suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{p}{2-p}$.

(3) $$P(Y \geq X) = \frac{1}{2-p}$$ ☐

(4) La variable aléatoire $U = X + Y$ suit une loi géométrique de paramètre $p(1-p)$. ☐

(5) Pour tout entier $k > 0$, et tout entier naturel non nul $q \leq k$, on a ☐

$$P(Y = q \mid X + Y = k) = \frac{1}{k}$$

5. LE RÉGISSEUR SURMENÉ. Un régisseur de théâtre surmené place des costumes dans les loges des acteurs. Il place au hasard les n costumes des n acteurs dans les loges ($n > 2$), de telle sorte qu'il y ait exactement un costume par loge, et que chacune des $n!$ répartitions possibles ait la même probabilité. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'acteurs trouvant leur costume dans leur loge, et, pour $1 \leq k \leq n$, X_k la variable aléatoire valant 1 si l'acteur k trouve son costume dans sa loge, 0 sinon. Quelles sont les propriétés des variables aléatoires X et X_k ?

(1) Les variables aléatoires (X_k) sont indépendantes. ☐

(2) $$X = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$ ☐

(3) $$X = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$$ ☐

(4) $$E[X] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k]$$ ☐

(5) $$\mathrm{var}[X] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}[X_k] = \frac{n-1}{n}$$ ☐

6. LE RÉGISSEUR SURMENÉ (BIS). Un régisseur de théâtre surmené place des costumes dans les loges des acteurs. Il place au hasard les n costumes des n acteurs dans les loges ($n > 2$), de telle sorte que chacune des n^n répartitions possibles ait la même probabilité. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'acteurs trouvant leur costume dans leur loge, et, pour $1 \leq k \leq n$, X_k la variable aléatoire valant 1 si l'acteur k trouve son costume dans sa loge, 0 sinon. Quelles sont les propriétés des variables aléatoires X et X_k ?

(1) Les variables aléatoires (X_k) sont indépendantes. ☐

(2) $$X = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$ ☐

(3) $$X = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$$ ☐

(4) $$E[X] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k]$$ ☐

(5) $$\mathrm{var}[X] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}[X_k] = \frac{n-1}{n}$$ ☐

7. UNE BONNE ESPÉRANCE. Une expérience consiste à répéter n fois une épreuve dont la probabilité de succès est $\frac{1}{k}$. Les épreuves successives sont indépendantes. L'expérience est considérée comme un succès lorsque toutes les épreuves ont été un succès. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fois qu'il a fallu répéter l'expérience pour arriver à une expérience qui soit un succès. Que peut-on dire ?

(1) La probabilité pour qu'une expérience soit un succès est $\dfrac{n}{k}$. ☐

(2) X suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{k^n}$. ☐

(3) $E(X) = n^k$. ☐

(4) $E(X) = k^n$. ☐

(5) La probabilité pour que X soit inférieur à $E(X)$ ne dépend pas de k. ☐

8. JEU DE RAQUETTES. Dans un jeu ressemblant au tennis, deux joueurs A et B échangent des balles. Gagne le jeu le premier qui gagne trois échanges (pour le tennis, il en faut quatre), avec la réserve que si les deux joueurs gagnent chacun deux échanges, le jeu se poursuit jusqu'à ce que l'un des deux joueurs ait remporté deux échanges de plus que l'autre. On désigne par p la probabilité pour que A gagne un échange, et par $f(p)$ la probabilité pour qu'il gagne un jeu. Que peut-on dire de ce jeu ?

(1) La probabilité pour que A gagne le jeu après seulement trois échanges est p^3. ☐

(2) La probabilité pour que A gagne le jeu après quatre échanges est $p^3(1 - p)$. ☐

(3) Pour tout $p \in [0;1]$, on a $f(p) = p$. ☐

(4) La probabilité pour que A gagne le jeu est égale à la probabilité pour que A gagne un échange (i.e. $f(p) = p$) si et seulement si $p \in \{0;1\}$. ☐

(5) La règle du jeu favorise les joueurs faibles : si un joueur a une probabilité $p < \frac{1}{2}$ de gagner un échange, alors sa probabilité de gagner le jeu est supérieure à p. ☐

9. EST-IL RENTABLE DE GROUPER LES TESTS SANGUINS ? C'est la question que se posent les responsables d'un laboratoire d'analyse devant pratiquer un test de dépistage d'un virus sur les N éléments d'une population. Les données sont les suivantes : chaque individu a la probabilité p d'être infecté, et si l'on note X_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'individu k est infecté, 0 sinon, les variables aléatoires (X_k), $1 \leq k \leq N$ sont mutuellement indépendantes. Si le laboratoire ne groupe pas les tests sanguins, il effectue N analyses. S'il groupe les échantillons sanguins par paquets de n, il y a deux cas possibles pour un paquet : ou bien tous les membres de ce paquet de n individus sont séro-négatifs, et alors le test groupé est négatif, ou bien au moins l'un des n membres de ce paquet est séro-positif, et alors le test de tout le groupe est positif ; dans ce cas, le laboratoire analyse individuellement les échantillons sanguins provenant des n individus, et il a alors dû effectuer $n+1$ analyses. On suppose pour simplifier que n divise N. Quelles sont les propriétés de cette méthode de groupage sanguin ?

(1) La probabilité pour qu'un test groupé sur un échantillon de n personnes soit positif est $(1-p)^n$. ☐

(2) L'espérance du nombre d'analyse à effectuer pour dépister le virus dans les n membres d'un paquet, dans le cas d'un dépistage groupé est ☐

$$(n+1) - n(1-p)^n$$

(3) Quelles que soient la probabilité p et la taille N du groupe, la méthode de groupage conduit toujours en moyenne à plus d'analyses que l'analyse systématique. ☐

(4) L'espérance du nombre d'analyses à effectuer est une fonction décroissante du nombre d'individus dans les paquets, de sorte que plus les paquets sont grands, moins il y a d'analyses à effectuer. ☐

(5) Il existe un taille optimale des paquets qui minimise l'espérance du nombre d'analyses à effectuer pour dépister le virus parmi les N personnes de la population. ☐

10. Le ~~sorcier~~ météorologue incompétent. Dans un pays pluvieux où la probabilité de pluie durant un jour donné est $p > \frac{1}{2}$, et où les événements "il pleut durant le jour k" sont mutuellement indépendants, un ~~sorcier~~ météorologue totalement incompétent décide de prévoir le temps des n prochains jours au hasard, en prévoyant parmi eux r jours de pluie, de telle sorte que les $\binom{n}{r}$ répartitions possibles de ces r jours aient la même probabilité. On désigne par X_k la variable aléatoire valant 1 si la prévision pour le jour k est correcte, 0 sinon. On désigne également par X la variable aléatoire donnant le nombre de jours pour lesquels la prévision a été correcte. Quelles sont les propriétés de X et des X_k, et le ~~sorcier~~ météorologue peut-il optimiser sa prédiction ?

(1) La loi de X_k est donnée par ☐

$$P(X_k = 1) = 1 - P(X_k = 0)$$
$$= p\,\frac{r}{n} + (1 - p)\,\frac{n-r}{n}$$

(2) Les X_k, $1 \leq k \leq n$, sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes. ☐

(3) Le météorologue peut maximiser EX en choisissant r de telle sorte que le rapport $\frac{r}{n}$ soit aussi proche que possible de p. ☐

(4) Le météorologue peut maximiser EX en choisissant $r = n$. ☐

(5) EX ne dépend pas de r. ☐

QCM n°11
Variables aléatoires continues

(Résultats p. 251)

1. Caractéristiques d'une loi. Pour tout $\alpha \in]0;1[$, soit X_α une variable aléatoire dont la fonction de répartition F_α est définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par

$$F_\alpha(x) = 1 - e^{-\alpha \tan x}$$

Quelles sont les propriétés des variables aléatoires X_α ?

(1) La médiane m_α de X_α vaut ☐

$$\arctan\left(\frac{\ln 2}{\alpha}\right).$$

(2) La densité f_α de X_α est définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par ☐

$$f_\alpha(x) = -\tan x \, e^{-\alpha \tan x}$$

(3) La densité f_α de X_α est définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par ☐

$$f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\cos^2 x} e^{-\alpha \tan x}$$

(4) L'espérance mathématique de X_α vaut ☐

$$E[X_\alpha] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \mapsto e^{-\alpha \tan x}\right)$$

(5) L'espérance mathématique $E[X_\alpha]$ de X_α satisfait à l'équation différentielle ☐

$$\frac{d^2 E[X_\alpha]}{d\alpha^2} = E[X_\alpha]$$

2. CHANGEMENT DE VARIABLE POUR LES VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ. Soit X une variable aléatoire réelle continue de densité f. Les densités déduites de f en effectuant un changement de variable sur X sont-elles exactes ?

(1) La variable aléatoire $Y = X^2$ a comme densité la fonction g définie par ☐

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right] & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

(2) La variable aléatoire $Y = X^2$ a comme densité la fonction h définie par ☐

$$h(y) = \begin{cases} f(\sqrt{y}) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

(3) La variable aléatoire $Y = X^2$ a comme densité la fonction k définie par ☐

$$k(y) = \begin{cases} \dfrac{f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

(4) La variable aléatoire $Z = aX + b$ (avec a, $b \in \mathbb{R}$) a comme densité la fonction r définie sur $\mathbb{R}$ par ☐

$$r(y) = \frac{1}{a} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

(5) La variable aléatoire $Z = aX + b$ (avec a, $b \in \mathbb{R}$) a comme densité la fonction r définie sur $\mathbb{R}$ par ☐

$$r(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

3. LOIS MARGINALES. La loi conjointe de deux variables aléatoires X et Y admet pour densité une fonction f_{XY} définie sur le domaine $0 \leq X \leq 1$, $0 \leq Y \leq X$, et qui est proportionnelle à la fonction

$$(x;y) \mapsto y^{\beta}(1-x)^{\alpha},$$

où α et β sont des réels fixés tous deux > -1. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $(x;y)$ tel que $0 \leq x \leq 1$ et que $0 \leq y \leq x$, on ait $f_{XY}(x;y) = \lambda y^{\beta}(1-x)^{\alpha}$.

On rappelle que la fonction B (lire béta) est définie pour $m > 0$ et $n > 0$ par

$$B(m;n) = \int_0^1 \left(t \mapsto t^{m-1}(1-t)^{n-1}\right)$$

et qu'elle vérifie $B(m;n) = B(n;m)$ et $B(m+1;n) = \dfrac{m}{m+n} B(m;n)$.

Quelles sont les propriétés des lois de X et de Y ?

(1) $\lambda = \dfrac{\beta+1}{B(\beta;\alpha)}$ ☐

(2) La densité f_X de X est la fonction $[0;1] \to \mathbb{R}$ définie par ☐

$$f_X(x) = \frac{x^{\beta+1}(1-x)^{\alpha}}{B(\beta+2;\alpha+1)}$$

(3) La densité f_Y de Y est la fonction $[0;1] \to \mathbb{R}$ définie par ☐

$$f_Y(y) = \frac{(\beta+1)\,y^{\beta}(1-y)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\,B(\beta+1;\alpha+2)}$$

(4) ☐

$$E[X] = E[Y] = \frac{\beta+2}{\alpha+\beta+3}$$

(5) La densité conditionnelle $f_{X|Y=y}$ de X sachant $Y = y$ est la fonction $[0;1] \to \mathbb{R}$ définie par ☐

$$f_{X|\,Y=y}(x) = \frac{(\alpha+1)(1-x)^{\alpha}}{(1-y)^{\alpha+1}}$$

4. CORDES. On trace une corde de longueur aléatoire dans un cercle de rayon 1. Pour cela, on désigne respectivement par X, et Y les variables aléatoires donnant la longueur de la corde lorsque la loi de cette longueur obéit aux conditions suivantes :

(i) Pour X : la distance de la corde au centre du cercle, R, suit une loi uniforme sur $[0;1]$.

(ii) Pour Y : l'angle θ que fait la corde avec la tangente en son extrémité suit une loi uniforme sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Que peut-on dire des lois de X, Y et Z ?

(1) Pour tout $x \in [0;2]$, ☐

$$P(X \geq x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

(2) Pour tout $y \in [0;2]$, ☐

$$P(Y \geq y) = 1 - \arcsin \frac{y}{2}$$

(3) Pour tout $x \in [0;2]$, ☐

$$P(X \geq x) \leq P(Y \geq x)$$

(4) $E[X] = \dfrac{\pi}{2}$ ☐

(5) $E[Y] = \dfrac{4}{\pi}$ ☐

5. TEMPS D'ATTENTE DU MÉTRO. Les métros passent à la station Bourbaki toutes les quatre minutes, en respectant des écarts fixes entre deux métros consécutifs. Un voyageur se présente à la station à une heure aléatoire indépendante du passage des métros. Quelle est l'espérance de son temps d'attente ?

(1) Une minute. ☐

(2) Deux minutes. ☐

(3) Trois minutes. ☐

(4) Quatre minutes. ☐

(5) Plus de quatre minutes. ☐

6. TEMPS D'ATTENTE DE L'AUTOBUS. Pour se rendre du départ de la ligne à la station Feller, les autobus de cette ligne mettent un temps aléatoire, de telle sorte que les temps s'écoulant entre les passages de deux autobus consécutifs soient mutuellement indépendants et suivent une loi exponentielle de paramètre α (voir p. 256). Le nombre $N(t)$ d'autobus qui sont passés à la station Feller entre les instant 0 et t suit donc une loi de Poisson de paramètre αt, définie par $P(N(t) = n) = e^{-\alpha t}\dfrac{(\alpha t)^n}{n!}$. On suppose que le temps moyen s'écoulant entre deux bus est de quatre minutes. Un voyageur se présente à la station à une heure aléatoire indépendante du passage des autobus. Quelle est l'espérance de son temps d'attente ?

(1) Une minute. ☐

(2) Deux minutes. ☐

(3) Trois minutes. ☐

(4) Quatre minutes. ☐

(5) Plus de quatre minutes. ☐

7. ETES-VOUS L'ÊTRE LE PLUS MALCHANCEUX DE LA TERRE ? Quand vous choisissez une queue au supermarché, n'avez-vous pas souvent l'impression d'avoir pris la mauvaise file ? Pour savoir si ce sentiment est justifié, considérons des clients numérotés 0, 1, ..., n, ... qui se présentent à des caisses. On note W_n le temps d'attente du client n, et l'on suppose que les W_n sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, absolument continue, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Puisque les W_n sont absolument continues, la probabilité pour qu'il existe n et p tels que $W_n = W_p$ est nulle. Imaginez que vous avez le numéro 0. Soit N l'indice du premier client plus malchanceux que vous, c'est-à-dire le plus petit entier n tel que $W_n > W_0$. Que peut-on dire de la variable aléatoire N ?

(1) $E(N) = 1$ ☐

(2) $E(N) = +\infty$ ☐

(3) L'espérance de N est toujours finie, mais la valeur de cette espérance dépend de la loi des W_n. ☐

(4) Il existe des lois de W_n qui donnent à N une espérance finie, et des lois de W_n conduisant à une espérance infinie pour N. ☐

(5) Si les W_n suivent une loi exponentielle de paramètre α, l'espérance de N vaut 2α. ☐

8. QUOTIENT. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle de paramètre α. Que peut-on dire de la loi du quotient X/Y ?

(1) La fonction de répartition F de X/Y est telle que $F(t) = \dfrac{1}{1+t}$ si $t > 0$. ☐

(2) La fonction de répartition F de X/Y est telle que $F(t) = \dfrac{t}{1+t}$ si $t > 0$. ☐

(3) La densité f de X/Y est telle que $f(t) = \ln(1+t)$, si $t > 0$. ☐

(4) La densité f de X/Y est telle que $f(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$, si $t > 0$. ☐

(5) L'espérance de X/Y vaut 1. ☐

9. DÉCOUPE. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, ..., X_n$, de même loi uniforme sur $[0;1]$. Ces variables aléatoires définissent n points de l'intervalle $[0;1]$, et découpent donc cet intervalle en $n+1$ sous-intervalles. Soient $L_1, L_2, ..., L_{n+1}$ les longueurs de ces sous-intervalles. Que peut-on dire des variables aléatoires $L_1, L_2, ..., L_{n+1}$?

(1) Les variables aléatoires $L_1, L_2, ..., L_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes. ☐

(2) Les variables aléatoires $L_1, L_2, ..., L_{n+1}$ sont équidistribuées. ☐

(3) Les variables aléatoires L_1 et L_{n+1} ont la même loi, différente des lois des variables aléatoires $L_2, ..., L_n$, et $E(X_1) = \frac{1}{2}E(X_2)$. ☐

(4) Les variables aléatoires L_1 et L_{n+1} ont la même loi, différente des lois des variables aléatoires $L_2, ..., L_n$, et $E(X_1) = 2\,E(X_2)$. ☐

(5) La fonction de répartition de L_1 se déduit de la formule ☐

$$P(L_1 \leq t) = (1 - t)^n$$

valide pour tout $t \in [0;1]$.

10. REDÉCOUPE. On considère le cercle S^1, de centre $(0;0) \in \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, et de rayon 1. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes équidistribuées, suivant une loi uniforme sur S^1. Les points S^1 et S^2 partagent le cercle S^1 en deux arcs, $\overline{X_1X_2}$ et $\overline{X_2X_1}$ (comptés dans le sens trigonométrique) de longueurs respectives L_1 et L_2. On désigne par L_3 la longueur de l'arc contenant $(1;0) = e^{2i\pi}$. Que peut-on dire des lois de L_1, L_2 et L_3 ?

(1) L_1 L_2 et L_3 sont équidistribuées. ☐

(2) L_1 et L_2 sont équidistribuées, mais la loi de L_3 est différente. ☐

(3) $E(L_1) = E(L_2) = \pi$. ☐

(4) $$E(L_3) = \frac{4\pi}{3}$$ ☐

(5) L_3 suit une loi uniforme. ☐

QCM n°12
Convergence de variables aléatoires

(Résultats p. 263)

1. ECART-TYPE ET INÉGALITÉ DE ČEBIČEV. Pour faire comprendre la signification de l'écart-type σ, on a coutume de dire *qu'environ 70% de la masse d'une variable aléatoire est concentrée à moins de σ de μ, que 95% sont à moins de 2σ, et que 99% sont à moins de 3σ.* Cette affirmation est à peu près correcte lorsqu'on a affaire à des variables aléatoires suivant une loi normale, mais ce n'est pas toujours le cas. L'inégalité de Čebičev fournit une autre estimation.

Voici cinq tableaux proposant des valeurs de $P(|X-\mu| \geq k\sigma)$ pour trois lois usuelles, la loi binomiale, la loi de Poisson et la loi normale, pour différentes valeurs de k ; ces tableaux proposent également dans la dernière colonne la majoration tirée de l'inégalité de Čebičev.

Quels sont les tableaux donnant des résultats exacts (à 10^{-3}-près) ?

(1) ☐

k	$P(\lvert X-\mu\rvert \geq k\sigma)$			Čebičev
	$B(5;0,2)$	$P(1)$	$N(0;1)$	
1	0,030	0,234	0,180	0,250

(2) ☐

k	$P(\lvert X-\mu\rvert \geq k\sigma)$			Čebičev
	$B(5;0,2)$	$P(1)$	$N(0;1)$	
1	0,590	0,632	0,317	1,000

(3) ☐

k	$P(\lvert X-\mu\rvert \geq k\sigma)$			Čebičev
	$B(5;0,2)$	$P(1)$	$N(0;1)$	
2	0,058	0,080	0,046	0,250

(4) ☐

k	$P(\lvert X-\mu\rvert \geq k\sigma)$			Čebičev
	$B(5;0,2)$	$P(1)$	$N(0;1)$	
3	0,007	0,019	0,003	0,111

(5) ☐

k	$P(\lvert X-\mu\rvert \geq k\sigma)$			Čebičev
	$B(5;0,2)$	$P(1)$	$N(0;1)$	
4	0,000	0,004	0,000	0,063

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une variable aléatoire réelle dont la loi vérifie

$$P(X = n) = P(X = -n) = \frac{1}{2n^2},$$

et
$$P(X = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Quelles sont les propriétés de ces lois ?

(1) L'espérance et la variance de X_n valent 1. ☐

(2) L'espérance $E(X_n)$ vaut 1, et l'écart-type vaut n. ☐

(3) La variable aléatoire X_n fournit un exemple d'égalité dans l'inégalité de Čebičev, du fait de la relation ☐

$$P\left(|X_n - E(X_n)| \geq n\sigma\right) = \frac{1}{n^2}$$

(4) Pour tous entiers n et k non nuls, les variables aléatoires X_n fournissent des exemples d'égalité dans l'inégalité de Čebičev, du fait des relations ☐

$$P\left(|X_n - E(X_n)| \geq k\sigma\right) = \frac{1}{k^2}$$

(5) Pour tout entier $n > 0$, et tout $k \geq n$, on a $P\left(|X_n - E(X_n)| \geq k\sigma\right) = 0$ ☐

3. LOI DES GRANDS NOMBRES. Soit (X_n), $n \in \mathbb{N}^*$, une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance μ, et de variance σ^2. Pour tout n, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Qu'affirme la loi faible des grands nombres ?

(1) $\lim_{n \to \infty}(S_n - n\mu) = 0$ ☐

(2) Pour tout $\epsilon > 0$, ☐

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|S_n - n\mu| > \varepsilon\right) = 0$$

(3) Pour tout $\epsilon > 0$, ☐

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| Y_n - \mu \right| > \varepsilon \right) = 0$$

(4) Pour tout $\epsilon > 0$, ☐

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| Y_n - \mu \right| < \varepsilon \right) = 1$$

(5) Avec une probabilité égale à 1, Y_n tend vers μ. ☐

4. THÉORÈME ~~LIMITE CENTRAL~~ DE LA LIMITE CENTRÉE. Soit (X_n), $n \in \mathbb{N}^*$, une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance μ, et de variance σ^2. Pour tout n, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $Y_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, et $\tau_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Qu'affirme le théorème ~~limite central~~ de la limite centrée ?

(1) Pour tout réel x, ☐

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

(2) Pour tout réel x, ☐

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \left(t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)$$

(3) Pour tout réel x, ☐

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{Y_n - \mu}{\tau_n} < x\right) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

(4) Pour tout réel x, ☐

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{T_n - \mu}{\tau_n} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \left(t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)$$

(5) Pour tout réel x, ☐

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{T_n - \mu}{\tau_n} < x\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \left(t \mapsto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right)\right)$$

5. Convergence des lois hypergéométriques. On considère une population de N individus, parmi lesquels R sont de type I, et $N-R$ ne le sont pas. On extrait de cette population un échantillon de taille M, en supposant que chacun des N membres de la population a la même probabilité d'être tiré. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre d'individus de type I figurant dans l'échantillon tiré. La loi de X est une loi hypergéométrique de paramètres N, R et M. Elle est donnée par

$$P(X = x) = \frac{\binom{R}{x}\binom{N-R}{M-x}}{\binom{N}{M}}$$

On fait tendre la population N vers l'infini, en gardant constant (on néglige l'arrondi) la proportion d'individus de type qu'elle contient : $R = pN$. Les probabilités $P(X = x)$ convergent-elles ?

(1) Les probabilités n'ont pas de limite. ☐

(2) La loi converge vers une loi géométrique de paramètre p : □

$$\forall x, \quad \lim_{N \to \infty} P(X = x) = p(1-p)^x$$

(3) La loi converge vers une loi binomiale de paramètres M et p : □

$$\forall x, \quad \lim_{N \to \infty} P(X = x) = \binom{M}{x} p^x (1-p)^{M-x}$$

(4) La loi converge vers une loi de Poisson de paramètre p, □

$$\forall x, \quad \lim_{N \to \infty} P(X = x) = \frac{p^x}{x!} e^{-p}$$

(5) La loi converge vers une loi binomiale négative de paramètres M et p : □

$$\forall x, \quad \lim_{N \to \infty} P(X = x) = (-1)^x \binom{-M}{x} p^M (1-p)^x$$

6. ESTIMATION D'UNE POPULATION. Pour estimer le nombre N de poissons d'un lac, on procède ainsi : on pêche d'abord 20 poissons, que l'on marque et que l'on relâche dans le lac. On pêche ensuite 50 poissons, parmi lesquels on trouve X poissons marqués. On suppose que le nombre total de poissons reste inchangé au cours de toute cette estimation, et que tous les poissons ont la même probabilité d'être pêchés. Que peut-on dire de la population de Poissons ?

(1) Le nombre X de poissons marqués dans le lot de 50 poissons pêchés la deuxième fois suit une loi binomiale de paramètres 50 et $p = \dfrac{20}{N}$, donnée par $P(X = k) = \dbinom{50}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ☐

(2) Le nombre X de poissons marqués dans le lot de 50 poissons pêchés la deuxième fois suit une loi hypergéométrique de paramètres 50, 20 et $p = \dfrac{20}{N}$, donnée par ☐

$$P(X = k) = \frac{\dbinom{20}{k}\dbinom{N-20}{50-k}}{\dbinom{N}{50}}$$

(3) $E[X] = \dfrac{1000}{N}$ ☐

(4) La variance de X est donnée par ☐

$$\mathrm{Var}(X) = 50\,\frac{20}{N}\left(1 - \frac{20}{N}\right)\left(1 - \frac{49}{N-1}\right)$$

(5) Si $X = 4$, on peut affirmer, grâce à l'inégalité de Čebičev, qu'il y a 250 poissons dans le lac. ☐

7. NOMBRE D'ARRÊTS DE L'ASCENSEUR. Q personnes entrent dans un ascenseur au rez-de-chaussée d'un immeuble qui comporte N étages (au-dessus du rez-de-chaussée). Personne ne monte dans les étages, et l'ascenseur ne s'arrête que pour laisser descendre des passagers qui sont montés au rez-de-chaussée. On suppose que tous les passagers ont la même probabilité de descendre à tous les étages. Que peut-on dire de l'espérance du nombre d'arrêts de l'ascenseur pour qu'il soit vide ?

(1) Ainsi posé, le problème admet deux solutions possibles. ☐

(2) Sous certaines hypothèses, l'espérance $E[X]$ cherchée vaut ☐

$$E[X] = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{Q}\right)$$

(3) Sous certaines hypothèses, l'espérance $E[K]$ cherchée vaut ☐

$$E[K] = \frac{NQ}{N+Q-1}$$

(4) Sous certaines hypothèses, et si $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{Q}{N} = \alpha$, l'espérance $E[X]$ satisfait à l'équivalent $E[X] \underset{N\to\infty}{\sim} N\left(1 - e^{-\alpha}\right)$. ☐

(5) Sous certaines hypothèses, et si $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{Q}{N} = \alpha$, l'espérance $E[K]$ satisfait à l'équivalent $E[X] \underset{N\to\infty}{\sim} \alpha N$. ☐

8. ALLO ? Combien faut-il brancher de lignes pour équiper en lignes téléphoniques un quartier de 300 abonnés ? Pour répondre à cette question, la compagnie du téléphone observe qu'aux heures de pointe, lorsqu'il dispose d'une ligne, chaque abonné appelle en moyenne 3 minutes par heure, et a donc une probabilité égale à 1/20 d'être en ligne à un instant donné. Les abonnés appellent indépendamment les uns des autres. La compagnie décide de brancher N lignes fonctionnant ainsi : s'il y a $a < N$ abonnés en train de téléphoner à un instant t, et qu'un abonné désire appeler, celui-ci obtient immédiatement la tonalité et en $t+\Delta t$, il y a $a+1$ abonnés en ligne (on suppose négligeable la probabilité pour que deux événements, de début d'appel ou de fin d'appel, se produisent entre t et $t+\Delta t$ est négligeable ; s'il y a déjà N abonnés en train de téléphoner à l'instant t, un abonné essayant d'utiliser son téléphone à cet instant n'obtient pas la tonalité. On modélise donc ce service en considérant qu'à l'instant t, on effectue 300 tirages indépendants d'une loi ayant une probabilité de succès égale à 1/20 ; le nombre de succès correspond au nombre A d'abonnés cherchant à appeler à cet instant t. Quelle valeur doit-on donner à N pour que la probabilité de l'événement $A > N$ soit inférieure à q ?

(1) Un calcul direct à partir de la loi binomiale montre qu'il faut brancher 24 lignes si $q = 0{,}01$. ☐

(2) Une approximation par la loi de Poisson suggère de brancher 25 lignes si $q = 0{,}01$. ☐

(3) Une approximation par la loi normale sugggère de brancher 24 lignes si $q = 0{,}01$. ☐

(4) Si $q = 0{,}001$, le calcul direct et les deux approximations, par la loi de Poisson et par la loi normale, suggèrent d'installer 28 lignes. ☐

(5) Il faut environ 25 lignes si $q = 0{,}01$, et donc environ $50 = 2 \times 25$ si $q = (0{,}01)^2$. ☐

9. SONDAGE. 30.000.000 d'électeurs doivent se rendrent aux urnes pour un référendum. On organise un sondage auprès de N personnes, et on leur demande si elles voteront OUI ou NON. On suppose qu'elles répondent honnêtement et qu'elles ne changeront pas d'avis entre le jour du sondage et le jour du vote. On suppose que l'on va pronostiquer le OUI si le nombre X d'électeurs sondés ayant annoncé leur intention de voter OUI est strictement supérieur au nombre $N - X$ d'électeurs ayant annoncé qu'ils voteraient NON. Inversement pour le NON. On désigne par $p \in [0;1]$ la proportion d'électeurs votant OUI. Quels sont les risques de se tromper ?

(1) Si $p = 0{,}51$, et si l'on interroge 200 personnes, un calcul direct à partir de la loi hypergéométrique montre que la probabilité d'erreur est d'environ 0,59. ☐

(2) Si $p = 0{,}51$, et si l'on interroge 500 personnes, une approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale montre que la probabilité d'erreur est d'environ 0,41. ☐

(3) Si $p = 0{,}51$, et si l'on interroge 5000 personnes, une approximation de la loi hypergéométrique par la loi normale montre que la probabilité d'erreur est d'environ 0,08. ☐

(4) Si l'on a 15 OUI dans le premier échantillon de 20 personnes interrogées, la probabilité de se tromper en pronostiquant immédiatement le OUI est évaluée, par l'approximation binomiale à 0,006. ☐

(5) Si l'on a 15 OUI dans le premier échantillon de 20 personnes interrogées, la probabilité de se tromper en pronostiquant immédiatement le OUI est évaluée, par l'approximation de Gauss à 0,007. ☐

10. CHEZ LE MÉDECIN. Les patients du docteur Martin se présentent individuellement à son cabinet de telle sorte que le temps séparant deux arrivées sucessives suive une loi exponentielle de moyenne $1/\lambda$; il y a donc en moyenne λ patients arrivant par unité de temps, et la probabilité pour qu'entre les instant 0 et t il y ait eu un nombre $\leq n$ d'arrivées est donnée par $\sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$. La durée d'une consultation suit également une loi exponentielle, de moyenne $1/\mu$. Lorsqu'un patient se présente, et que la salle d'attente est déjà pleine, il est renvoyé chez lui ; inversement, si personne n'attend, et si le docteur n'est pas déjà en train d'examiner quelqu'un, l'arrivant entre directement dans la salle d'examen. Ainsi, s'il y a K–1 places dans la salle d'attente, la probabilité p_i pour qu'il y ait i patients dans le cabinet (soit dans la salle d'attente, soit dans la salle d'examen) est donnée par

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0 \\ p_{n+1} = \dfrac{\lambda+\mu}{\mu} p_n - \dfrac{\lambda}{\mu} p_{n-1} & (1 \leq n \leq K-1) \\ p_K = \dfrac{\lambda}{\mu} p_{K-1} \end{cases}$$

Que peut-on dire de l'attente ?

(1) Si $\lambda = \mu$, on a $p_i = \dfrac{1}{K}$, si $1 \leq i \leq K$ ☐

(2) Si $\lambda \neq \mu$, et si $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, on a ☐

$$p_i = \frac{(1-\rho)\rho^i}{1-\rho^K} \quad \text{si } 1 \leq i \leq K$$

(3) Si $\lambda = \mu$, le nombre moyen de patients dans le cabinet est $K/2$. ☐

(4) Si $\lambda \neq \mu$, et si $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, le nombre moyen L de patients dans le cabinet est ☐

$$L = \frac{\rho\left[1 - K\rho^K + K\rho^{K+1}\right]}{\left(1-\rho^K\right)(1-\rho)}$$

(5) Le nombre moyen L_q de patients dans la salle d'attente vérifie la relation ☐

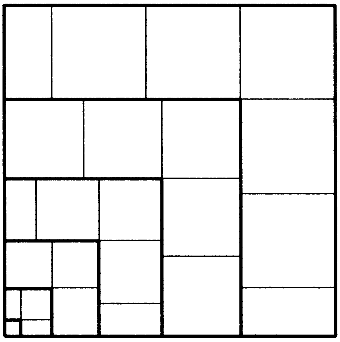
$$L_q = L - 1.$$

QCM n°13

Récapitulatif

(Résultats p. 283)

1. Quelle est la formule illustrée par le dessin suivant ?



(1) $$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$ ☐

(2) $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ ☐

(3) $$\sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$$ ☐

(4) Pour $|x| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$
$$= \frac{1}{1 - x}$$

(5) $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ ☐

2. EQUATION DU SECOND DEGRÉ. "Déterminer les réels α et β solutions de l'équation du second degré en x, $x^2 + \alpha x + \beta = 0$." Voici la solution donnée par un étudiant :

$$x_2 + \alpha x + \beta = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\alpha \\ \alpha\beta = \beta \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \beta(\alpha - 1) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \text{ et } \alpha = 0 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta = -2 \end{cases}$$

Que peut-on dire de cette solution ?

(1) Elle est correcte. ☐

(2) Elle est fausse car lorsque $\alpha = -1$, les termes se simplifient, de sorte que l'on n'a plus affaire à une équation du second degré. ☐

(3) Elle est fausse car α et β ne sont pas forcément les seules racines de l'équation. ☐

(4) Elle est fausse car les relations donnant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré ne sont pas vérifiées dans le cas où les coefficients contiennent des paramètres. ☐

(5) Elle est fausse car il y a une faute de signe dès le départ : la somme des racines de l'équation $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ vaut α, et non $-\alpha$. ☐

3. Soit A_n l'ensemble des matrices carrées M d'ordre n à coefficients dans $\{-1;0;1\}$, ayant un unique terme non nul sur chaque ligne et sur chaque colonne, et vérifiant $M^2 = \mathrm{Id}_n$. Soit u_n le nombre d'éléments de A_n. Quelles sont les propriétés de A_n et u_n ?

(1) Les éléments de A_n sont des matrices symétriques. ☐

(2) La suite (u_n) satisfait à la relation de récurrence $u_{n+1} = 2(n+1)u_n$. ☐

(3) La suite (u_n) satisfait à la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 2n\,u_{n-1}$. ☐

(4) $$u_n = \sum_{\{(k;p)\in\mathbb{N} \,:\, k+2p=n\}} \frac{2^k\, n!}{k!\; p!}$$ ☐

(5) $$u_n = \sum_{\{(k;p)\in\mathbb{N} \,:\, 2k+p=n\}} \frac{2^k\, n!}{k!\; p!}$$ ☐

4. QUAND $\mathbb{R}^n$ EST-IL UN CORPS ? Soit n un entier ≥ 3 tel que $\mathbb{R}^n$ soit muni d'une structure de corps commutatif, l'addition étant celle de la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit I le neutre multiplicatif de $\mathbb{R}^n$, et soit $\{I; A_1; ...; A_{n-1}\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ considéré comme espace vectoriel. Que peut-on affirmer ?

(1) Il existe un polynôme P de degré n tel que $P(A_1) = 0$. ☐

(2) Il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que ☐

$$(\lambda A_1 + \mu I)^2 = -I.$$

(3) $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, peut être muni d'une structure de corps commutatif dont l'addition est celle de la structure d'espace vectoriel si et seulement si $n = 4$. ☐

(4) $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ne peut jamais être muni d'une structure de corps commutatif dont l'addition soit celle de la structure d'espace vectoriel. ☐

(5) $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, peut être muni d'une structure de corps commutatif dont l'addition est celle de la structure d'espace vectoriel si et seulement si $n > 4$. ☐

5. Quelle est l'image du cercle $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$ par l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$?

(1) Le cercle $|z| = 4/3$. ☐

(2) La droite $\Re(z) = 4/3$. ☐

(3) La parabole $3y - 2x^2 - 1 = 0$. ☐

(4) Le cercle $\left|z - \frac{8}{3}\right| = \frac{4}{3}$. ☐

(5) Le triangle de sommets $4/3$, 4, et $4(2 + i)/3$. ☐

6. Quelle est la condition exprimant que les quatre complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 sont cocycliques ou colinéaires ?

(1) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \in \mathbb{R}$. ☐

(2) $\dfrac{\left(\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right)}{\left(\dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}\right)} \in \mathbb{R}$ ☐

(3) $\dfrac{\left(\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 \cdot z_3}\right)}{\left(\dfrac{z_1 - z_4}{z_2 \cdot z_4}\right)} \in \mathbb{R}$ ☐

(4) $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in \mathbb{R}i$ ☐

(5) $\dfrac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4} \in \mathbb{R}$ ☐

7. Soit $M = (a_{ij})$ une matrice carrée $n \times n$ ayant les propriétés suivantes :

— Les coefficients de la matrice ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1.

— Si $a_{ij} = 0$, alors $a_{ji} = 1$, et inversement, si $a_{ij} = 1$, alors $a_{ji} = 0$.

— Les coefficients de la matrice sont nuls sur la diagonale : $a_{ii} = 0, \forall i$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ est un exemple d'une telle matrice.

Quelles sont les propriétés d'une telle matrice, et que peut-elle servir à illustrer ?

(1) $$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2\right)$$ ☐

(2) $$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)^2$$ ☐

(3) $$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$ ☐

(4) On peut représenter avec de telles matrices le résultat de tout tournoi où n équipes sont engagées, et jouent contre chacune des $n-1$ autres, le résultat de chaque rencontre se chiffrant par un 1 pour une victoire, par un 0 pour une défaite, les matchs nuls n'existant pas. ☐

(5) Une telle matrice fournit un exemple de deux échantillons différents ayant la même moyenne, et la même variance. ☐

8. On place n points dans le plan, et on trace les droites les reliant. On suppose qu'il n'y a aucune paire de droites parallèles, et que les seuls points du plan appartenant à plus de deux droites sont les n points choisis. Ces droites découpent le plan en u_n zones. Que peut-on dire de ce découpage ?

(1) On a tracé $\binom{n}{2}$ droites. ☐

(2) Quand on rajoute un $(n+1)$-ième point, on trace n droites qui rajoutent chacune $\frac{n^2}{2} - \frac{3}{2}n + 4$ zones définies par le découpage en deux d'une zone obtenue précédemment. ☐

(3) Les u_n satisfont à la relation de récurrence ☐

$$u_{n+1} = u_n + \frac{n^3}{2} - \frac{3}{2}n^2 + 4n$$

(4) Les u_n satisfont à la relation de récurrence ☐

$$u_{n+1} = u_n + \frac{n^3}{2} - \frac{3}{2}n^2 + 4n - 1$$

(5) $$u_n = \frac{1}{8}n^4 - \frac{3}{4}n^3 + \frac{23}{8}n^2 - \frac{13}{4}n + 1$$ ☐

9. ARRIVÉES PAR PAQUETS. Des autobus A_1, A_2, ..., amènent des voyageurs vers un port où ils sont transbordés dans des ferries. Le remplissage des autobus est aléatoire, et l'on désigne par X_i le nombre de passagers de l'autobus A_i. Les X_i sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, équidistribuées, à valeurs entières, et leur loi est donnée par $P(X_i = k) = f_k$. Soit N le nombre d'autobus dont les voyageurs sont regroupés dans un ferry. On suppose que N est une variable aléatoire indépendante des X_i, et que sa loi est donnée par $P(N = n) = g_n$.

Que peut-on dire de la loi de la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ donnant le nombre de passagers du ferry amenés par la ligne d'autobus ?

(1) $E(S) = E(X_1)\,E(N)$ ☐

(2) $E(S) = E(X_1) + E(N)$ ☐

(3) $Var(S) = Var(X_1)\,E(N)$ ☐

(4) $Var(S) = Var(X_1)\,E(N) + Var(N)\,E(X_1)$ ☐

(5) $Var(S) = Var(X_1)\,E(N) + Var(N)\left[E(X_1)\right]^2$ ☐

10. PROPRIÉTÉS DES LOIS NORMALES. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $N(\mu;\sigma)$. Quelles sont les affirmations exactes ?

(1) La densité f de X est définie par ☐

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

(2) $E[X] = \mu$. ☐

(3) $\mathrm{Var}[X] = \sigma$. ☐

(4) Pour tous réels a et b, la variable aléatoire $aX + b$ suit une loi normale $N(a\mu + b;\, a\sigma)$. ☐

(5) $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale réduite, $N(0;1)$. ☐

Résultats du QCM n°1
Combinatoire et dénombrements

(Questions p. 1)

1.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ☐
(4) ■
(5) ☐

Pour chaque question, il y a deux réponses possibles. Pour dix questions, il y a donc $2^{10} = 1024$ choix possibles.

2.

(1) ■
(2) ☐
(3) ☐
(4) ☐
(5) ☐

Posons la soustraction, puis l'addition :

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ - & c & b & a \\ \hline & a-c-1 & 9 & c-a+10 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & a-c-1 & 9 & c-a+10 \\ + & & c-a+10 & 9 & a-c-1 \\ \hline & 1 & 0 & 8 & 9 \end{array}$$

Le résultat vaut toujours 1089.

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

3.

(1) □ (2) □ (3) ■ (4) ■ (5) □

Ils peuvent tous être premiers : prendre 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19. Dans ce cas, les x_i sont tous premiers entre eux, et il n'existe pas de x_i, de $n \in \mathbb{N}$, ni de x_j tels que $(x_i)^n$ soit divisible par x_j. L'assertion (3) est un cas particulier du principe de Dirichlet, aussi appelé *principe des trous de pigeons :* si l'on dispose de n boites pour ranger $n+1$ objets, il y a au moins deux objets qui sont dans la même boite. Ici, les boites sont les classes de congruence modulo 7. Il y en a 7, alors que l'on a 8 nombres. Donc au moins deux de ces 8 nombres sont congrus modulo 7, et l'assertion (3) est vraie. Pour l'assertion (4), supposons qu'aucun des huit nombres ne soit premier. Puisque $19^2 = 361$, tout entier composite inférieur à 360 est divisible par un nombre premier strictement inférieur à 19. Or il n'y a que 7 tels nombres premiers. Le principe des trous de pigeons permet encore de conclure : deux des huit entiers doivent être divisibles par le même nombre premier.

4.

(1) ■ (2) ■ (3) ■ (4) ■ (5) ■

Pour se convaincre de la première formule, développons $(1 + x)^5$:

$$\begin{aligned}(1+x)^5 &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 \\ &= \binom{5}{5} + \binom{5}{4}x + \binom{5}{3}x^2 + \binom{5}{2}x^3 + \binom{5}{1}x^4 + \binom{5}{0}x^5\end{aligned}$$

— En dérivant x^5, on obtient $5x^4$.
— En dérivant $5x^4$, on obtient 2 fois $10x^3$.
— En dérivant $10x^3$, on obtient 3 fois $10x^2$.
— etc.

On pourra vérifier à partir de l'expression des coefficients binomiaux que ceci est toujours vrai.

Pour établir la seconde assertion, il suffit, là encore, de considérer l'expression des coefficients binomiaux :

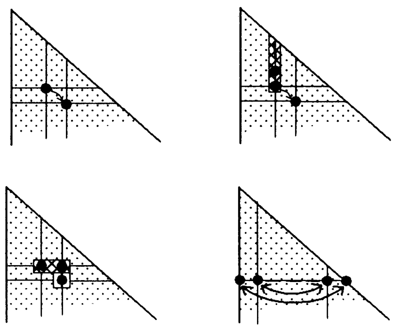
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n}{p}\,\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Pour établir l'assertion (3), utilisons l'interprétation des coefficients binomiaux en termes de parties : $\binom{n}{p}$ représente le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments. Soit donc $E = \{x_1;x_2;...;x_n\}$ un ensemble à n éléments. Pour tout k, $1 \leq k \leq n$, soit F_k l'ensemble des parties de E à p éléments dont le premier élément est x_k. Les F_k réalisent une partition de l'ensemble des parties de E à n éléments. Le premier élément d'un élément A de F_k étant fixé, A est déterminé par ses $p-1$ autres éléments, choisis parmi les $n-k$ suivant x_k, à savoir x_{k+1}, ..., x_n ; il y a donc $\binom{n-k}{p-1}$ éléments dans F_k, et l'assertion (3) s'en déduit.

Enfin, les assertions (4) et (5) sont bien connues.

Les dessins suivants constituent le moyen mnémotechnique pour se souvenir des formules des choix (2) à (5).



■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

5.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) ■

La méthode de calcul des probabilités des différentes mains est standard. Voici par exemple les formules donnant respectivement les probabilités d'avoir une paire, deux paires, un brelan, et une couleur, dans le poker usuel, à 5 cartes :

$$P(\text{une paire}) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}^3}{\binom{52}{5}} \approx 0{,}4226$$

$$P(\text{deux paires}) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}^2\binom{11}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} \approx 0{,}0475$$

$$P(\text{un brelan}) = \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}^2}{\binom{52}{5}} \approx 0{,}0211$$

$$P(\text{une couleur}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 0{,}0020$$

Voici un tableau résumé des différentes probabilités avec 4, 5, 6 ou 7 cartes :

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Main	Probabilités			
	4 cartes	5 cartes	6 cartes	7 cartes
Rien	0,6553	0,5011	0,3431	0,2091
1 paire	0,3042	0,4225	0,4855	0,4728
2 paires	0,0103	0,0475	0,1213	0,2216
3 paires	—	—	0,0030	0,0184
Brelan	0,0092	0,0211	0,0359	0,0492
Suite	0,0102	0,0039	0,0018	0,0010
Couleur	0,0104	0,0020	0,0003	0,0001
Full	—	0,0014	0,0081	0,0246
Carré	0,00005	0,0002	0,0007	0,0013
Straight flush	0,0002	0,00002	0,000002	0,0000002

Avec 4 cartes, la possibilité d'avoir un full disparaît, et les probabilités d'avoir 2 paires, une couleur ou une suite valent respectivement, à 10^{-7}-près, 0,0103721, 0,0104017 et 0,0102392.

Avec 6 cartes, comme avec 7, la probabilité de ne rien avoir est inférieure à la probabilité d'avoir une paire. Il faudrait donc changer l'ordre de valeur des mains. En revanche, plus on rajoute de cartes, plus le nombre de mains augmente : par exemple, avec 6 cartes, on peut avoir 3 paires, ou une paire et un carré, ou deux brelans.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

6.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) □

Le mot A N A G R A M M E comporte 9 lettres, réparties ainsi :
3 A, 2 M, 1 N, 1 G, 1 R, 1 E.
Un anagramme du mot A N A G R A M M E correspond à une classe de permutations des 9 lettres, où deux permutations sont équivalentes si les lettres A et les lettres E occupent les mêmes emplacements. Comme il y a 3 lettres A, et 2 lettres E, les classes d'équivalence comportent $3! \times 2!$ éléments. finalement, le mot A N A G R A M M E en a $\dfrac{9!}{3!\,2!}$.

7.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) □

Calculons d'abord le nombre $f(n;p)$ de façons de prendre p paires deux à deux disjointes, formées chacune de deux objets consécutifs pris dans une liste ordonnée de n objets x_1, x_2, ..., x_n. Si A est une telle liste,

$$A = \{(a_1;a_1+1),\ (a_2;a_2+1),\ ...,\ (a_p;a_p+1)\},$$

posons

$$f(A) = \{a_1;\ a_2-1;\ a_3-2;\ a_4-3;\ ...;\ a_p-(p-1)\}.$$

Alors, $f(A)$ est un choix de p objets parmi $n-p$, à savoir $\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{n-p}\}$, et il est clair que f est une bijection de notre ensemble de listes sur l'ensemble de ces choix. Ainsi,

$$f(n;p) = \binom{n-p}{p}$$

La différence entre $f(n;p)$ et $g(n;p)$ tient au dernier élément de la liste : le premier élément d'une paire ne peut pas être x_n, tandis que le dernier élément d'une liste d'objets non consécutifs peut être x_n. Si l'on identifie chaque élément a_i d'une liste de p objets non consécutifs avec la paire $(a_i;a_{i+1})$, on voit qu'il existe une bijection entre l'ensemble des listes de p objets non consécutifs pris dans $\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\}$, et l'ensemble des

---

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Le Poker

Issu d'un jeu persan appelé *Ās Nâs* ou *Dsands*, le *poke* était très populaire à Paris au XVIII^e siècle, où l'on y jouait avec un jeu de 20 cartes. A la même époque, une version anglaise assez proche était le *brag*, et un autre jeu français était l'*ambigu*. Le poke fut exporté aux Etats-Unis par la colonie française de la Nouvelle Orléans. C'est dans ce pays qu'il prit d'abord le nom de *straight poker*, et qu'il fut adapté au jeu de 52 cartes, aux environs de 1830. Le *draw poker*, maintenant appelé simplement *poker* est le jeu que nous connaissons aujourd'hui ; ses règles furent établies aux environs de 1860, durant la guerre civile américaine. Le poker est maintenant le jeu de cartes le plus populaire en Amérique du Nord, et l'un des trois jeux de cartes les plus pratiqués dans le monde.

Tous les livres élémentaires de probabilités donnent des exemples de calculs de probabilités de mains aux poker. Ce n'est qu'à partir de 1943, avec le livre de von Neumann et Morgenstern *Theory of games and economic behavior*, que le jeu de poker fut étudié de manière plus approfondie, avec le début de la recherche de la stratégie optimale. Les articles publiés depuis sur ce jeu se divisent en deux catégories :

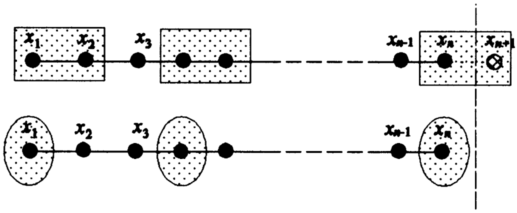
— Les articles théoriques se concentrent la plupart du temps sur des jeux simplifiés, ayant seulement deux joueurs ; cette limitation est liées au fait qu'avec plus de deux joueurs, le théorème du minimax de von Neumann et Morgenstern ne s'applique pas.

— Les articles pratiques proposent généralement des stratégies calculées par ordinateurs qui ne sont pas optimales, mais des approximations de stratégies optimales.

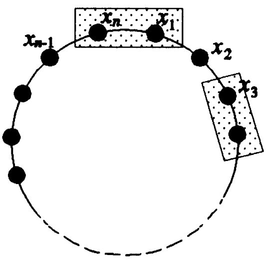
A ce jour, le "record" publié concerne le jeu à 8 joueurs, mais on peut se demander si certains mathématiciens-joueurs n'auraient pas été plus loin... en gardant pour eux-mêmes leurs résultats.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*



paires disjointes formées de deux objets consécutifs pris dans $\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$. On a donc $g(n;p) = f(n+1;p)$, soit $g(n;p) = \binom{n+1-p}{p}$.



Lorsque les objets sont placés circulairement, la différence avec les cas précédents provient de ce que sur le cercle, le premier et le dernier élément de la liste sont voisins. Former une liste de paires d'objets consécutifs revient à placer des dominos ne se chevauchant pas, et recouvrant chacun deux points consécutifs parmi les n points $x_1, x_2, ..., x_n$ placés sur le cercle. Il y a des listes incluant la paire $\{x_n;x_1\}$, et des listes n'incluant pas cette paire. Choisir l'une de ces dernière revient à choisir une liste de p paires deux à deux disjointes, formées chacune de deux objets consécutifs pris dans la liste ordonnée $x_1, x_2, ..., x_n$. Il y a donc $f(n;p) = \binom{n-p}{p}$ telles listes. Pour celles qui contiennent la paire $\{x_n;x_1\}$, une fois choisie cette dernière il reste à prendre $p-1$ paires disjointes formées de deux éléments consécutifs de l'ensemble $x_2, x_3, ..., x_{n-1}$. Il y a $f(n-2;p-1)$ telles listes. finalement,

---

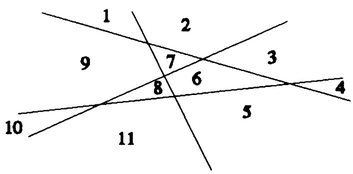
■ ***Réponse correcte***
□ ***Réponse fausse***

$$h(n;p) = \binom{n-p}{p} + \binom{n-p-1}{p-1}$$
$$= \frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}$$

8.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) ■

Désignons par A_n (resp. B_n, C_n) le nombre de parties connexes ouvertes (= d'un seul morceau, sans son bord) déterminées par n points sur une droite (resp. n droites dans le plan, n plans dans $\mathbb{R}^3$). On cherche C_n. Notons d'abord que A_n vaut n+1. Cela étant, si l'on a déjà n droites dans le plan, la (n+1)-ième va couper les n premières en au plus n points qui vont découper cette (n+1)-ième droite en n+1 morceaux. Chaque morceau découpe en deux une zone qui avait été découpée auparavant dans le plan par les n premières droites. La (n+1)-ième droite rajoute donc n+1 morceaux. Autrement dit, on a la relation de récurrence



$$B_4 = 1 + 4 + \binom{4}{2}$$
$$= 11$$

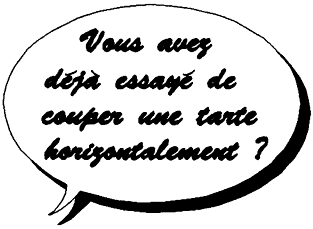
$$B_{n+1} = B_n + A_n = B_n + (n+1).$$

On trouve immédiatement

$$B_n = \frac{n^2+n+2}{2}$$
$$= 1 + n + \binom{n}{2}$$

De même, le (n+1)-ième plan (coup de couteau) rencontre les n plans précédents qui déterminent B_n morceaux dans ce (n+1)-ième plan. Chaque morceau correspond au découpage d'un des morceaux qui avaient été obtenus par les n premiers plans. finalement, on a la relation de récurrence $C_{n+1} = C_n + B_n$.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*



Après initialisation pour $n = 1$ ou 2, on aboutit aux formules des assertions (4) et (5),

$$C_n = \frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6} = 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

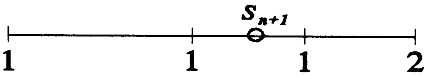
9.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) □

Il y a toujours un nombre impair de triangles numérotés (1;2;3). Ce résultat est dû à Sperner, et il se généralise aux simplexes de dimension quelconque. Rappelons qu'un simplexe de dimension n est l'enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi, un simplexe de dimension 1 est un intervalle. Un simplexe de dimension 2 est un triangle. Un simplexe de dimension 3 est un tétraèdre. Montrons le résultat pour $n=1$, et $n=2$.

Soit donc un intervalle dont les deux extrémités sont numérotées 1 et 2. On découpe cet intervalle en sous-intervalles en prenant des points que l'on numérote 1 ou 2. Il y a toujours un nombre impair de petits sous-intervalles numérotés (1;2). La démonstration se fait par récurrence sur le nombre p de sommets rajoutés. Pour $p=0$, on a seulement le grand intervalle, et la propriété est vérifiée. Si elle est vraie pour p, rajoutons un $(p+1)$-ième point.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*



$$s_{n+1} = 1 : \quad N \to N$$
$$s_{n+1} = 2 : \quad N \to N+2$$

o S'il est placé entre deux points ayant le même numéro, i, il y a deux cas :

— S'il est numéroté i, le nombre d'intervalles numérotés (1;2) ne change pas.

— S'il est numéroté j, le nombre d'intervalles numérotés (1;2) augmente de deux unités, et ne change donc pas de parité.

o S'il est placé entre deux points numérotés différemment, quel que soit le numéro qu'on lui affecte, le nombre d'intervalles numérotés (1;2) reste inchangé. Voilà pour la dimension 1.

Passons aux triangles. On va compter de deux façons différentes les arêtes numérotées (1;2), avec leur ordre de multiplicité, c'est-à-dire 1 (resp. 2) si elles appartiennent à 1 (resp. 2) triangles de la triangulation. Soit N ce nombre. o Sur le côté (1;2) du grand triangle, il y en a, d'après le résultat démontré plus haut, un nombre impair, $2k+1$. A l'intérieur du grand triangle, il y en a un nombre pair, $2q$, car chaque arête est partagée par deux petits triangles. On a donc $N = 2q + 2k + 1$.

o Un triangle a soit 0, soit 1, soit 2 arêtes numérotées (1;2). S'il en a une, c'est l'un des triangles qui nous intéresse. Soit x leur nombre. Soit r le nombre de triangles ayant deux arêtes numérotées (1;2). On a $N = x + 2r$.

En égalant les deux expressions de N, on trouve
$$x = 2q + 2k + 1 - 2r,$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

qui est un nombre impair.

10.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) ■
(5) □

Entre les réponses 1 et 2, il résulte directement de la définition des $W(N;P,n;i)$ que seule la n°2 est correcte.

Considérons à présent une suite de P 1 et N–P 2 associée à n voisins, et commençant par un 1. Soit le deuxième élément de la séquence est aussi un 1, et il y a alors $W(N\text{–}1;P\text{–}1,n;1)$ façons d'arranger les N–1 et P–1 chiffres placés après le premier 1 pour qu'il y ait n voisins, soit le deuxième élément est un 2, et il est alors voisin du premier ; les N–2 chiffres suivant le 2 peuvent être arrangés n'importe comment, pourvu qu'il y ait parmi eux n–1 2 voisins de 1, c'est-à-dire de $W(N\text{–}2;P\text{–}1;n\text{–}1)$ façons. L'assertion (3) est donc correcte.

Détaillons le calcul de $W(N;P,n,2)$, et considérons une suite de P 1 et N–P 2 associée à n voisins, et commençant par un 2. Soit le deuxième élément de la séquence est aussi un 2, et il y a alors $W(N\text{–}1;P;n;2)$ façons d'arranger les N–1 et P–1 chiffres placés après le premier 2 pour qu'il y ait n voisins, soit le deuxième chiffre est un 1, et alors le premier 2 est voisin du 1 placé en deuxième position ; les N–1 chiffres placés après le 2 de tête commencent par un 1, et doivent founir n–1 voisins, ce qui peut se faire de $W(N\text{–}1;P,n\text{–}1;1)$ façons. Cela montre la véracité de la formule (4).

Enfin, la formule (5) est fausse.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Résultats du QCM n°2 Structures algébriques élémentaires

(Questions p. 10)

1.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) □

Si vous pensez que l'assertion (5) est correcte, c'est très inquiétant. L'erreur est dans le passage de $P(n)$ à $P(n+1)$. Quand on passe à $u-1$ et à $v-1$, ces deux nombres ne restent pas forcément dans l'ensemble des nombres entiers positifs. Par exemple, si $u = 0$, alors $u-1 = -1$, et l'on ne peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

2.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) □

Rappelons d'abord qu'une partie A de E est dite *stable* par $\star$ si la composée de deux éléments de A est un élément de A. Cela étant, considérons la loi $\star$ définie sur l'ensemble $\{x;y;z\}$ par la table suivante

$*$	x	y	z
x	z	z	x
y	z	z	x
z	y	x	x

Si $A = \{z\}$, on a $A\star\{x\} = \{y\}$, et $y\star y = z \notin A\star\{x\}$. En outre, $A\star A = \{x\}$, et $x\star x = z \notin A\star A$, ce qui montre que $A\star A$ n'est pas stable. Le commutant de x est $\{x;y\}$, et $x\star y = z \notin \{x;y\}$. Enfin, puisque A est un singleton, la restriction de $\star$ à $A \times A$ est commutative, mais A n'est

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

pas stable. Reste l'assertion (2). Elle est vraie ; il suffit en effet d'écrire, par exemple pour $E\star\{x\}$,

$$(a\star x) \star (b\star x) = (a\star x\star b) \star x.$$

On montre de même, que si x et y sont deux éléments de E, alors $\{x\}\star E\star\{y\}$ est stable, toujours sous l'hypothèse selon laquelle $\star$ est associative.

3.

(1) ■ (2) ■ (3) ■ (4) □ (5) □

Les trois premières assertions sont évidentes. Si f n'est pas injective, il n'y a pas de raison pour que l'on ait $x\star y = y\star x$ si $f(x\star y) = f(y\star x)$; l'assertion (4) est donc fausse. De même, l'image du commutant de A est incluse dans le commutant de $f(A)$, mais n'a aucune raison de lui être égale.

4.

(1) □ (2) ■ (3) ■ (4) □ (5) ■

La définition usuelle d'un groupe est donnée dans l'assertion (5). La condition " $e\star a = a\star e = e$ pour tout $a \in G$" de l'assertion (4) définit un élément absorbant, e. Dans l'assertion (1), les quantificateurs ont été modifiés : "Pour tout a, il existe e..." n'a pas le même sens que "Il existe e tel que, pour tout a, ...". Enfin, restent les assertions (2) et (3). En apparence plus faibles que (5), ces assertions sont en réalité équivalentes. Voyons par exemple l'assertion (2) (l'assertion (3) se démontre par des méthodes semblables). Il s'agit de montrer (2) $\Rightarrow$ (5). Supposons donc (2) vérifiée, et soit $a \in G$. Supposons par exemple qu'il existe a' tel que $a\star a' = e$ (le cas $a'\star a = e$ se traite de la même façon). Il s'agit de démontrer que $a'\star a = e$. Posons $a'\star a = b$. Alors,

$$b\star b = (a'\star a)\star(a'\star a) = a'\star(a\star a')\star a = a'\star a = b.$$

Soit b' tel que $b'\star b = e$ ou que $b\star b' = e$. Si $b'\star b = e$, on a

$$b'\star(b\star b) = (b'\star b)\star b = b = b'\star b = e,$$

et de même, si $b\star b' = e$.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

5.

(1) ☐ (2) ■ (3) ☐ (4) ☐ (5) ☐

$(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe car 1 n'a pas de symétrique dans l'ensemble ($-1 \notin \mathbb{N}$).

$(\mathbf{Z}; +)$ satisfait à tous les axiomes de la structure de groupe.

$(\mathbf{Z}; \times)$ est stable pour la loi qui est associative ; 1 est élément n,eutre, mais 0 par exemple n'a pas d'inverse. Ce n'est donc pas un groupe.

Pour la même raison, $(\mathbf{Q}; \times)$ n'est pas un groupe : 0 n'a pas d'inverse.

L'ensemble $\mathbb{I}$ n'est pas stable par la multiplication. Par exemple, $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, mais $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \boldsymbol{Q}$.

6.

(1) ■ (2) ☐ (3) ☐ (4) ☐ (5) ☐

Chaque ligne de la table d'une loi de groupe contient chaque élément du groupe, listé une seule fois. De même pour chaque colonne. Comme $a \perp a = d \neq a$, a n'est pas l'élement neutre du groupe. De même, comme $b \perp a = c \neq a$, et que $d \perp a = b \neq a$, ni b ni d ne sont élément neutre. C'est donc c qui est l'élément neutre. La relation $a \perp b = c$ montre alors que c'est a qui est l'inverse de b.

7.

(1) ☐ (2) ■ (3) ■ (4) ☐ (5) ■

L'ensemble $\{a^n | \, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{e\}$ de l'assertion (4) n'a aucune raison de contenir l'inverse de a. Ce n'est donc pas un groupe. Cela fournit un contre-exemple à l'assertion (1). Le dernier ensemble, $\{a \star x | \, x \in G\}$, est égal à G, car l'application $x \mapsto a \star x$ est une bijection $G \to G$. Restent les ensembles décrits dans les assertions (2) et (3). On montre facilement que ce sont des sous-groupes de G.

■ *Réponse correcte*

☐ *Réponse fausse*

8.

(1) ■
(2) ■
(3) ■
(4) ■
(5) □

— L'assertion (1) est une question de cours ; on peut l'établir par récurrence.

— Pour $n = 2$, le résultat est évident, car
$$S_2 = \{\text{Id} \ ; \ (1;2)\}.$$

— Supposons la propriété établie pour S_{n-1}, et montrons-la pour S_n. Soit donc $\sigma \in S_n$.

∘ Si $\sigma(n) = n$, la restriction σ' de σ à S_{n-1} est une permutation de S_{n-1} qui s'écrit donc, d'après l'hypothèse de récurrence comme une composée de transpositions de S_{n-1}. Ces transpositions ne faisant pas intervenir n, elles peuvent s'interpréter comme des transpositions de S_n, et σ est composée de transpositions de S_n.

∘ Si $\sigma(n) = m < n$, $(m;n) \circ \sigma$ laisse fixe n, et se décompose donc, d'après ce qui précède, en un produit de transpositions, $\tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_q$. Alors,
$$\begin{aligned}\sigma &= (m;n) \circ ((m;n) \circ \sigma) \\ &=(m;n) \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_q.\end{aligned}$$

— Les affirmations (2) à (4) découlent de (1).

— Pour (2), il suffit de remarquer l'égalité
$$(i;j) = (1;i) \circ (1;j) \circ (1;i),$$
lorsque $1 < i < j$.

— Pour (3), on écrit l'égalité
$$(1;i+1) = (i;i+1) \circ (1;i) \circ (i;i+1),$$
lorsque $1 < i < n$.

— Pour (4), on écrit l'égalité
$$(i;i+1) = (1;2;\ldots;n)^{i-1} \circ (1;2) \circ (1;2;\ldots;n)^{n-i+1},$$
lorsque $1 < i < n$.

— L'assertion (5) est fausse. Pour S_4, par exemple, les permutations (1;2) et (3;4) laissent toutes deux l'ensemble $\{1;2\}$ stable. Cet ensemble reste donc stable par toute composée de ces deux permutations. La permutation (2;3) ne peut donc s'écrire comme composée de (1;2) et de (3;4).

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Sous-groupe engendré par une partie

Soient $(G;*)$ un groupe et A une partie non vide de G. Le ***sous-groupe engendré par*** A est le plus petit sous-groupe de G contenant A. C'est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant A. Il ne faut pas confondre le sous-groupe engendré par A, disons H, avec le stabilisé de A, que nous noterons K, qui est la plus petite partie stable de G contenant A, c'est-à-dire l'intersection de toutes les parties stables G contenant A. L'ensemble K est obtenu en prenant tous les mots de la forme $x_1 * x_2 * ... * x_n$ formés avec des éléments de A. L'ensemble H, qui contient K, est obtenu en prenant tous les mots de la forme $x_1 * x_2 * ... * x_n$ formés avec des éléments de A ou des inverses d'éléments de A. Lorsque G est un groupe fini, les éléments de G sont tous d'ordre fini, de sorte que, pour tout $x \in G$, il existe un entier n tel que $x_n = x^{-1}$. Alors, $H = K$. C'est le cas lorsque $G = S_n$, et cela explique que l'on confonde souvent les deux énoncés : *S_n est engendré par les transpositions* et *toute permutation est une composée de transpositions.*

9.

(1) ☐
(2) ■
(3) ■
(4) ☐
(5) ☐

Une partie non vide Δ de $\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbb{R}$) est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbb{R}$) si et seulement si pour tous x, $y \in \Delta$, on a $x - y \in \Delta$. En utilisant cette caractérisation, on voit que $\{-1;0;1\}$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbf{Z};+)$, car $1 - (-1) = 2 \notin \{-1;0;1\}$. On montre également l'assertion (2), car $nm - np = n(m - p)$. — Soit Δ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z};+)$. Si $\Delta = \{0\}$, alors $\Delta = 0\mathbf{Z}$. Sinon, soit n le plus petit élément strictement positif de Δ. Alors, $\Delta = n\mathbf{Z}$. En effet, comme l'addition est une loi interne de Δ, Δ contient n, $n+n = 2n$, $2n+n = 3n$, etc, soit $n\mathbb{N}_* \subset \Delta$. Comme Δ est un groupe, $-n \in \Delta$, par le raisonnement de stabilité précédent, $(-n)\mathbb{N}_* \subset \Delta$. Comme $0 \in \Delta$, on a bien $n\mathbf{Z} \subset \Delta$. Inversement, s'il existait $m \in \Delta \setminus n\mathbf{Z}$, la division euclidienne de m par n produirait $m = np + r$, avec $0 < r < n$, et l'on aurait $r = m - np \in \Delta$, ce qui contredirait la définition de n. Ainsi, $\Delta = n\mathbf{Z}$.

— $\mathbf{Q}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui contredit l'assertion (4). En effet, pour tout $x \in \mathbf{Q}^*$, $\dfrac{x}{2} \notin \mathbf{Z}x$.

■ *Réponse correcte*

☐ *Réponse fausse*

— Enfin, $\mathbf{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui contredit l'assertion (5).

10.

(1) □ (2) ■ (3) ■ (4) □ (5) □

0 n'admet pas n racines n-ièmes, mais tout élément de $\mathbb{C}^*$ le fait.

U_n et U sont non vides, et l'on a l'inclusion $U_n \subset U \subset \mathbb{C}^*$. En outre les deux égalités $e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{\frac{2i(n-q)\pi}{n}} = e^{\frac{2i(k+n-q)\pi}{n}}$ et $e^{i\alpha} e^{(2\pi-\beta)i} = e^{(2\pi+\alpha-\beta)i}$ montrent que si u et v appartiennent à U_n (resp. à U), alors uv^{-1} appartient également à U_n (resp. à U). Tout ceci montre que U_n est un sous-groupe de U qui est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

L'assertion (3) découle de l'égalité $z_{-1} = z_1^{n-1}$, tandis que la relation (4) est fausse, comme on peut le voir en prenant $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{2i\pi}{6}}$, deux éléments de U_6. Il n'existe pas d'entier p tel que $e^{\frac{2i\pi}{6}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^p$. La relation (4) est vraie si z_q est une racine primitive n-ième de l'unité.

Les z_k sont les racines n-ièmes de l'unité, donc les racines du polynôme $P(X) = X^n - 1$. La somme des racines de ce polynôme est donnée par le coefficient de X^{n-1}, qui est nul. On a donc $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$, ce que l'on peut retrouver en remarquant qu'il s'agit de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i\pi}{n}} \frac{1 - e^{\frac{2in\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0$$

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Résultats du QCM n°3
Nombres complexes

(Questions p. 17)

Ce QCM porte sur les nombres complexes. Bien entendu, on identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, avec toutes les structures sous-jacentes.

1.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) □
(5) □

$$z = \frac{[-3+4i]-[-2-2i]}{[-2+2i]-[3+4i]} = \frac{-1+6i}{-5-2i}$$

$$= \frac{-1+6i}{-5-2i} \times \frac{-5+2i}{-5+2i} = -\frac{7}{29} - \frac{32}{29}i$$

On en déduit

$$\Re(z) = -\frac{7}{29}, \quad \Im(z) = -\frac{32}{29},$$

$$|z|^2 = \left(-\frac{7}{29}\right)^2 + \left(-\frac{32}{29}\right)^2 = \frac{1073}{841} = \frac{37}{29},$$

et

$$\arg(z) = \arg(-1+6i) - \arg(-5-2i)$$

Un calcul rapide fournit une approximation de $\arg(z)$; $\qquad \arg(z) \approx 1{,}35 \text{ rad}$.

Enfin,

$$\bar{z} = \frac{\overline{-1+6i}}{\overline{-5-2i}} = \frac{-1-6i}{-5+2i}$$

$$= \overline{-\frac{7}{29} - \frac{32}{29}i} = -\frac{7}{29} + \frac{32}{29}i$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Rappel sur les nombres complexes

☛ Si $z = a + ib = \rho\, e^{i\theta}$, avec a, b, et $\rho \in \mathbb{R}$, alors $\Re(z) = a$, $\Im(z) = b$ (et non ib), $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\rho|$ (*Attention* : ρ n'est pas nécessairement positif), $\bar{z} = a - ib = \rho\, e^{-i\theta}$. $z + \bar{z} = 2a = 2\Re(z)$, $z - \bar{z} = 2ib = 2i\Im(z)$; en particulier, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$, et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$. On a en outre, $z\bar{z} = |z|^2$, $|\Re(z)| \leq |z|$ et $|\Im(z)| \leq |z|$. Si $\rho \neq 0$, pour tout entier $n \neq 0$, on a $z^n = \rho^n e^{in\theta}$, et $|z^n| = |z|^n$.

☛ Si $u = a + ib = \mu\, e^{i\alpha}$ et si $v = c + id = \nu\, e^{i\beta}$, avec $\nu \neq 0$, alors $u + v = (a + c) + (b + d)i$, $uv = (ac - bd) + (ad + bc)i = \mu\nu\, e^{i(\alpha+\beta)}$, $\dfrac{u}{v} = \dfrac{\mu}{\nu}\, e^{i(\alpha-\beta)}$, $\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}$, $\overline{uv} = \bar{u}\,\bar{v}$, $\left|\dfrac{u}{v}\right| = \dfrac{|u|}{|v|} = \left|\dfrac{\mu}{\nu}\right|$, $|uv| = |u|\,|v| = |\mu\nu|$, et $|u + v| \leq |u| + |v|$.

☛ Si $z = a + ib$, avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on a $z = |z|\, e^{i \arctan\frac{b}{a}}$; si $z = a + ib$, avec $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on a

$$z = -|z|\, e^{i \arctan\frac{b}{a}} = |z|\, e^{i\left(\arctan\frac{b}{a} + \pi\right)}.$$

Si $z = ib$, avec $b \in \mathbb{R}$, on a $z = b\, e^{i\pi/2}$.

☛ Pour linéariser un polynôme trigonométrique, on utilise les deux formules $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ et bien sûr la formule du binôme.

☛ Pour exprimer $\sin n\theta$ ou $\cos n\theta$ comme un polynôme en $\sin\theta$ et $\cos\theta$, on utilise l'identité

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i \sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n$$

2.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) □
(5) □

Puisque u, v, et w sont des nombres complexes de module 1, posons $u = e^{i\alpha}$, $v = e^{i\beta}$, et $w = e^{i\gamma}$. On a alors

$$\begin{aligned} uv + vw + wu &= e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i(\beta+\gamma)} + e^{i(\gamma+\alpha)} \\ &= e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}\left(e^{-i\gamma} + e^{-i\beta} + e^{-i\alpha}\right) \\ &= e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}\left(\bar{w} + \bar{v} + \bar{u}\right) \\ &= e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}\,\overline{(w + v + u)} \end{aligned}$$

d'où

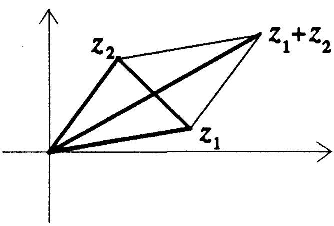
$$|uv + vw + wu| = |u + v + w|,$$

car $\left|e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}\right| = 1$.

Enfin, les assertions (4) et (5) sont fausses, comme on peut le constater en prenant par exemple $u = v = 1 = -w$. On a alors $uv + vw + wu = -1$, $u + v + w = 1$, et $u^2 + v^2 + w^2 = 3$, ce qui contredit ces deux assertions.

3.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) □
(5) ■



La relation se démontre facilement en posant $z_k = x_k + i\,y_k$, $k \in \{1;2\}$.

4.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) ■
(5) ■

Si $c \neq 0$, ce qui est le cas puisqu'on a supposé a, b, c, et $d \in \mathbb{R}^*$, f n'est pas définie en $-\frac{d}{c}$. Ce n'est donc pas une application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Comme le complexe $-\frac{d}{c}$

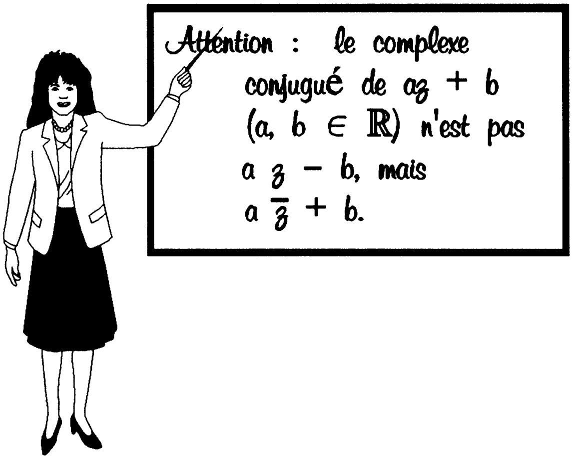
■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

n'appartient ni a E ni à F (c'est un réel), $f_{|E}$ et $f_{|F}$ sont bien définies comme fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Pour déterminer $f(E)$ et $f(F)$, on peut soit procéder directement, soit poser $z = x + iy$. Voici les deux calculs :

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)\times(c\bar{z}+d)}{(cz+d)\times(c\bar{z}+d)}$$

$$= \frac{acz\bar{z} + bd + adz + bc\bar{z}}{|cz+d|^2}$$



d'où

$$\Im(f(z)) = \frac{1}{|cz+d|^2}\Im(adz + bc\bar{z})$$

$$= \frac{ad}{|cz+d|^2}\Im(z) + \frac{bc}{|cz+d|^2}\Im(\bar{z})$$

$$= \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\Im(z)$$

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

ou, en posant $z = x + iy$,

$$f(z) = \frac{a\left(x+iy\right)+b}{c\left(x+iy\right)+d} = \frac{\left(ax+b\right)+iay}{\left(cx+d\right)+icy}$$

$$= \frac{\left[\left(ax+b\right)+iay\right] \times \left[\left(cx+d\right)-iy\right]}{\left[\left(cx+d\right)+icy\right] \times \left[\left(cx+d\right)-iy\right]}$$

$$= \frac{\left[ac\left(x^2+y^2\right)+\left(bc+ad\right)+bd\right] + i\left[\left(ad-bc\right)y\right]}{\left|cz+d\right|^2}$$

Ainsi, f change le signe de $\Im(z)$, de sorte que $f_{|E}$ est une application $E \longrightarrow F$, et que $f_{|F}$ est une application $F \longrightarrow E$.

Pour les assertions (4) et (5), il convient de considérer l'application réciproque de f. Comme il s'agit d'une application homographique, on peut soit résoudre directement l'équation en z, $Z = \dfrac{az+b}{cz+d}$, soit inverser la matrice associée à l'homographie, $M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Dans les deux cas, on arrive à $z = \dfrac{dZ-b}{a-cZ}$, ce qui montre que f est une bijection $\mathbb{C}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C}\setminus\left\{\dfrac{c}{a}\right\}$.

Comme $\dfrac{c}{a}$ et $-\dfrac{d}{c}$ n'appartiennent ni à E, ni à F, on en déduit que $f_{|E}$ est injective, et que $f_{|F}$ est une surjection $F \longrightarrow E$.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

5.

(1) □ De

(2) ■

(3) ■

(4) □

(5) ■

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\ &= \frac{1}{2^4}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)\end{aligned}$$

et

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)$$

on tire

$$\begin{aligned}\sin^4 x \cos^3 x &= \frac{1}{2^7}\Big[\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) \\ &\qquad \left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)\Big] \\ &= \frac{1}{2^7}\Big[\left(e^{7ix} + e^{-7ix}\right) - \left(e^{5ix} + e^{-5ix}\right) \\ &\qquad - 3\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right) + 3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\Big] \\ &= \frac{1}{2^6}\left(\cos 7x - \cos 5x - 3\cos 3x + 3\cos x\right)\end{aligned}$$

Des trois identités $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, on tire immédiatement

$$\begin{aligned}\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} &= \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x \\ &= 1 + \frac{1}{2}\sin 2x\end{aligned}$$

Pour établir l'assertion (3), on utilise une fois encore la relation $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, mais aussi sa variante $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Il vient

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} - \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

$$= \left(e^{2ix} + e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}\right)$$

$$- \left(e^{2ix} - e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}\right)$$

$$= 2$$

Pour l'assertion (4), on utilise deux fois la formule

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

On obtient alors

$$\tan(x+y+z) = \tan((x+y)+z)$$

$$= \frac{\dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} + \tan z}{1 - \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\tan z}$$

$$= \frac{\tan x + \tan y + \tan z\left(1 - \tan x \tan y\right)}{1 - \tan x \tan y - \left(\tan x + \tan y\right)\tan z}$$

$$= \frac{\tan x + \tan y + \tan z - \tan x \tan y \tan z}{1 - \tan x \tan y - \tan x \tan z - \tan y \tan z}$$

Pour l'assertion (5), on peut utiliser les formules d'addition, si on les connaît, ou bien passer aux exponentielles complexes. Dans le premier cas, on écrit

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(4x+2x)\cos\frac{1}{2}(4x-2x)}{2\cos\frac{1}{2}(4x+2x)\cos\frac{1}{2}(4x-2x)}$$

$$= \frac{2\sin 3x\cos x}{2\cos 3x\cos x} = \tan 3x$$

et dans le second

$$\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x}$$

$$= \frac{1}{i}\,\frac{e^{4ix} - e^{-4ix} + e^{2ix} - e^{-2ix}}{e^{4ix} + e^{-4ix} + e^{2ix} + e^{-2ix}}$$

$$= \frac{1}{i}\,\frac{\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) + e^{2ix} - e^{-2ix}}{\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right)\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}$$

$$= \frac{1}{i}\,\frac{\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\left(e^{2ix} + e^{-2ix} + 1\right)}{\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right)\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}$$

$$= \frac{1}{i}\,\frac{\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\left(\dfrac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}\right)}{\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right)\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}$$

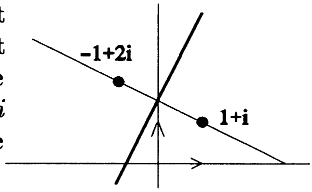
$$= \frac{1}{i}\,\frac{\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right)\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)}{\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right)\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}$$

$$= \tan 3x$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

6.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) □



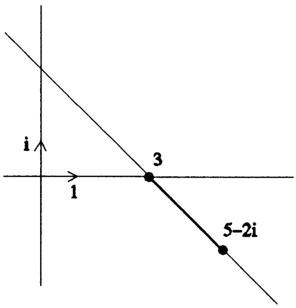
Les réels $|z+1-2i|$ et $|z-1-i|$ représentent respectivement la distance entre les points z et $-1+2i$ d'une part, z et $1+i$ d'autre part. La relation

$$\left|\frac{z+1-2i}{z-1-i}\right| = 1$$

exprime donc l'égalité de ces distances. L'ensemble cherché est la médiatrice du segment d'extrémités $-1+2i$ et $1+i$.

7.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) □
(5) ■



La relation $\dfrac{z-3}{z-5+2i} \in \mathbb{R}$ exprime que les vecteurs $z-3$ et $z-5+2i$ sont colinéaires, $\mathbb{C}$ étant considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dont les complexes 1 et i forment une base. Elle est vérifiée lorsque les points z, 3 ($3 = 3{\cdot}1 + 0{\cdot}i$) et $5-2i$ sont alignés. La relation

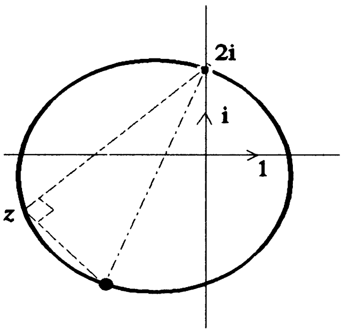
$$\frac{z-3}{z-5+2i} \in \mathbb{R}_-^*$$

exprime que les vecteurs $z-3$ et $z-5+2i$ sont de sens opposés, donc que le point z est entre les points 3 et $5-2i$.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

8.

(1) ☐
(2) ■
(3) ☐
(4) ☐
(5) ☐



La relation s'écrit aussi $z + 2 + 3i = \lambda i(z - 2i)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Les vecteurs $z + 2 + 3i$ et $z - 2i$ sont donc orthogonaux : la multiplication par i d'un vecteur fait subir à celui-ci une rotation d'angle $\pi/2$. Le point z "voit" les points $-2-3i$ et $2i$ sous un angle droit, et se trouve sur le cercle de diamètre $[-2-3i\,;2i]$. Du fait du quotient dans la relation de départ, il convient d'ôter de ce cercle le point $2i$.

9.

(1) ■
(2) ☐
(3) ☐
(4) ☐
(5) ☐

La condition est équivalente à $|a - z|^2 < |\bar{a} + z|^2$, ou à $-\Re(a + \bar{a})\, z < 0$. Comme $a + \bar{a}$ est réel et strictement positif, la condition signifie $\Re(z) > 0$. On peut aussi le voir géométriquement, en disant que la condition est équivalente à

$$|a - z| < |z - (-\bar{a})|,$$

ce qui exprime que la distance de z au point a est inférieure à la distance de z au point $\bar{a}$. L'ensemble cherché est donc le demi-plan ouvert dont la frontière est la médiatrice de $[a;\bar{a}]$, et qui contient a, à savoir le demi-plan droit ouvert.

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

10.

(1) ■
(2) ■
(3) ■
(4) ■
(5) ■

Les cinq formules sont correctes. Leur vérification repose sur un simple calcul. Voyons donc une autre implication. Considérons l'égalité

$$\frac{(2n-1)+i}{(2n+1)+i} = \frac{2n^2+i}{2n^2+2n+1}$$

En multipliant ces égalités, et en simplifiant, on obtient

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{(2n-1)+i}{(2n+1)+i} = \frac{1+i}{2N+1+i}$$
$$= \prod_{n=1}^{N} \frac{2n^2+i}{2n^2+2n+1}$$
$$= \frac{1}{\prod_{n=1}^{N}\left(2n^2+2n+1\right)} \prod_{n=1}^{N}\left(2n^2+i\right)$$

puis, en égalant les arguments des deux membres,

$$\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2N+1} = \sum_{n=1}^{N} \arctan\frac{1}{2n^2}$$

et enfin, en faisant tendre N vers ∞,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{2n^2} .$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Résultats du QCM n°4

Polynômes

(Questions p. 23)

1.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) □
(5) ■

Dans la partie gauche de la figure, la partie tramée a une aire qui vaut $a^2 - b^2$. Dans la partie droite, on a déplacé et retourné les deux parties constituant la partie tramée, à gauche. On obtient alors un rectangle de largeur $a + b$, et de hauteur $a - b$, dont l'aire est donc $(a - b)(a + b)$.

2.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) □
(5) ■

Un polynôme de période 1 est constant, car sinon, le polynôme $P = f - f(1)$ aurait une infinité de racines sans être nul. Par suite, $f\left(\frac{7}{2}\right) = f(3) = 5$.

3.

(1) ■
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) ■

Les assertions (1), (3), (4) et (5) sont exactes, et la procédure indiquée fournit la démonstration des formules de récurrence.

Pour l'assertion (2), le développement de $\frac{1}{2}\left[(1+1)^n - (1-1)^n\right]$ conduit à la relation

$$\sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1} ,$$

et non à celle proposée. De la même façon, le développement de $\frac{1}{2}\left[(1+1)^n + (1-1)^n\right]$ conduit à la relation

---

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$\sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \binom{n}{2k} = 2^{n-1} .$$

4.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ☐
(4) ■
(5) ☐

Considérons d'abord les développements pour $n = 1$, 2 et 3 :

$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$

$(1 + x + x^2)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$

$(1 + x + x^2 + x^3)^2$

$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6$

La formule se généralise, et la démonstration se fait par récurrence. Il est à noter que la généralisation se fait aussi "à l'ordre infini", avec l'argument suivant : pour $|x| < 1$, on connaît le développement tiré de la formule de sommation des séries géométriques :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$
$$= \frac{1}{1 - x}$$

En outre, soit en dérivant les deux membres de cette relation par rapport à x, soit en utilisant le développement de Taylor, soit en utilisant le développement du binôme, on démontre la relation

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k + 1) x^k = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^4 + \ldots$$
$$= \frac{1}{(1 - x)^2}$$

On déduit immédiatement de ces deux égalités l'identité

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

avec toujours la condition $|x| < 1$.

Notons enfin que la formule (5) est fausse, car elle compte deux fois le terme en x^n, lorsque n est impair.

5.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) □
(5) □

P est divisible par Q si et seulement si n n'est pas divisible par 5. En effet, dans $\mathbb{C}$, le polynôme P s'écrit $P(z) = \dfrac{z^{5n} - 1}{z^n - 1}$. Les racines de P sont donc les racines $5n$-ièmes de l'unité qui ne sont pas racines n-ièmes. Or les racines de Q sont les racines cinquièmes de l'unité autres que 1. Ce sont également des racines $5n$-ièmes de l'unité qui ne sont pas racines n-ièmes si et seulement si n n'est pas divisible par 5.

6.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) ■

Les équations palindromiques sont aussi appelées équations réciproques.

Pour simplifier, divisons par a, et considérons l'équation palindromique du quatrième degré

$$x^4 + px^3 + qx^2 + px + a = 0.$$

Le changement de variable $z = x + \dfrac{1}{x}$ transforme l'équation en

$$z^2 + pz + q - 2 = 0.$$

Une fois cette équation du second degré résolue, éventuellement dans $\mathbb{C}$, on peut trouver x en résolvant les deux équations du second degré $x^2 - z_i x + 1 = 0$, où z_i sont les racines de l'équation en z.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Le changement de variable $x = y - \frac{1}{4} c_3$ conduit seulement à une équation du quatrième degré où le coefficient de y^3 est nul,

$$y^4 + d_2 y^2 + d_1 y + d_0 = 0,$$

avec

$$d_2 = c_2 - \frac{3}{8} c_3^2 ,$$

$$d_1 = c_1 - \frac{1}{2} c_2 c_3 + \frac{1}{8} c_3^3 ,$$

et

$$d_0 = c_0 - \frac{1}{4} c_1 c_3 + \frac{1}{16} c_2 c_3^2 - \frac{3}{256} c_3^4 .$$

Il est toutefois possible de parvenir à une équation palindromique du quatrième degré en effectuant un changement de variable supplémentaire. Posons $y = ut + v$, où u et v seront déterminés plus loin. En remplaçant dans l'équation en y, on obtient

$$\begin{aligned} u^4 t^4 + 4 v u^2 t^3 + \left(6 v^2 + d_2\right) u^2 t^2 \\ + \left(4 v^3 + 2 d_2 v + d_1\right) u t \\ + \left(v^4 + d_2 v^2 + d_1 v + d_0\right) = 0 \end{aligned}$$

Pour rendre cette équation palindromique, il faut

$$u^4 = v^4 + d_2 v^2 + d_1 v + d_0$$

et

$$4 v u^2 = 4 v^3 + 2 d_2 v + d_1$$

En élevant au carré la dernière équation, multipliant l'avant dernière par $16 b^2$, puis en égalant les deux membres de droite des deux équations ainsi formées, on obtient, après simplifications

$$8 d_1 v^3 + \left(16 d_0 - 4 d_2^2\right) v^2 - 4 d_1 d_2 v - d_1^2 = 0$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

En prenant pour v une racine de cette dernière équation, et en prenant ensuite u solution de

$$u^4 = v^4 + d_2 v^2 + d_1 v + d_0 \ ,$$

on obtient une équation palindromique, ainsi qu'on l'avait annoncé.

On ne sait pas résoudre les équations quelconques de degré ≥ 5. Inutile de chercher une formule : on peut montrer qu'il n'en existe pas.

Enfin, les assertions (4) et (5) sont de simples vérifications.

7.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) □

Considérons, sur $\mathbb{R}_+$, la fonction P_n. Sa dérivée, définie par

$$P_n'(x) = (n+2)\, x^{n+1} - k$$

est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, négative en 0, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ (la somme d'une fonction strictement croissante et d'une fonction croissante est strictement croissante). La fonction P_n est donc, sur $\mathbb{R}_+$, une fonction décroissante puis croissante. Elle a donc 0, 1 ou 2 zéros. En 0 et en $+\infty$, la fonction P_n est positive. Pour les valeurs de P_n en 1, deux cas sont à considérer.

— Si $k > 2$, alors, $P_n(1) < 0$. Dans ce cas, P_n a deux racines, l'une dans $]0;1[$, l'autre dans $]1;+\infty[$.

— Si $k = 2$, alors, $P_n(1) = 0$ et $P_n'(1) > 0$. Dans ce cas, P_n a deux racines dans $\mathbb{R}_+$, l'une dans $]0;1[$, l'autre qui est 1.

En fin de compte, on voit que P_n a toujours une unique racine dans $]0;1[$.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

8.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ■
(4) ☐
(5) ■

P est divisible par Q si et seulement si -1 est racine double de P, c'est-à-dire si et seulement si -1 est racine de P et de P'. Le système affirmant que Q divise P est donc le suivant

$$\begin{cases} P(-1) = a(-1)^n + b(-1)^{n-1} + 1 \\ \qquad\quad = (-1)^n(a-b) + 1 = 0 \\ P'(-1) = na(-1)^{n-1} + (n-1)\,b(-1)^{n-2} \\ \qquad\quad = n(-1)^{n-1}(a-b) - b(-1)^n = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} a - b = (-1)^{n-1} \\ \quad b = -n(a-b) \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} a = (-1)^n(n-1) \\ b = (-1)^n n \end{cases}$$

Supposons à présent cette condition remplie. On a donc

$$P(X) = (-1)^n(n-1)\,x^n + (-1)^n\,n\,X^{n-1} + 1$$

Pour effectuer la division, plusieurs solutions. On peut bien sûr poser la division, et procéder par récurrence une fois que l'on a vu comment le quotient s'écrit. Voyons une méthode plus formelle.

Si $P(X) = (X+1)\ R(X)$, alors

$$\begin{aligned} P'(X) &= (-1)^n n(n-1)X^{n-1} + (-1)^n n(n-1)X^{n-2} \\ &= (-1)^n n(n-1)X^{n-2}(X+1) \\ &= R(X) + (X+1)\ R'(X), \end{aligned}$$

de sorte que

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

$$R(X) = (X+1)\ [(-1)^n\, n(n-1)\, X^{n-2} - R'(X)]$$

Par ailleurs, le polynôme $R(X)$ se calcule facilement en utilisant l'identité remarquable

$$1-a^n = (1-a)\ (1+a+a^2+\ldots+a^{n-1})$$

On obtient

$$\begin{aligned} P(X) &= (-1)^n\,(n-1)\,X^n + (-1)^n\,nX^{n-1} + 1 \\ &= (-1)^n\, n(X^n+X^{n-1}) + 1 - (-1)^n X^n \\ &= (-1)^n\, n\, X^{n-1}(X+1) + (1+X)\ (1-X+X^2+\ldots+(-1)^{n-1} X^{n-1}) \\ &= (X+1)\ (1-X+X^2+\ldots+(-1)^{n-1} X^{n-1} + (-1)^n n\, X^{n-1}) \end{aligned}$$

On a donc

$$R(X) = 1-X+X^2+\ldots+(-1)^{n-1} X^{n-1} + (-1)^n\, n\, X^{n-1},$$

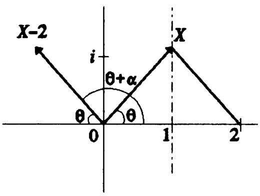
d'où, en remplaçant $R'(X)$ par sa valeur, le quotient S cherché,

$$\begin{aligned} S(X) &= (-1)^n\, n(n-1)\, X^{n-2} - R'(X) \\ &= 1-2X+3X^2+\ldots+ (-1)^{n-2}\,(n-1)\,X^{n-2} \end{aligned}$$

9.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) □

Notons d'abord que P est un polynôme de degré 4, et non 5. L'équation $P(X) = 0$ peut être abordée géométriquement, ou algébriquement. Commençons par le point de vue géométrique. L'équation $P(X) = 0$ est équivalente à $(X-2)^5 = X^5$. En modules, on a donc



■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Polynômes

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polynôme.

Les nombres a_0, a_1, ..., a_n sont appelés les ***coefficients*** de P. On dit que P est de ***degré*** n, et l'on écrit $d^\circ(P) = n$, si $a_n \neq 0$.

Si P et Q sont deux polynômes, $Q \neq 0$, il existe un unique couple $(R;S)$ de polynômes tel que $P = QR + S$ et $d^\circ(S) < d^\circ(Q)$. On dit que R et S sont respectivement le ***quotient*** et le ***reste*** de la ***division euclidienne*** de P par Q. Si $S = 0$, on dit que Q ***divise*** P.

On dit que α est une ***racine*** de P si $P(\alpha) = 0$. Une condition nécessaire et suffisante pour que α soit une racine de P est que le polynôme $X-\alpha$ divise P. Si α est une racine de P, on appelle ***ordre de multiplicité*** de α le plus grand entier p tel que $(X-\alpha)^p$ divise P. Si α est une racine de P, une condition nécessaire et suffisante pour que l'ordre de multiplicité de α soit égal à p est que α soit racine de P, P', P'', ..., $P^{(p-1)}$.

Tout polynôme P à coefficients complexes admet une racine, dans $\mathbb{C}$. Si P est un polynôme à coefficients réels, et si α est une racine complexe de P, alors le complexe conjugué de α est aussi racine de P.

$$|X-2| = |X|,$$

ce qui exprime que, dans le plan complexe, la distance entre le point X et le point 2 est égale à la distance entre le point X et le point 0. Ainsi, X est sur la médiatrice de 2 et de 0, à savoir la droite d'équation $x = 1$.

Soit θ l'argument d'une racine X de P. Comme X est sur la droite d'équation $x = 1$, le point $X-2$ est symétrique de X par rapport à l'axe $x = 0$; si $\theta+\alpha$ est l'argument de $X-2$, on a $\theta+\alpha = \pi-\theta$.

L'équation

$$(X-2)^5 = X^5$$

■ ***Réponse correcte***

□ ***Réponse fausse***

implique, en termes d'arguments

$$5(\theta+\alpha) \equiv 5\theta \quad [2\pi],$$

soit

$$5(\pi-\theta) \equiv 5\theta \quad [2\pi],$$

d'où

$$\theta \equiv \frac{\pi}{2} \quad \left[\frac{\pi}{5}\right]$$

A noter que cette condition est nécessaire, mais non suffisante pour que X soit une racine de P. Pour une racine, on ne peut avoir $\theta = \frac{\pi}{2}$. . Avec l'abscisse et l'argument, une racine de P est bien déterminée.

Passons à l'étude algébrique. L'équation $P(X) = 0$ est équivalente à $(X-2)^5 = X^5$. Puisque $X \neq 0$, ceci est équivalent à $\left(\frac{X-2}{X}\right)^5 = 1$, soit à

$$\frac{X-2}{X} = e^{2ik\frac{\pi}{5}}, \quad k \in \{1;2;3;4\},$$

ou à

$$X = \frac{2}{1-e^{2ik\frac{\pi}{5}}}, \quad k \in \{1;2;3;4\}.$$

On peut préciser l'expression de X :

$$X = \frac{2}{1-e^{2ik\frac{\pi}{5}}} = \frac{2\left(1-e^{-2ik\frac{\pi}{5}}\right)}{\left(1-e^{2ik\frac{\pi}{5}}\right)\left(1-e^{-2ik\frac{\pi}{5}}\right)}$$

$$= \frac{1-e^{-2ik\frac{\pi}{5}}}{1-\cos 2k\frac{\pi}{5}} = 1 + i\frac{\sin 2k\frac{\pi}{5}}{1-\cos 2k\frac{\pi}{5}}$$

Notant X_1, $\bar{X}_1$, X_2 et $\bar{X}_2$ les racines de P, ce polynôme se factorise en

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$
\begin{aligned}
&P(X)\\
&= \lambda(X - X_1)\left(X - \bar{X}_1\right)(X - X_2)\left(X - \bar{X}_1\right)\\
&= \lambda\left(X^2 - (X_1 + \bar{X}_1)X + X_1\bar{X}_1\right)\left(X^2 - (X_2 + \bar{X}_2)X + X_2\bar{X}_2\right)\\
&= \lambda\left(X^2 - 2\Re(X_1)X + X_1\bar{X}_1\right)\left(X^2 - 2\Re(X_2)X + X_2\bar{X}_2\right)\\
&= \lambda\left(X^2 - 2X + X_1\bar{X}_1\right)\left(X^2 - 2X + X_2\bar{X}_2\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi, il n'y a qu'à chercher les trois termes λ, $X_1\bar{X}_1$ et $X_2\bar{X}_2$. Il suffit d'identifier les deux expressions de P. On trouve :

$$P(X) = -10\left(X^2 - 2X + \frac{10 + 2\sqrt{5}}{15}\right)\left(X^2 - 2X + \frac{20 - 4\sqrt{5}}{15}\right)$$

10.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) □

— Les fonctions exponentielles sont les fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non identiquement nulles vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ P(x+y) = P(x)\ P(y).$$

Le seul polynôme non nul satisfaisant à cette équation est le polynôme constant égal à 1.

— Il satisfait également à l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ P(x-y) = P(x)\ P(y),$$

de sorte que l'affirmation (5) est fausse.

— Les fonctions puissances, c'est-à-dire de la forme $P(x) = x^n$ sont les fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non identiquement nulles vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ P(xy) = P(x)\ P(y).$$

Les polynômes non nuls qui satisfont à cette équation sont donc les monômes de la forme $P(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

— L'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ P(x+y) = P(x) + P(y)$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

caractérise les fonctions linéaires parmi les fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Les fonctions polynômes satisfaisant à cette équation fonctionnelle sont donc de la forme $P(x) = \lambda x$. On peut le démontrer directement : Soit P un polynôme vérifiant, pour tous réels x et y, $P(x+y) = P(x) + P(y)$. Si le polynôme P n'est pas nul, il n'est pas constant. S'il est de degré $n > 0$, soit $a_n x^n$ son terme dominant. En $+\infty$, on a $P(x) \sim a_n x^n$, et, puisque $a_n \neq 0$, $\dfrac{P(n)}{x^n} \sim a_n$. Par ailleurs, du fait de l'équation fonctionnelle, on a $P(k) = kP(1)$ pour tout entier $k > 0$. En faisant tendre k vers $+\infty$, on en déduit que P est de degré 1. Comme $P(0) = 0$, c'est un polynôme de la forme $P(x) = \lambda x$.

— L'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ P(xy) = P(x) + P(y)$$

caractérise les fonctions logarithmes, dans l'ensemble des fonctions non identiquement nulles continues $\mathbb{R}_+{}^* \to \mathbb{R}$. Le seul polynôme satisfaisant à cette équation est bien le polynôme nul. Montrons-le directement. Si P est un polynôme non nul solution de cette équation, ce n'est pas un polynôme constant. S'il est de degré $n > 0$, soit $a_n x^n$ son terme dominant. En $+\infty$, on a $P(x) \sim a_n x^n$, et, puisque $a_n \neq 0$, $\dfrac{P(n)}{x^n} \sim a_n$. Par ailleurs, en appliquant $n-1$ fois l'équation avec $x = y = 2$, on montre l'égalité $P(2^n) = nP(2)$, pour tout $n \geq 1$; comme P n'est pas le polynôme nul, on doit avoir $P(2) \neq 0$, car sinon P aurait une infinité de racines. On en déduit $\dfrac{P(2^n)}{2^n} = \dfrac{n}{2^n} P(2) \to 0$, ce qui contredit la relation $\dfrac{P(n)}{x^n} \sim a_n$.

Résultats du QCM n°5
Espaces vectoriels

(Questions p. 31)

1.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ■
(4) ■
(5) ■

Les réseaux ont la propriété de l'assertion (1) sans être pour autant être des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^2$. Dans l'assertion (2), la partie F peut être vide. Les assertions (3), (4) et (5) sont des conditions suffisantes, et même nécessaires et suffisantes pour que F soit un sous-espace vectoriel de E.

2.

(1) ■
(2) ☐
(3) ■
(4) ☐
(5) ☐

— W_1 est l'ensemble des combinaisons linéaires de (1;0;0) et de (0;1;0). C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

— W_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $(1;0;0) \in W_2$, tandis que $-(1;0;0) = (-1;0;0) \notin W_2$.

— W_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, car c'est le noyau de l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(a;b;c) \mapsto a+b+c$.

— W_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $(1;0;0) \in W_2$, tandis que $2\,(1;0;0) = (2;0;0) \notin W_4$.

— W_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car

$(1;0;0) \in W_2$, tandis que $\sqrt{2}\,(1;0;0) = \left(\sqrt{2};0;0\right) \notin W_5$.

3.

(1) ■
(2) ☐
(3) ■
(4) ☐
(5) ■

Une intersection quelconque (non vide) de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. La somme algébrique de deux (ou d'une famille de) sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel, de même bien entendu que la différence algébrique. On a en effet $F + G = F - G$, car si G est un espace vectoriel,

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

$G = -G$. Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel, tout comme la différence ensembliste de deux sous-espaces vectoriels, ne saurait être un sous-espace vectoriel : il ne contient pas 0.

4.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) ■
(5) □

• Pour que u soit combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3, il faut et il suffit qu'il existe α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3.$$

Cela nous amène à étudier le système

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 2 \\ -3\alpha - 4\beta - 5\gamma = -5 \\ 2\alpha - \beta + 7\gamma = 3 \end{cases}$$

que l'on traite par la méthode de Gauss. On obtient successivement

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & -5 & -5 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} L1 \leftarrow L1 \\ L2 \leftarrow L2 + 3L1 \\ L3 \leftarrow L3 - 2L1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} L1 \leftarrow L1 \\ L2 \leftarrow L2 \\ L3 \leftarrow 2L3 + 5L1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Ce dernier système est impossible, et u n'est pas combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3. **(Suite p. 163)**

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Dans la pratique, il n'est jamais nécessaire de démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel. Il suffit d'établir que cet ensemble est un sous-espace vectoriel d'un ensemble dont on sait qu'il est un espace vectoriel.

• Les principaux exemples que l'on peut invoquer directement sont :

— $\mathbb{R}^n$

— L'ensemble des fonctions $A \to \mathbb{R}$, où A est un ensemble quelconque.

— L'ensemble des suites réelles, ou plus généralement l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, avec n fixé.

— L'ensemble des polynômes de degré $\leq n$.

— L'ensemble des polynômes.

• Il est rarement utile de faire des calculs pour établir qu'une partie A d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E ; il suffit la plupart du temps d'invoquer les théorèmes suivants :

— L'ensemble des combinaisons linéaires des éléments d'une partie non vide de E est un sous-espace vectoriel de E (Attention : il s'agit de L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires, pas d'UN ensemble de combinaisons linéaires).

— Le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

— L'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

— Toute intersection non vide de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Le dernier énoncé permet d'invoquer des arguments découlant des autres énoncés. Ce n'est que lorsque ces théorèmes ne permettent pas de conclure que l'on doit se résigner à invoquer le théorème suivant :

— Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un partie non vide A de l'espace vectoriel E soit un sous-espace vectoriel de E est

$$\forall (x;y) \in A^2,\ \forall (\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2,\quad \lambda x + \mu y \in A$$

On peut simplifier la condition en écrivant

$$\forall (x;y) \in A^2,\ \forall \mu \in \mathbb{R},\quad x + \mu y \in A$$

Attention : il ne faut pas omettre de s'assurer que A est bien une partie non vide.

(Suite de la page 161)

• De même, pour que $P(X)$ soit combinaison linéaire de $Q(X)$, $R(X)$ et $S(X)$, il faut et il suffit qu'il existe α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(X) = \alpha Q(X) + \beta R(X) + \gamma S(X)$$

Cela nous amène à étudier l'équation

$$t^2 + 4t - 3 = (\alpha + 2\beta)t^2 + (-2\alpha - 3\beta + \gamma)t + (5\alpha + 3\gamma)$$

qui se traduit, en identifiant les coefficients de t^2, de t et de 1 dans les deux membres, par le système

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ -2\alpha - 3\beta + \gamma = 4 \\ 5\alpha + 3\gamma = -3 \end{cases}$$

que l'on traite, comme d'habitude, par la méthode de Gauss, avec cette fois-ci un pivot total. On obtient successivement

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} L1 \leftarrow L1 \\ L2 \leftarrow L2 + 2L1 \\ L3 \leftarrow L3 - 5L1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -10 & 3 & -8 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} L1 \leftarrow L1 - 2L2 \\ L2 \leftarrow L2 \\ L3 \leftarrow L3 + 10L2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 52 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} L1 \leftarrow 13L1 + 2L3 \\ L2 \leftarrow 13L2 - L3 \\ L3 \leftarrow L3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 0 & 0 & -39 \\ 0 & 13 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 13 & 52 \end{array}\right)$$

d'où l'on tire $\alpha = -\frac{39}{13} = -3$, $\beta = \frac{26}{13} = 2$, et $\gamma = \frac{52}{13} = 4$. Cela montre que $P(X)$ est bien combinaison linéaire de $Q(X)$, $R(X)$ et $S(X)$.

• Ecrire que la matrice A est égale à $\alpha B + \beta C + \gamma D$ donne le système

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + 2\gamma \\ \alpha + \beta & \beta - \gamma \end{pmatrix}$$

qui se résout directement :

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

• Pour l'assertion (4), dire que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3, c'est dire que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$, ou encore que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ formée par leur composantes est inversible ; or on voit sans calculs que c'est une matrice triangulaire inférieure dont les termes de la diagonale sont tous non nuls. Cette matrice est inversible, et les vecteurs e_1, e_2 et e_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$.

• Pour l'assertion (5), notons d'abord que les deux vecteurs $v = (2;3;0)$ et $w = \left(\frac{1}{6};\frac{1}{4};0\right)$ sont dans le plan $z = 0$. Un plan étant de dimension 2, il est équivalent de dire que ces deux vecteurs engendrent le plan, qu'ils en forment une base, ou qu'ils forment une famille libre de vecteurs de ce plan. Comme $v = 12w$, ce n'est pas le cas.

5.

(1) □ (2) ■ (3) ■ (4) ■ (5) □

La formule de la dimension nous donne

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V\cap W).$$

Comme $V+W$ est inclus dans E, on a

$$\dim(V+W) \leq \dim E = 7.$$

On en déduit $\dim(V\cap W) \geq 2$.

Par ailleurs, puisque $V\cap W \subset V$, on a

$$\dim(V\cap W) \leq \dim V = 4.$$

Cela montre l'encadrement

$$2 \leq \dim(V\cap W) \leq 4.$$

Ce simple encadrement montre seulement que $V\cap W$ ne peut pas prendre de valeurs autres que 2, 3 ou 4. Il ne montre pas que $V\cap W$ peut effectivement prendre les valeurs 2, 3 ou 4. Pour démontrer cette dernière assertion, il suffit de prendre trois exemples. On considère dans tous les cas $E = \mathbb{R}^7$, avec une base $\{e_1 ; e_2 ; ... ; e_7\}$.

— Pour obtenir $\dim(V\cap W) = 2$, on prend $V = \mathrm{Vect}(e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4)$, et $W = \mathrm{Vect}(e_3 ; e_4 ; e_5 ; e_6 ; e_7)$, où la notation $\mathrm{Vect}(A)$ désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par A.

— Pour obtenir $\dim(V\cap W) = 3$, on prend $V = \mathrm{Vect}(e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4)$, et $W = \mathrm{Vect}(e_2 ; e_3 ; e_4 ; e_5 ; e_6)$.

— Pour obtenir $\dim(V\cap W) = 4$, on prend $V = \mathrm{Vect}(e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4)$, et $W = \mathrm{Vect}(e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4 ; e_5)$.

6.

(1) □ (2) □ (3) □ (4) □ (5) ■

L'assertion (1) est vraie si $n = p$. Dans ce cas, si, par des combinaisons linéaires des équations de départ, on arrive à des équations de la forme

$$(2)\ x_1 = c_1,\ ...,\ x_p = c_p,$$

le système (2) fournit les solutions du système de départ. C'est pratique, mais cela ne marche que si $n = p$.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Il ne faut surtout pas remplacer une équation par une combinaison linéaire des autres équations. Ce que l'on a le droit de faire, c'est de modifier une équation L_i en lui ajoutant une combinaison linéaire des autres équations ; autrement dit, on change L_i en $L_i + \sum_{k \neq i} L_k$.

Le nombre d'équations et le nombre d'inconnues ne sont pas les deux seuls éléments à considérer en matière de résolution de système ; il faut également considérer le rang r du système, forcément inférieur à $\min\{n;p\}$. Si le rang du système est inférieur au nombre n d'équations, il est possible que le système n'ait pas de solutions. La solution pratique consiste à mettre le système sous forme échelonnée, par des combinaisons linéaires de lignes (c'est-à-dire à mettre le système sous la forme triangulaire). Si les $n - r$ dernières équations sont de la forme $0 = c$, $c \neq 0$, le système est impossible. Si les $n - r$ dernières équations sont de la forme $0 = 0$, le système admet des solutions. Dans ce cas, si $r = n$, il y a unicité des solutions, et si $r < p$, l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension $p-r$.

7.

(1) ■
(2) ■
(3) ■
(4) □
(5) ■

Pour un endomorphisme g de E, les noyaux des itérées de g forment une suite croissante, tandis que les images des itérées forment une suite décroissante. Si deux noyaux consécutifs sont égaux, tous les noyaux suivants le sont. De même pour les images. En dimension finie, il existe toujours un entier tel que ce soit le cas. Les endomorphismes nilpotents sont ceux pour lesquels la suite des noyaux se stabilise à l'espace tout entier. Pour cette raison, on a forcément $p \leq n$. Le théorème de décomposition des endomorphismes nilpotents s'énonce ainsi, avec les notations de la question : il existe des éléments x_1, ..., x_2, ... x_m de E, et une séquence $p = p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq ... \geq p_m$ d'entiers naturels tels que

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$f^{p_1}(x_1) = f^{p_2}(x_2) = \dots = f^{p_m}(x_m) = 0 \ ,$$

et que

$$\left\{x_1 ; f(x_1) ; \dots ; f^{p_1-1}(x_1) ; x_2 ; f(x_2) ; \dots ; f^{p_2-1}(x_2) ; \dots \right.$$
$$\left. \dots ; x_m ; \dots f^{p_m-1}(x_m)\right\}$$

soit une base de E. Dans cette base, la matrice de f se décompose en m blocs diagonaux de la forme

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\} p_k \text{ lignes} \ .$$

L'assertion (3) est le lemme fondamental de la démonstration de ce théorème qui s'effectue par récurrence.

8.

(1) ■ (2) □ (3) ■ (4) ■ (5) ■

Il est clair que f_H est linéaire lorsque f l'est. Si $H \neq U$, l'application linéaire nulle fournit un contre-exemple à l'assertion (2) : on a alors $\text{Ker}\, f_H = H$, et $\text{Ker}\, f = U$. La relation exacte est donnée dans l'affirmation (3), qui découle immédiatement de la définition. Pour $\text{Im}\, f$, comme $H \subset U$, on a $f(H) \subset f(U) = \text{Im}\, f$, d'où $\text{Im}\, f \cap f(H) = f(H)$, et

$$\text{Im}\, f_H = f(H) = \text{Im}\, f \cap f(H).$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

9.

(1) ■
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) □

$\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1. Toute base de $\mathrm{Im} f$ est donc constituée d'un seul élément. Soit b un tel élément. Puisque $f(b) \in \mathrm{Im} f$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) = \lambda b$. Cela étant, si $x \in E$, il existe $\mu_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \mu_x b$. On a alors

$$f^2(x) = f(\mu_x b) = \mu_x f(b) = \lambda \mu_x b = \lambda f(x),$$

ce qui montre la relation $f^2 = \lambda f$; les deux premières assertions sont donc vraies. En outre, si $\lambda \neq 1$, f n'est pas un projecteur. Rappelons en effet qu'un projecteur est un endomorphisme tel que $f^2 = f$. Si $\lambda \neq 1$, f–Id est un isomorphisme ; en effet, si $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, on doit avoir $f(x) = x$, et x doit appartenir à l'image de f. Mais si $x \in \mathrm{Im} f \setminus \{0\}$, on a $f(x) = \lambda x \neq x$ si $\lambda \neq 1$. Inversement, si $\lambda = 1$, alors $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ contient $\mathrm{Im} f$, de sorte que $f - \mathrm{Id}$ n'est pas injective.

Il ne peut pas exister $g \in L(\mathbb{R};E)$, et $h \in L(E;\mathbb{R})$ telles que $f = h \circ g$; en effet, quand on prend l'application $h \circ g$, la première application est g, qui est définie sur $\mathbb{R}$, tandis que f est définie sur E. En revanche, il existe $g \in L(\mathbb{R};E)$, et $h \in L(E;\mathbb{R})$ telles que $f = g \circ h$. En effet, si l'on pose $g(t) = tb$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et si l'on définit une forme linéaire h par l'égalité $f(x) = h(x)\, b$, alors on a bien $f = g \circ h$. Il n'y a pas unicité des applications linéaires g et h : si l'on a $f = g \circ h$, on a également $\mathrm{f} = (\xi g) \circ [(1/\xi)h]$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$.

Dans le cas d'un espace de dimension finie, la décomposition $f = g \circ h$ se traduit ainsi : une matrice M est de rang 1 si et seulement si elle se décompose comme produit $M = CL$ d'une matrice colonne C par une matrice ligne L.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

10.

(1) ■ (2) □ (3) ■ (4) ■ (5) □

Il est clair que V_f est un sous-espace vectoriel de $L(F;E)$. En effet, il est non vide car il contient l'application nulle ; En outre, l'égalité

$$f \circ (\lambda g + \mu k) \circ f = \lambda f \circ g \circ f + \mu f \circ k \circ f$$

montre que l'application $g \mapsto f \circ g \circ f$ est linéaire. L'ensemble V_f n'est autre que le noyau de cette application.

Lorsque f est l'application nulle, on a $V_f = L(F;E)$, et l'assertion (2) est fausse.

Si f n'est pas injective, soient $x \in \mathrm{Ker} f$, φ une forme linéaire non nulle $F \to \mathbb{R}$, et g l'application linéaire $F \to E$, $y \mapsto \varphi(y)\,x$. Alors, $f \circ g \circ f = 0$, de sorte que $V_f \neq \{0\}$.

Si f n'est pas surjective, soient $x \in F \setminus \mathrm{Im} f$, G un supplémentaire de $\mathbb{R}x$ dans F contenant $\mathrm{Im} f$, y un élément non nul de E, et g l'application linéaire $F \to E$, définie par $g(\lambda x + \mu z) = \lambda y$ (avec $z \in G$). Alors, $f \circ g \circ f = 0$.

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x;y) \mapsto x$, et si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (0;x)$, alors $f \circ g \circ f = 0$, ce qui montre $V_f \neq \{0\}$. Cela contredit l'assertion (5).

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Résultats du QCM n°6

Matrices

(Questions p. 38)

1.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) □
(5) □

Quand on décrit une matrice sous la forme $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq p}$, le premier indice, i, désigne les numéros de lignes, tandis que le second désigne ceux des colonnes. Ainsi, n est le nombre de lignes, tandis que p est le nombre de colonnes de la matrice. Ici, on a donc affaire à une matrice à 3 lignes et 2 colonnes. Le premier coefficient, en haut à gauche, $a_{1,1}$, est à l'intersection de la première ligne et de la première colonne ; pour trouver sa valeur, on remplace i par 1, et j par 1 ; il vaut donc $(-1)^1 \times 1 + 1 = 0$. Au-dessous de ce coefficient, à l'intersection de la deuxième ligne et de la première colonne, on trouve $a_{2,1} = (-1)^2 \times 1 + 2 = 3$. etc. La bonne réponse est la première.

2.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) □

Dans l'usine W, la dépense mensuelle en ressource R est donnée par $1 \times 20 + 2 \times 20 + 3 \times 10$, où l'on reconnaît le coefficient (1;1) de la matrice CF. Le coût annuel est bien sûr 12 fois plus élevé, et le résultat se lit sur les coefficients de la matrice $12\,CF$. Les puissances de matrices interviennent dès qu'on a affaire à un processus itératif, où l'on passe d'une étape à la suivante en utilisant toujours la même règle. Les dépenses d'un mois s'ajoutent simplement à celles des mois précédents.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

3.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) ■

Une matrice carrée est une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes. La matrice inverse d'une matrice carrée A d'ordre n est, si elle existe, la matrice B telle que $AB = BA = \mathrm{Id}_n$, où Id_n est la matrice identité d'ordre n, définie par $\mathrm{Id}_n = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ avec $a_{ij} = 1$ si $i = j$, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. La matrice identité d'ordre n correspond à l'application identité, qui va forcément d'un espace dans lui-même. Elle est donc obligatoirement carrée. La transposée de l'opposée d'une matrice est égale à l'opposée de la transposée de cette matrice. La définition (4) est donc redondante, et l'on peut la simplifier : une matrice est dite antisymétrique si elle est égale à la transposée de son opposée. De même pour la définition (5). La transposée de la conjuguée d'une matrice est égale à la conjuguée de la transposée de cette matrice. On peut donc également formuler ainsi la définition (5) : Une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est dite hermitienne si elle est égale à la conjuguée de sa matrice transposée.

4.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) ■

Les matrices de permutation sont forcément des matrices carrées : si l'on fait la somme des termes sur chaque ligne et sur chaque colonne, on trouve toujours 1. Par suite, si l'on additionne tous les coefficients de la matrice, on va trouver le nombre de lignes si l'on fait l'addition selon les lignes, et on va trouver le nombre de colonnes si l'on fait l'addition selon les colonnes. Comme ces deux nombres doivent être égaux, la matrice est une matrice carrée. Cela étant, si l'on prend une base, l'application linéaire associée à une matrice de permutation est une application linéaire qui permute entre eux les vecteurs de la base. C'est donc une bijection, c'est-à-dire un isomorphisme qui permute les vecteurs de l'espace vectoriel ; mais une matrice associée à une application linéaire qui permute les vecteurs de l'espace vectoriel n'est en général pas une

---

■ ***Réponse correcte***
□ ***Réponse fausse***

matrice de permutation ; c'est simplement une matrice d'isomorphisme. Enfin, soit $(\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de permutation, $(\beta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ sa transposée, et $(\gamma_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ sa matrice inverse. Si $\alpha_{ij} = 1$, on a $\alpha_{ik} = 0$ si $k \neq j$, et $\alpha_{qj} = 0$ si $q \neq i$; en outre, si l'on interprète la matrice dans une base $(e_1, ..., e_n)$, le vecteur e_j a pour image le vecteur e_i (on lit l'image du vecteur e_j dans la colonne j de la matrice). Par l'application inverse, le vecteur e_i a pour image le vecteur e_j, et l'on a donc $\gamma_{ji} = 1$, $\gamma_{ki} = 0$ si $k \neq j$, et la i-ième colonne de la matrice $(\gamma_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est égale à la i-ième ligne de la matrice $(\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$; c'est sa transposée.

5.

(1) ☐
(2) ■
(3) ☐
(4) ☐
(5) ☐

Pour que l'on puisse faire le produit ou la somme par blocs de deux matrices décomposées en blocs, il faut (et il suffit) que les matrices *et* les blocs aient des tailles compatibles. Essayez donc de faire le produit

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{1,3} \\ b_{2,3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b_{3,1} & b_{3,2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{3,3} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Les opérations de transposition se font bien par blocs, mais pas le passage à l'inverse, sauf dans le cas d'une décomposition en blocs carrés diagonaux : si A est une matrice décomposée en blocs sous la forme $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$, où A_1 et A_4 sont des matrices carrées, A est inversible si et seulement si A_1 et A_4 le sont, et alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_4^{-1} \end{pmatrix}$. La décomposition de l'assertion (4) est notoirement fausse : les matrices M

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

et L proposés ne sont même pas triangulaires. Enfin, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ est diagonale si et seulement si A_1 et A_4 sont diagonales, et si $A_2 = A_3 = 0$.

6.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ■
(4) ☐
(5) ☐

La matrice M est une matrice de permutation. Si $(e_1;e_2;e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, la matrice M est associée à l'application f qui permute les termes de cette base selon le cycle d'ordre 3, $e_1 \to e_3 \to e_2 \to e_1$. Comme 1992 est divisible par 3, M^{1992} est la matrice identité, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.

(1) ■
(2) ☐
(3) ☐
(4) ■
(5) ☐

Puisque C est une famille de trois éléments dans un espace de dimension 3, pour montrer que c'est une base, il suffit de vérifier que cette famille est libre. Or la matrice de ces trois vecteurs dans la base B s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. C'est une matrice triangulaire inférieure dont les termes diagonaux sont tous non nuls. C'est donc une matrice inversible, et C est une base.

Dans la définition de u, P est la variable. La matrice de u ne saurait donc dépendre de P. On a en fait

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

Les matrices de passage sont une source fréquente d'erreurs, en raison d'une confusion entre la matrice de passage de la première base à la seconde, et la matrice de passage de la seconde base à la première. Pour écrire la matrice de passage de la base B à la base C, on écrit les vecteurs de C dans la base B. Dans notre exemple, cela donne $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de l'assertion (3) n'est autre que Q^{-1}, c'est-à-dire la matrice de passage de C à B. Pour finir de clarifier cette question des changements de base, rappelons les deux formules à connaître :

— Si u est un endomorphisme dont les matrices dans les bases B et C sont respectivement $M_B(u)$ et $M_C(u)$, ces deux matrices sont reliées par la formule $M_C(u) = Q^{-1}\ M_B(u)\ Q$.

— Si x est un vecteur de matrice X_B dans la base B, et X_C dans la base C, ces deux matrices sont reliées par la formule $X_B = Q\ \ X_C$ (en cas de doute, le "truc mnémotechnique", c'est de vérifier avec les vecteurs de la base C : le premier vecteur de C s'écrit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base C, et en effectuant le produit par Q, on va obtenir la première colonne de Q, c'est-à-dire la matrice de ce vecteur dans la base B.

En combinant les deux formules précédentes, on peut par exemple calculer la matrice $M_{B,C}(u)$ de u lorsque l'espace de départ est muni de la base B, et l'espace d'arrivée de la base C ; on a $M_{B,C}(u) = M_C(u)\ Q^{-1}$.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

8.

(1) □ (2) ■ (3) □ (4) ■ (5) □

Le théorème de König fournit une réponse affirmative au problème, grâce au théorème de l'assertion (2). En effet, soit M la matrice dont le coefficient $(i;j)$ vaut 1 si le garçon i et la fille j ont été présentés, 0 sinon. La décomposition donnée par le théorème fournit les couples, grâce à la matrice P_1 : le garçon i va danser avec la fille j telle que le coefficient $(i;j)$ de P_1 vaille 1. Cela étant, la démonstration de l'assertion (2) se fait par récurrence sur k, et le passage de k à $k-1$ se fait grâce à l'assertion (4) qui se démontre par récurrence sur n.

Revenons quand même sur les trois autres assertions : les affirmations (1) et (3) sont fantaisistes, et l'affirmation (5) est un lemme utilisé pour démontrer un théorème sur les matrices formées de 0 et de 1, mais qui n'a rien à voir avec le théorème de König.

9.

(1) □ (2) □ (3) ■ (4) ■ (5) □

A est l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R}_+)$ ayant sur chaque ligne, et sur chaque colonne, exactement un terme non nul. Les matrices de permutation appartienent donc à A, qui est non vide, mais A inclut d'autres matrices. Il est clair que A n'est pas un espace vectoriel, car la matrice nulle n'est pas inversible. En outre, A est bien stable par produit.

• Montrons la caractérisation énoncée ci-dessus.

— Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de $M_n(\mathbb{R}_+)$ ayant sur chaque ligne, et chaque colonne, exactement un terme non nul, soit $B = (b_{ij})$ la matrice définie par $b_{ij} = 0$ si $a_{ji} = 0$, et $b_{ij} = 1/a_{ji}$ si $a_{ji} \neq 0$. Alors, $B = A^{-1}$.

— Réciproquement, soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux éléments de A tels que $AB = (c_{ij}) = \mathrm{Id}_n$. Il est clair que A et B ont au moins un terme non nul sur chaque ligne et sur chaque colonne. Sinon, elles ne seraient pas inversibles. Supposons, par l'absurde, que A ait deux

---

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

termes non nuls sur une ligne, $a_{jr} > 0$ et $a_{js} > 0$, $r \neq s$. Alors, si $j \neq i$,

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= \cdots + a_{ir} b_{rj} + \cdots + a_{is} b_{sj} + \cdots \end{aligned}$$

Ainsi, $b_{rj} = b_{sj} = 0$ si $i \neq j$, et B n'est pas inversible, d'où la contradiction. De même, si A a deux termes non nuls dans une colonne.

10.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) □
(5) □

Pour l'assertion (1), en soustrayant la quatrième ligne de la cinquième, la troisième de la quatrième, etc., on aboutit à une matrice dont deux lignes sont identiques. La méthode du pivot va donc conduire à une matrice dont une ligne est nulle, et la matrice de départ n'est pas inversible.

Soit A est une matrice carrée d'ordre n telle qu'il existe une matrice carrée d'ordre n, B, telle que $AB = \mathrm{Id}_n$. Considérons les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^n$ associés respectivement à A et B, lorsqu'on munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique. La relation $fg = \mathrm{Id}_n$ montre que f est surjective. S'agissant d'un endomorphisme, c'est un isomorphisme (donc une bijection), et A est inversible, ce qui établit l'assertion (2).

L'assertion (3) est due à Hadamard. Si A n'était pas inversible, il existerait $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que $\forall i, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$. Soit alors k l'indice tel que $|x_i|$ soit maximal. On aurait $a_{kk} = -\sum_{j \neq k} a_{kj} \dfrac{x_j}{x_k}$, et puisque $\left|\dfrac{x_j}{x_k}\right| \leq 1$, $|a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$, d'où la contradiction.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Appliquons la méthode de Gauss aux colonnes de la matrice de l'assertion (4). Si $b_1 = b_2$, les deux premières colonnes sont égales, et la matrice n'est pas inversible. Sinon, on a successivement

$$\begin{pmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 & a_1-b_4 \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & a_2-b_3 & a_2-b_4 \\ a_3-b_1 & a_3-b_2 & a_3-b_3 & a_3-b_4 \\ a_4-b_1 & a_4-b_2 & a_4-b_3 & a_4-b_4 \end{pmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 - C_2$

$$\begin{pmatrix} b_2-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 & a_1-b_4 \\ b_2-b_1 & a_2-b_2 & a_2-b_3 & a_2-b_4 \\ b_2-b_1 & a_3-b_2 & a_3-b_3 & a_3-b_4 \\ b_2-b_1 & a_4-b_2 & a_4-b_3 & a_4-b_4 \end{pmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow C_2 + \frac{b_2}{b_2 - b_1} C_1, \quad C_3 \leftarrow C_3 + \frac{b_3}{b_2 - b_1} C_1$$

$$\begin{pmatrix} b_2-b_1 & a_1 & a_1 & a_1-b_4 \\ b_2-b_1 & a_2 & a_2 & a_2-b_4 \\ b_2-b_1 & a_3 & a_3 & a_3-b_4 \\ b_2-b_1 & a_4 & a_4 & a_4-b_4 \end{pmatrix}$$

La dernière matrice a deux colonnes identiques ; elle n'est pas inversible, et celle de l'assertion (4) non plus.

Dans la matrice de l'assertion (5), il n'y a que deux colonnes indépendantes. En appliquant la méthode de Gauss sur les colonnes, on voit en effet que l'on peut écrire la somme de deux vecteurs colonnes consécutifs en fonction des deux vecteurs colonnes précédents.

Résultats du QCM n°7
Réduction des endomorphismes

(Questions p. 51)

1.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) □

P_n est le noyau de l'application linéaire $T^n - \mathrm{Id}$, où T est l'opérateur de translation, $(u_n) \mapsto (u_{n+1})$. C'est donc un espace vectoriel. De même pour F_n. Comme $F_1 \subset (F_2 \cap F_3)$, la somme $F_2 + F_3$ n'est pas directe. Cela montre l'assertion (3). Pour contredire l'assertion (2), on peut utiliser les espaces P_n. Comme la restriction d'une fonction à $\mathbb{N}$ est une suite, si l'on avait $F_2 + F_3 = F_6$, on aurait aussi $P_2 + P_3 = P_6$; or comme P_n est de dimension n, cette dernière relation est impossible. Les suites (F_n) et (P_n) ne sont bien sûr pas croissantes, mais comme la somme de deux suites (fonctions) de périodes respectives m et n est de période mn, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} P_n$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ sont des espaces vectoriels.

2.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) □
(5)

La trace de $f\circ g - g\circ f$ vaut 0, tandis que celle de Id_E vaut $\dim(E)$. L'égalité $f\circ g - g\circ f = \mathrm{Id}_E$ est donc impossible.

L'assertion (2) est fausse, comme on peut le constater en prenant $f = g$, où f est une application nilpotente d'index 2.

Si $f = 0$, alors $g = 0$. Supposons donc $f \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$, et soit $a \in K$ tel que $g(x) = af(x)$. Soit $y \in E$. Si $f(y) = 0$, alors $g(x) = af(x)$. Si $f(y) \neq 0$, soit $b \in K$ tel que $g(y) = b\, g(y)$. Pour tout $d \in K$, il existe $c \in K$ tel que

$$\begin{aligned} g(dx-y) &= cf(dx-y) = cd\,f(x) - c\,f(y) \\ &= g(dx) - g(y) = ad\,f(x) - b\,f(y). \end{aligned}$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Ainsi, $(c-a)d\,f(x) = (c-b)\,f(y)$.
Si $f(x)$ et $f(y)$ sont linéairement indépendants, alors $a = c = b$. Si $f(x)$ et $f(y)$ sont liés, $f(y) = d\,f(x)$, et là encore, $a = b$. Finalement, $g = af$.

L'exemple de l'application Id_E montre que les assertions (4) et (5) sont fausses.

3.

(1) ■
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) ■

Si $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et si $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$, alors

$UV = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 1. Son noyau est donc de dimension 2, ce qui signifie que 0 est valeur propre double de UV. Pour la troisième valeur propre, un vecteur engendrant l'image de UV est forcément vecteur propre. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \\ \frac{c}{a} \end{pmatrix}$. En calculant l'image de ce vecteur par UV, on trouve la troisième valeur propre, à savoir 3.

La matrice VU se réduit à (3) (c'est une matrice 1×1). Trivialement, son unique valeur propre est 3.

Comme UV, la matrice ${}^tV\,V$ est une matrice produit d'une matrice colonne par une matrice ligne. Elle est de

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

rang 1. On en déduit que 0 est valeur propre double, et que le vecteur colonne ${}^tV$, qui engendre l'image de ${}^tV\,V$ est vecteur propre de ${}^tV\,V$. Pour déterminer la valeur propre correspondante, il suffit de calculer l'image de ce vecteur propre, à savoir
$({}^tV\,V)\,{}^tV = {}^tV(V\,{}^tV) = (V\,{}^tV)\,{}^tV$ (car $V\,{}^tV$ est un réel).
La valeur propre cherchée est donc $V\,{}^tV$. On obtient

$$V\,{}^tV = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

Comme ${}^t(UV)\;UV = ({}^tV\,{}^tU)\;UV = {}^tV({}^tU\,U)\;V$, et que ${}^tU\,U$ se réduit à une matrice 1×1, c'est-à-dire à un réel, à savoir $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, on a ${}^t(UV)\;UV = ({}^tU\,U)({}^tV\;V)$, de sorte que les valeurs propres de ${}^t(UV)\;UV$ se déduisent de celle de ${}^tV\;V$ en les multipliant par $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$. Aussi les valeurs propres de ${}^t(UV)\;UV$ sont-elles 0, 0 et $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$.

4.

(1) ■ Un simple calcul donne

(2) ■

(3) ■

(4) □

(5) ■

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 2 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix}$$

$$= M + 2\,Id_3$$

De même,

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= N + 2Id_2$$

Les deux relations $M^2 = M + 2Id_3$ et $N^2 = N + 2Id_2$ expriment que les puissances successives de M et de N s'expriment comme fonctions respectives de M et de Id_3 d'une part, de N et de Id_2 d'autre part. Par exemple,

$$\begin{aligned} M^3 &= M \times M^2 = M \times (M + 2Id_3) \\ &= M^2 + 2M = M + 2Id_3 + 2M \\ &= 3M + 2Id_3 \end{aligned}$$

La relation étant identique pour M et pour N, si $M_n = a_n M + b_n Id_3$, alors $N_n = a_n N + b_n Id_2$. Voici deux méthodes pour calculer N^n.

- Première méthode : la relation $N^2 = N + 2Id_2$ s'écrit aussi $(N - 2Id_2)(N + Id_2) = 0$, ce qui montre que -1 et 2 sont valeurs propres de N. Etant de taille 2 et ayant deux valeurs propres distinctes, N est diagonalisable. On peut donc calculer facilement N^n.

- Deuxième méthode : On part encore de la relation $(N - 2Id_2)(N + Id_2) = 0$. La division euclidienne du polynôme X^n par $(X - 2)(X + 1)$ s'écrit

$$X^n = (X - 2)(X + 1)\,Q(X) + \alpha_n X + \beta_n$$

Du fait de la relation précédente, si l'on remplace X par N dans cette expression, il restera seulement

$$N_n = \alpha_n N + \beta_n Id_2,$$

qui est la relation cherchée, avec $a_n = \alpha_n$, et $b_n = \beta_n$. Pour effectuer la division euclidienne, on remplace successivement X par -1 et par 2 dans l'égalité, ce qui conduit à

$$\begin{cases} (-1)^n = -\alpha_n + \beta_n \\ 2^n = 2\alpha_n + \beta_n \end{cases}$$

puis à

$$\begin{cases} \alpha_n = \dfrac{1}{3}\left[2^n - (-1)^n\right] \\ \beta_n = \dfrac{1}{3}\left[2^n + 2(-1)^n\right] \end{cases}$$

On en déduit

$$M^n = \frac{1}{3}\left[2^n - (-1)^n\right]M + \frac{1}{3}\left[2^n + 2(-1)^n\right]Id_3$$

et $$N^n = \frac{1}{3}\left[2^n - (-1)^n\right]N + \frac{1}{3}\left[2^n + 2(-1)^n\right]Id_2$$

A noter que la recherche d'une relation de récurrence entre les a_n et les b_n ne fournit pas une troisième méthode : la relation de récurrence s'écrit en effet

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$$

En termes de matrices, c'est justement la relation de récurrence de la matrice N.

5.

(1) ☐
(2) ■
(3) ☐
(4) ☐
(5) ☐

Désignons respectivement par e_n et c_n le nombre d'habitants de la ville considérée ayant un emploi à la date n, et le nombre de ceux qui , à cette date, cherchent un emploi. Les deux règles d'évolution se traduisent par les équations suivantes :

$$\begin{cases} e_{n+1} = 0{,}9\ e_n + 0{,}6\ c_n \\ c_{n+1} = 0{,}1\ e_n + 0{,}4\ c_n \end{cases}$$

En termes de matrices, si l'on pose $X_n = \begin{pmatrix} e_n \\ c_n \end{pmatrix}$, et $A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$, ces deux équations s'écrivent $X_{n+1} = A\,X_n$. On peut donc déduire facilement la situation à la date n de celle à l'instant 0, par la formule $X_n = A^n X_0$. Le vecteur X_0 est donné par les conditions initiales : $X_0 = \begin{pmatrix} 7.000 \\ 3.000 \end{pmatrix}$. Pour calculer A^n, on peut chercher les valeurs propres de A. Les valeurs propres sont 3/10 et 1, et des vecteurs propres associés sont respectivement $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. En posant $P = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient $P^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, d'où

$$A^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 + (0{,}3)^n & 6 - 6\times(0{,}3)^n \\ 1 - (0{,}3)^n & 1 + 6\times(0{,}3)^n \end{pmatrix}$$

Lorsque n tend vers ∞, A^n tend vers $A^\infty = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Le nombre des chômeurs tend donc aussi vers une limite,

$$\begin{aligned} A^\infty X_0 &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7.000 \\ 3.000 \end{pmatrix} \\ &= \frac{10.000}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 8571 \\ 1429 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On remarquera que la limite est colinéaire au vecteur propre associé à la valeur propre 1. C'est tout à fait général : la matrice A est une matrice de Markov régulière, c'est-à-dire une matrice à coefficients positifs, tels que la somme des termes sur chaque colonne vaille 1, et que les termes d'une puissance de la matrice soient strictement positifs. Pour une telle matrice, 1 est toujours valeur propre, et les suites de la forme $(A^n X_0)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un vecteur dépendant de X_0, mais colinéaire au vecteur propre associé à la valeur propre 1 (on parle de propriété *ergodique*).

Comme X_0 et A^n ont des coefficients strictement positifs, il est impossible que des $X_n$aient des coefficients nuls, ou strictement négatifs.

Les modèles linéaires sont utilisés depuis longtemps en économie, justement parce qu'on peut, dans une certaine mesure résoudre explicitement les équations. Avec l'augmentation de puissance des ordinateurs, il est devenu possible de procéder à des simulations sur de nombreuses variables dont certaines sont reliées par des équations non linéaires. Un exemple de modèle essentiellement linéaire est le "Mini-DMS" utilisé depuis 1978 par l'INSEE pour ses prévisions à long terme ; comme dans la question, il est annuel ; mais il comporte 190 équations, et 108 variables exogènes !

6.

(1) ■
(2) ■
(3) ■
(4) □
(5) ■

Les assertions (1) et (2) sont de simples vérifications. Elles permettent d'établir les relations proposées en (3) et en (5). En effet, grâce à (1) et à (2), on peut écrire

$$\begin{aligned}(A\otimes B)(u\otimes v) &= (Au)\otimes(Bv)\\ &= \lambda u\otimes \mu v\\ &= (\lambda\mu)(u\otimes v)\end{aligned}$$

et

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$
\begin{aligned}
C(u\otimes v) &= (A\otimes Id_n + Id_m\otimes B)(u\otimes v)\\
&= (A\otimes Id_n)(u\otimes v) + (Id_m\otimes B)(u\otimes v)\\
&= (Au)\otimes(Id_n v) + (Id_m u)\otimes(Bv)\\
&= (\lambda u)\otimes v + u\otimes(\mu v)\\
&= \lambda(u\otimes v) + \mu(u\otimes v)\\
&= (\lambda+\mu)(u\otimes v)
\end{aligned}
$$

Ces deux formules montrent que le produit et la somme de deux nombres algébriques sont aussi des nombres algébriques. Rappelons qu'un nombre est dit *algébrique* s'il existe un polynôme à coefficients entiers dont ce nombre est une racine. Cela équivaut à dire que ce nombre est valeur propre d'une matrice carrée à coefficients entiers : si α est racine de

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0,$$

il est valeur propre de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

7.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) ■

Une ***matrice*** carrée M d'ordre n est ***diagonalisable*** si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ soit une matrice diagonale. Un ***endomorphisme*** est dit ***diagonalisable*** s'il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonalisable. Dans ce cas, la matrice de f est diagonalisable quelle que

■ ***Réponse correcte***
□ ***Réponse fausse***

soit la base considérée. Cela étant, identifions pour simplifier l'espace à $\mathbb{R}^n$, fixons une base, et considérons une matrice M, et f, l'endomorphisme associé de $\mathbb{R}^n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est diagonalisable.
- M est diagonalisable.
- Il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.
- $\mathbb{R}^n$ est somme directe des sous-espaces propres de f.
- La somme des dimension des sous-espaces propres de f est égale à n.

En outre, si M admet n valeurs propres distinctes, la dernière condition est vérifiée, et alors M est diagonalisable.

8.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) □

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice carrée.

C'est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes, qui représente donc une application d'un espace de dimension 4 vers un espace de dimension 3. Elle ne peut représenter une application d'un espace dans lui-même. Une matrice est dite diagonalisable s'il existe une base de l'espace dans laquelle l'application linéaire est représentée par une matrice qui est diagonale. Il faut, pour que ceci ait un sens, que l'espace de départ soit égal à l'espace d'arrivée, et que l'on prenne la même base sur l'espace considéré à la fois comme espace de départ, et comme espace d'arrivée.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de valeur propre sur $\mathbb{R}$. Elle ne saurait donc pas être diagonalisable (c'est une matrice de rotation, d'angle $-\frac{\pi}{2}$; aucun vecteur du plan ne garde la même direction quand on lui applique la matrice).

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a ses coefficients non nuls placés sur une diagonale, mais pas sur la bonne diagonale, pour que l'on puisse dire directement qu'elle est diagonalisable (d'ailleurs, l'exemple précédent montre que le raisonnement serait faux). La matrice étant simple, il est plus rapide d'interpréter l'application linéaire associée. C'est une matrice de permutation, $e_1 \mapsto e_4 \mapsto e_1$, $e_2 \mapsto e_3 \mapsto e_2$. Dans le plan $(e_1;e_4)$, on reconnaît une matrice de symétrie, par rapport à $e_1 + e_4$, dans la direction de $e_1 - e_4$. Les valeurs propres sont donc -1 et 1, et les vecteurs propres associés sont $e_1 - e_4$ et $e_1 + e_4$. De même dans le plan $(e_2;e_3)$. Ainsi, on a quatre vecteurs propres indépendants pour une matrice de taille 4 ; cette matrice est diagonalisable.

La matrice $\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ 1-a-b & 1-a-b & 1-a-b \end{pmatrix}$ est de rang 1. Son noyau est donc de dimension 2, ce qui fait un sous-espace propre de dimension 2 pour la valeur propre 0. Ce sous-espace est engendré par $e_1 - e_3$ et $e_2 - e_3$. Le

■ ***Réponse correcte***
□ ***Réponse fausse***

dernier vecteur propre est forcément dans l'image ; aussi $a\,e_1 + b\,e_2 + (1-a-b)\,e_3$ est-il vecteur propre pour la valeur propre 1. En fin de compte, on a trouvé trois vecteurs propres indépendants ; la matrice est diagonalisable.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire. Ses valeurs propres sont sur la diagonale, et il n'y a que des 1. Si cette matrice était diagonalisable, la matrice obtenue serait l'identité. Comme l'application identique a la même matrice dans toutes les bases, si la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ était diagonalisable, elle serait égale à l'identité. Ce n'est pas le cas, et elle n'est pas diagonalisable.

9.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) □

Si l'on désigne par l_n le nombre de lapins l'année n, et par f_n le nombre de fouines l'année n, les hypothèses se traduisent par le système linéaire

$$\begin{cases} l_{n+1} = 4l_n - 2f_n \\ f_{n+1} = l_n + f_n \end{cases}$$

qui s'écrit, en termes de matrices,

$$\begin{pmatrix} l_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

soit

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$\begin{pmatrix} l_n \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc de calculer $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$. Pour cela, on diagonalise la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La résolution du système des valeurs propres montre que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres, pour les valeurs propres 2 et 3. Si $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = S^{-1}AS$, puis

$A^n = \left(SDS^{-1}\right)^n = SD^nS^{-1}$, et enfin

$$\begin{pmatrix} l_n \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180\times 3^n & -80\times 2^n \\ 90\times 3^n & -80\times 2^n \end{pmatrix}$$

Pour n grand, le terme dominant sera 180×3^n pour les lapins, et 90×3^n pour les fouines, de sorte qu'asymptotiquement, il y aura deux fois plus de lapins que de fouines.

10.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) □
(5) □

En remplaçant toutes les lettres d'un mot, disons x, par $1-x$, on voit que le nombre des mots se terminant par 0 est égal au nombre de mots se terminant par 4. De même, le nombre de mots se terminant par 1 est égal au nombre de mots se terminant par 3. Ainsi trouve-t-on la première formule de récurrence :

$$w_n = 2a_n + 2b_n + c_n \, .$$

■ ***Réponse correcte***
□ ***Réponse fausse***

Si la dernière lettre d'un mot est un 0, l'avant dernière est forcément un 1 ; en outre, deux mots de $n+1$ lettres se terminant par un 0 diffèrent si et seulement s'ils diffèrent dans les $n-1$ premières. On a donc $a_{n+1} = b_n$. De même, un mot de $n+1$ lettres se termine par un 1 si et seulement si la n-ième lettre est 0 ou un 2, et deux mots distincts de n lettres se terminant par un 0 ou un 2 donnent des mots de $n+1$ lettres différents lorsqu'on les prolonge par un 1 en $(n+1)$-ième position. On en déduit la relation de récurrence $b_{n+1} = a_n + c_n$. De même, si la $(n+1)$-ième lettre d'un mot est un 2, l'avant dernière est un 1 ou un 3, et deux mots de n lettres différents donnent, lorsqu'on les complète d'une lettre des mots encore différents. Ainsi, $c_{n+1} = 2b_n$.

Partant des trois relations de récurrence

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + c_n \\ c_{n+1} = 2b_n \end{cases},$$

on montre la relation

$$b_{n+1} = b_{n-1} + 2\,b_{n-1} = 3\,b_{n-1},$$

qui, jointe aux conditions initiales $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, donne

$$b_{2k+1} = 3^k, \quad b_{2k} = 2 \times 3^{k-1}.$$

On en déduit w_n :

$$\begin{aligned} w_n &= 2\,a_n + 2\,b_n + c_n = 2\,b_{n-1} + 2\,b_n + 2\,b_{n-1} \\ &= 4\,b_{n-1} + 2\,b_n \end{aligned}$$

soit

$$w_{2n+1} = 14 \times 3^{n-1}, \quad w_{2n} = 8 \times 3^{n-1}.$$

Résultats du QCM n°8
Statistiques descriptives

(Questions p. 60)

Vocabulaire
Population, caractères et variables

▶ En statistique, on étudie (on dit qu'on "observe") des ensembles "nombreux", que l'on appelle ***population***. Les éléments d'une population sont appelés des ***individus***. On décrit ces individus, et on les classe en sous-ensembles de la population.

▶ Une partition en sous-ensembles est appelée ***caractère*** (exemples : état matrimonial, taille). Les critères servant à déterminer les sous-ensembles sont appelés ***modalités*** (exemple : "marié", "célibataire", "veuf-ou-divorcé" sont des modalités du caractère "état matrimonial"). Afin que les partitions soient cohérentes, les modalités doivent être

— *incompatibles* (l'intersection de deux sous-ensembles doit être vide),

— *exhaustives* (la réunion de tous les sous-ensembles doit être égale à la population entière),

— *sans ambiguïté* (on doit pouvoir placer tout individu dans un sous-ensemble bien déterminé).

Un caractère est dit ***qualitatif*** lorsque son observation ne peut être traduite par une mesure (exemples : le sexe, la profession) ; il est dit ***quantititif*** si ses modalités sont mesurables ; il est alors ***discret*** si ses modalités sont des nombres isolés, généralement entiers (exemple : nombre d'enfants), continu si ses modalités sont des réels ou des entiers en très grand nombre (exemple : taille, salaire).

▶ La fonction associant à un individu une modalité est une ***variable statistique***. On identifie souvent modalité et variable statistique.

▶ Les variables statistiques continues sont souvent regroupées en ***classes*** (exemple : revenu mensuel compris entre 12.000 et 13.000F) ; la longueur de l'intervalle choisi est appelée ***amplitude*** (ne pas oublier de préciser si l'intervalle est semi-ouvert à gauche ou à droite, pour éviter les problèmes aux bornes).

1.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) □
(5) ■

Faute d'informations détaillées sur l'étude, on doit considérer que la population est formée par les étudiants interrogés. La variable observée ne peut prendre que deux valeurs, "favorable" ou "défavorable". C'est une variable qualitative nominale.

2.

(1) ■
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) ■

Le premier diagramme est un histogramme simple, droit. Le second est renversé. Les histogrammes renversés sont utilisés en particulier pour représenter la pyramide des âges, l'un des côtés représentant alors les hommmes, l'autre les femmes. La figure (5) présente les données dans un diagramme à secteurs, circulaire. On notera que le secteur des 18 ans et plus, dont l'importance relative est faible est pratiquement invisible.

Dans les figures (3) et (4), les données ont été renversées : 18 ans et plus correspond en fait à 12 ans et moins, 17 ans correspond à 13 ans etc. Dans la figure (3), les barres de l'histogramme ont été espacées, et on leur a donné un aspect tridimensionnel.

3.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) □

• La classe modale d'un tableau est celle qui correspond à la fréquence maximale. Pour déterminer cette classe, il convient donc de corriger le tableau par la taille des classes : si une classe est d'amplitude $n \times a$ (a constante de normalisation, identique pour tout le tableau), la fréquence corrigée de la classe i est fi/n, où fi est l'effectif initial de la classe. La classe modale est cele

---

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

qui maximise fi/n. On effectue ce calcul simplement en complétant le tableau de la manière suivante :

Taille des lycées en 1989-1990				
Classe	**% dans l'ensemble des lycées**	**Amplitude de la classe (×100)**	**Facteur de correction**	**Fréquence relative**
moins de 300	5,0	3	1/3	1,66
de 300 à 399	3,9	1	1	3,9
de 400 à 499	4,8	1	1	4,8
de 500 à 599	5,2	1	1	5,2
de 600 à 699	6,8	1	1	6,8
de 700 à 899	13,7	2	1/2	6,85
de 900 à 1499	36,5	6	1/6	6,08
de 1500 à 3999	24,1	25	1/25	0,96

On voit ainsi que la classe modale est [700;899].

• La classe médiane d'un tableau est celle qui contient la médiane ; la médiane d'un tableau est la valeur qui partage la série en deux sous-ensembles égaux. La détermination de la classe médiane se fait simplement à partir du tableau, en calculant les effectifs cumulés. Si x_i est l'effectif de la classe i, l'effectif cumulé de la classe i est $F_i = \sum_{j \leq i} x_j$. Dans le cas où les effectifs sont exprimés en pourcentages, la classe médiane est la première qui vérifie $fi \geq 50$.

Taille des lycées en 1989-1990		
Classe	**% dans l'ensemble des lycées**	**Effectif cumulé**
moins de 300	5,0	5,0
de 300 à 399	3,9	8,9
de 400 à 499	4,8	13,7
de 500 à 599	5,2	18,9
de 600 à 699	6,8	25,7
de 700 à 899	13,7	39,4
de 900 à 1499	36,5	75,9
de 1500 à 3999	24,1	100

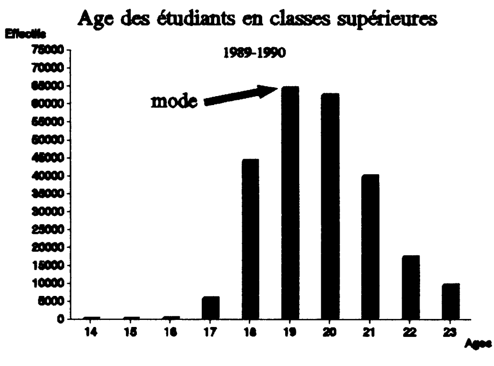
• Pour découper un intervalle en quatre parties, il ne faut pas 4 points, mais 3. Il n'y a donc pas quatre quartiles, mais 3 (et de même, il y a 9 déciles, et 99 centiles). Les quartiles sont en effet les valeurs qui découpent la population en quatre parties égales ; et les classes quartiles sont celles qui contiennent les quartiles. Cela étant, la détermination des quartiles se fait comme celle de la médiane, en considérant les effectifs cumulés. Lorsque les effectifs sont exprimés en pourcentages, les classes quartiles sont les premières dont les effectifs cumulés dépassent respectivement 25%, 50% et 75%.

Taille des collèges en 1989-1990		
Classe	**% dans l'ensemble des lycées**	**Effectif cumulé**
moins de 300	19,1	19,1
de 300 à 399	13,6	32,7
de 400 à 499	16,1	48,8
de 500 à 599	16,5	65,3
de 600 à 699	13,3	78,6
de 700 à 899	16,4	95
de 900 à 1499	5,0	100

Les trois classes quartiles sont donc [300;399], [500;599] et [600;699].

4.

(1) ■
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) ■



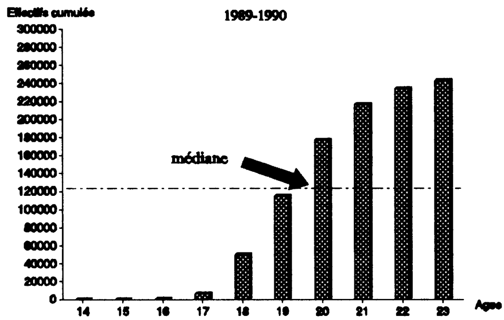
L'histogramme (ici à barres séparées avec effet tridimensionnel) est correct. Comme les classes

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

correspondent exactement à une année, on lit directement le mode sur cet histogramme, en considérant la barre la plus haute.

La médiane peut également se lire sur un histogramme, mais cette fois-ci sur l'histogramme des valeurs cumulées.

Age des étudiants en classes supérieures des lycées



Pour calculer la moyenne, il faut effectuer plus de calculs. Si x_i est l'effectif de la tranche d'âge i, la moyenne m est donnée par

$$m = \frac{\sum_{i=14}^{23} i\, x_i}{\sum_{i=14}^{23} x_i}$$

Après calculs, on obtient $m = 19{,}7$.

5.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) □

• Les règles régissant les moyennes arithmétiques sont celles des barycentres. Si $n = p$, la moyenne arithmétique de la séquence concaténée $((x_i)_{1\le i\le n}\,;(y_j)_{1\le j\le p})$ est effectivement égale à $\dfrac{\overline{x}+\overline{y}}{2}$.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Dans le cas général, la moyenne arithmétique de $((x_i)_{1\le i\le n}\,;(y_j)_{1\le j\le p})$ est donné par $\dfrac{n\overline{x}+p\overline{y}}{n+p}$.

- La relation $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)=0$ est évidente :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right) &= \left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]-n\,\overline{x}\\ &= \left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]-n\,\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\\ &= 0\end{aligned}$$

- Pour tout entier $p\geq 2$, considérons la fonction $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\mapsto\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^p$. C'est un polynôme de degré p, et lorsque p est impair, son image est $\mathbb{R}$ tout entier. Dans ce cas, il n'existe donc pas de minimum. Cela montre que l'assertion (5) est fausse. En ce qui concerne la somme des carrés des écarts à la moyenne, en tant que somme de carrés, c'est une somme de réels positifs. Elle ne peut être nulle que si tous les nombres de la somme le sont. Ce n'est en général pas le cas, et l'assertion (3) est fausse.

- Enfin, la fonction

$$a\mapsto\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2 = n\,a^2-2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a+\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

est un trinôme du second degré dont le coefficient du terme de second degré est positif. C'est donc une fonction convexe décroissante puis croissante, dont le minimum est atteint en $\overline{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$.

6.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) □

Il est clair que la fonction f ne dépend pas de l'ordre des x_i sur $\mathbb{R}$. Quitte à changer les indices, on peut donc supposer qu'ils sont classés par ordre croissant. Cela étant, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, et tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|t - x_i| = \begin{cases} x_i - t \text{ si } t \leq x_i \\ t - x_i \text{ si } t \geq x_i \end{cases}$$

Par suite, si p est le nombre de x_i inférieurs à t, on a

$$f(t) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{p} (t - x_i) + \sum_{i=p+1}^{n} (x_i - t)\right]$$
$$= \frac{1}{n}\left[(2p - n)t + \sum_{i=p+1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{p} x_i\right]$$

La fonction f est continue et affine par morceaux. La pente des morceaux étant croissante, f est une fonction convexe ; comme en outre, f admet comme limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$, elle admet un minimum sur $\mathbb{R}$. Affine par morceaux, et continue, f est dérivable à gauche et à droite en tout point. En un minimum, la dérivée à gauche est négative, et la dérivée à droite est positive (Attention : si l'on ne précise pas, négatif signifie inférieur ou égal à 0, et positif signifie supérieur ou égal à 0), et puisque la fonction est convexe, cette condition caractérise les minimums. Ces points sont donc les réels t tels que le nombre de x_i inférieurs à t soit égal au nombre de ceux supérieurs à t. Deux cas se présentent donc :

— ou bien n est pair, $n = 2k$, et l'ensemble des minimums de f est l'intervalle $[x_k ; x_{k+1}]$ des médianes de la séquence,
— ou bien n est impair, $n = 2k+1$, et alors l'ensemble des minimums de f est réduit à $\{x_{k+1}\}$, l'unique médiane de la séquence.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Bref, dans tous les cas, ce sont les médianes de la séquence qui minimisent la fonction d'écart absolu.

La moyenne n'a pas de propriété très remarquable vis à vis de la fonction d'écart absolue. En revanche, la moyenne annule la fonction d'écart algébrique, définie par $f(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - t)$.

7.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ☐
(4) ☐
(5) ■

La fonction d'écart quadratique de la séquence $(x_i)_{1 \le i \le n}$, définie par $f(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t - x_i)^2$ est un trinome du second degré. On peut en effet écrire

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t - x_i)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t^2 - 2x_i t + x_i^2\right) \\ &= t^2 - 2t\bar{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}$$

Le coefficient de t^2 étant positif, ce trinome a un unique minimum, à savoir $\bar{x}$. Il ne saurait être constant sur aucun intervalle non réduit à un point. Si $n > 1$, et si les x_i ne sont pas tous égaux, $f(t)$ est une somme de termes positifs non tous nuls ; une telle somme ne peut s'annuler. On peut aussi le vérifier en calculant $f(\bar{x})$.

La médiane n'a pas de propriété très remarquable vis à vis de la fonction d'écart quadratique.

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

Données non groupées — Le formulaire

Lorsque les données de deux variables observées sur une population ne sont pas groupées, voici un résumé des formules générales qui doivent être utilisées : on désigne par n le nombre d'observations de deux variables X et Y, par x_i et y_i les observations conjointes de X et de Y pour un même individu i, $1 \leq i \leq n$.

- Moyenne de X : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
- Variance de X :

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{X}^2$$

- Ecart-type de X :

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

- Covariance de X et de Y :

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{X}\,\bar{Y}$$

- Coefficient de corrélation de X et de Y :

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

De même pour Y.
La droite de régression de Y en X a pour équation

$$y - \bar{Y} = \frac{\sigma_{XY}}{V(X)}\left(x - \bar{X}\right)$$

La droite de régression de X en Y a pour équation

$$x - \bar{X} = \frac{\sigma_{XY}}{V(Y)}\left(y - \bar{Y}\right)$$

8.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) □
(5) □

Le tableau propose les données de l'échantillon sous forme non groupée.

La distribution marginale de X n'est pas l'énumération des valeurs prises par cette variable ; c'est la correspondance entre les valeurs prises, et le nombre de fois où ces valeurs ont été prises. On exprime cette distribution dans un tableau de deux lignes où la première donne les valeurs prises par X, ordonnées par ordre croissant, et où la deuxième ligne donne, pour chaque valeur prise par X, le nombre de fois où cette valeur a été prise (ici, en raison de la longueur de la ligne, les deux lignes ont été découpées : la ligne 3 est la suite de la ligne 1, tandis que la ligne 4 fait suite à la ligne 2).

x_i	96	176	192	224	240	256
n_i	1	2	2	1	1	2
x_i	264	272	288	320	380	
n_i	1	1	1	2	1	

En appliquant les formules de l'encadré de la page 209, on voit que les moyennes de X et de Y valent respectivement 243,466 et 122,866, que les variances de X et de Y valent respectivement 4695,182 et 567,9822, que leur covariance vaut 1460,996, et que leur coefficient de corrélation vaut 0,8946. Ainsi, le coefficiant de corrélation de X et de Y est bien celui qui est proposé dans l'assertion (3), tandis que les équations des droites de régression ont été inversées : Une approximation numérique d'une équation de la droite de régression de Y en X est

---

■ *Réponse correcte*

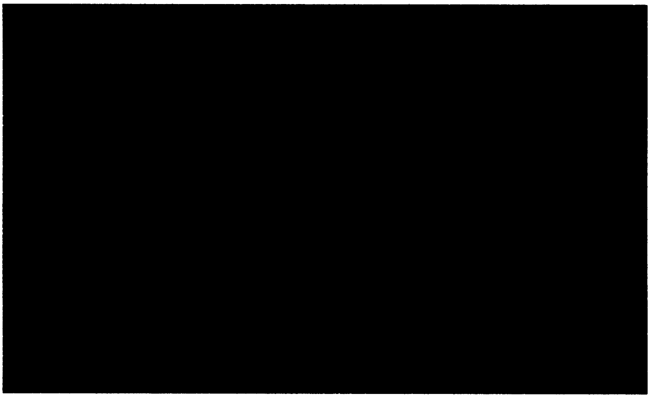
□ *Réponse fausse*

$$y - 122{,}866 = \left(\frac{1460{,}996}{4695{,}182}\right) \times \left(x - 243{,}466\right),$$

tandis qu'une approximation numérique d'une équation de la droite de régression de X en Y est

$$x - 243{,}466 = \left(\frac{1460{,}996}{567{,}982}\right) \times \left(y - 122{,}866\right)$$

Voici un graphique regroupant ces deux droites, et le nuage de points



9.

(1) □
(2) □ Un ajustement linéaire d'une fonction revient à approcher son graphe par une droite.

(3) ■
(4) □
(5) □ Pour un ajustement logarithmique, on approche son graphe par celui d'une fonction logarithmique, donc d'une fonction concave, à croissance lente (cas d'une fonction croissante). Approcher f par une fonction de la forme $x \mapsto a\ln(x) + b$ revient à approcher le graphe de f par une droite, dans une échelle semi-logarithmique, logarithmique en x et arithmétique en y.

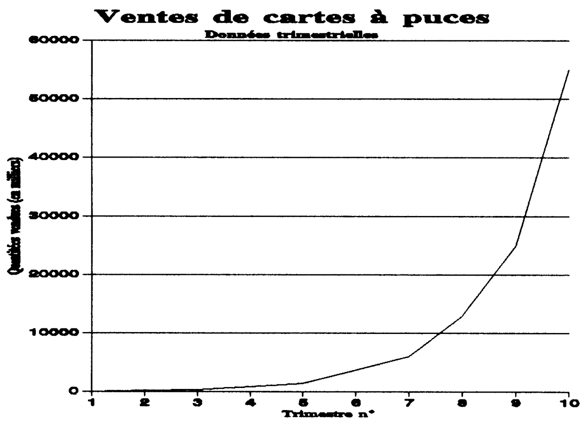
■ *Réponse correcte*

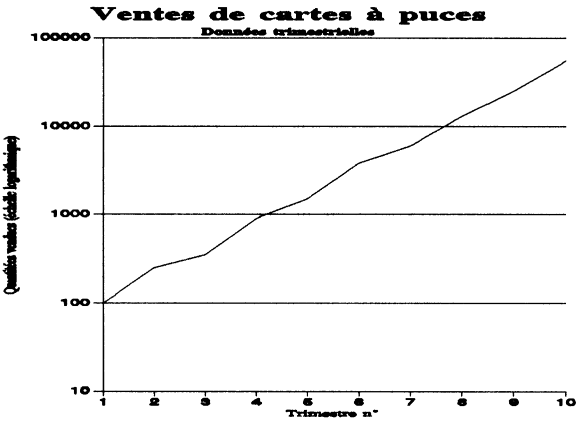
□ *Réponse fausse*

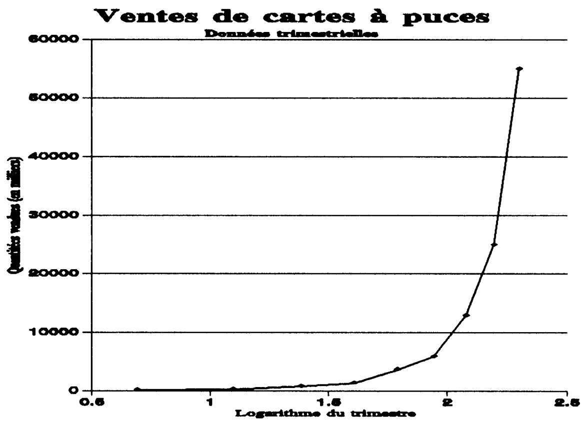
Pour un ajustement exponentiel, on approche le graphe de f par celui d'une fonction exponentielle, donc d'une fonction convexe, à croissance très rapide (cas d'une fonction croissante ; pour les fonctions décroissantes, la décroissance est très rapide). Approcher f par une fonction de la forme $x \mapsto b\ a^x$ revient à approcher le graphe de f par une droite, dans une échelle semi-logarithmique, logarithmique en y et arithmétique en x.

Pour un ajustement en puissance, on approche le graphe de f par celui d'une fonction puissance, donc d'une fonction convexe, à croissance assez rapide (cas d'une fonction croissante ; pour les fonctions décroissantes, la décroissance est assez rapide). Si $g(x) = a\ x^n$, on a $\ln(g(x)) = n \ln(x) + \ln a$. Aussi approcher f par une fonction de la forme $x \mapsto a\ x^n$ revient-il à approcher le graphe de f par une droite, dans une échelle logarithmique.

Dans l'exemple des ventes de cartes à puce, on détermine quel type d'approximation de f est légitime en traçant les quatre graphes de f, dans les différents types d'échelles. Voici ce que l'on obtient :





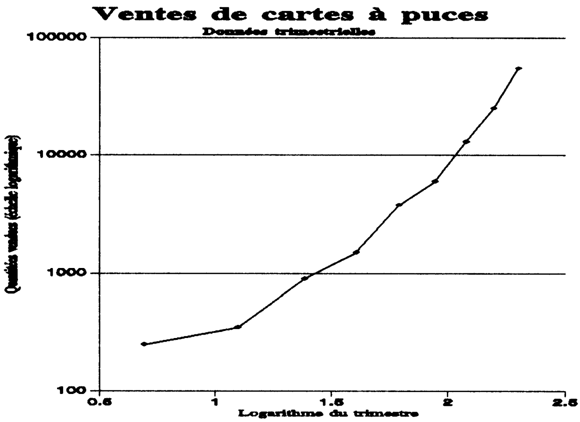


La comparaison des quatre graphes montre que l'approximation la plus raisonnable est exponentielle. Pour la calculer, on évalue l'approximation par la méthode des moindres carrés de $\ln f$. En effet, l'égalité $f(x) \approx b\ a^x$ se traduit par

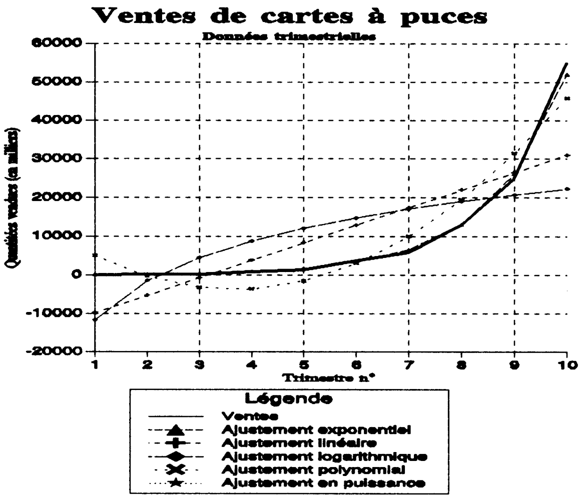
$$\ln(f(x)) \approx x \ln(a) + \ln b.$$

Numériquement, on obtient $\ln(f(x)) \approx 0{,}6891x + 3{,}9652$, puis $f(x) \approx (52{,}735)(1{,}992)^x$.

Voici un graphe permettant de comparer les différents ajustements de la courbe f que l'on peut ainsi définir. Comme on le voit, le meilleur est bien l'ajustement exponentiel.



Ventes de cartes à puces
Données trimestrielles
Quantités vendues (échelle logarithmique)
100000
10000
1000
100
0.5
1
1.5
2
2.5
Logarithme du trimestre



Ventes de cartes à puces
Données trimestrielles
Quantités vendues (en milliers)
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
-10000
-20000
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Trimestre n°
Légende
Ventes
Ajustement exponentiel
Ajustement linéaire
Ajustement logarithmique
Ajustement polynomial
Ajustement en puissance

Courbe de Gini d'une distribution statistique

Les notions de courbes de concentration et d'indice de Gini ont été introduites par l'italien Corrado Gini à l'occasion de ses travaux sur les disparités de revenus.

Soit $\{(x_k; n_k),\ 1 \leq k \leq p\}$ une distribution statistique où les x_k sont rangés par ordre croissant. On pose

$$n = \sum_{j=1}^{p} n_j \ ,$$

$$f_k = \frac{n_k}{n} \ ,$$

$$p_k = \sum_{j=1}^{k} f_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j$$

et

$$q_k = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j x_j}{\overline{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j x_j}{\sum_{j=1}^{p} n_j x_j}$$

On appelle ***courbe de Gini de la distribution***, ou ***courbe de concentration de la distribution***, le graphe de la fonction affine par morceaux associée à $p_k \mapsto q_k$, $1 \leq k \leq p$; on appelle cette fonction la ***fonction de Gini***. Autrement dit, la courbe de Gini est la courbe polygonale reliant les points $(p_k; q_k)$. Lorsque les données sont regroupées en classes, on remplace les x_k par les centres des classes.
La fonction de Gini est convexe, croissante, de 0 à 1 ; son graphe est toujours situé au-dessous de la diagonale. Cette diagonale correspond à une équirépartition de la distribution. L'aire comprise entre la diagonale et le graphe de la fonction de Gini est appelée ***aire de concentration***. On appelle ***indice de Gini*** de la distribution le double de l'aire de concentration. Cet indice est toujours compris entre 0 et 1. Plus il est proche de 1, plus la distribution est concentrée.

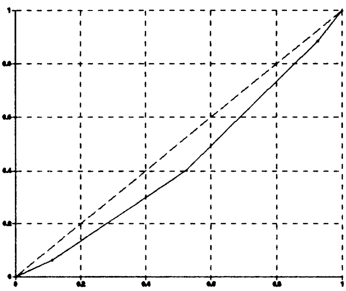
10.

(1) ☐
(2) ■
(3) ☐
(4) ☐
(5) ☐

Pour tracer la courbe de Gini de cette distribution, il est pratique de faire un tableau :

Classe	Centre de classe, c_k	Nombre d'actifs, n_k	f_k	p_k	q_k
[20;24]	22	2956	0.1118	0.118	0.0631
[25;39]	32	10933	0.4134	0.5251	0.4024
[40;54]	47	10571	0.3997	0.9248	0.8843
[55;65]	60	1989	0.0752	1	1

La courbe de Gini est la ligne polygonale passant par les points $(p_k;q_k)$. C'est le graphe d'une fonction convexe, croissante de 0 à 1 sur l'intervalle [0;1] ; ce graphe est en outre situé au-dessous de la diagonale. Le voici :



■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

Résultats du QCM n°9
Calculs de probabilités

(Questions p. 73)

1.

(1) ■
(2) ■
(3) ■
(4) ■
(5) ■

Eh bien oui, il y a plusieurs réponses possibles ; deux raisons pour cela :

— La question n'est pas assez précise pour que l'on puisse éliminer un choix, tant que l'on ne sait pas quel type de problème probabiliste on veut étudier sur le loto.

— Même quand le problème probabiliste est bien posé, il n'y a pas unicité de l'espace probabilisable pouvant servir de modèle.

Par exemple, si l'on ne considère qu'un tirage de 6 nombres, le premier ensemble peut servir de modèle lorsqu'on le munit d'une loi uniforme. Le second peut aussi être utilisé, mais avec une loi différente, attribuant par exemple la probabilité nulle à des 6-uplets comportant deux composantes identiques. Si l'on considère la succession des tirages du loto, les choix (3) ou (5) peuvent être utilisés. Et si l'on considère le numéro complémentaire, un modèle fondé sur des parties à 7 éléments peut être utilisé.

2.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) □
(5) □

Rappelons la définition d'une tribu : Si Ω est un ensemble, on appelle ***tribu de parties de*** Ω toute famille T de parties de Ω contenant Ω, stable par passage au complémentaire, et par réunion dénombrable. Autrement dit, T est une tribu si et seulement si

(i) $\quad \Omega \in T.$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

(*ii*) Pour tout $E \in T$, on a $E^c \in T$.

(*iii*) Pour toute suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de T, on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in T \, .$$

En raison de la propriété (*ii*), on peut de manière équivalente remplacer les conditions (*i*) et (*iii*) par

(*i'*) $\varnothing \in T$.

(*iii'*) Pour toute suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de T, on a

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in T \, .$$

► Cela étant, $E \cup T$ n'est pas une tribu de Ω, car $\varnothing \notin T$.

► En revanche, $E \cap T$ est une tribu de parties de E. C'est la ***tribu induite*** sur E par T. Si $E \neq \Omega$, ce n'est pas une tribu de parties de Ω, car $\Omega \notin E \cap T$.

► $T^c = T$, d'après la propriété (*ii*), et on a bien affaire à une tribu.

► $\varnothing \cup (E \cup T) \cup (E^c \cup T)$ n'est pas une tribu de parties de Ω, car ce n'est pas un ensemble stable par passage au complémentaire. A noter : la stabilité par passage au complémentaire est fonction de l'ensemble par rapport auquel on prend le complémentaire. Ici, il s'agit forcément de Ω, car l'ensemble de parties considéré contient E et E^c, donc aussi Ω, s'il s'agit d'une tribu.

► L'ensemble U des parties de Ω qui sont vides, ou bien contiennent E ou E^c n'est pas une tribu, car il n'est pas stable par passage au complémentaire. Si $E \cup A$ est un élément de U, différent de Ω et de E, alors $(E \cup A)^c = E^c \cap A$ n'appartient pas à U. En effet, c'est une partie non vide de Ω qui ne contient ni E ni E^c.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

3.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ■
(4) ■
(5) ■

Pour qu'une fonction $P\,\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définisse une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$, il faut et il suffit qu'elle soit à valeurs dans $[0;1]$, et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(n)$ converge et soit de somme égale à 1 (*i.e.* $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(n) = 1$).

► La première série, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$, diverge, et P_1 n'est pas une probabilité.

► La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est une primitive sur $[0;+\infty]$ de la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$. Rappelons qu'on dit qu'une fonction F est une primitive de f sur un intervalle fermé $[a;b]$ si F est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que, pour tout $x \in\,]a;b[$, $F'(x) = f(x)$; la fonction f n'a donc pas besoin d'être définie en a ni en b. On a donc bien

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} P_2(n) &= \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)2\pi+\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right]\left(x \mapsto \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) \\ &= \int_0^{+\infty}\left(x \mapsto \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) \\ &= \left.\frac{\sin x}{x}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

(noter l'interprétation de l'intégrale comme fonction) mais cette fois-ci

$$P_2(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x \mapsto \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) = \left.\frac{\sin x}{x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} - 1 < 0$$

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

ce qui montre que P_2 n'est pas à valeurs dans [0;1]. Ce n'est donc pas une probabilité.

► P_3 est la probabilité ***binomiale négative*** de paramètres p et α. Pour tout entier n, le signe de $(-\alpha)_n$ est celui de $(-1)^n$, de sorte que $P_3(n)$ est positif. On peut même réécrire $P_3(n)$ sous une autre forme :

$$\begin{aligned} P_3(n) &= p^\alpha \binom{-\alpha}{n} (-1)^n (1-p)^n \\ &= p^\alpha \binom{\alpha+n-1}{n} (1-p)^n \end{aligned}$$

Reste donc seulement à calculer la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P_3(n)$. On remarque d'abord que $\binom{-\alpha}{n}(-t)^n$ est le terme d'ordre n du développement de Taylor en 0 de $\dfrac{1}{(1-t)^\alpha}$. En transformant ce développement limité en série (*i.e.* en faisant tendre n vers ∞), on trouve

$$\frac{1}{(1-t)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} (-t)^n$$

En posant $t = 1 - p$, on obtient

$$\frac{1}{p^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} (-1)^n (1-p)^n$$

puis $\sum_{n\in\mathbb{N}} P_3(n) = 1$.

► Les probabilités P_4 et P_5 sont égales. Il s'agit de la probabilité hypergéométrique de paramètres N, m et n. L'égalité $P_4 = P_5$ est un simple calcul. Comme il est clair que l'on a $P_4 \geq 0$, il suffit de vérifier l'égalité $\sum_{k=0}^{N} P_4(k) = 1$. On peut procéder directement en

---

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

remarquant d'abord que $\binom{N}{n}$ est le coefficient de x^n dans le développement de $(1 + x)^N$ par la formule du binôme. En utilisant l'égalité

$$(1 + x)^N = (1 + x)^{N-m} (1 + x)^m,$$

on trouve l'égalité

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k} = \binom{N}{n}$$

qui est équivalente à $\sum_{k=0}^{N} P_4(k) = 1$.

Pour voir que P_4 est bien une probabilité, on peut en donner une interprétation : considérons une population de N objets parmi lesquels m sont de type I, et $N-m$ de type II. Alors, $P_4(k)$ est la probabilité pour que, dans un tirage aléatoire de n de ces N objets, il y en ait k qui soient de type I.

4.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) □
(5) ■

Il y a 5 événements E_1, ..., E_5, et 5 nombres a_1, ..., a_5. On pourrait penser que grâce à ces 5 nombres réels, on pourrait reconstituer les probabilités des E_i, et, plus généralement des 2^5 événements que l'on peut former à l'aide de ces événements élémentaires. Il n'en est rien, car les a_i sont symétriques par rapport aux E_i. Il est donc impossible de discerner les E_i entre eux ; les seuls événements dont on puisse espérer évaluer la probabilité sont des événements qui sont symétriques par rapport aux E_i. On peut par exemple calculer la probabilité

$$P\left(\left\{\omega : \sum_{k=1}^{5} \chi_{E_k}(\omega) = p\right\}\right)$$

mais pas $P(E_1)$.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Cela étant, détaillons le calcul des probabilités des événements des différentes assertions, en utilisant la *méthode des fonctions indicatrices.*
Notons f_k, $1 \leq k \leq 5$ la fonction associée aux réels a_k, modulo les fonctions caractéristiques des ensembles intervenant dans la définition de ces réels :

$$f_j(x) = \sum_{J \in P_j} \chi_{\left(\bigcap_{i \in J} E_i\right)}(x)$$

Ces fonctions permettent de reformuler le problème. Si $\omega \in \Omega$, et si l'on note j le nombre d'ensembles E_i auxquels ω appartient, on a $f_k(\omega) = 0$ si $j < k$, et

$f_k(\omega) = \binom{j}{k}$ si $j \geq k$.

- Exprimer $P\left(\bigcup_{i=1}^{5} E_i\right)$ en fonction des a_i revient à

exprimer $\chi_{\left(\bigcup_{i=1}^{5} E_i\right)}$ comme combinaison linéaire des χ_{E_i} .

En effet, l'événement dont on cherche la probabilité peut s'exprimer de différentes manières :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{5} E_i\right) &= P(\{\omega \in \Omega : \omega \in \text{ au moins un des } E_i\}) \\ &= P\left(\left\{\omega \in \Omega : \sum_{i=1}^{5} \chi_{E_i}(\omega) \geq 1\right\}\right) \end{aligned}$$

C'est pourquoi, si $\chi_{\left(\bigcup_{i=1}^{5} E_i\right)} = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \chi_{E_i}$, on a également

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{5} E_i\right) = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \, a_i$$

On est ainsi ramené à un système linéaire que l'on pourrait tenter de résoudre par la méthode du pivot :

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Le système étant triangulaire, c'est inutile, et l'on trouve directement

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_4 = \lambda_5 = 1$$

- De même, pour calculer

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \operatorname{card}\{i : \omega \in E_i\} = 2\right\}\right),$$

on résout le système linéaire

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ce qui conduit à

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \operatorname{card}\{i : \omega \in E_i\} = 2\right\}\right) = a_2 - 3a_3 + 6a_4 - 10a_5$$

- Pour calculer

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \operatorname{card}\{i : \omega \in E_i\} = 3\right\}\right),$$

on résout le système linéaire

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ce qui conduit à

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \operatorname{card}\{i : \omega \in E_i\} = 3\right\}\right) = a_3 - 4a_4 + 10a_5$$

- On trouve de même

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \operatorname{card}\{i : \omega \in E_i\} = 4\right\}\right) = a_4 - 5a_5$$

et bien sûr,

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \operatorname{card}\{i : \omega \in E_i\} = 5\right\}\right) = a_5 \;.$$

► Ces formules s'étendent à plus de 5 ensembles. Si l'on a n événements E_1, E_2, ..., E_n, et si l'on désigne par P_i l'ensemble des parties de $\{1, 2, ..., n\}$ ayant i éléments, par χ_{E_i} la fonction caractéristique (indicatrice) de E_i, et par a_i, le réel défini par

$$a_j = \sum_{J \in P_j} P\left(\bigcap_{i \in J} E_i\right) ,$$

on peut exprimer en fonction des a_i les probabilités d'événements symétriques par rapport aux E_i :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i$$

(C'est la *formule de* POINCARÉ)

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \operatorname{card}\{i : \omega \in E_i\} = j\right\}\right) = \sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} a_k$$

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \operatorname{card}\{i : \omega \in E_i\} \geq j\right\}\right) = \sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k-1}{j-1} a_k$$

■ ***Réponse correcte***
□ ***Réponse fausse***

(*Formules de K. JORDAN*)

5.

(1) ☐ (2) ☐ (3) ■ (4) ☐ (5) ☐

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A)$ P(B) $= P(A \cap B)$. Ici, en notant p la probabilité pour qu'une pièce donne face, $p = \frac{1}{2}$, on a :

$$P(A) = (1-p)^n + p^n$$
$$P(B) = n(1-p)p^{n-1} + p^n$$
$$P(A \cap B) = p^n$$

Soit, lorsque $p = \frac{1}{2}$,

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$P(B) = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

et
$$P(A)\ P(B) = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}.$$

Pour $n = 3$, on a

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B) = \frac{1}{8},$$

et pour $n \neq 3$,

$$P(A \cap B) \neq P(A)\ P(B).$$

Cette indépendance, fonction de n, va à l'encontre de l'idée intuitive d'indépendance selon laquelle deux événements A et B sont "indépendants s'ils ne sont pas reliés au niveau probabiliste". Ce paradoxe a été découvert en 1980 par Stenger, et étudié de manière plus générale par Gregorac et Meany en 1992. Ces derniers

---

■ *Réponse correcte*

☐ *Réponse fausse*

ont montré que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe une probabilité $p \in [0;1]$ telle que, si les pièces ont la probabilité p de donner face quand on les lance, alors les événements A et B sont indépendants. Si l'on fixe p et que le nombre de pièces varie, il y a au plus un cas d'indépendance.

6.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) □

Commençons par établir un tableau des différents cas ; nous verrons ensuite une solution plus formelle.

Voiture	A				B				C			
Premier Choix	A		B	C	A	B		C	A	B	C	
Porte ouverte	B	C	C	B	C	A	C	A	B	A	A	B
Proba. (en 1/18)	1	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	1
Change (P=perd G=gagne)	P	P	G	G	G	P	P	G	G	G	P	P
Garde (P=perd G=gagne)	G	G	P	P	P	G	G	P	P	P	G	G

Sur ce tableau, on voit qu'en changeant de porte, la probabilité de gagner est de $2/3$, tandis qu'elle n'est que de $1/3$ si l'on garde la même porte.

De manière plus formelle, notons d'abord que les trois portes sont équivalentes, de sorte qu'on peut se ramener au cas où l'on a choisi la porte A, et où la porte C a été ouverte par le présentateur. On suppose donc que le candidat a choisi la porte A. Soit V_i l'événement *la voiture se trouve derrière la porte i.* Clairement, on

■ ***Réponse correcte***
□ ***Réponse fausse***

a l'égalité $P(V_A) = P(V_B) = P(V_C) = \frac{1}{3}$. Soit O_C l'événement *l'animateur ouvre la porte C.* On a d'une part

$$\begin{aligned} P(O_C) &= P(O_C|\ V_A)\times P(V_A) + P(O_C|\ V_B)\times P(V_B) \\ &\qquad + P(O_C|\ V_C)\times P(V_C) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + 1\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et d'autre part

$$P(V_A|\ O_C) = \frac{P(V_A)\,P(O_C|\ V_A)}{P(O_C)},$$

et

$$P(V_B|\ O_C) = \frac{P(V_B)\,P(O_C|\ V_B)}{P(O_C)},$$

d'où, en remplaçant,

$$P(V_A|\ O_C) = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

et

$$P(V_B|\ O_C) = \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Une faute fréquente sur cet exercice consiste à supposer que le présentateur choisit au hasard la porte qu'il ouvre ; c'est faux : il ouvre toujours une porte derrière laquelle ne se trouve pas la voiture.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Une polémique récente a été engendrée par ce problème. Il est apparu en octobre 1990 dans la rubrique de MARILYN VOS SAVANT dans *Parade Magazine*. Dans cette rubrique, Mrs SAVANT, qui figure dans le *Guinnes Book of World Records Hall of Fame* comme étant l'être humain doté du plus haut QI, répond aux questions qui lui sont soumises. Sa première réponse au problème a été : «Le candidat peut choisir n'importe quelle porte au départ, mais il doit ensuite modifier son choix, car la première porte a une probabilité gagnante de 1/3, tandis que la seconde a une probabilité de 2/3.» Après cette première réponse, Mrs SAVANT a reçu un abondant courrier de protestations, mais elle a maintenu sa réponse dans le numéro de décembre 1990, où elle la justifie en publiant un tableau succinct des différents cas. La polémique s'est alors amplifiée, et a été reportée dans différents journaux mathématiques, car des mathématiciens professionnels se sont opposés sur la réponse, une bonne partie d'entre eux soutenant que les deux portes restant au moment du second choix ont chacune une probabilité de 1/2 d'être le bon choix. Après publication de différents articles dans des journaux mathématiques, la polémique est retombée, et la réponse de Mrs SAVANT est considérée comme correcte.

7.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) □

Notons d'abord que la situation décrite en (4) est impossible : c'est le joueur qui n'est pas au service qui décide selon quelle règle sera gagné le jeu. Ce joueur a donc forcémernt perdu le dernier échange. En outre, il est clair que le futur du jeu ne dépend que de son état présent, et non de la façon dont a évolué le jeu pour aboutir à son état présent (on parle de propriété *markovienne*).

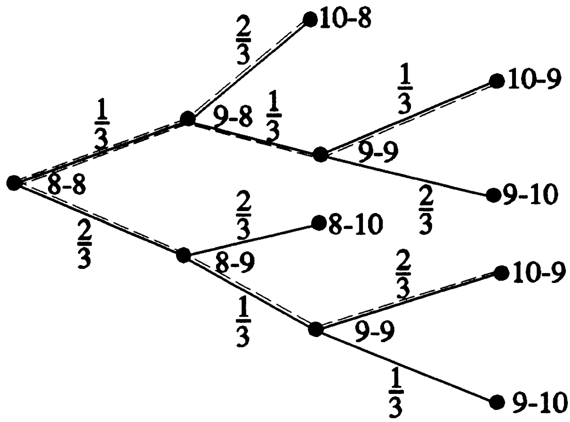
Calculons d'abord la probabilité qu'a le serveur de gagner le point pour lequel il va servir. Il gagne ce point si la séquence des échanges est G, ou PGG, ou PGPGG, ou PGPGPGG etc., où G désigne un échange qu'il gagne, et P un échange qu'il perd. La probabilité de la séquence G est $\frac{1}{2}$; celle de PGG est $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, celle

■ ***Réponse correcte***
□ ***Réponse fausse***

de PGPGG est $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ etc. finalement, la probabilité qu'a le joueur au service de gagner le point est

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

Ainsi, la probabilité qu'a le joueur qui n'est pas au service de gagner le point suivant est $\frac{1}{3}$. C'est la probabilité qu'il a de gagner le jeu s'il choisit le jeu gagnant en 9 point. Que se passe-t-il s'il "set" ? Dans ce cas, l'arbre des possibilités est le suivant



Les scores indiqués donnent en premier le nombre de points du joueur qui fait le choix (celui qui n'est pas au service au début). S'il "set", la probabilité qu'il gagne le jeu est

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{27}$$

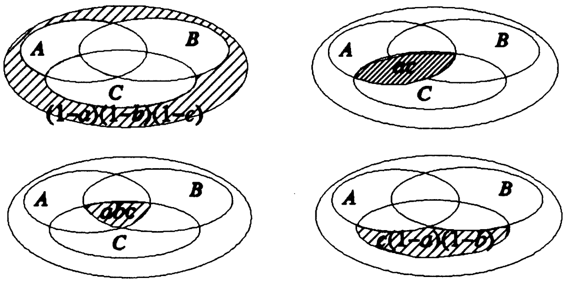
■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Le joueur a donc toujours intérêt à choisir le jeu en 10 points, c'est-à-dire à faire "set".

8.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) ■



L'indépendance des événements A, B et C est une relation forte. Elle implique que A^c, B^c, C^c sont indépendants, que A^c, B et C le sont également, etc. Par suite, on peut exprimer directement x, y et z en fonction de a, b et c.

$$\begin{aligned} x &= P(A^c \cap B^c \cap C^c) \\ &= (1-a)(1-b)(1-c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= P(A^c \cup B^c \cup C^c) \\ &= P((A \cap B \cap C)^c) \\ &= 1 - abc. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= P(C \cap A^c \cap B^c) \\ &= c(1-a)(1-b) \end{aligned}$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Partant de ces expressions, on peut éliminer partiellement a, b et c entre ces trois équations, pour exprimer ces nombres en fonctions de x, y et z.

La première équation fournit

$$1 - a = \frac{x}{(1-b)(1-c)}$$

ce qui conduit, en remplaçant dans l'expression de z, à

$$\begin{aligned} z &= c\,\frac{x}{(1-b)(1-c)}\,(1-b) \\ &= \frac{cx}{1-c} \end{aligned}$$

En inversant cette formule, on trouve l'expression de c :

$$c = \frac{z}{x+z}$$

En utilisant cette dernière expression dans la formule $y = 1 - abc$, on obtient

$$b = \frac{1-y}{ac} = \frac{1-y}{a} \times \frac{x+z}{z},$$

c'est-à-dire l'assertion (5).

A NOTER : On ne peut pas résoudre totalement le système donnant a, b et c en fonction de x, y et z. Il reste une certaine part d'indétermination. On peut par exemple établir que a et x, y et z sont liés par l'équation du second degré en z,

$$az^2 + \left[ax - (1-a)(a+y-1)\right]z + x(1-a)(1-y) = 0$$

Le discriminant de ce trinôme devant être positif, on a l'inégalité

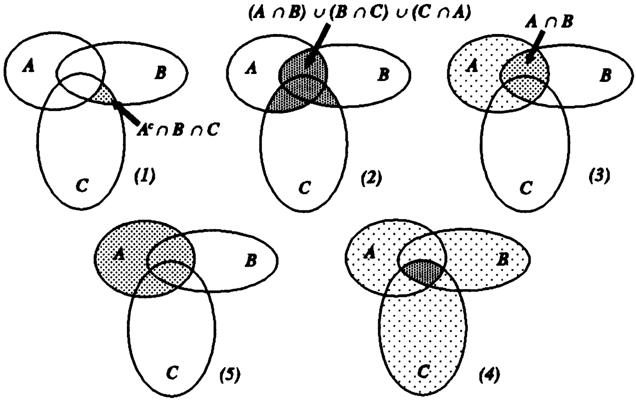
$$y > \frac{(1-a)^2 + ax}{1-a}$$

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

9.

(1) ■
(2) ■
(3) ■
(4) ■
(5) □



Tous ceux qui ont répondu que l'assertion (5) est exacte sont invités à reprendre à zéro leur cours de probabilités ; une probabilité est **toujours** comprise entre 0 et 1. Cela étant, les deux formules à connaître pour calculer les probabilités des assertions (1) à (5) sont

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

et
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

On obtient successivement

$$P(A^c \cap B \cap C) = P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$
$$= 0{,}2$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$\begin{aligned} P\big[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)\big] &= P(A\cap B) + P\big[(B\cap C)\cup(C\cap A)\big] - P(A\cap B\cap C) \\ &= P(A\cap B) + P(B\cap C) + P(C\cap A) - 2P(A\cap B\cap C) \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

$$P(A\cap B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = 0{,}5$$

$$P(A\cap B\cap C \mid A\cup B\cup C) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A\cup B\cup C)} = 0{,}1$$

car

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) &= P(A) + P(B\cup C) - P(A\cap(B\cup C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B\cap C) \\ &\quad - P\big((A\cap B)\cup(A\cap C)\big) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B\cap C) \\ &\quad - P(A\cap B) - P(A\cap C) + P(A\cap B\cap C) \\ &= 1 \end{aligned}$$

et enfin

$$P(A\cup B \mid A) = \frac{P((A\cup B)\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

10.

(1) ☐
(2) ■
(3) ☐
(4) ☐
(5) ☐

Supposons, pour fixer les idées, que Patricia ait choisi as et roi comme niveaux. fixons tout d'abord les emplacements des as ; ces emplacements étant choisis, ils définissent n emplacements voisins, avec $1 \leq n \leq 8$. Il y a $W(52;4;n)$ façons de le faire, où $W(N;P;n)$ a été défini dans la question précédente. Une fois les as placés, la question est : parmi les 48 cartes restant, y-a-t-il un roi dans l'un des n emplacements voisins des as déjà placés ? Pour qu'il n'y en ait pas, il faut placer les rois dans les $48 - n$ emplacements qui ne sont pas occupés par des as, ou voisins des as, ce qui revient à effectuer une injection de l'ensemble des rois dans un ensemble à $48 - n$ éléments ; cela peut se faire de $(48-n)_4 = \dfrac{(48-n)!}{(44-n)!}$ façons. Il y a bien sûr 4! façons de placer les 4 as dans les emplacements choisis, et 44! façons de placer les 44 cartes autrees que les as et les rois dans les emplacements qu'il leur reste. Bref, sachant qu'il y a 52! résultats possibles du battage de cartes, la probabilité pour que Patricia gagne le pari est de

$$\sum_{n=1}^{8} \frac{W(52;4;n)\ 4!\ 44!\ (48-n)!}{52!\ (48-n)!}$$

Numériquement, en calculant les $W(52;4;n)$ grâce aux formules de récurrence de la question précédente, on trouve que Patricia gagne le pari avec la probabilité 0,5137..., tandis que François gagne avec la probabilité 0,4862...

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

Résultats du QCM n°10
Variables aléatoires discrètes

(Questions p. 82)

1.

(1) ■
(2) ■
(3) ■
(4) □
(5) ■

Comme $(X;Y)$ ne peut prendre que les valeurs $(-1;0)$, $(0;-1)$, $(0;1)$ et $(1;0)$, il y a toujours soit X, soit Y qui est nulle. On a donc $XY = 0$, et bien sûr, $E(XY) = 0$. Cela étant, la loi de X, identique à la loi de Y, est définie par

$$P(X = -1) = \frac{1}{4} = P(X = 1)$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

On a donc

$$EX = \frac{1}{4} \times (-1) + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1 = 0$$

Il s'ensuit que l'on a $E(XY) = EX\, EY = 0$, et $\mathrm{Cov}(X;Y) = 0$. Pourtant, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes. En effet, on a

$$P(X = 0,\ Y = 0) = 0$$

et
$$P(X = 0) = P(Y = 0) = \frac{1}{2}$$

d'où

$$P(X = 0) \times P(Y = 0) = \frac{1}{4} \neq P(X = 0,\ Y = 0) = 0$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

2.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ☐
(4) ☐
(5) ■

Soit Y la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers au bout desquels apparaît un 6. Cette variable aléatoire donne le temps d'attente du premier succès dans une suite de Bernoulli, et sa loi est une loi géométrique de paramètre p,

$$P(Y=q) = p(1-p)^{q-1}, \quad q \in \mathbb{N}^* .$$

La variable aléatoire X vaut k, $1 \leq k \leq N$, si et seulement si Y vaut k, $N+k$, $N+2k$, $N+3k$, ... Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X=k) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Y=k+Ni) = \sum_{i=0}^{\infty} p(1-p)^{k+Ni-1} = \frac{p(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)^N}$$

3.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ☐
(4) ■
(5) ☐

Toutes les paires de boules ont la même probabilité d'être tirées. On a donc, pour tout couple $(i;j) \in \{1;2;\dots;n\}^2 \backslash \Delta$ (*i.e.* $i \neq j$),

$$P(A=i,\ B=j) = \frac{1}{n(n-1)} .$$

On en déduit la loi de $(X;Y)$:
Si $i < j$,

$$P\big((X;Y) = (i;j)\big) = P(A=i,\ B=j) + P(A=j,\ B=i) = \frac{2}{n(n-1)}$$

Pour avoir la loi de X, et celle de Y, on additionne respectivement en colonne et en ligne la loi de $(X;Y)$. Par exemple,

---

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

$$P(X=1) = \sum_{j=2}^{n} P\big((X;Y)=(i;j)\big) = \frac{2(n-1)}{n(n-1)},$$

et plus généralement,

$$P(X=i) = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}$$

pour tout $i \in \{1;2;\ldots;n-1\}$.

De même, pour tout $j \in \{2;3;\ldots;n\}$, on a

$$P(Y=j) = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}.$$

Si $n = 2$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. En effet, on a alors $X = 1$, et $Y = 2$, c'est-à-dire que les deux variables aléatoires sont constantes, donc indépendantes.

Si $n > 2$, la relation

$$P\big((X;Y)=(2;2)\big) = 0 \neq P(X=2) \times P(Y=2)$$

montre que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

4.

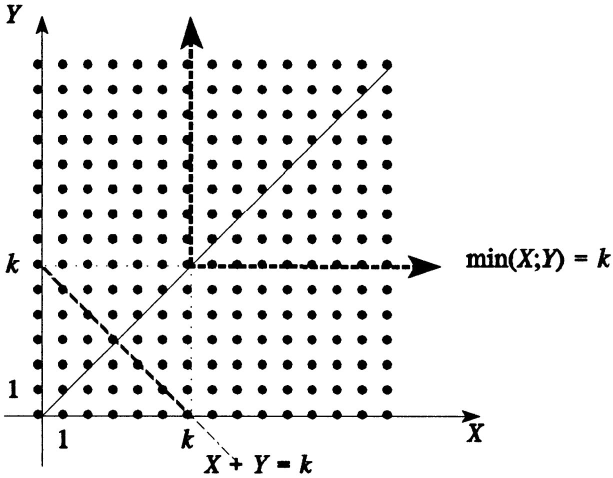
(1) □
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) □

Pour calculer la loi de $Z = \min(X;Y)$, on peut calculer $P(Z \geq k)$, pour tout entier $k \geq 0$. Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned} P(Z \geq k) &= P(\min(X;Y) \geq k) \\ &= P(X \geq k,\ Y \geq k) \\ &= P(X \geq k)\, P(Y \geq k) \end{aligned}$$

La probabilité $P(X \geq k)$ s'obtient à partir de la fonction de répartition d'une loi géométrique. On obtient

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*



$$P(X \geq k) = (1-p)^k .$$

On en déduit

$$P(Z \geq k) = (1-p)^{2k} ,$$

ce qui, d'après la fonction de répartition de la loi géométrique montre que Z suit une loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^2 = 2p - p^2$.

Si $k > 0$, l'événement $(T = k)$ est la réunion des événements disjoints $(Y = q,\ X = q + k)$, $q \in \mathbb{N}$. On a donc

$$\begin{aligned} P(T=k) &= \sum_{q=0}^{\infty} P(Y=q,\ X=q+k) \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} P(Y=q)\ P(X=q+k) \end{aligned}$$

car X et Y sont indépendantes. On en déduit

$$\begin{aligned} P(T=k) &= \sum_{q=0}^{\infty} \left[p(1-p)^q P\, p(1-p)^{q+k}\right] \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} p^2(1-p)^{k+2q} \end{aligned}$$

$$= p^2 (1-p)^k \sum_{q=0}^{\infty} \left[(1-p)^2\right]^q$$
$$= p^2 (1-p)^k \frac{1}{1-(1-p)^2}$$
$$= \frac{p}{2-p}(1-p)^k$$

Pour $k = 0$, on utilise le fait que la somme des probabilités est égale à 1 :

$$\begin{aligned} P(T=0) &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(T=k) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p}{2-p}(1-p)^k \\ &= 1 - \frac{p}{2-p}\,\frac{1-p}{p} \\ &= \frac{1}{2-p} \end{aligned}$$

Pour le calcul de $P(Y \geq X)$, on utilise encore l'indépendance de X et de Y, ainsi que l'expression de la fonction de répartition :

$$\begin{aligned} P(Y \geq X) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k,\ Y \geq X) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k,\ Y \geq k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\,P(Y \geq k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[p(1-p)^k (1-p)^k\right] \\ &= \frac{p}{1-(1-p)^2} \\ &= \frac{1}{2-p} \end{aligned}$$

Espérance, variance et covariance

► Soit X une variable aléatoire discrète. Soient $\{x_i, i \in I\}$ l'ensemble des valeurs possibles de X (I partie dénombrable de $\mathbb{R}$), et $\{p_i, i \in I\}$ la loi de X, définie par $P(X=x_i) = p_i$ (on a $0 \leq p_i \leq 1$, et $\sum_{i \in I} p_i = 1$).

Si $\sum_{i \in I} |x_i|\, p_i < +\infty$, on dit que X admet une **espérance**, notée $E(X)$, ou EX, qui est définie par $E(X) = \sum_{i \in I} x_i p_i$.

► Si Ω est un ensemble, l'ensemble des variables aléatoires réelles $X : \Omega \to \mathbb{R}$ admettant une espérance est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et l'application espérance, E, est une forme linéaire sur cet ensemble.

► Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant une espérance. Alors, XY admet une espérance, et $E(XY) = E(X)\, E(Y)$. La réciproque est fausse : on peut trouver des variables aléatoires X et Y non indépendantes dont les espérances satisfont à cette relation.

► Pour tout entier positif n, on appelle **moment d'ordre n de X** (resp. **moment centré d'ordre n de X**) le réel $E(X^n)$ (resp. $E((X - E(X))^n)$), s'il existe. Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant des moments d'ordre n, alors $X + Y$ admet un moment d'ordre n.

► S'il existe, on appelle **variance**, et l'on note $\mathrm{Var}(X)$ le réel défini par
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E[(X - EX)^2]\\ &= E[X^2] - (EX)^2\end{aligned}$$

► Si X et Y sont deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 1 et d'ordre 2, on appelle **covariance** de X et de Y, et l'on note $\mathrm{Cov}(X;Y)$ le réel, s'il existe, défini par
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X;Y) &= E[(X - EX)(Y - EY)]\\ &= E(XY) - (EX)(EY).\end{aligned}$$

► Si X et Y sont indépendantes, on a $\mathrm{Cov}(X;Y) = 0$. La covariance est reliée à la variance par la formule
$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\ \mathrm{Cov}(X;Y).$$
Ainsi, lorsque X et Y sont indépendantes, on a
$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$
Plus généralement, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles discrètes, on a
$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k) + 2\sum_{q=1}^{n-1}\ \sum_{k=q+1}^{n} \mathrm{Cov}(X_q; X_k)$$

La calcul de la loi de $U = X + Y$ est standard :

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{q=0}^{k} P(X=q,\ Y=k-q) \\ &= \sum_{q=0}^{k} P(X=q)\, P(Y=k-q) \\ &= \sum_{q=0}^{k} p\,(1-p)^q\, p\,(1-p)^{k-q} \\ &= (k+1)\, p^2\, (1-p)^k \end{aligned}$$

Pour $P(Y=q \mid X+Y=k)$, on utilise la définition des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} P(Y=q \mid X+Y=k) &= \frac{P(Y=q,\ X+Y=k)}{P(X+Y=k)} \\ &= \frac{P(X=k-q,\ Y=q)}{P(X+Y=k)} \\ &= \frac{P(X=k-q)\, P(Y=q)}{P(X+Y=k)} \\ &= \frac{p\,(1-p)^{k-q}\, p\,(1-p)^q}{(k+1)\, p^2\, (1-p)^k} \\ &= \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

5.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) ■
(5) □

Les variables aléatoires X_k ne sont pas indépendantes. C'est immédiat si l'on remarque que si les X_1, X_2, ..., X_{n-1} valent toutes 1, il en est de même de X_n. On peut également calculer la covariance : Si $k \neq q$, on a d'une part

$$E(X_q X_k) = P(X_k = X_q = 1) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1},$$

et
$$E(X_k) = E(X_q) = \frac{1}{n},$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

d'où $\quad \operatorname{Cov}(X_q; X_k) = \dfrac{1}{n(n-1)} - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n^2(n-1)}.$

Comme on a clairement $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$, on en déduit l'espérance et la variance de X.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 1$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}(X_k) + 2\sum_{q=1}^{n-1} \sum_{k=q+1}^{n} \operatorname{Cov}(X_q; X_k) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Noter que pour une variable de comptage X_k, ne prenant que les valeurs 0 ou 1, on a $X_k = X_k^2$, et par suite

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(X_k) &= E(X^2) - (EX)^2 = EX - (EX)^2 \\ &= (EX)(1 - EX) \end{aligned}$$

6.

(1) ■
(2) ■
(3) ■
(4) ■
(5) ■

Bien que très semblable en apparence, la situation de cette question est très différente de la précédente, du point de vue des probabilités. Cette fois-ci, chaque costume est placé au hasard dans une loge, indépendamment des autres ; cela revient à faire n tirages indépendants, un par costume. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale, et l'on a

$$P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}$$

L'espérance et la variance de X valent respectivement 1 et $\dfrac{n-1}{n}$.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Les questions 2 et 3 illustrent les problèmes de rencontres (*matching problems* en anglais). Il furent à l'origine étudiés par Montmort en 1708, et on depuis été abordés sous de nombreuses formes. L'une des plus populaires est le problème de la secrétaire aveugle qui met les lettres au hasard dans les enveloppes. Il y a aussi le problème des fonctions orgiaques : des couples se rendent à une orgie, où les hommes sont associés aléatoirement aux femmes présentes. Combien y aura-t-il en moyenne de couples qui se retrouveront réunis ?

7.

(1) ☐
(2) ■
(3) ☐
(4) ■
(5) ☐

Comme exemple d'expérience, on peut penser à un jet de deux dés ($n = 2$), le succès étant un double six.

Cela étant, la probabilité pour qu'une expérience soit un succès est $\frac{1}{k^n}$. La variable aléatoire X prend la valeur r si les $r-1$ premières expériences sont des échecs, et si la r-ième est un succès. La loi de X est donc donnée par

$$P(X=r) = \frac{1}{k^n}\left(1-\frac{1}{k^n}\right)^{r-1} \quad (r = 1,2,\ldots)$$

On en déduit l'espérance de X :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{r=1}^{\infty} r\,P(X=r) = \frac{1}{k^n}\sum_{r=1}^{\infty} r\left(1-\frac{1}{k^n}\right)^{r-1} \\ &= \frac{(k^n)^2}{k^n} = k^n \end{aligned}$$

La probabilité pour que le nombre d'expériences à réaliser avant un succès soit inférieur à l'espérance de X est donné par

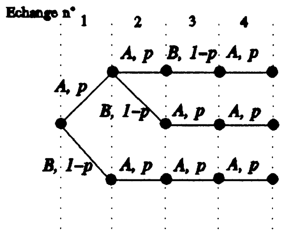
$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{k^n-1} P(X=r) &= \sum_{r=1}^{k^n-1} \frac{1}{k^n}\left(1-\frac{1}{k^n}\right)^{r-1} \\ &= 1-\left(1-\frac{1}{k^n}\right)^{k^n-1} \end{aligned}$$

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

Ce nombre n'est pas indépendant de k, mais en revanche, sa limite, lorsque n tend vers ∞ l'est, puisqu'elle vaut $1 - \frac{1}{e}$.

8.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) □
(5) □



Les échanges étant indépendants, la probabilité pour que A gagne le jeu après seulement trois échanges est p^3. La probabilité pour que A gagne le jeu après quatre échanges est $3p^3(1-p)$. La probabilité pour qu'il y ait égalité après 4 échanges est $6p^2(1-p)^2$. Lorsque cela se produit, A gagne après un total $4 + 2m + 2$ échanges lorsqu'il gagne m des $2m$ échanges suivants en alternance avec B, puis les deux suivants. Pour ces $2m$ échanges, après un nombre pair d'entre eux, A et B sont à égalité, ce qui peut se réaliser de deux manières pour chaque paire d'échanges. Ainsi, sachant qu'il y a égalité après 4 échanges A gagne après un total $4 + 2m + 2$ échanges avec la probabilité $2^m\, p^{m+2}\, (1-p)^m$. En fin de compte, la probabilité pour que A gagne le jeu est

$$\begin{aligned} f(p) &= p^3 + 3p^3(1-p) + 6p^2(1-p)^2 \sum_{m=0}^{\infty} 2^m p^{m+2}(1-p)^m \\ &= p^3(4-3p) + 6p^4(1-p)^2 \sum_{m=0}^{\infty} (2p-2p^2)^m \\ &= p^3(4-3p) + \frac{6p^4(1-p)^2}{1-2p+2p^2} \\ &= \frac{p^3(4-5p+2p^2)}{1-2+2p^2} \end{aligned}$$

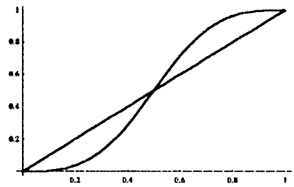
L'équation $f(p) = p$ se traduit par

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$p\left(2p^4 - 5p^3 + 2p^2 + 2p - 1\right) = 0$$

soit par

$$p(p-1)\left(p - \frac{1}{2}\right)\left(p - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(p - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$



Les réels $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ n'appartiennent pas à $[0;1]$. Ils ne peuvent donc être égaux à une probabilité. Par suite, la probabilité pour que A gagne le jeu est égale à la probabilité pour que A gagne un échange si et seulement si $p \in \left\{0 ; \frac{1}{2} ; 1\right\}$. Comme on le voit sur la courbe de f, le système favorise les joueurs forts, et défavorise les joueurs faibles : la probabilité pour qu'un joueur gagne le jeu lorsque sa probabilité p de gagner un échange est supérieure à $\frac{1}{2}$ est supérieure à p. Inversement, si la probabilité p qu'a le joueur de gagner un échange est inférieure à $\frac{1}{2}$, alors sa probabilité de gagner le jeu est inférieure à p.

9.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) ■

Un test groupé sur un paquet de n individus est négatif si et seulement si tous les membres de ce paquet sont séro-négatifs, ce qui se produit avec la probabilité $(1-p)^n$. Ce test est donc positif avec la probabilité $1-(1-p)^n$. Par suite, si l'on désigne par Y_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le test du paquet i est négatif, $n+1$ si ce test est positif, l'espérance mathématique de Y_i vaut

---

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$\begin{aligned} E(Y_i) &= (1-p)^n \times 1 + \left[1-(1-p)^n\right] \times [n+1] \\ &= (n+1) - n(1-p)^n \end{aligned}$$

C'est le nombre moyen d'analyses que le laboratoire doit pratiquer sur un paquet de n individus dans le cas d'un groupage sanguin. Les variables aléatoires (Y_i) sont indépendantes.

Désignons par Y le nombre total d'analyses à effectuer pour dépister le virus dans la population totale. En supposant pour simplifier que n divise N, on a $Y = \sum_{i=1}^{\frac{N}{n}} Y_i$, de sorte que le nombre moyen d'analyses à effectuer pour le dépistage du virus dans la population des N individus avec la méthode du groupage par paquets de n vaut

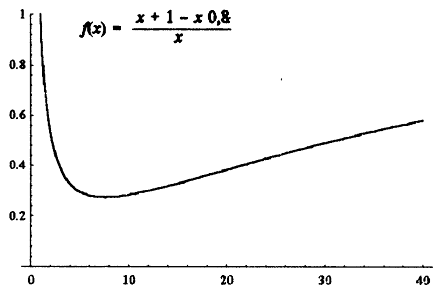
$$E(Y) = \frac{N}{n}\left[(n+1) - n(1-p)^n\right].$$

La variance vaut

$$\operatorname{Var}(Y) = Nn(1-p)^n\left(1-(1-p)^n\right)$$

Posons

$$f(x) = \frac{N}{x}\left[(x+1) - x(1-p)^x\right]$$



■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour minimiser le nombre d'analyses, on cherche si la dérivée de f s'annule. On a

$$f'(x) = N \frac{x^2 \ln(1-p)\left(1-p\right)^x - 1}{x^2}$$

et cette dérivée est négative à droite de 0, positive lorsque x tend vers $+\infty$. La fonction f est donc décroissante sur un voisinage à droite de 0 ; elle tend par ailleurs vers $+\infty$ en $+\infty$. Elle admet donc un minimum absolu sur $\mathbb{R}_+^*$, qui est un minimum local, donc aussi un point d'annulation de f'. Il existe donc une taille optimale des paquets pour le dépistage. Cette taille est solution de l'équation

$$x^2 \ln(1-p)\left(1-p\right)^x = 1$$

En général, cette valeur n'est pas un entier, et l'on a intérêt à prendre l'une des valeurs entières voisines.

A noter : il ne faut pas prendre cet exemple simplifié à la lettre. On a supposé que le test de dépistage est capable de déceler une personne porteuse du virus dans un paquet de taille quelconque, mais en pratique, ce n'est pas aussi simple : un test ne dépiste pas forcément le virus (et inversement réagit parfois à tort). Le fait de constituer des paquets diminue le taux de présence du virus recherché au sein de l'échantillon, de sorte qu'au-delà d'une certaine taille des paquets, la probabilité de dépistage diminue.

10.

(1) ■ Posons $q = 1 - p$. Il est clair que la loi de X_k est donnée par
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) □

$$P\left(X_k = 1\right) = 1 - P\left(X_k = 0\right) = p\,\frac{r}{n} + (1-p)\,\frac{n-r}{n}$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

et que l'on a $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Les variables aléatoires X_k ne sont pas mutuellement indépendantes. En effet, on a

$$\begin{aligned} E(X_i X_j) &= P(X_i = 1,\ X_j = 1) \\ &= p\,\frac{r}{n}\left[p\,\frac{r-1}{n-1} + q\,\frac{n-r}{n-1}\right] + q\,\frac{n-r}{n}\left[p\,\frac{r}{n-1} + q\,\frac{n-r-1}{n-1}\right] \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, après calculs,

$$\mathrm{Cov}(X_i ; X_j) = \frac{r\,(r-n)\,(p-q)^2}{n^2\,(n-1)}$$

De la relation

$$\begin{aligned} E(X_k) &= P(X_k = 1) \\ &= \frac{1}{n}\left[r(2p-1) + qn\right] \end{aligned}$$

on déduit

$$E(X) = \left[r(2p-1) + qn\right]$$

Ainsi, EX est une fonction affine de r, et comme $p > \frac{1}{2}$, cette fonction est strictement croissante. Le météorologue va donc maximiser l'espérance du nombre de jours pour lesquels sa prévision est avérée en prédisant de la pluie tous les jours!

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Résultats du QCM n°11
Variables aléatoires continues

(Questions p. 91)

1.

(1) ■
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) □

La médiane m de la variable aléatoire X_α est le réel solution de l'équation $F_\alpha(m) = \frac{1}{2}$. On a donc

$$F_\alpha(m) = 1 - e^{-\alpha \tan m} = \frac{1}{2}$$

d'où
$$e^{-\alpha \tan m} = \frac{1}{2}$$

puis
$$\alpha \tan m = \ln 2$$

et enfin
$$m = \arctan\left(\frac{\ln 2}{\alpha}\right).$$

Pour obtenir la densité de X_α à partir de la fonction de répartition F_α, on dérive cette fonction par rapport à la variable, ici x, et non par rapport au paramètre. On obtient donc $f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\cos^2 x} e^{-\alpha \tan x}$.

L'espérance mathématique de X_α est donnée par l'intégrale $E[X_\alpha] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \mapsto x f_\alpha(x))$. Or, par définition, F_α est une primitive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ de f_α. On peut donc intégrer par parties, ce qui donne

$$\begin{aligned} E[X_\alpha] &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \mapsto x f_\alpha(x)) \\ &= \frac{\pi}{2} F_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \mapsto F_\alpha(x)) \end{aligned}$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \mapsto e^{-\alpha \tan x}\right)$$

En dérivant deux fois par rapport à α cette dernière égalité, on montre que l'espérance mathématique $E[X_\alpha]$ de X_α satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2E[X_\alpha]}{d\alpha^2} + E[X_\alpha] = \frac{1}{\alpha}$$

Changement de variable
et densité de variables aléatoires

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, φ une fonction continûment dérivable sur I dont la dérivée ne s'annule pas sur I, et X une variable aléatoire continue dont la densité f est nulle en dehors de I. Alors, la variable aléatoire $Y = \varphi(X)$ a comme densité la fonction g définie par

$$g(y) = \begin{cases} f\left(\varphi^{-1}(y)\right)\left|\dfrac{d}{dy}\varphi^{-1}(y)\right| & \text{si} \quad y \in \varphi(I) \\ 0 & \text{si} \quad y \notin \varphi(I) \end{cases}$$

2.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) □
(5) ■

Pour répondre à ces questions, on peut utiliser directement le théorème de calcul de densité par changement de variable. Remontrons le résultat pour l'exemple de $Y = X^2$.

Posons

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f\left(\sqrt{y}\right) + f\left(-\sqrt{y}\right)\right] & \text{si} \;\; y > 0 \\ 0 & \text{si} \;\; y \leq 0 \end{cases}$$

et évaluons la fonction de répartition G de Y. Soient φ et ψ les deux fonctions définie par

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

et

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}.$$

La fonction φ est une primitive de ψ sur $\mathbb{R}_+$ (voir dans le volume 1 la définition des primitives sur un intervalle fermé).

Si l'une des deux intégrales $\int_{-\infty}^{x} g$ et $\int_0^x \left(y \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \left[f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y}) \right] \right)$ existe, il en est de même de l'autre, et elles sont égales. En outre, sur $[0;x]$, g est de la forme $\psi \times f \circ \varphi$, de sorte que le théorème de changement de variable pour les intégrales impropres permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} g &= \int_0^{\sqrt{x}} \left(z \mapsto f(z) + f(-z) \right) \\ &= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f \\ &= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) \\ &= G(x) \end{aligned}$$

où F et G sont les fonctions de répartition respectives de X et de Y. La fonction g est donc la densité de Y.

3.

(1) □ (2) ■ (3) □ (4) □ (5) ■

► Pour que f_{XY} soit la densité d'une loi de probabilités, il faut que l'intégrale de cette fonction sur son domaine vaille 1. Calculons-la :

$$\int_0^1 \left[x \mapsto \int_0^x \left(y \mapsto \lambda y^\beta (1-x)^\alpha \right) \right] = \lambda \int_0^1 \left[x \mapsto (1-x)^\alpha \frac{1}{\beta+1} x^{\beta+1} \right]$$
$$= \frac{\lambda}{\beta+1} \mathrm{B}(\beta+2\,;\alpha+1)$$

On en déduit

$$\lambda = \frac{\beta+1}{\mathrm{B}(\beta+2\,;\alpha+1)}$$

► Les densités marginales de X et Y, f_X et f_Y, se calculent en intégrant f_{XY} selon l'autre variable. On obtient :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^x \left(y \mapsto \lambda\, y^\beta (1-x)^\alpha \right) \\ &= \lambda (1-x)^\alpha \int_0^x \left(y \mapsto y^\beta \right) \\ &= \frac{(1-x)^\alpha x^{\beta+1}}{\mathrm{B}(\beta+2\,;\alpha+1)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_y^1 \left(x \mapsto \lambda\, y^\beta (1-x)^\alpha \right) \\ &= \lambda\, y^\beta \int_y^1 \left(x \mapsto (1-x)^\alpha \right) \\ &= \frac{\lambda}{\alpha+1} y^\beta (1-y)^{\alpha+1} \\ &= \frac{\beta+1}{(\alpha+1)\,\mathrm{B}(\beta+2\,;\alpha+1)} y^\beta (1-y)^{\alpha+1} \\ &= \frac{y^\beta (1-y)^{\alpha+1}}{\mathrm{B}(\beta+1\,;\alpha+2)} \end{aligned}$$

► Les espérances de X et de Y se calculent elles-aussi avec des intégrales :

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 \left(x \mapsto x f_X(x) \right) \\ &= \frac{1}{B(\beta+2\,;\alpha+1)} \int_0^1 \left(x \mapsto (1-x)^\alpha x^{\beta+2} \right) \\ &= \frac{B(\beta+3\,;\alpha+1)}{B(\beta+2\,;\alpha+1)} = \frac{\beta+2}{\beta+\alpha+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_0^1 \left(y \mapsto y f_Y(y) \right) \\ &= \frac{\beta+1}{(\alpha+1)\,B(\beta+2\,;\alpha+1)} \int_0^1 \left(y \mapsto y^{\beta+1} (1-y)^{\alpha+1} \right) \\ &= \frac{\beta+1}{(\alpha+1)\,B(\beta+2\,;\alpha+1)}\, B(\beta+2\,;\alpha+2) \\ &= \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+3} \end{aligned}$$

► Pour ne pas se singulariser, la densité conditionnelle $f_{X|\,Y=y}$ réclame également le calcul d'une intégrale :

$$f_{X|\,Y=y}(x) = \frac{\lambda\, y^\beta (1-x)^\alpha}{\int_0^1 \left(x \mapsto \lambda\, y^\beta (1-x)^\alpha \right)} = \frac{(\alpha+1)(1-x)^\alpha}{(1-y)^{\alpha+1}}$$

4.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) ■

► La relation $X = 2\sqrt{1-R^2}$ conduit à $R = \sqrt{1-\frac{X^2}{4}}$, puis à $P(X \geq x) = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$. En intégrant, on trouve l'espérance : $E[X] = \frac{\pi}{2}$

► De même, la relation $Y = 2\sin\theta$ conduit à $\theta = \arcsin\frac{y}{2}$, puis à **(Suite p. 256)**

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Loi exponentielle, Processus de Poisson

Soit $\alpha > 0$. La ***densité exponentielle de paramètre*** α est la fonction $f\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$, et $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ si $x \geq 0$. La fonction de répartition F de cette loi est définie par $F(x) = 0$ si $x < 0$, et $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ si $x \geq 0$.

La loi exponentielle s'obtient comme limite de lois géométriques, et possède la même propriété "d'absence de mémoire" que celles-ci : si T suit une loi exponentielle, et si s et t sont deux réels positifs, on a

$$P(T > t + s \mid T > s) = P(T > t).$$

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées, de loi exponentielle de paramètre α, la densité g_n et la fonction de répartition G_n de $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ sont données par

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \alpha \dfrac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}\left(1 + \dfrac{\alpha x}{1!} + \cdots + \dfrac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!}\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On définit à partir des S_n une famille de variables aléatoires $N(t)$, $t > 0$, en comptant, pour chaque t, le nombre d'indices k tels que $S_k \leq t$. L'événement $\{N(t) = n\}$ se réalise si et seulement si l'on a $S_n \leq t$ et $S_{n+1} > t$. On a

$$P\big(N(t) = n\big) = e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!},$$

c'est-à-dire que $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre αt (c'est pourquoi l'on parle de processus de Poisson).

(Suite de la page 255)

$$P(Y \geq y) = P\left(\theta \geq \arcsin \frac{y}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{y}{2}$$

En intégrant, on obtient $E[Y] = \dfrac{4}{\pi}$.

► Enfin, un développement limité en 0 des deux termes montre que la relation de l'affirmation 3 est fausse.

5.

(1) ☐ (2) ■ (3) ☐ (4) ☐ (5) ☐

Le voyageur arrive à l'instant X, entre les passages des métros k et $k+1$. Le passage de ces métros se fait en $4k$ et en $4(k+1)$. La variable aléatoire T du temps d'attente est donc la loi de $4(k+1) - X$, où X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[4k ; 4(k+1)]$. L'espérance du temps d'attente, $E(T)$ est donc donnée par

$$E(T) = \int_{4k}^{4(k+1)} \left(x \mapsto \frac{1}{4}(4k+1-x)\right) = 2$$

Ceci est conforme à l'intuition : s'il y a en moyenne un métro toutes les quatre minutes, on arrive "en moyenne" au milieu de l'intervalle séparant deux métros consécutifs, et on attend le métro suivant en moyenne deux minutes.

6.

(1) ☐ (2) ☐ (3) ☐ (4) ■ (5) ☐

Bien que la situation semble très semblable à celle des métros, elle ne l'est pas. L'absence de mémoire du processus de Poisson fait que le temps d'attente ne doit pas dépendre de l'instant d'arrivée. Retrouvons ceci par le calcul :

Soient X_1, X_2, ..., X_n, ... les temps séparant le passage des bus successifs. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$; cela définit l'heure de passage du n-ième bus. La densité g_n de S_n est donnée par (voir l'encadré p. 256)

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \alpha \dfrac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

de sorte que la fonction Σg_n est constante sur $\mathbb{R}_+$, prenant la valeur α.

Soit $k - 1$ l'indice (aléatoire) du dernier bus qui est passé à la station avant l'arrivée du voyageur, qui se produit à l'instant t. On a donc $S_{k-1} < t \leq S_k$. Posons $L_t = S_k - S_{k-1}$. Cela mesure le temps séparant le

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

passage des bus passés à la station juste avant et juste après l'instant t. Calculons la fonction de répartition et la densité h_t de L_t. Si $x < t$, l'événement $\{L_t \leq x\}$ se produit si et seulement s'il existe n et y tels que $S_n = y$ et $t-y < X_{n+1} \leq x$, ce qui impose

$$t - x \leq y \leq t.$$

On en déduit

$$P(L_t \leq x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t-x}^{t} \left(y \mapsto g_n(y)\left[e^{-\alpha(t-y)} - e^{-\alpha x}\right]\right)$$

puis, comme $\Sigma g_n = \alpha$,

$$P(L_t \leq x) = 1 - e^{-\alpha x} - \alpha x e^{-\alpha x}$$

et enfin, en dérivant,

$$h_t(x) = \alpha^2 x e^{-\alpha x} \quad \text{si } 0 < x \leq t$$

De même, lorsque $x > t$, on obtient

$$h_t(x) = \alpha(1 + \alpha t)\, e^{-\alpha x} \quad \text{si } x > t$$

Le temps d'attente du voyageur, noté traditionnellement W_t (pour *waiting time*), est défini par $W_t = S_k - t$. La fonction de répartition de W_t est donnée par

$$\begin{aligned} P(W_t \leq x) &= e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(x+t)} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{t} \left(y \mapsto g_n(y)\left[e^{-\alpha(t-y)} - e^{-\alpha(x+t-y)}\right]\right) \\ &= 1 - e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

C'est la même loi que les X_n. Ainsi, si les bus passent en moyenne toutes les quatre minutes, notre voyageur attendra en moyenne quatre minutes.

On montre en théorie du trafic que si l'on s'éloigne du point de départ de la ligne de bus, et si ceux-ci avancent de manière indépendante, la loi des temps de passage des bus au point considéré tend vers une loi exponentielle. Le temps d'attente moyen des voyageurs augmente donc lorsqu'on s'éloigne du départ de la ligne : supposons que les bus partent à intervalles réguliers, disons toutes les quatre minutes. Près du point de départ de la ligne, un voyageur attend en moyenne deux minutes, tandis que plus loin, il attend en moyenne quatre minutes. Pour réduire cet effet, une technique consiste à forcer les autobus à attendre en des points fixes situés tout au long de la ligne, de manière à quitter ces points à intervalles réguliers. Et il n'y a pas que les phénomènes probabilistes qui entrent en ligne de compte dans l'attente des bus : un sondage auprès de voyageurs attendant un autobus le long d'une ligne sans horaires fixés a montré qu'en dessous de 10 minutes, les voyageurs ont une bonne perception de leur temps d'attente, mais qu'au delà, il y a une brusque augmentation des voyageurs disant qu'il attendent l'autobus "depuis une demi-heure"...

7.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) □

Vous n'avez pas de chance ! L'espérance du nombre de clients à se présenter avant qu'il y en ait un de plus malchanceux que vous est infinie, et cela quelle que soit la loi des W_n. En effet, l'événement $\{N > n\}$ se réalise si et seulement si le maximum de X_0, X_1, ..., X_n est atteint en X_0. Pour des raisons de symétrie, la probabilité de cet événement est $\frac{1}{n+1}$. On a donc

$$\begin{aligned} P(N = n) &= P(N > n-1) - P(N > n) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

et

$$E(N) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n+1)} = +\infty$$

On peut retrouver ce résultat par le calcul. Supposons par exemple que les W_n suivent une loi exponentielle de paramètre α. Supposons $X_0 = x$. Alors, pour tout $n \geq 1$, la probabilité pour que l'on ait $X_n > x$ vaut $p = e^{-\alpha x}$, et l'on ai ramené à une suite de Bernoulli de probabilité p. On a donc

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$P\left(N = n \mid X_0 = x\right) = p\left(1 - p\right)^{n-1}$$

puis

$$P\left(N = n\right) = \int_0^{+\infty}\left(x \mapsto \alpha e^{-\alpha x} e^{-\alpha x}\left(1 - e^{-\alpha x}\right)^{n-1}\right)$$

En posant $t = 1 - e^{-\alpha x}$, on peut calculer la dernière intégrale. On obtient

$$P\left(N = n\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

ce qui est bien conforme au résultat précédent.

8.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) □

Pour déterminer la valeur en $t > 0$ de la fonction de répartition F de X/Y, on intègre le produit des densités, $\alpha^2 e^{-\alpha(x+y)}$ sur le domaine de $\mathbb{R}_+{}^2$ formé des couples $(x;y)$ tels que $0 < x < ty$, $y \in \mathbb{R}+^*$. On obtient

$$P\left(\frac{X}{Y} \leq t\right) = \int_0^{+\infty}\left[y \mapsto \int_0^{ty}\left(x \mapsto \alpha^2 e^{-\alpha(x+y)}\right)\right]$$

$$= \alpha^2 \int_0^{+\infty}\left[y \mapsto e^{-\alpha y} \int_0^{ty}\left(x \mapsto e^{-\alpha x}\right)\right]$$

$$= \alpha^2 \int_0^{+\infty}\left[y \mapsto e^{-\alpha y} \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t y}\right)\right]$$

$$= \frac{t}{1 + t}$$

La densité f s'obtient en dérivant F (et non en primitivant). Sur $\mathbb{R}^+$, cette densité est donnée par

$$f(t) = \frac{1}{\left(1 + t\right)^2}$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{(1+t)^2}$ est positive et que l'on a l'équivalent $\dfrac{t}{(1+t)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$, cette fonction n'est pas intégrable sur $[0;+\infty]$, et l'espérance de X/Y n'est pas finie.

9.

(1) ☐
(2) ■
(3) ☐
(4) ☐
(5) ☐

La relation $L_1 + L_2 + ... + L_{n+1} = 1$ montre que les variables aléatoires L_1, L_2, ..., L_{n+1} ne sont pas mutuellement indépendantes.

Pour voir que les variables aléatoires L_1, L_2, ..., L_{n+1} sont équidistribuées, identifions les points 0 et 1 de l'intervalle $[0;1]$, pour obtenir un cercle. Plus précisément, considérons $n+1$ variables aléatoires indépendantes, équidistribuées, Y_1, Y_2, ..., Y_{n+1}, de loi uniforme sur le cercle $\{e^{2i\pi t},\ t \in [0;]\}$. Sur le cercle, ces $n+1$ variables aléatoires découpent $n+1$ intervalles, dont les longueurs ont la même loi. Coupons ce cercle en Y_{n+1} ; on obtient un intervalle de longueur 2π, coupé en $n+1$ sous-intervalles par des variables aléatoires uniformes indépendantes. C'est notre situation : les variables aléatoires L_1, L_2, ..., L_{n+1} sont équidistribuées.

Pour déterminer leur loi, il suffit de calculer celle de L_1. Or l'événement $\{L_1 > t\}$ est réalisé si et seulement si tous les X_i vérifient $X_i > t$. Comme les X_i sont indépendants, la probabilité de cet événement est $(1 - t)^n$. On en déduit immédiatement la fonction de répartition F de L_1 : si $t \in [0;1]$, on a

$$F(t) = 1 - (1 - t)^n.$$

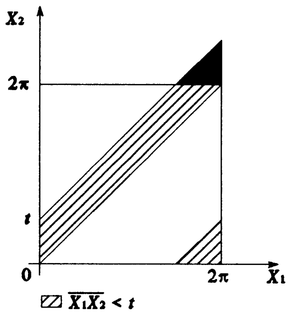
■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

10.

(1) □ Les lois de L_1, L_2 et L_3 ne sont pas les mêmes! Les
(2) ■ points X_1 et X_2 jouant le même rôle, il est clair que L_1
(3) ■ et L_2 ont la même loi ; mais quand on fixe le point (1;0)
(4) ■ pour choisir l'intervalle contenant ce point, on a
(5) □ tendance à choisir plus souvent l'arc le plus long, car c'est généralement celui qui va contenir (1;0). Cela explique intuitivement pourquoi la loi de L_3 n'est pas la même que celle de L_1 et de L_2. Evaluons les espérances de L_1, L_2 et L_3. Les variables aléatoires L_1 et L_2 ont la même loi ; on a donc $E(L_1) = E(L_2)$. En outre, l'espérance est une forme linéaire ; on a donc $E(L_1+L_2) = E(L_1) + E(L_2)$. Et comme $L_1 + L_2 = 2\pi$, on en déduit $E(L_1+L_2) = 2\pi$, puis $E(L_1) = E(L_2) = \pi$. Pour déterminer l'espérance de L_3, coupons notre cercle en (1;0), et déplions-le. Cela revient à placer deux points selon une loi uniforme sur l'intervalle [0;2π]. On a vu dans la question précédente que ces deux points coupent l'intervalle [0;2π] en trois sous-intervalles dont les longueurs suivent la même loi, et d'espérance (toujours la linéarité de l'espérance) $2\pi/3$. L'arc du cercle contenant (1;0) correspond à la réunion du premier et du dernier sous-intervalle de [0;2π]. L'espérance de L_3 vaut

$$E(L_3) = 2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3},$$

c'est-à-dire le double de l'espérance de L_1 et L_2. Si L_1 et L_2 suivent des lois uniformes, L_3 suit une loi de densité $4\pi x$. Par exemple pour L_1 et L_2, comme on peut le lire sur la figure ci-contre, on a $P(L_1 \leq t) = 2\pi \times t$ (produit de la base par la hauteur), de sorte que la densité de L_1 et de L_2 est constante, de valeur 2π.



■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Résultats du QCM n°12
Convergence de variables aléatoires

(Questions p. 100)

1.

(1) □ (2) ■ (3) ■ (4) ■ (5) ■

Rappelons d'abord l'inégalité de Čebičev : ***Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance E(X) et un écart-type σ. Alors, pour tout ε > 0,***

$$P\left(|X - E(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

En particulier, en posant $\mu = E(X)$, et $\epsilon = k\sigma$,

$$P\left(|X - \mu| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

Cela étant, pour répondre à la question, il suffit de consulter une table statistique, ou d'interroger sa calculatrice scientifique.

2.

(1) □ (2) □ (3) ■ (4) □ (5) □

Les variables aléatoires X_n ont une espérance nulle, car leur loi est symétrique par rapport à l'origine. Leur écart-type vaut 1. Cela étant, les inégalités de type Čebičev vérifiées par les variables aléatoires X_n sont

$$P\left(|X_n - E(X_n)| \geq k\sigma\right) = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{k^2} \quad \text{si } 0 < k < n$$

$$P\left(|X_n - E(X_n)| \geq n\sigma\right) = \frac{1}{n^2} \quad ,$$

$$P\left(|X_n - E(X_n)| \geq k\sigma\right) = 0 \quad \text{si } n < k$$

(noter l'inégalité stricte $n < k$ dans la dernière relation).

Les variables aléatoires X_n fournissent donc chacune un unique cas d'égalité dans l'inégalité de Čebičev.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$P(|X_n - E(X_n)| \geq n\sigma) = \frac{1}{n^2}$$

3.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) □

La loi des grands nombres porte sur les moyennes, et non sur les sommes ; les deux premières affirmations sont donc fausses. Ce qu'affirme la loi des grands nombres, c'est qu'en général, lorsque n devient grand, Y_n est proche de μ. Plus précisément, avec les notations de l'énoncé, la loi faible des grands nombres affirme que, pour tout $\alpha > 0$, on a les deux relations

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|Y_n - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0$$

et

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|Y_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 .$$

Sous les mêmes hypothèses, la loi forte des grands nombres affirme qu'avec une probabilité égale à 1 (on dit "presque sûrement"), Y_n tend vers μ.

4.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) □

Notons d'abord l'égalité $\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \dfrac{Y_n - \mu}{\tau_n}$. Les affirmations 1 et 3 d'une part, 2 et 4 d'autre part sont donc équivalentes.

Cela étant, le **théorème limite central**, aussi appelé **théorème de De Moivre-Laplace**, et que la dernière mode consiste à appeler **théorème de la limite centrée**, affirme que sous les hypothèses de l'énoncé, la loi de $\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, (*i.e.* celle de $\dfrac{Y_n - \mu}{\tau_n}$) peut être approché par la loi normale centrée réduite. Le terme $P\left(\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right)$

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

représentant la fonction de répartition de $\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, il est approché par le terme correspondant de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. C'est donc l'égalité

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \left(t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)$$

qui est correcte.

Enfin, $\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ est une loi centrée réduite ; c'est donc une loi normmale centrée réduite qui pourra en approcher la loi, et l'assertion 5 est fausse.

5.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) □

Calculons la limite cherchée. On a d'abord

$$P(X = x) = \frac{\binom{R}{x}\binom{N-R}{M-x}}{\binom{N}{M}} = \frac{\binom{pN}{x}\binom{(1-p)N}{M-x}}{\binom{N}{M}}$$

$$= \frac{\dfrac{(pN)!}{x!\,(pN-x)!}\;\dfrac{((1-p)N)!}{(M-x)!\,((1-p)N-M+x)!}}{\dfrac{N!}{M!\,(N-M)!}}$$

$$= \frac{M!}{x!\,(M-x)!} \times \frac{[pN(pN-1)\ldots(pN-x+1)]\,[qN(qN-1)\ldots(qN-M+x+1)]}{N(N-1)\ldots(N-M+1)}$$

où l'on a posé comme d'habitude, $q = 1 - p$. Puisqu'on a affaire à des produits, utilisons les équivalents pour

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

évaluer la limite. Lorsque N tend vers ∞, le nombre de facteurs de chacun des termes

$$\left[pN(pN-1)\dots(pN-x+1)\right]$$

$$\left[qN(qN-1)\dots(qN-M+x+1)\right]$$

et

$$N(N-1)\dots(N-M+1)$$

respectivement de x, $M-x$ et M reste inchangé ; cela autorise l'emploi des équivalents. On obtient

$$\left[pN(pN-1)\dots(pN-x+1)\right] \underset{N\to\infty}{\sim} (pN)^x$$

$$\left[qN(qN-1)\dots(qN-M+x+1)\right] \underset{N\to\infty}{\sim} (qN)^{M-x}$$

et

$$N(N-1)\dots(N-M+1) \underset{N\to\infty}{\sim} N^M$$

On en déduit

$$P(X=x) \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{M!}{x!\,(M-x)!} \times \frac{(pN)^x (qN)^{M-x}}{N^M}$$

et enfin

$$\lim_{N\to\infty} P(X=x) = \frac{M!}{x!\,(M-x)!}\, p^x (1-p)^{M-x}$$

En pratique, on considère que l'approximation d'un loi hypergéométrique par un loi binomiale est légitime dès que le taux de sondage M/N est inférieur à 10%.

► Notons que la réponse (4) est fausse, mais qu'une légère modification dans les hypothèses peut rendre la conclusion correcte. En effet, on vient de voir que la loi hypergéométrique tend vers la loi binomiale. Or on sait également que la loi binomiale tend vers la loi de Poisson. En faisant tendre de manière convenable vers ∞ les différents paramètres de la loi hypergéométrique,

---

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

on peut donc la faire tendre vers une loi de Poisson. Dans la question, on a supposé que l'effectif de l'échantillon tiré reste constant, lorsque N tend vers ∞. Si l'on suppose que le nombre d'individus de type I, R, et que l'effectif de l'échantillon, M, évoluent tous deux en fonction de N, de telle sorte que l'on ait $\frac{MR}{N} = \lambda$, où λ est fixé, alors la loi hypergéométrique tend vers une loi de Poisson de paramètre λ.

6.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) ■
(5) □

Au moment où l'on va effectuer la deuxième pêche, le lac contient N poissons parmi lesquels 20 sont marqués ; on en tire 50. Si X désigne la loi du nombre de poissons marqués que l'on tire parmi les 50, alors X suit une loi hypergéométrique, donnée par

$$P(X=k) = \frac{\binom{20}{k}\binom{N-20}{50-k}}{\binom{N}{50}}$$

Si l'on avait un grand nombre N de poissons dans le lac, et si l'on avait aussi un grand nombre, M, de poissons marqués, de telle sorte que le nombre de poissons pêchés, 50 soit négligeable devant N et M, alors on pourrait légitimement approcher la loi de X par une loi binomiale, en considérant que quel que soit la nature des premiers poissons pêchés, le rapport M/N reste inchangé. C'est ici évidemment faux, du fait de l'inégalité $20 < 50$.

Si l'on désigne par Y_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le k-ième des 50 poissons est marqué, 0 sinon, l'espérance de Y_k vaut 20/N. Comme $X = \sum_{k=1}^{50} Y_k$,

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

l'addivité de l'espérance permet d'écrire $E[X] = \sum_{k=1}^{50} E[Y_k] = \frac{1000}{N}$.

La variance de la loi hypergéométrique est donnée par

$$\mathrm{Var}(X) = 50\,\frac{20}{N}\left(1 - \frac{20}{N}\right)\left(1 - \frac{49}{N-1}\right)$$

• L'inégalité de Čebičev n'est pas assez précise pour qu'on puisse affirmer avec certitude que le lac contient 250 poissons. Reprenons cette inégalité. Pour tout réel $t > 0$, elle s'écrit :

$$P\left(\left(X - \frac{1000}{N}\right)^2 \geq t\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{t^2}$$

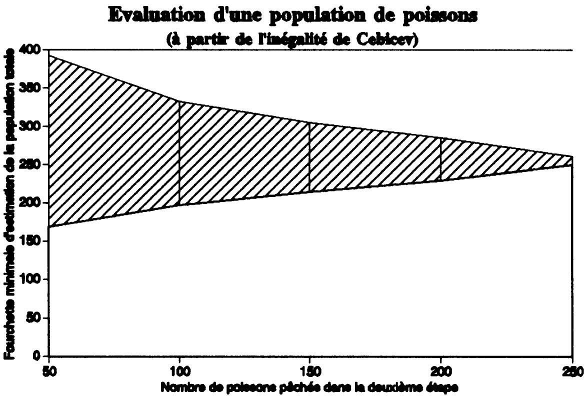
Posons $\delta = \frac{\mathrm{Var}(X)}{t^2}$. L'inégalité s'écrit

$$P\left(\left(X - \frac{1000}{N}\right)^2 \geq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\delta}\right) \leq \delta$$

Si l'on trouve $X = 4$, pour chaque δ, il existe un intervalle $[\alpha(4;\delta);\beta(4;\delta)]$ de valeurs de N pour lesquelles on a $\left(4 - \frac{1000}{N}\right)^2 \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\delta}$. Lorsque δ augmente, jusqu'à 1^- l'intervalle en question diminue, jusqu'à atteindre une valeur correspondant à la limite de l'inégalité de Čebičev ; cette valeur limite exprime l'insuffisance du sondage avec seulement 50 poissons pêchés.

Lorsqu'on augmente ce nombre M de poissons pêchés, en gardant constant le rapport X/M, la fourchette minimale d'estimation diminue. La courbe ci-dessus montre l'évolution de cette fourchette, de 50 à 250 poissons pêchés. L'existence de cette fourchette montre

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*



que lorsqu'un sondage est fait sur un petit échantillon, on ne peut réduire la fourchette d'estimation ; si on veut la réduire, il faut augmenter la taille de l'échantillon.

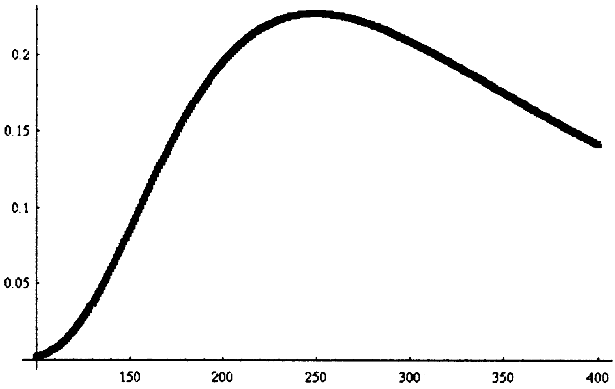
• L'estimation de N à partir de X est un problème standard en statistiques. Bien que ce ne soit pas au programme, on peut sur cet exemple simple découvrir la démarche du statisticien. Si $X = 4$, le choix usuel pour estimer N est de choisir l'entier n pour lequel $P(X = 4)$ est maximal (on parle du *maximum de vraisemblance*). Autrement dit, on prend l'entier n qui maximise la fonction f définie par

$$f(n) = \frac{\binom{20}{4}\binom{n-20}{50-4}}{\binom{n}{50}}$$

Le graphe de f est le suivant :

Son maximum est bien atteint en 250, et c'est le choix usuel du statisticien.

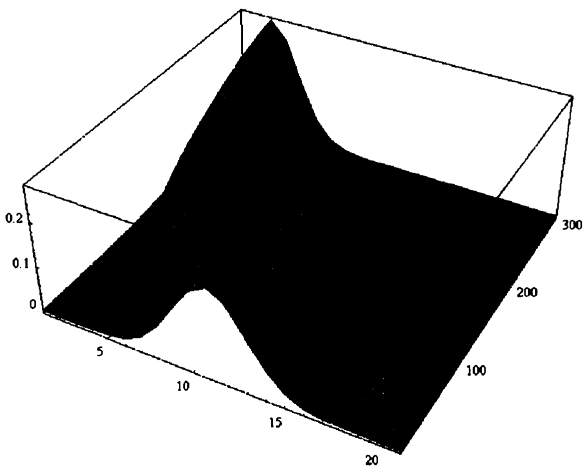
• L'inégalité de Čebičev nous a montré la nécessité de considérer une fourchette de valeurs pour l'estimation de N. Une technique standard en statistiques consiste encore à maximiser une fonction : on cherche tous les entiers n pour lesquels 4 est le nombre le plus probable de poissons marqués pêchés. Autrement dit, on cherche



les entiers n pour lesquels 4 est l'entier qui maximise la fonction g_n définie par

$$g_n(k) = \frac{\binom{20}{k}\binom{n-20}{50-k}}{\binom{n}{50}}$$

La fonction $(n;k) \mapsto g_n(k)$ est représentée par la figure ci-dessous



Le maximum de g_n est atteint en 4 lorsque n décrit les valeurs entières de l'intervalle [213;265].

7.

(1) ■ (2) ■ (3) ■ (4) ■ (5) □

Ainsi posé, il y a deux façons de modéliser le problème. Soit on considère que l'on peut distinguer les personnes, soit on considère qu'elles sont indiscernables.

► Dans le premier cas, soit X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le i-ième étage est un arrêt, 0 sinon. La probabilité pour qu'un passager donné ne veuille pas s'arrêter à l'étage i est $1 - \dfrac{1}{N}$; si les passagers agissent indépendamment, la probabilité pour que l'ascenseur ne s'arrête pas à l'étage i est donc $\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^Q$. Cela étant, comme X_i ne prend que les valeurs 0 ou 1, on a

$$E[X_i] = P(X_i = 1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^Q$$

d'où

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} E[X_i] = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^Q\right)$$

► Dans le deuxième cas, on peut numéroter $y_1, \ldots, y_Q$ les étages auxquels descendent les passagers 1, ..., Q. Toutes les combinaisons sont également probables, et cela revient à répartir avec répétition les Q passagers dans les N étages, ce qui peut se faire de $\dbinom{N+Q-1}{Q}$ façons. Soit K le nombre d'étages auxquels l'ascenseur s'arrête. L'événement $\{K = k\}$ est réalisé si et seulement si les passagers se répartissent sur k étages,

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

avec au moins un passager descendant à chacun de ces k étages. On a donc

$$P(K=k) = \frac{\binom{N}{k}\binom{Q-1}{Q-k}}{\binom{N+Q-1}{Q}},$$

pour tout $k \in \{1, 2, ..., \min\{M; Q\}\}$. Ainsi,

$$E[K] = \sum_{k=1}^{\min\{N;Q\}} k \frac{\binom{N}{k}\binom{Q-1}{Q-k}}{\binom{N+Q-1}{Q}}$$

$$= \frac{N}{\binom{N+Q-1}{Q}} \sum_{j=0}^{\min\{N;Q\}-1} \binom{N-1}{j}\binom{Q-1}{Q-j-1}$$

$$= \frac{N\binom{N+Q-2}{Q-1}}{\binom{N+Q-1}{Q}} = \frac{NQ}{N+Q-1}$$

► Dans le premier cas, comme $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$, si

$\lim\limits_{N \to \infty} \frac{Q}{N} = \alpha$, on obtient $E[X] \underset{N \to \infty}{\sim} N\left(1 - e^{-\alpha}\right)$.

► Dans le deuxième cas, toujours en supposant $\lim\limits_{N \to \infty} \frac{Q}{N} = \alpha$, on obtient l'équivalent $E[K] \underset{N \to \infty}{\sim} \frac{\alpha N}{1+\alpha}$.

☞ La problème de l'ascenseur a été étudié de nombreuses fois dans la littérature, sous des formes différentes. Par exemple, E. Schrödinger a utilisé ce modèle en 1951 pour évaluer le nombre de détecteurs se déclenchant lorsque Q rayons cosmiques traversent P détecteurs (Question : les rayons cosmiques sont-ils discernables ou non ?). Le problème de l'ascenseur lui-même a donné lieu à une abondante littérature. On pourra ainsi chercher l'espérance de l'étage où l'ascenseur finit de se vider, ou se poser la question inverse : ayant observé que l'ascenseur s'est arrêté k fois, combien y avait-il de personnes au départ ?

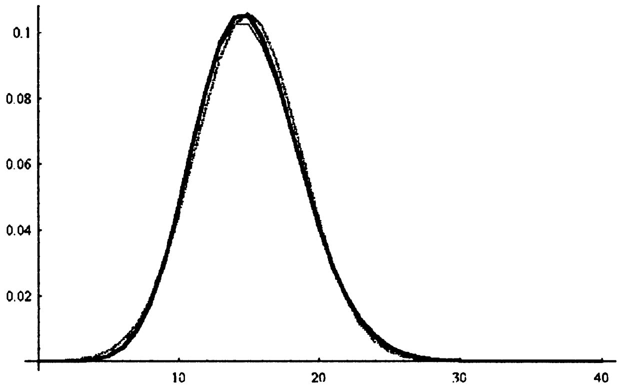
8.

(1) ■
(2) ■
(3) ■
(4) □
(5) □

Le modèle choisi correspond à une loi binomiale de paramètres 300 et 1/20. On peut l'approcher par une loi de Poisson de paramètre $300 \times 1/20 = 15$, ou par une loi de Gauss d'espérance $300 \times 1/20 = 15$ et de variance $300 \times \frac{1}{20} \times \frac{19}{20} = 14{,}25$. On cherche l'entier N qui est le plus petit entier k tel que $P(A > k) < q$, c'est-à-dire tel que $P(A \leq k) \geq 1- q$. On est donc ramené à considérer la fonction de répartition de la loi binomiale et des deux lois utilisées pour son approximation. Le tableau ci-dessous montre les résultats obtenus, pour les valeurs entières de k comprises entre 20 et 30.

k	Loi binomiale	Loi de Poisson	Loi de Gauss
20	0,92236	0,91702	0,90733
21	0,95142	0,94689	0,94401
22	0,97081	0,96725	0,96815
23	0,98315	0,98053	0,98296
24	0,99065	0,98883	0,99144
25	0,99500	0,99381	0,99696
26	0,99743	0,99668	0,99821
27	0,99872	0,99828	0,99926
28	0,99939	0,99913	0,99971
29	0,99971	0,99958	0,99989
30	0,99987	0,99980	0,99996

Ainsi, lorsque $q = 0{,}01$, on trouve une estimation du besoin en lignes de 24 par la loi binomiale, de 25 par la loi de Poisson, et de 24 encore par la loi de Gauss. Pour $q = 0{,}001$, on trouve respectivement 28, 28 et 27 lignes à brancher. L'amélioration de la probabilité de non saturation du réseau augmente rapidement, et il n'y a pas besoin de doubler le nombre de lignes pour passer de $q = 0{,}01$ à $q = 0{,}0001$. Les courbes des trois lois (on a relié les points pour obtenir une représentation plus lisible) sont représentées dans la figure ci-dessous.



► Ce modèle suggère un certain nombre de remarques :

— Il représente le point de vue de la compagnie du téléphone qui cherche à connaître la probabilité pour que son central soit saturé à un instant donné. La probabilité pour qu'un usager n'obtienne pas la tonalité est plus importante : lorsqu'on a $A > N$, il y a $A - N$ usagers qui n'obtiennent pas cette tonalité. Le calcul à faire pour évaluer le nombre de lignes a installer pour qu'un utilisateur ait une probabilité d'obtention de la ligne supérieure à 0,99 est donc différent. Pour être réaliste, il faut alors tenir compte de la durée des communications, et de la stratégie de rappel immédiat ou d'abandon d'un abonné n'obtenant pas la tonalité.

— L'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson ou par la loi de Gauss était très important à une époque où il fallait faire les calculs à la main. On se servait alors de tables donnant les probabilités des lois de Poisson ou de la loi normale réduite. A notre époque, plus aucun statisticien sérieux ne se sert de tables, et les programmes informatiques spécialisés calculent les lois binomiales sans difficultés. Les programmes les plus élaborés sont même capables de décider par eux-mêmes s'il convient de passer par une approximation, lorsque les paramètres sont très grands. L'importance donnée à l'étude des approximations devrait donc diminuer rapidement, ce qui permettrait d'étudier des questions d'un plus grand intérêt pratique comme les files d'attente markoviennes.

9.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) □

Connaissant p, la probabilité de mauvais pronostique est donnée par la fonction de répartition de la loi hypergéométrique. On a en effet un tirage de N individus dans une population de 30.000.000 parmi lesquels $p \times 30.000.000$ vont voter OUI. Si $p > 0,5$, la probabilité de faire un tirage conduisant à un mauvais pronostique est forcément inférieure à 0,5, de sorte que l'assertion (1) est fausse.

Comme la taille du tirage est très inférieure à celle de la population totale, on peut approcher la loi hypergéométrique par une loi binomiale de paramètres N et p. La fonction de répartition permet d'évaluer le risque de mauvais pronostique, par le calcul de $P\left(X \leq \frac{N}{2}\right)$. Numériquement, si $N = 500$, on trouve 0,3435.

Si la taille de l'échantillon utilisé pour le sondage est assez importante, on peut approcher la loi binomiale par une loi de Gauss, en considérant que $T = \dfrac{X - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}$ est une loi gaussienne réduite. Là encore, ce calcul suppose que l'on connaisse p. Numériquement, si

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$N = 5.000$, on trouve 0,07860. Voici un tableau des résultats numériques obtenus pour $p = 0,51$.

Calcul du risque de mauvais pronostique en fonction du nombre de personnes interrogées dans l'échantillon			
Taille de l'échantillon	Calcul direct par la loi hypergéométrique	Calcul à partir de la loi binomiale	Calcul à partir de la loi normale
100	0,4598	0,4599	0,4207
500	0,3423	0,3435	0,3273
1000	0,2704	0,2739	0,2635
1500	0,2211	0,2269	0,2192

Pour obtenir un tel tableau, on peut écrire un programme en Turbo-Pascal. On pourra comparer, en termes de longueur et de temps passé à l'écrire, au programme MATHEMATICA suivant, ne comportant qu'une instruction (que pour des raisons typographiques nous avons écrite sur plusieurs lignes), et produisant un tableau donnant les trois estimations, pour toutes les valeurs de N multiples de 100, entre 100 et 5.000 :

```
Table[{k,
   N[CDF[HypergeometricDistribution[k,    51*300,
     30000], k/2]],
   N[CDF[BinomialDistribution[k,   .51], k/2]],
   N[CDF[NormalDistribution[k*.51,  Sqrt[k*.51*49]],
     k/2]]},
   {k, 100, 5000, 100}]
```

En pratique, au moment du sondage, on ne connaît pas p. C'est donc plutôt dans l'autre sens que l'on procède : on interroge les individus d'un premier échantillon, et l'on se demande si l'on a un gros risque d'erreur à conclure. Si oui, on complète l'échantillon, sinon, on arrête le sondage. Supposons qu'on ait obtenu 15 OUI dans un échantillon de 20 personnes interrogées. On se trompe en pronostiquant alors le OUI si l'on a $p < 0,5$. Dans ce cas, la probabilité d'obtenir plus de 15 OUI dans un échantillon de 20 individus est inférieure à $1 - F_1(15)$, où F_1 est la fonction de répartition de la loi hypergéométrique de paramètres 30.000.000, p et 20. Comme 20 est très petit devant 30.000.000, on peut approcher F_1 par la fonction de répartition F_2 de la loi binomiale de paramètres 20 et 0,5. On obtient 0,005908. Si l'on procède à l'approximation par la loi gaussienne, on obtient 0,01267, ce qui est environ deux fois plus grand : pour $N = 20$, l'approximation de la loi binomiale par la loi gaussienne n'est pas bonne. Le calcul exact par la loi hypergéométrique donne 0,00590895, ce qui est très proche de la valeur trouvée par la loi binomiale, à savoir 0,00590897. Cette différence dans la qualité de l'approximation tient à la nature du paramètre qui assure la convergence : l'approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale est légitime dès que l'échantillon est petit par rapport à la population totale ; ici, 20 est petit devant 30.000.000. Pour l'approximation par la loi gaussienne, c'est la taille de l'échantillon qui doit être grande ; ici, 20 n'est pas un grand nombre, et c'est ce qui explique la médiocrité de l'approximation.

10.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ■
(4) ☐
(5) ☐

Le problème de cette question est désigné en théorie des files d'attente sous la dénomination "M/M/1/K". Le premier "M" qualifie les arrivées, markoviennes, c'est-à-dire avec des temps inter-arrivées répartis selon une loi exponentielle. Le second "M" qualifie le service, lui-aussi markovien, avec un temps d'examen d'un patient suivant une loi exponentielle. Le "1" signifie qu'il y a 1 serveur, ici le médecin. Enfin, le "K" indique que le système peut recevoir au plus K clients. Avant de voir les solutions des questions, voyons comment les équations de l'énoncé sont obtenues. Raisonnons d'abord entre les instants t et $t+\Delta t$ (Δt petit).

— Un développement limité de la probabilité pour qu'un patient se présente est $\lambda\Delta t$; le nom-bre de patients présents passe alors de i à $i+1$, si $0 \leq i \leq K-1$ (si $i = K$, un nouveau patient est rejeté).

Histoire : La théorie des files d'attente

C'est le mathématicien danois A. K. Erlang qui commença en 1909 l'étude des files d'attente, avec la publication de *The theory of Probabilities and Telephone Conversations.* Il remarqua que le système téléphonique est caractérisé soit par des arrivées poissonniennes, des temps de service exponentiels et de multiples serveurs, soit par des arrivées poissonniennes, des temps de service constants et un unique serveur. Il découvrit le principe d'équilibre, le principe de conservation pour la mise en équations.

Son travail fut complété en 1927 par Molina, et en 1928 par Thornton Fry ; tous deux s'intéressaient encore essentiellement aux lignes téléphoniques. En 1930, Félix Pollaczek s'intéressa à des files d'attente plus générales, et ses travaux furent complétés dans les années 30 par les russes Kolmogorov et Khintchine, par le français Crommelin, et par le suédois Palm. Ce fut l'époque des premières applications de la théorie des files d'attente à la gestion. La deuxième guerre mondiale donna naissance à la recherche opérationnelle qui intégra naturellement cette théorie.

Depuis cette époque, les applications se sont diversifiées : par exemple, étude des décollages et atterrissages des avions Galliher & Wheller, 1958, Rosenshine, 1968), ou maintenant, gestion des greffes d'organes, conception et fabrication de produits industriels, modèles pour les prêts bancaires etc.

— Un développement limité de la probabilité pour que le docteur termine l'examen d'un patient est $\mu\Delta t$; le nombre de patients dans le système passe alors de i à i–1, si $1 \leq i \leq K$ (si $i = 0$, il n'y a pas de client, donc aucun examen à finir).

— En négligeant la probabilité pour que deux événements se produisent entre t et $t+\Delta t$, un développement limité de la probabilité pour qu'il ne se produise rien, et que donc l'effectif reste constant, égal à i, est $1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t$ si $1 \leq i \leq K-1$, $1-\mu\Delta t$ si $i = K$, $1-\lambda\Delta$t si $i = 0$.

On obtient d'abord les équations

$$\begin{cases} p_0(t+\Delta t) & = (1-\lambda\Delta t)\,p_0(t) + \mu\Delta t\,p_1(t) + o(\Delta t) \\ p_i(t+\Delta t) & = \lambda\Delta t\,p_{i-1}(t) + (1-\lambda\Delta t - \mu\Delta t)\,p_i(t) \\ & \qquad + \mu\Delta t\,p_{i+1}(t) + o(\Delta t), \text{ si } 1 \le i \le K-1 \\ p_K(t) & = \lambda\Delta t\,p_{K-1}(t) + (1-\mu\Delta t)\,p_K(t) + o(\Delta t) \end{cases},$$

et, si Δt vers 0, les équations différentielles

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p_i'(t) = \lambda p_{i-1}(t) + (-\lambda-\mu)\,p_i(t) + \mu p_{i+1}(t), \text{ si } 1 \le i \le K-1 \\ p_K'(t) = \lambda p_{K-1}(t) - \mu p_K(t) \end{cases}$$

En régime d'équilibre, la probabilité $p_i(t)$ ne dépend pas de t. Sa dérivée est donc nulle, de sorte que l'on a le système donné dans l'énoncé,

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}\,p_0 \\ p_{n+1} = \dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\,p_n - \dfrac{\lambda}{\mu}\,p_{n-1} \qquad (1 \le n \le K-1) \\ p_K = \dfrac{\lambda}{\mu}\,p_{K-1} \end{cases}.$$

Revenons aux questions. Ce système se résout par récurrence, $p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}p_0$, $p_2 = \dfrac{\lambda}{\mu}p_1 = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$, ... ; la condition supplémentaire $\sum\limits_{i=0}^{K} p_i = 1$, fournit

$$\sum_{i=0}^{K} p_i = \sum_{i=0}^{K} \rho^i p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}\,p_0 & \text{si } \rho \ne 1 \\ (K+1)\,p_0 & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

puis
$$p_i = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^i}{1-\rho^{K+1}} & \text{si } \rho \ne 1 \\ \dfrac{1}{K+1} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

Il peut y avoir de 0 à K clients dans le système.

► Le nombre moyen L de patients dans le système est défini par $L = \sum_{i=0}^{K} ip_i$. Si $\rho = 1$, on trouve directement $L = \frac{\sum_{i=0}^{K} i}{K+1} = \frac{K}{2}$. Et si $\rho \neq 1$,

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=0}^{K} ip_i = \sum_{i=1}^{K} i\rho^i p_0 \\ &= \rho\, p_0 \sum_{i=1}^{K} \frac{d}{d\rho}\rho^i = \rho\, p_0 \frac{d}{d\rho}\sum_{i=1}^{K} \rho^i \\ &= \rho\, p_0 \frac{d}{d\rho}\frac{\rho\left(1-\rho^K\right)}{1-\rho} \\ &= \rho\, p_0 \frac{1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{(1-\rho)^2} \\ &= \frac{\rho\left[1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}\right]}{\left(1-\rho^{K+1}\right)(1-\rho)} \end{aligned}$$

► Le nombre de patients dans la salle d'attente est égal au nombre de patients dans le système moins un, sauf s'il n'y a aucun patient (ce qui se produit avec la probabiité p_0). Par suite, le nombre moyen L_q de patients dans la salle d'attente se déduit de L grâce à la relation

$$L_q = L - (1 - p_0) = L - \frac{\rho\left(1-\rho^K\right)}{1-\rho^{K+1}}$$

► Le temps de séjour moyen W d'un patient entrant dans le système (attente puis consul-tation) se déduit facilement de L grâce à la ***formule de Little***, qui s'écrit $W = \frac{L}{\lambda'}$, où λ' est le taux moyen de consommateurs entrant dans le système. Ici, $\lambda' = \lambda(1 - p_K)$, d'où, lorsque $\rho \neq 1$,

$$W = \frac{1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{\left(1-\rho^{K+1}\right)(1-\rho)\mu(1-p_K)}$$

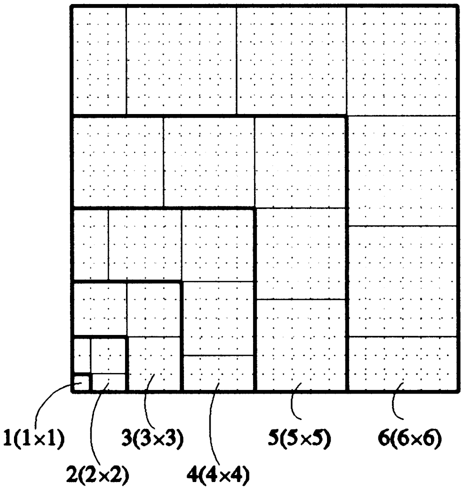
Résultats du QCM n°13

Récapitulatif

(Questions p. 112)

1.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) □
(5) ■



La figure est faite pour $n = 6$, mais il est bien clair que le résultat est vrai en général. Un calcul direct de l'aire du carré montre que l'aire totale vaut

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + 6)^2$$

En comptant les carrés suggérés par le découpage, on voit que cette aire vaut également

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 6^3$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

2.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) □

La solution de l'étudiant suppose que α et β sont les deux solutions de l'équation du second degré $x^2 + \alpha x + \beta = 0$. Or quand on demande de chercher "les réels α et β solutions de l'équation...", on n'exclut pas le cas $\alpha = \beta$; si $\alpha = \beta$, on peut avoir une deuxième solution, autre que α.

Voici une solution correcte de l'exercice.

Le fait que α et β soient solutions de l'équation se traduit par $\begin{cases} \alpha^2 + \alpha^2 + \beta = 0 \\ \beta^2 + \alpha\beta + \beta = 0 \end{cases}$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 2\alpha^2 + \beta = 0 \\ \beta\left(\beta + \alpha + 1\right) = 0 \end{cases}$$

et à $\begin{cases} 2\alpha^2 + \beta = 0 \\ \beta + \alpha + 1 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2\alpha^2 + \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

On obtient donc **trois** couples $(\alpha;\beta)$ solutions, à savoir $(0;0)$, $(1;-2)$ et $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Lorsque $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, les deux solutions de l'équation $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ sont $-\frac{1}{2}$ et 1.

3.

(1) ■
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) □

La règle de multiplication des matrices, ligne par colonne montre que les matrices de A_n sont symétriques.

Cela étant, cherchons une relation de récurrence entre les u_n. Une matrice $M = (a_{ij})$ de A_{n+1} comporte un unique terme non nul sur la première ligne.

— S'il s'agit de a_{11}, il y a deux possibilités pour a_{11}, et les autres termes de la première ligne et de la première

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

colonne sont forcément nuls. La matrice extraite, formée des termes qui ne sont ni sur la première ligne ni sur la première colonne est n'importe quel élément de A_n. Cela fait donc $2u_n$ telles matrices.
— S'il s'agit de a_{1i}, avec $i > 1$, on a deux possibilités pour a_{1i}, et les termes de la 1ère et de la i-ième ligne sont nuls, comme ceux de la 1ère et de la i-ième colonne. Les autres termes forment une matrice quelconque de A_{n-1}. Cela fait donc $2\,u_{n-1}$ matrices.

En fin de compte, on a la formule de récurrence
$$u_{n+1} = 2u_n + 2n\,u_{n-1}.$$
Sachant que l'on a $u_1 = 2$, $u_2 = 8$, on en déduit
$$u_n = \sum_{\{(k,p)\in\mathbb{N}\,:\; k+2p=n\}} \frac{2^k\, n!}{k!\; p!}$$
On peut montrer que cela s'écrit également
$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!\; 2^{n-2k}}{k!}$$
Sous cette dernière forme, on pourra établir le lien avec le nombre de façons de placer n tours sur un équiquier de taille n, symétriquement par rapport à la diagonale, et de telle manière que les tours ne se mettent pas mutuellement en échec, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{2^k\, k!}$.

4.

(1) ■
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) □

Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension n, la famille
$$\left\{I;\, A_1;\, A_1^2;\, A_1^3;\, \dots;\, A_1^n\right\}$$
est liée. Il existe donc un polynôme P de degré $\leq n$ tel que $P(A_1) = 0$. Ce polynôme se factorise en facteurs de degrés 1 ou 2. Si $\mathbb{R}^n$ est un corps, pour avoir $P(A_1) = 0$, A_1 doit annuler au moins l'un de ces

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

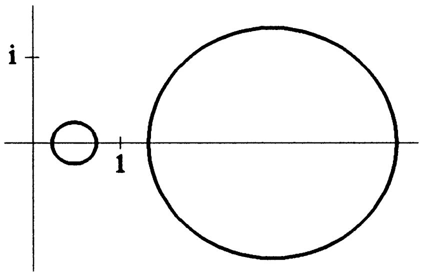
facteurs. Il ne peut s'agir d'un facteur de degré 1, car par hypothèse, I et A_1 sont linéairement indépendants. Bref, A_1 annule un polynôme de degré 2, $aA_1^2 + bA_1 + cI = 0$, avec $b^2 - 4ac < 0$. En mettant ce trinome du second degré sous forme canonique, on voit qu'il existe λ et μ tels que $(\lambda A_1 + \mu I)^2 = -I$. De même, il existe α et β tels que $(\alpha A_2 + \beta I)^2 = -I$. En factorisant la différence de ces deux expressions grâce à l'identité remarquable

$$u^2 - v^2 = (u - v)(u + v),$$

on trouve une combinaison linéaire reliant A_1, A_2 et I, ce qui contredit l'hypothèse. Cela montre un résultat établi pour la première fois par Frobenius en 1877 : $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ne peut jamais être muni d'une structure de corps commutatif dont l'addition soit celle de la structure d'espace vectoriel.

5.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ☐
(4) ■
(5) ☐



6.

(1) ☐
(2) ■
(3) ☐
(4) ☐
(5) ☐

Les quatre points sont colinéaires si et seulement si les deux quotients $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ et $\dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ sont réels. Si les quatre points ne sont pas colinéaires, l'argument de

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

$\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ ne peut différer de celui de $\dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ que par un multiple de 2π.

7.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) ■
(5) ■0

L'assertion (3) est vraie pour n'importe quelle matrice. Quand on additionne tous les coefficients d'une matrice, qu'on le fasse ligne par ligne, ou colonne par colonne, le résultat est toujours le même. C'est la propriété (2) qui est plus remarquable. Désignons par C_j la somme des coefficients de la colonne j, et par L_i la somme des coefficients de la ligne i ; $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$, et $L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$. Notons d'abord que la propriété (3), qui peut s'écrire $\sum_{j=1}^{n} C_j^2 = \sum_{i=1}^{n} L_i^2$ est vraie si la matrice est triangulaire supérieure, c'est-à-dire n'a que des 1 au-dessus strictement de la diagonale, et que des 0 au-dessous de celle-ci. Cela étant, que se passe-t-il lorsqu'on intervertit un 0 et un 1, par exemple si l'on change a_{ij} en 1 (et donc a_{ji} en 0), alors qu'il valait auparavant 0 ? Les lignes et colonnes i et j sont les seules à être modifiées. On peut résumer les changements dans un tableau.
La propriété d'"antisymétrie" de la matrice conduit à $R_i + C_i = R_j + C_j = n - 1$, de sorte que le bilan est le même pour les lignes et pour les colonnes.

En considérant comme échantillons les (C_i) et les (D_i), on obtient deux échantillons éventuellement différents qui ont la même moyenne et la même variance.

Ces matrices ont de nombreuses interprétations, notamment en mécanique.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

	Avant	Après
C_i	C_i	C_i-1
C_j	C_j	C_j+1
L_i	L_i	L_i+1
L_j	L_j	L_j-1
C_i^2	C_i^2	$C_i^2-2C_i+1$
C_j^2	C_j^2	$C_i^2+2C_i+1$
L_i^2	L_i^2	$L_i^2+2L_i+1$
L_j^2	L_j^2	$L_j^2-2L_j+1$
$\Sigma_k\ L_k^2$	$\Sigma_k\ L_k^2$	$\Sigma_k\ L_k^2+2L_i$ $-2L_j+2$
$\Sigma_k\ C_k^2$	$\Sigma_k\ C_k^2$	$\Sigma_k\ C_k^2+$ $2C_j-2C_i+2$

8.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) ■

Notons M_1, ..., M_n, ... les points choisis dans le plan, E_n les ensembles définis par $E_n = \{M_1;M_2;...;M_n\}$, et F_n l'ensemble des droites reliant les éléments de E_n. Un élément de F_n est déterminé de manière unique par le choix d'une paire d'éléments de E_n. Le nombre d'éléments de F_n est donc égal au nombre de paires de E_n, à savoir $\binom{n}{2}$.

Cela étant, étudions ce qui se passe lorsqu'on rajoute M_{n+1} à E_n, pour former E_{n+1}. On trace alors n droites supplémentaires, disons D_1, ..., D_n, la droite D_i reliant M_{n+1} et M_i. Cette droite D_i coupe les $\binom{n+1}{2}$ autres

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

droites, mais les points d'intersection de D_i avec les autres droites ne sont pas au nombre de $\binom{n+1}{2}$, car il y a toutes les droites passant par M_{n+1} et M_i. Comptons donc précisément ce nombre de points d'intersection :
Traçons d'abord D_1, puis les autres droites D_i. Lorsqu'on procède ainsi, le nombre de points d'intersection de D_1 avec les droites déjà tracées est $\frac{n^2}{2} - \frac{3}{2}n + 2$, car D_1 est la première droite tracée passant par M_{n+1}. Ainsi, sur D_1, il y a seulement $\frac{n^2}{2} - \frac{3}{2}n + 3$ intervalles déterminés par les points d'intersection avec les autres droites. Chacun de ces intervalles coupe en deux l'une des u_n zones du plan formées à l'étape précédente à partir des points de E_n.
Pour les n–1 autres droites D_2, ..., D_n, le calcul est légèrement différent. Il y a n–1 droites autres que D_i passant par M_i, et autant pour M_{n+1}. Cela fait donc

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{2} - 2(n-1) - 1 &= \frac{(n+1)n}{2} - 2n + 1 \\ &= \frac{n^2}{2} - \frac{3}{2}n + 1\end{aligned}$$

points d'intersection autres que M_{n+1} et M_i. Au total, il y a $\frac{n^2}{2} - \frac{3}{2}n + 3$ points d'intersection sur D_i, qui découpent sur cette droite $\frac{n^2}{2} - \frac{3}{2}n + 4$ intervalles. Comme pour la droite D_1, chacun de ces intervalles coupe en deux l'une des zones du plan que l'on avait formé à l'étape précédente à partir des points de E_n, et des droites D_p tracées en premier. Ainsi, chacune des n–1 droites tracées après D_1 rajoute $\frac{n^2}{2} - \frac{3}{2}n + 4$ zones, ce qui nous donne finalement la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + \frac{n^3}{2} - \frac{3}{2}n^2 + 4n - 1$$

On reconnaît une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. Si T désigne l'application linéaire dite "opérateur de translation", qui, à une suite $u = (u_n)$ associé la suite translatée (u_{n+1}), l'équation récurrente s'écrit $(T - \mathrm{Id})(u) = v$, où v est la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{n^3}{2} - \frac{3}{2}n^2 + 4n - 1$. On reconnaît une équation linéaire. L'ensemble des solutions est donc un sous-espace affine de l'espace des suites dont la direction vectorielle est le noyau de $(T - \mathrm{Id})$; autrement dit, on peut exprimer les solutions de cette équation récurrente comme la somme d'une solution particulière et de la "solution générale de l'équation sans second membre", $(T - \mathrm{Id})(u) = 0$. Cette équation admet comme ensemble de solutions les suites constantes. Reste à trouver une solution particulière. Les suites polynomiales de degré inférieur ou égal à p sont invariantes par T, et par Id. Ici, la suite v du second membre, définie par $v_n = \frac{n^3}{2} - \frac{3}{2}n^2 + 4n - 1$ est un polynôme (en n) de degré 3. Comme les suites constantes (polynômes de degré $0 < 3$) sont solutions de l'équation sans second membre, on peut chercher une solution sous la forme d'un polynôme de degré 4. Il est inutile de résoudre de manière générale l'équation récurrente ; on peut chercher directement u_n, en résolvant le système d'équations obtenu à partir des premières valeurs de la suite.

Ces premières valeurs sont $u_2 = 2$, $u_3 = 7$, $u_4 = 18$, $u_5 = 41$, $u_6 = 85$. La résolution du système conduit à la forme générale de u_n :

$$u_n = \frac{1}{8}n^4 - \frac{3}{4}n^3 + \frac{23}{8}n^2 - \frac{13}{4}n + 1$$

9.

(1) ■ (2) □ (3) □ (4) □ (5) ■

Pour calculer l'espérance et la variance de S, utilisons la méthode des fonctions génératrices. Posons

$$h_k = P(S=k)\ ,\quad f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i\, z^i\ ,\quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\, z^n \quad \text{et}$$

$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k\, z^k$. En pratique, la capacité des autobus et celle du ferry sont limitées, de sorte que les sommes sont finies.

On a :

$$\begin{aligned}
h(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\ P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n = k) \right) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n\ P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n = k)\ z^k \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(g_n \sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n = k)\ z^k \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(g_n \left[f(z) \right]^n \right) \\
&= g \circ f(z)
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement l'espérance et la variance de S, grâce aux formules

$$E(S) = h'(1) \quad \text{et} \quad Var(S) = h''(1) + h'(1) - \left[h'(1)\right]^2$$

On obtient, en utilisant ces formules aussi pour les X_i et pour N,

$$E(S) = E(X_1)\ E(N)$$

$$Var(S) = Var(X_1)\ E(N) + Var(N) \left[E(X_1) \right]^2$$

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par $P(X=k)=p_k$. On appelle ***fonction génératrice de*** X la fonction f_X définie par la série $f_X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$. Cette fonction f_X est définie au moins sur $]-1;1[$. Sous réserve que l'espérance et la variance de X soient définies, par exemple si X est à support fini, la fonction f_X permet de calculer cette espérance et cette variance. En effet, on a

$$f_X{}'(1)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,p_n=E(X)$$

et

$$f_X{}''(1)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p_n=E\big(X(X-1)\big)$$

d'où

$$Var(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=f_X{}''(1)+f_X{}'(1)-\left[f_X{}'(1)\right]^2$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs entières dont les fonctions génératrices respectives sont f_X et f_Y, alors la fonction génératrice f_{X+Y} de $X+Y$ vérifie $f_{X+Y}=f_X\,f_Y$.

Voici les principales fonctions génératrices usuelles :

Nom de la loi	Loi	Fonction génératrice
Loi binomiale de paramètres n et p	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$f_X(z)=(pz+1-p)^n$
Loi de Poisson de paramètre λ	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	$f_X(z)=e^{\lambda(z-1)}$
Loi géométrique de paramètre p	$P(X=k)=p(1-p)^k$	$f_X(z)=\dfrac{p}{1-(1-p)z}$

10.

(1) ☐ La densité f de X est définie par

(2) ■

(3) ☐
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

(4) ☐

(5) ■ L'espérance $E[X]$ de X vérifie $E[X] = \mu$, et sa variance $\mathrm{Var}[X]$ est donnée par $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$.

Pour tous réels a et b, la variable aléatoire $aX + b$ suit une loi normale $N(a\mu + b, |a|\sigma)$.

Enfin, une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance σ^2 suit une loi normale $N(\mu;\sigma)$ si et seulement si $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale réduite, $N(0;1)$.