



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Professeur I. Smith
Dr. P. Lestuzzi

Dynamique des structures

Semestre d'automne 2013/2014

imac

Destiné aux étudiants en génie civil
1^{er} Semestre master

Table des matières

Notation	iv
1. Introduction	1
2. Notions de base	2
2.1 Mouvements.....	2
2.2 Evolution dans l'espace	3
2.3 Définition de quelques grandeurs dynamiques.....	3
2.4 Rigidité de la structure	4
2.5 Rigidité équivalente d'un système.....	5
3. Systèmes à un degré de liberté	6
3.1 Oscillations non amorties	6
3.2 Oscillations amorties.....	9
3.2.1 Amortissement faible : $\lambda < \omega_n$	11
3.2.2 Amortissement fort : $\lambda > \omega_n$	12
3.2.3 Amortissement critique : $\lambda = \omega_n$	12
3.3 Oscillations entretenues ou forcées.....	12
3.3.1 Amortissement faible : $\lambda \rightarrow 0$	15
3.3.2 Avec amortissement : $\lambda > 0$	16
3.4 Transmittance	17
3.4.1 Résonance du système.....	19
3.4.2 Amortissement nul	19
3.4.3 Remarque importante	19
3.5 Mouvement de la fondation.....	20
3.6 Réponse à une charge arbitraire.....	21
3.6.1 Charges arbitraires.....	21
3.6.2 Force quelconque	22
3.6.3 Intégrale de Duhamel.....	24
3.6.4 Réponse à une charge échelon	25
3.6.5 Réponse à une force augmentant linéairement.....	25
3.6.6 Réponse à une force constante appliquée lentement	26
3.6.7 Réponse à une charge impulsionnelle	28
3.6.8 Réponse à une charge d'impact.....	35
3.6.9 Evaluation numérique	37
4. Systèmes à masse répartie	43
4.1 Corps rigides.....	43
4.2 Corps flexibles	44
4.2.1 Travail virtuel lié à la rigidité en flexion.....	45
4.2.2 Travail virtuel lié à l'inertie	45

4.2.3	Travail virtuel lié aux forces extérieures	45
4.2.4	Valeurs équivalentes	46
4.2.5	Charge critique de flambage	46
5.	Systèmes à plusieurs degrés de liberté	47
5.1	Analyse modale.....	48
5.1.1	Oscillations non-amorties	49
5.1.2	Oscillations amorties et forcées	52
5.1.2.1	Amortissement classique	53
5.1.2.2	Amortissement de Rayleigh	54
5.1.2.3	Amortissement non-classique	54
5.2	Résolution numérique par la méthode de Holzer	62
5.3	Amortisseur massique	63
6.	Réponses et spectres	65
6.1	Méthode des forces de remplacement	65
6.2	Exemple pour une structure à un degré de liberté	66
6.3	Analyse des réponses dans le domaine fréquentiel.....	67
6.3.1	Du domaine temporel au fréquentiel	67
6.3.2	La transformée de Fourier.....	68
6.3.3	Transformée de Fourier Discrète (TFD)	69
6.3.4	Transformée de Fourier Rapide, Fast Fourier Transform (FFT).....	72
7.	Vent.....	74
7.1	Introduction.....	74
7.1.1	Généralités.....	74
7.1.2	Origine du vent.....	77
7.2	Couche limite atmosphérique.....	77
7.2.1	Couche limite de l'atmosphère et turbulence	77
7.2.2	Profil vertical des vitesses moyennes	78
7.2.3	Intensité de turbulence.....	79
7.2.4	Macro-échelle de la turbulence	79
7.2.5	Fonction de densité spectrale énergétique	79
7.2.5.1	Collines	80
7.3	Introduction à la norme SIA 261	80
7.3.1	Méthodologie.....	80
7.3.2	Forces dues au vent, approche simple	81
7.3.3	Risques acceptés.....	82
8.	Conclusion.....	84
A.	Annexe – Rappel sur les structures.....	85
A.1	Rigidité	85
A.2	Détermination des caractéristiques de rigidité d'une structure : application de la méthode des déplacements.....	86
A.3	Corps rigides – moment d'inertie	95
B.	Annexe mathématique	96
B.1	Algèbre matricielle.....	96

B.2	Equations différentielles homogènes du 2^e ordre	100
B.3	Equations différentielles non homogènes du 2^e ordre.....	101
B.4	Formules trigonométriques.....	103
C	Vent.....	104
C.1	Introduction.....	104
C.1.1	Généralités.....	104
C.1.2	Origine du vent.....	104
C.1.2.1	Circulation atmosphérique générale	105
C.1.2.2	Mousson	108
C.1.2.3	Cyclones tropicaux.....	108
C.1.3	Fonction de densité spectrale énergétique	110
C.2	Couche limite atmosphérique	111
C.2.1	Intensité de turbulence.....	111
C.2.2	Macro-échelle de la turbulence	111
C.3	Introduction à l'aérodynamique des constructions.....	112
C.3.1	Généralités.....	112
C.3.2	Répartition des pressions autour des bâtiments	113
C.3.3	Répartition des pressions sur les faces et les toits.....	114
C.4	Facteur dynamique dans le cas de la résonance dans le sens du vent.....	117
C.5	Références sur le vent.....	119

Notation

a_n	vecteur propre
β	pulsation relative, soit ω/ω_n
c	constante d'amortissement
c^*	amortissement équivalent relatif à un système fondamental équivalent
δ_{st}	déplacement statique
δ_{st}^*	mouvement statique équivalent d'une masse sans mouvement de la fondation
E	module de Young (élasticité)
e_x	vecteur de direction
f_n	fréquence propre
F	force appliquée au système
F^*	force équivalente qui agit sur une masse sans mouvement de la fondation
F_0	force statique
$F_{TR-\max}$	force transmise
I	inertie
k	rigidité
k^*	rigidité équivalente relative à un système fondamental équivalent
λ	facteur d'amortissement
L	longueur de l'élément
m	masse
m^*	masse équivalente relative à un système fondamental équivalent
N_{crit}	charge critique de flambage
φ	déphasage
r_n	vecteur des facteurs de participation
R_d	facteur d'amplification
R_f	facteur de transmissibilité
S_a	spectre de réponse de l'accélération
S_d	spectre de réponse du déplacement
t_r	temps de déchargement
t_d	temps d'impulsion
T	période de sollicitation
T_n	période propre
V	vitesse
ω	fréquence de sollicitation
ω_n	pulsation propre

ν	pulsation amortie ou pseudo pulsation
x	déplacement
x_0	déplacement initial
x_a	déplacement absolu
x_g	déplacement de la fondation
\dot{x}	vitesse
\dot{x}_0	vitesse initiale
\ddot{x}	accélération
\ddot{x}_0	accélération initiale
\ddot{x}_g	accélération de la fondation
$\psi(x)$	forme de la déformée
ζ	coefficient d'amortissement
$z, z(t)$	amplitude du déplacement
$z_n, z_n(t)$	coordonnées modales

1. Introduction

Un des mouvements les plus importants observés dans la nature est le mouvement oscillatoire, en particulier le mouvement harmonique : oscillations d'un pendule, d'une masse attachée à un ressort, d'un gratte-ciel, etc.

Dans le cas des oscillations de systèmes mécaniques conservatifs isolés, on parle d'oscillations libres ; en présence de frottement, l'amplitude des oscillations décroît et on observe des oscillations amorties. Si les oscillations sont entretenues par une action extérieure, on parle d'oscillations forcées. Dans ce dernier cas, on verra apparaître de nouveaux phénomènes tels que la résonance, qui peut avoir des conséquences catastrophiques. Cependant, la plupart des problèmes observés (mis à part les tremblements de terre) sont liés à des critères d'aptitude au service. Ceux-ci demandent une connaissance précise du comportement linéaire des structures

Livres de référence conseillés en dynamique des structures :

- [1] Chopra, A.K., *Dynamics of Structures - Theory and Application to Earthquake Engineering*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [2] Bachmann, H. et al., *Vibration Problems in structures*, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [3] Paultre, P., *Dynamique des structures – application aux ouvrages de génie civil*, Hermes-Lavoisier, Paris, 2005.
- [4] Soong, T.T. and Dargush, G.F., *Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering*, John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [5] Arbenz, K. et Wohlhauser, A., *Compléments d'analyse*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1981.

2. Notions de base

2.1 Mouvements

Une structure sollicitée par une charge subit un certain mouvement ; dans le cas d'une sollicitation uniquement en traction, le mouvement sera translationnel et, dans le cas d'une flexion, celle-ci imprimera à la structure un mouvement translationnel et rotationnel.

Le mouvement oscillatoire d'une structure, dont le lieu géométrique est connu (dans un système de coordonnées déterminé) est caractérisé par un régime oscillatoire dépendant de la rigidité, de la masse et de l'amortissement de la structure. Les différents types de régime d'un mouvement oscillatoire sont le régime harmonique, le régime périodique et le régime transitoire.

Régime harmonique : décrit un mouvement oscillatoire au voisinage d'une position d'équilibre stable (ex. machinerie).

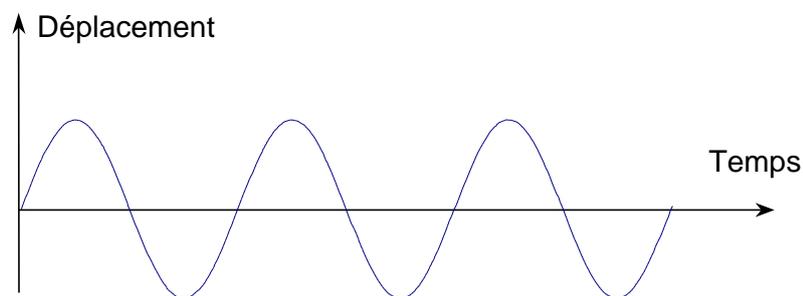


Figure (2.1.a) – Charge harmonique

Régime périodique : décrit le même mouvement de manière périodique (ex. un piéton sur une passerelle).

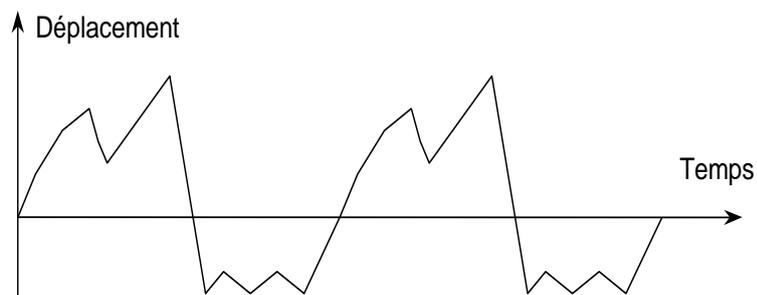


Figure (2.1.b) – Charge périodique quelconque

Transitoire : décrit un mouvement à caractère aléatoire (ex. trafic, séisme).

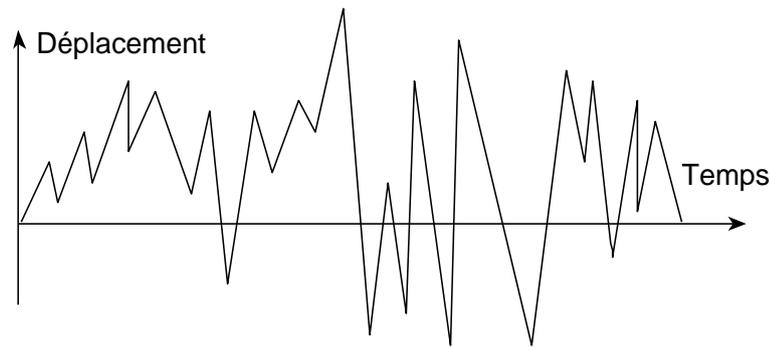


Figure (2.1.c) – Charge transitoire

2.2 Evolution dans l'espace

Comme pour l'analyse statique, l'analyse dynamique des structures peut être effectuée dans le plan ou en trois dimensions. Ce cours se limitera à l'analyse des mouvements dans le plan. (Exemples : flexion plane, traction plane, etc.)

Mouvement dans le plan \Rightarrow 3 degrés de liberté :

- translations selon x et y
- rotation autour de z (dans le plan xy)

Mouvement dans trois dimensions \Rightarrow 6 degrés de liberté :

- translations selon x, y et z
- rotations autour de x, y et z

2.3 Définition de quelques grandeurs dynamiques

Pulsation propre :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [\text{rad/s}] \quad (1)$$

où :

k : rigidité de l'élément [N/m]
 m : masse de l'élément [kg]

Période propre :

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad [\text{s}] \quad (2)$$

Fréquence ou fréquence propre :

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad [\text{s}^{-1}] \text{ ou } [\text{Hz}] \quad (3)$$

Remarque : Ces trois grandeurs (pulsation, période et fréquence) portent la dénomination « propre » car il s'agit de propriétés qui sont propres à l'oscillateur, dépendant uniquement de la masse et de la rigidité de celui-ci.

2.4 Rigidité de la structure

La rigidité d'une structure, k (en $[N/m]$), dépend des dimensions géométriques de celle-ci et du module d'élasticité du matériau qui la compose. La rigidité équivaut à la force qu'il faut exercer sur l'élément pour induire un déplacement unitaire. Il est à noter que ce cours se limite à l'utilisation de matériaux élastiques linéaires, la rigidité est donc constante tout au long des analyses. La rigidité vaut :

$$k = \frac{F(\delta x)}{\delta x}$$

où :

δx est un déplacement (translation / rotation) unitaire

$F(\delta x)$ est la force qui permet d'induire le déplacement unitaire δx

- Exemple 2.1- Rigidité d'un système à un degré de liberté

Voici l'exemple d'une colonne encastrée à la base dont une masse ponctuelle est fixée à son autre extrémité.

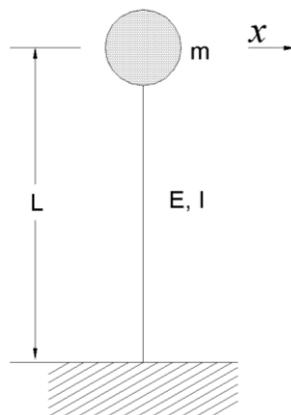


Figure (2.2) – Exemple 2.1

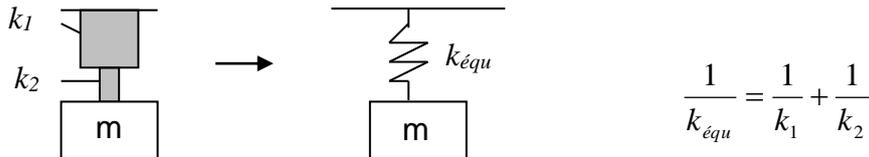
La rigidité de cette structure pour un déplacement horizontal de la masse prend la valeur suivante :

$$k = \frac{3EI}{L^3}$$

2.5 Rigidité équivalente d'un système

Dans le cas d'un système, une rigidité équivalente est définie. Pour plus d'informations, se référer aux cours de mécanique des structures et solides IV et V.

Système (de ressorts) en série :



Système (de ressorts) en parallèle :

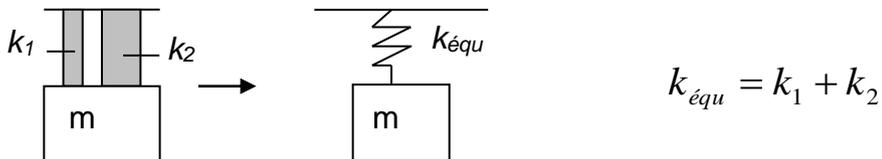


Figure (2.3) - Systèmes en série et en parallèle

L'analogie avec l'électricité est un réseau avec des condensateurs à la place des ressorts.

3. Systèmes à un degré de liberté

3.1 Oscillations non amorties

On parle d'oscillations non amorties quand l'amortissement est nul, c'est-à-dire $c=0$.
Avec

c : constante d'amortissement [Ns/m] ou [kg/s]

Schéma du système :

Un système non amorti peut être modélisé, à sa position d'équilibre et à sa position déformée, comme présenté à la figure (3.1). Les 5 hypothèses de base du modèle sont :

- le ressort a un comportement force/déformation qui est linéaire ;
- le ressort est sans masse ;
- il n'y a aucune friction provenant des rouleaux ;
- la masse est indéformable, et ;
- la résistance de l'air est négligée.

Remarque : En réalité, dans les applications du génie civil, ces hypothèses ne sont jamais satisfaites. Toutefois, l'utilisation d'un tel modèle est très utile car elle permet de saisir les interrelations entre les différentes grandeurs du système ainsi que les tendances associées.

Dans un système linéaire, la gravité n'a aucun effet sur le mouvement oscillatoire, même pour des oscillations verticales.

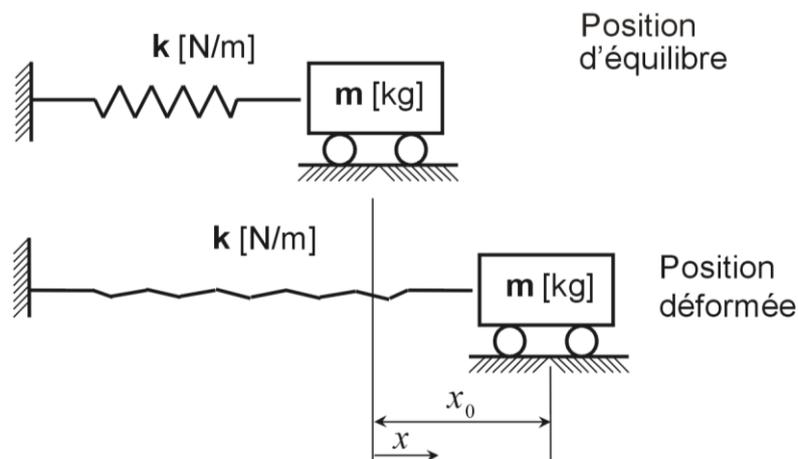
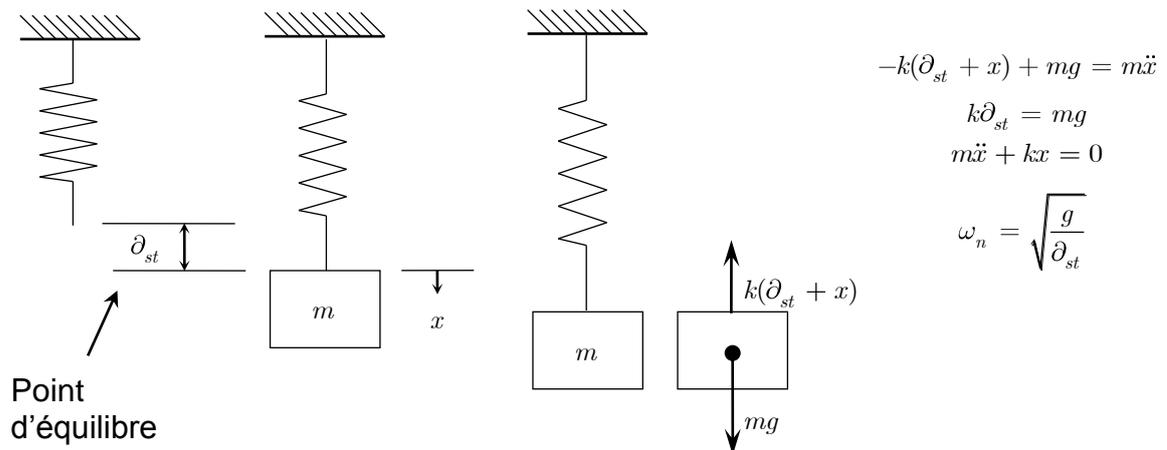


Figure (3.1) - Système non amorti

L'effet du poids



On constate ainsi qu'il n'y a pas d'effet. Cet argument n'est cependant valable que pour des systèmes linéaires.

Bilan des forces en position déformée :

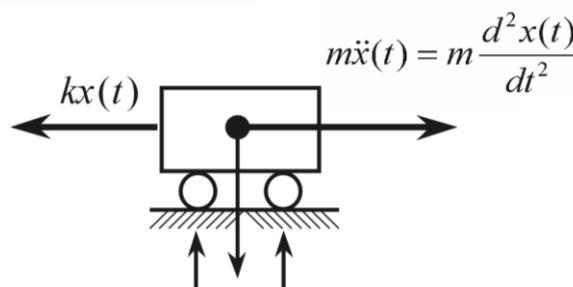


Figure (3.2) – Forces présentes dans un système non amorti

Ainsi, selon la Loi de Newton :

$$\Sigma F_x = m\ddot{x}(t) \tag{4a}$$

$$-kx(t) = m\ddot{x}(t) \tag{4b}$$

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{4c}$$

En posant $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, l'équation (4c) devient :

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{5}$$

La solution générale de l'équation (5) a deux formulations possibles:

$$x(t) = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t \tag{6a}$$

ou

$$x(t) = C \cos(\omega_n t - \phi) \tag{6b}$$

avec :

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Où A , B , C et ϕ sont des constantes à déterminer par les conditions initiales suivantes : en $t = 0$:

$$x = x_0 \Rightarrow B = x_0, \text{ et}$$

$$\dot{x} = V_0 \Rightarrow \omega_n A = V_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{\omega_n}$$

En insérant ces constantes dans les solutions (6), on trouve :

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t \quad (\text{première formulation}) \quad (7a)$$

ou

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_n}\right)^2} \cos \left[\omega_n t - \arctg \left(\frac{V_0}{\omega_n x_0} \right) \right] \quad (\text{deuxième formulation}) \quad (7b)$$

Valeurs dynamiques pour des structures de génie civil :

Voici une liste de quelques considérations quant aux valeurs dynamiques (période et fréquence propre) de diverses structures de génie civil :

- Bâtiments :** plus la hauteur du bâtiment est élevée, plus sa rigidité diminue, et plus sa fréquence propre est petite car la fréquence propre est fonction de la rigidité. Ainsi, un bâtiment d'une trentaine d'étages a une fréquence propre plus faible qu'un bâtiment plus petit.
- Barrages :** les barrages ont généralement une fréquence propre élevée (dépendante de la hauteur d'eau); un phénomène d'oscillation pourrait être induit par des turbulences créées par le fluide sortant à la prise d'eau si celle-ci a un dysfonctionnement soudain.
- Ponts :** l'élanement étant en rapport direct avec le type de section, plus un pont est élancé (dans le sens longitudinal de la travée), plus sa fréquence propre diminue, celle-ci variant de 5 à 11 Hz pour un pont à section ouverte long de 20 m jusqu'à 0.6 Hz pour un pont haubané avec une portée de 140 m.
- Cheminée :** ce genre de structure est très exposé au vent ; les cheminées sont donc particulièrement exposées aux effets dynamiques.
- Cadres :** plus le rapport entre les rigidités des traverses et des montants est grand, plus la fréquence propre est élevée.

En général, l'ordre de grandeur de la fréquence propre des structures du génie civil, toutes confondues, se situe entre 0.5 et 10 Hz, à quelques exceptions près.

3.2 Oscillations amorties

On parle d'oscillations amorties quand l'amortissement n'est pas nul, c'est-à-dire quand $c \neq 0$.

Schéma d'un système:

La figure (3.3) illustre un modèle d'un système amorti, modélisé à sa position d'équilibre.

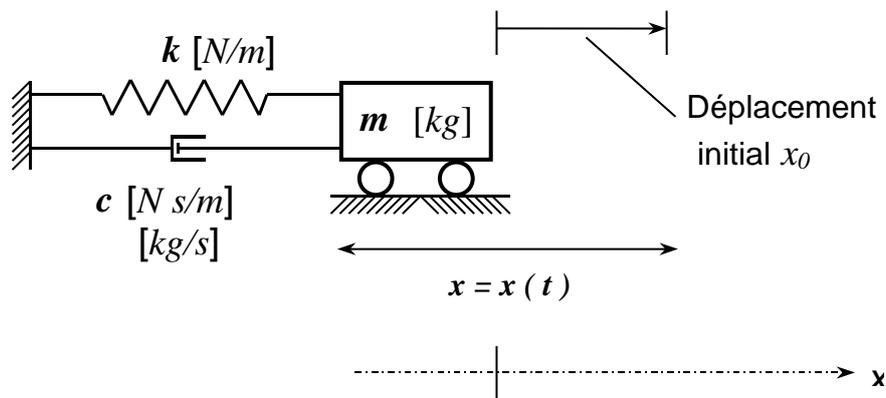


Figure (3.3) - Système amorti

Bilan des forces en position déformée :

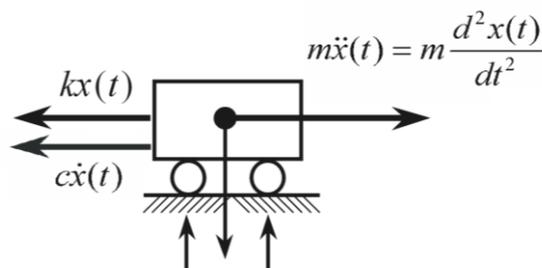


Figure (3.4) – Forces et action de la masse présentes dans un système amorti

Ainsi, selon la Loi de Newton, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\Sigma F_x = m\ddot{x}(t) \tag{8a}$$

$$-kx(t) - c\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t) \tag{8b}$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{9}$$

où :

$$2\lambda = \frac{c}{m}$$

avec :

λ : facteur d'amortissement [s^{-1}]

Remarques : - Il est à noter que l'ampleur de l'amortissement dépend de la vitesse et non pas du déplacement.
- La substitution effectuée ci-dessus a pour but de changer l'unité afin de faciliter la résolution de l'équation différentielle par la suite.

La solution de l'équation de type :

$$x(t) = Ae^{rt} \quad (10a)$$

peut s'écrire de la manière suivante :

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (10b)$$

où :

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_n^2} \quad (10c)$$

sont les solutions de l'équation caractéristique suivante :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_n^2 = 0$$

Le problème a ainsi été transformé en deux sous-problèmes de constantes C_1 et C_2 .

Trois cas d'amortissements du système peuvent alors se présenter : un *amortissement faible*, un *amortissement critique* ou un *amortissement fort*. La figure (3.5) illustre ces trois niveaux d'amortissement.

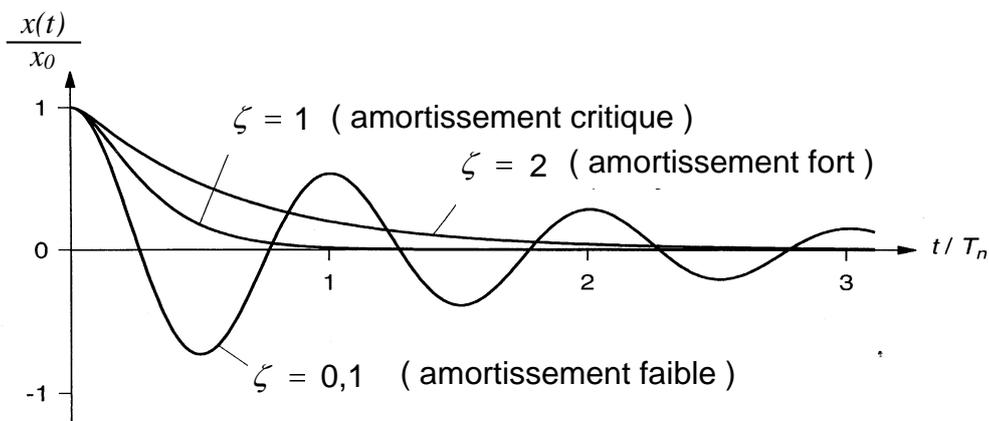


Figure (3.5) – Niveaux d'amortissement, réf. [1]

L'amortissement faible constitue le régime le plus dangereux pour les structures du génie civil.

3.2.1 Amortissement faible : $\lambda < \omega_n$

Dans ce cas, les racines r_1 et r_2 sont complexes car $\lambda^2 - \omega_n^2$ est négatif ; celles-ci peuvent alors s'écrire de la manière suivante :

$$r_1 = -\lambda + i\nu \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda - i\nu \quad (11)$$

$$\text{sachant que } \nu = \sqrt{\omega_n^2 - \lambda^2}$$

où :

ν : pulsation amortie ou pseudo pulsation [rad/s]

dès lors, l'équation (10b) devient :

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{(-\lambda + i\nu)t} + C_2 e^{(-\lambda - i\nu)t} \\ &= e^{-\lambda t} (C_1 + C_2) \cos \nu t + (C_1 - C_2) \cdot i \cdot \sin \nu t \end{aligned} \quad (12)$$

Cependant, les éléments $C_1 + C_2$ et $(C_1 - C_2) \cdot i$ peuvent être simplifiés de la manière suivante : $C_1 + C_2 = C$ et $(C_1 - C_2) \cdot i = D$.

La relation (12) devient :

$$x(t) = e^{-\lambda t} C \cos \nu t + D \sin \nu t \quad (13)$$

Les valeurs des constantes C et D sont déterminées à l'aide des conditions initiales suivantes :

$\dot{\text{A}} \ t = 0$	$\begin{aligned} x &= x_0 \Rightarrow C = x_0 \\ \dot{x} &= V_0 \Rightarrow D = \frac{V_0 + \lambda x_0}{\nu} \end{aligned}$
--------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Les deux formulations pour $x(t)$ deviennent respectivement :

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0 + \lambda x_0}{\nu}^2} e^{-\lambda t} \cos(\nu t - \phi) \quad (14)$$

et

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left[x_0 \cos \nu t + \frac{V_0 + \lambda x_0}{\nu} \sin \nu t \right] \quad (15)$$

$$\text{où : } \phi = \arctg\left(\frac{V_0 + \lambda x_0}{\nu x_0}\right),$$

$$\nu = \sqrt{\omega_n^2 - \lambda^2}$$

A noter le paramètre important ζ indiquant le coefficient d'amortissement par rapport à la pulsation propre :

$$\zeta = \frac{\lambda}{\omega_n} \quad [-] \quad (16)$$

Les valeurs du coefficient d'amortissement ζ pour le béton et l'acier sont présentées dans le tableau suivant. On constate que ce coefficient vaut pour le béton environ le triple de celui caractérisant l'acier. La plupart des structures de génie civil ont un coefficient d'amortissement ζ compris entre 0 et 0.2 ; l'amortissement est donc relativement faible. Il faut cependant remarquer que l'amortissement visqueux n'est qu'une approximation très grossière des phénomènes divers responsables de la déperdition d'énergie. De plus, le niveau d'amortissement dépend de l'amplitude des oscillations.

	ζ
Béton	0.02 – 0.15
Acier	0.001– 0.07
Bois	0.05 – 0.20

De par ces valeurs, pour les applications du génie civil, la différence entre la pulsation propre et la pulsation amortie ν est négligeable.

3.2.2 Amortissement fort : $\lambda > \omega_n$

Dans ce cas, les racines de l'équation caractéristique (10b) sont réelles et le système s'approche lentement de sa position d'équilibre plutôt que de vibrer.

3.2.3 Amortissement critique : $\lambda = \omega_n$

Ce cas représente la frontière entre les deux régimes précédents.

Cette fois-ci, les racines de l'équation (10b) sont égales à λ ; le système ne vibre pas et s'approche rapidement de sa position d'équilibre.

3.3 Oscillations entretenues ou forcées

Schéma d'un système :

La figure (3.6) illustre le modèle d'un système amorti sollicité par des oscillations forcées ou entretenues. Ce modèle s'applique à des cas tels que des ouvrages pour piétons (ex. : passerelle), des ponts (sous l'effet du trafic), l'effet du vent sur des ponts haubanés et suspendus, etc. Une force perturbatrice périodique est appliquée sur ce système :

$$F(t) = F_0 \sin \omega t \quad (17)$$

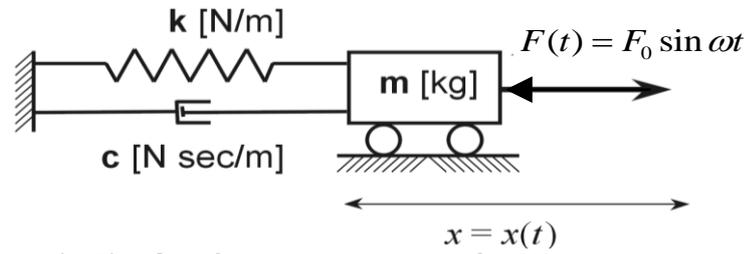


Figure (3.6) - Système amorti sollicité par des oscillations forcées

Bilan des forces en position déformée :

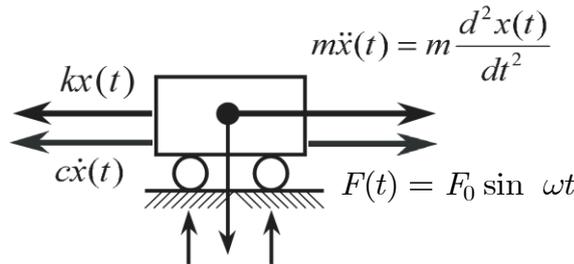


Figure (3.7) – Forces et action de la masse présentes dans un système amorti sous oscillations forcées et déplacé vers la droite

Ainsi, selon la Loi de Newton, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\Sigma F_x = m\ddot{x}(t) \quad (18a)$$

$$-kx(t) - c\dot{x}(t) + F(t) = m\ddot{x}(t) \quad (18b)$$

$$F(t) = m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) \quad (18c)$$

L'équation différentielle du mouvement de ce système est donnée par :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad (19)$$

La solution de l'équation est constituée d'une solution homogène $x_h(t)$, qui représente le mouvement oscillatoire de la structure (solution de l'équation du mouvement du même système oscillatoire sans oscillations forcées) et d'une solution particulière $x_p(t)$, représentant l'effet de la force périodique appliquée sur la structure. Pour un temps t suffisamment grand, seule l'oscillation forcée persiste ; à noter que celle-ci ne dépend pas des conditions initiales.

$$x_h(t) = D \cdot e^{-\lambda t} \cos(\nu t - \phi) \quad (20)$$

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - b) \quad (21)$$

où D et X sont des constantes

Afin de déterminer la constante X , nous insérons la solution particulière (21) dans l'équation (19) et obtenons ceci :

$$-X\omega^2 \sin(\omega t - b) + 2\lambda X\omega \cos(\omega t - b) + \omega_n^2 X \sin(\omega t - b) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad (22)$$

Ce système peut être écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sin(\omega t) \cdot (-X\omega^2 \cos b + 2\lambda X\omega \sin b + \omega_n^2 X \cos b - \frac{F_0}{m}) \\ + \cos(\omega t) \cdot (X\omega^2 \sin b + 2\lambda X\omega \cos b - \omega_n^2 X \sin b) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Afin de satisfaire cette équation, il faut que les deux parenthèses soient nulles, ce qui implique :

$$-X(\omega_n^2 - \omega^2) \sin b + 2\lambda X\omega \cos b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \arctg\left(\frac{2\lambda\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \quad (24)$$

$$X(\omega_n^2 - \omega^2) \cos b + 2\lambda X\omega \sin b = \frac{F_0}{m} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

A noter que l'expression de X peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} X &= \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_n^2 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\frac{\lambda^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \\ &= \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\frac{\lambda^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\frac{\lambda^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \end{aligned} \quad (25)$$

où : $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$,
et le déplacement statique δ_{st} vaut

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$$

Ainsi, la solution générale de l'équation (19), s'obtenant par addition des solutions homogène (20) et particulière (21), est la suivante :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= D \cdot e^{-\lambda t} \cos(\nu t - \phi) + \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\frac{\lambda^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \sin(\omega t - b) \end{aligned} \quad (26)$$

où le facteur d'amplification vaut

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \frac{\lambda^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

3.3.1 Amortissement faible : $\lambda \rightarrow 0$

Lorsque l'amortissement tend vers 0, la pulsation amortie ν tend vers la pulsation propre ω_n et la solution générale (26) devient de la forme :

$$x(t) = D \cdot e^{-\lambda t} \cos(\omega_n t - \phi) + \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t \quad (27)$$

Lorsque t devient suffisamment grand ($\Rightarrow e^{-\lambda t} \rightarrow 0$, pertes d'énergie dues au frottement) seule persiste l'oscillation forcée, qui dépend uniquement de la situation dans laquelle se trouve la structure. C'est ainsi que la solution particulière devient la solution d'équilibre :

$$x(t) = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t \quad (28)$$

Alors, le facteur d'amplification devient :

$$R_d = \left| \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right| \quad (29)$$

Le déplacement de la masse sous une force statique F_0 étant de $\delta_{st} = F_0/k$, le déplacement maximal de la masse est de :

$$x_{max} = \delta_{st} \cdot R_d \quad (30)$$

Noter que dans la figure (3.8) :

- En cas d'amortissement faible, le facteur d'amplification tend vers l'infini si la fréquence propre de la structure ω_n s'approche de la fréquence de sollicitation ω . C'est ce qu'on appelle le phénomène de résonance.
- Si $\omega \ll \omega_n$, on observe une amplification du mouvement, qui tend vers 1 ($R_d \geq 1$) et, si $\omega \gg \omega_n$, on observe une amplification du mouvement tendant vers 0 ($R_d \rightarrow 0$).
- Il est intéressant de constater qu'il y a un changement de phase du quotient ω/ω_n à l'instant où il est égal à 1, ce qui se traduit par un changement de sens de l'oscillation.
- Une différence de phase de 180° correspond, physiquement, à la situation où la masse oscille dans la direction contraire à celle de l'excitation.

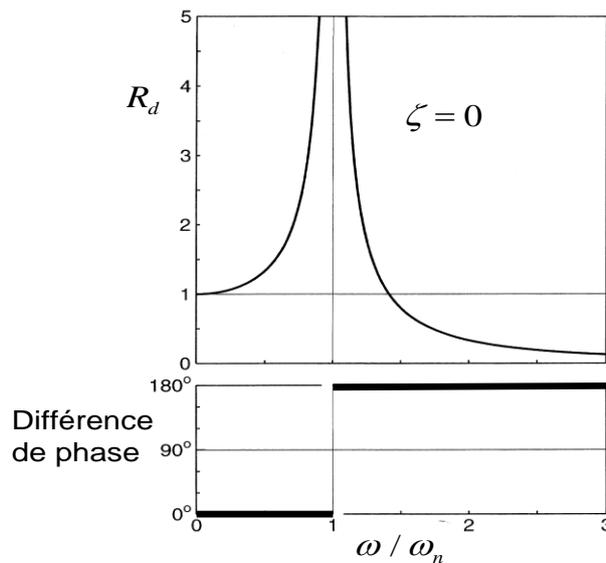


Figure (3.8) – Variation du facteur d’amplification et du déphasage, réf [1]

3.3.2 Avec amortissement : $\lambda > 0$

Lorsque l’amortissement n’est pas nul, le coefficient λ n’étant pas nul, l’équation du mouvement est de la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad (31)$$

et la solution générale :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= D \cdot e^{-\lambda t} \cos(\nu t - \phi) + \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \frac{\lambda^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \sin(\omega t - b) \end{aligned} \quad (32)$$

Le facteur d’amplification devient :

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 / \omega_n^2\right)^2 + 4(\lambda / \omega_n)^2 (\omega / \omega_n)^2}} \quad (33)$$

où la différence de phase vaut

$$b = \arctg(2\lambda\omega / (\omega_n^2 - \omega^2))$$

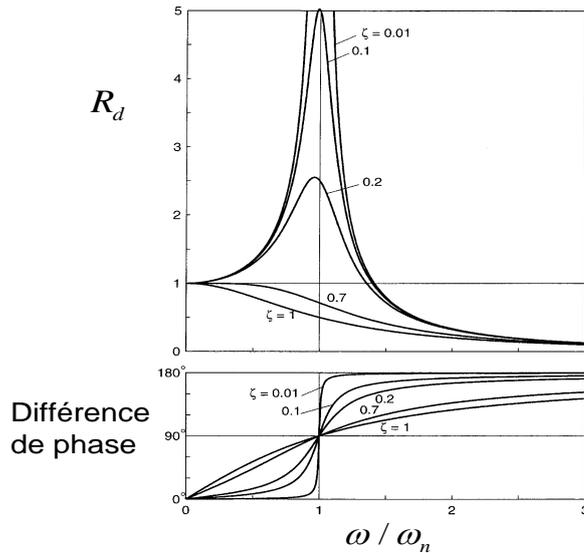


Figure (3.9) – Variation du facteur d’amplification et du déphasage pour différents coefficients d’amortissement, réf [1]

Remarques :

- On constate, sur la figure (3.9), que, contrairement au cas sans amortissement, l’effet de résonance maximal ne se trouve plus à l’endroit où $\omega/\omega_n = 1$, mais là où ce quotient est à peine plus faible.
- Le changement de phase n’est plus aussi abrupt qu’avec des structures n’offrant pas d’amortissement.
- Le changement des phases est influencé par la différence de phase (b) entre la force perturbatrice $F_0 \sin \omega t$ et l’oscillation $x(t) = \frac{F_0}{k} R_d \sin(\omega t - b)$.

3.4 Transmittance

Dans les chapitres précédents, nous avons admis que la force perturbatrice était appliquée à la masse et nous avons considéré la réponse comme un déplacement du point d’application de la force. Aussi, il est intéressant de connaître la réponse du système ; la transmittance, désignée par R_f , représente la fraction de la force appliquée qui est transmise au support à travers le système.

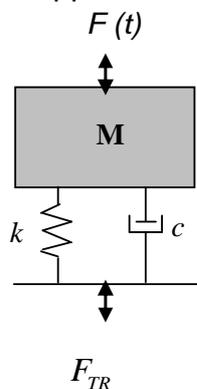


Figure (3.10) – Transmissibilité des charges aux fondations

En considérant le système de la figure (3.10) sollicité par une force harmonique, selon la Loi de Newton, l'équation du mouvement s'écrit :

$$F_{TR}(t) = c\dot{x}(t) + kx(t) \quad (34)$$

Ainsi,

$$F(t) = m\ddot{x}(t) + F_{TR}(t) \quad (35)$$

L'amortissement et la force de rappel du ressort étant déphasés de 90°, on peut écrire l'équation suivante :

$$|F_{TR-\max}| = \sqrt{c^2 \dot{x}_{\max}^2 + k^2 x_{\max}^2} \quad (36)$$

$$\text{où } \dot{x}_{\max} = \omega x_{\max}$$

Cette relation peut s'écrire :

$$|F_{TR-\max}| = \sqrt{x_{\max}^2 (k^2 + \omega^2 c^2)} = x_{\max} \sqrt{k^2 + \omega^2 c^2} \quad (37)$$

Sachant que :

$$x(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \frac{\lambda^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \sin(\omega t - b) \quad (26^*)$$

et $m^2 = \frac{k^2}{\omega_n^4} ; \quad c^2 = 4m^2 \lambda^2 = \frac{4k^2 \lambda^2}{\omega_n^4}$

Remarque : La solution homogène de l'équation (26*) est négligée car son influence disparaît dans le temps.

Et sachant que $x_{\max} = \delta_{st} \cdot R_d = \frac{F_0}{k} R_d$

la relation (36) s'écrit :

$$|F_{TR-\max}| = x_{\max} \sqrt{k^2 + \frac{4k^2 \lambda^2 \omega^2}{\omega_n^4}} \quad (38)$$

$$= \frac{F_0}{k} \frac{\sqrt{k^2 + \frac{4k^2 \lambda^2 \omega^2}{\omega_n^4}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \frac{\lambda^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} = F_0 \frac{\sqrt{1 + \frac{4\lambda^2 \omega^2}{\omega_n^4}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \frac{\lambda^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \quad (39)$$

$$= F_0 R_d \sqrt{1 + \frac{4\lambda^2 \omega^2}{\omega_n^4}} \quad (40)$$

A ce stade, il est intéressant de connaître le rapport entre la force appliquée à la masse et la part de celle-ci qui sollicite la fondation ; ce rapport est, par ailleurs, nommé transmittance. En termes d'équations, ceci donne :

$$R_f = \frac{|F_{TR-\max}|}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4\lambda^2\omega^2}{\omega_n^4}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\frac{\lambda^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \quad (41)$$

3.4.1 Résonance du système

Dans le cas de résonance du système, soit quand la pulsation de sollicitation est très proche de la pulsation naturelle, $\omega = \omega_n = 1$, la transmissibilité s'exprime comme suit :

$$R_f = \frac{\sqrt{1 + 4\lambda/\omega_n}}{2\lambda/\omega_n} = \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^2}}{2\zeta^2} \quad (42)$$

3.4.2 Amortissement nul

Dans le cas où le système n'est pas amorti, ou que son amortissement est faible, la transmissibilité R_f liée au support est égale à R_d . Ceci revient à dire que la force appliquée à la structure est quasi entièrement transmise à la fondation, pour un rapport $\frac{\omega}{\omega_n} \leq 4$. Ainsi, la transmissibilité s'exprime comme suit :

$$\lambda = 0 \Rightarrow R_f = R_d = \left| \frac{1}{1 - \omega/\omega_n} \right|^2 \quad (43)$$

3.4.3 Remarque importante

Lorsque le rapport ω/ω_n est égal à $\sqrt{2}$, la force agissant sur le support est équivalente à celle agissant sur la masse et ceci pour tout coefficient d'amortissement.

La figure (3.11) illustre la transmissibilité pour une sollicitation harmonique pour différents coefficients d'amortissement.

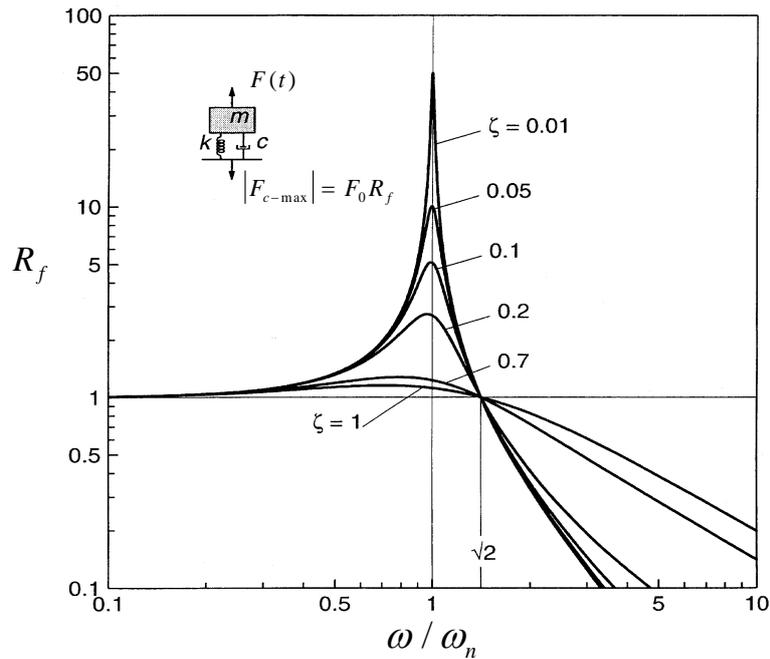


Figure (3.11) – Transmissibilité en fonction de la sollicitation et de l’amortissement, réf [1]

3.5 Mouvement de la fondation

Schéma d’un système type :

La figure (3.12) illustre un modèle de système amorti sous oscillations de la fondation. Ce modèle s’applique à des cas tels que les séismes, des activités de chantier et l’influence des trains à proximité d’une structure.

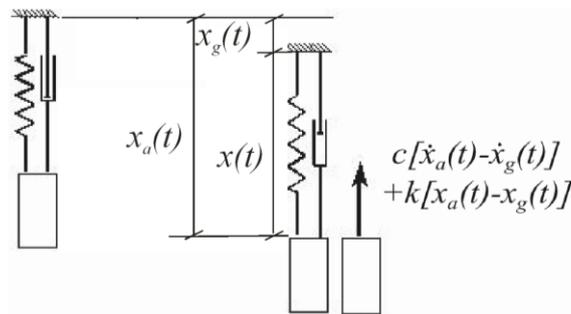


Figure (3.12) – Mouvement de la fondation d’un système amorti

Ainsi selon la figure (3.12), l’équation du mouvement s’écrit :

$$\begin{aligned}
 -k[x_a(t) - x_g(t)] - c[\dot{x}_a(t) - \dot{x}_g(t)] &= m\ddot{x}_a(t) \\
 m\ddot{x}_a(t) + kx_a(t) + c\dot{x}_a(t) &= kx_g(t) + c\dot{x}_g(t)
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

où :

$x(t)$ est le mouvement relatif de la structure,
 $x_a(t)$ est le mouvement absolu de la structure,
 $x_g(t)$ est le mouvement de la fondation.

Le terme $kx_g + c\dot{x}_g$ peut être interprété comme étant une force F^* entretenant un mouvement oscillatoire sur la fondation.

Dans le cas d'un mouvement harmonique, le déplacement prescrit à la fondation peut s'écrire ainsi :

$$x_g(t) = x_{g0} \sin \omega t \quad (45)$$

Cette équation insérée dans l'équation (44) nous permet d'écrire que :

$$|F^*| = |kx_g + c\dot{x}_g| = x_{g0} \sqrt{c\omega^2 + k^2} \quad (46)$$

où $|F^*|$ peut être considérée comme l'amplitude d'une force équivalente qui agit sur la masse sans mouvement de la fondation.

Compte tenu de la solution particulière de l'équation (46), de la forme $x_p(t) = G \sin(\omega t + \phi)$ et du mouvement statique équivalent de la masse sans mouvement de la fondation $\delta_{st}^* = \frac{|F^*|}{k}$, on peut écrire que :

$$G = x_{max} = \delta_{st}^* \cdot R_d = \frac{x_{g0} \sqrt{(c\omega)^2 + k^2}}{k} \cdot R_d = x_{g0} \cdot R_f \quad (47)$$

3.6 Réponse à une charge arbitraire

Les cas précédents traitent des systèmes dont la perturbation extérieure est harmonique. Considérons le cas plus général où l'excitation a une allure quelconque.

3.6.1 Charges arbitraires

Le tableau suivant présente les charges dynamiques typiques appliquées sur des ouvrages de génie civil :

Forces	Nom	Applications
$F_0 \cdot \sin \omega t$	Force harmonique d'amplitude constante	Moteurs, Ponts, Vibrations ferroviaires
$F(\omega_n) \cdot \sin \omega t$	Force synchronisée	Passerelle piétonnière (Londres, Paris 2000)
$F(Vent, Sect., Re)$	Force causée par des tourbillons alternés	Cheminées, Haubans, Câbles, Lignes aériennes
$F(Vent \quad \dot{x}, \dot{y})$	Force aéroélastique : 1. Flottement (flexion, torsion) 2. Torsion pure	Ailes, Toitures, Stades, Lignes aériennes, pont Tacoma
$F(t)$	Force quelconque	Séismes, Vent, Explosions
<i>Choc / Impact</i>	Force transmise par une masse	Collision, joints de ponts, parcs d'attraction

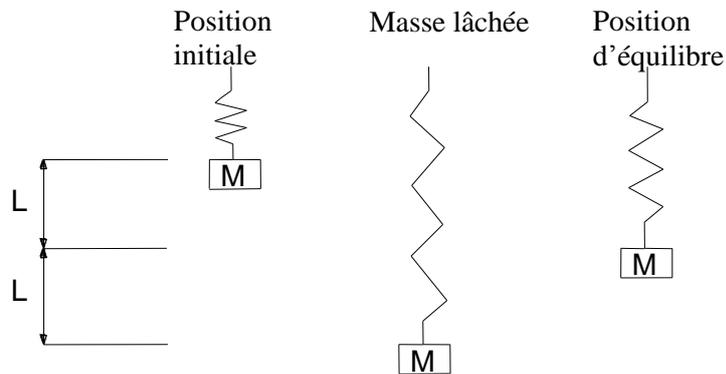
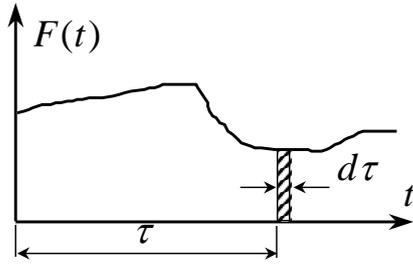


Figure (3.13) – Schéma d'application de charge

La figure (3.13) présente les conséquences de l'application brusque d'une force. Dans la position initiale le ressort n'est pas tendu (pas d'effort dans le ressort). La position d'équilibre correspond à l'équilibre statique et le déplacement correspond au déplacement statique.

3.6.2 Force quelconque

Considérons une charge $F(t)$ telle que montrée à la figure (3.14) où l'excitation a une allure quelconque. Cette charge arbitraire est décomposée en une série de charges impulsionnelles de durée $d\tau$ afin d'en déduire la réponse.



$F(t)$ est la force quelconque
 $t =$ temps total (force appliquée de 0 à t)
 $\tau =$ instant de l'impulsion élémentaire
 $d\tau =$ durée de l'impulsion élémentaire
 $0 < \tau < t$
 $\tau = n \cdot d\tau$
 $d\tau =$ fixé par l'utilisateur

Figure (3.14) – Charge arbitraire

Selon l'équation (13) de la section 3.2.1, l'équation du mouvement pour un système amorti est :

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A \cos \nu t + B \sin \nu t) \quad (13)$$

Pour un chargement à un instant τ , l'équation du mouvement devient :

$$x(t) = e^{-\lambda(t-\tau)} (A \cos \nu(t-\tau) + B \sin \nu(t-\tau)) \quad (48)$$

Si la structure est au repos avant le temps considéré (soit $t = \tau$), la réponse du système à une impulsion élémentaire $F(\tau)d\tau$ intervenant en $t = \tau$ est, par l'application du théorème de la quantité de mouvement, la suivante :

$$\dot{x}(\tau) = \frac{F(\tau)d\tau}{m} \quad \text{et} \quad x(\tau) = 0 \quad (49)$$

Pour un temps $t > \tau$, l'équation (48) devient, à l'aide des conditions initiales explicitées par (49) :

$$x(t) = e^{-\lambda(t-\tau)} \frac{F(\tau)d\tau}{m\nu} \sin \nu(t-\tau) \quad (50)$$

Ainsi, l'équation (50) donne le déplacement à un temps $t > \tau$ pour une impulsion élémentaire au temps τ . La figure (3.15) illustre l'effet d'une impulsion élémentaire à l'instant τ .

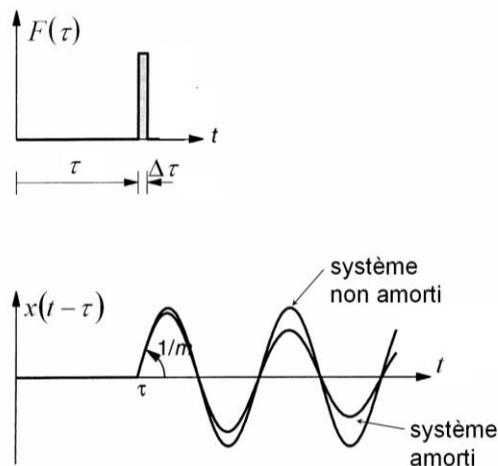


Figure (3.15) – Effet d'une impulsion à l'instant τ , réf. [1]

Par conséquent, pour une charge arbitraire, le déplacement engendré par une infinité d'impulsions de durée $d\tau$ se produisant durant l'intervalle de temps 0 à t s'obtient par sommation des réponses de chaque impulsion. Selon le principe de superposition des systèmes linéaires, l'équation du mouvement pour un système amorti soumis à une charge quelconque est donnée par l'intégrale de Duhamel :

$$x(t) = \frac{1}{m\nu} \int_0^t F(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} \sin \nu(t-\tau) d\tau \quad (51)$$

3.6.3 Intégrale de Duhamel

L'intégrale de Duhamel peut être utilisée pour des systèmes conservatifs ou dissipatifs.

3.6.3.1 Intégrale de Duhamel pour un système conservatif

Pour un système conservatif ($\lambda \rightarrow 0, \nu \rightarrow \omega_n$), la réponse peut être obtenue par l'intégrale de Duhamel, soit :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \quad (52)$$

Pour des conditions initiales à $t=0$ non nulles, la réponse totale est la somme du régime libre dû aux conditions initiales (équation 7a) et du régime forcé dû à l'excitation (équation 52) :

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t + x(0) \cos \omega_n t + \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \quad (53)$$

3.6.3.2 Intégrale de Duhamel pour un système dissipatif

De la même manière, pour un système dissipatif ($\lambda \neq 0$), la réponse peut être obtenue par l'intégrale de Duhamel, soit :

$$x(t) = \frac{1}{m\nu} \int_0^t F(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} \sin \nu(t-\tau) d\tau \quad (54)$$

Pour des conditions initiales à $t = 0$ non nulles, la réponse totale est la somme du régime libre dû aux conditions initiales (équation 15) et du régime forcé dû à l'excitation (équation 54) :

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left[\frac{\dot{x}(0) + \lambda x(0)}{\nu} \sin \nu t + x(0) \cos \nu t \right] + \frac{1}{m\nu} \int_0^t F(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} \sin \nu(t-\tau) d\tau \quad (55)$$

Les sections suivantes présentent la détermination analytique, à l'aide de l'intégrale de Duhamel, de la réponse dynamique d'un oscillateur simple soumis à des charges types.

3.6.4 Réponse à une charge échelon

La figure (3.16) illustre le modèle, la charge et la réponse de la structure. La force est modélisée par l'application d'une charge constante F_0 .

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \quad (56)$$

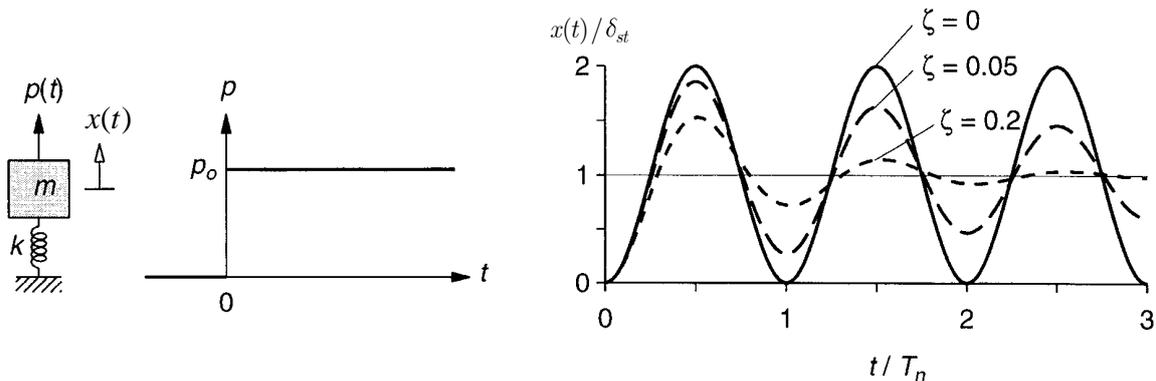


Figure (3.16) – Réponse à une charge échelon, réf [1]

L'équation (51) est modifiée en fonction des paramètres suivants :

Sans amortissement, $\lambda = 0$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t) \quad (57)$$

Avec amortissement, $\lambda \neq 0$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - e^{-\lambda t} \left(\cos \nu t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \nu t \right) \right] \quad (58)$$

3.6.5 Réponse à une force augmentant linéairement

La figure (3.17) illustre le modèle, la charge et la réponse de la structure. La force est modélisée par l'application d'une charge qui augmente de façon linéaire jusqu'à

F_0 . Cette force ne peut pas augmenter indéfiniment car elle causerait la plastification du matériau et éventuellement sa rupture.

$$F(t) = F_0 \cdot \frac{t}{t_r} \quad (59)$$

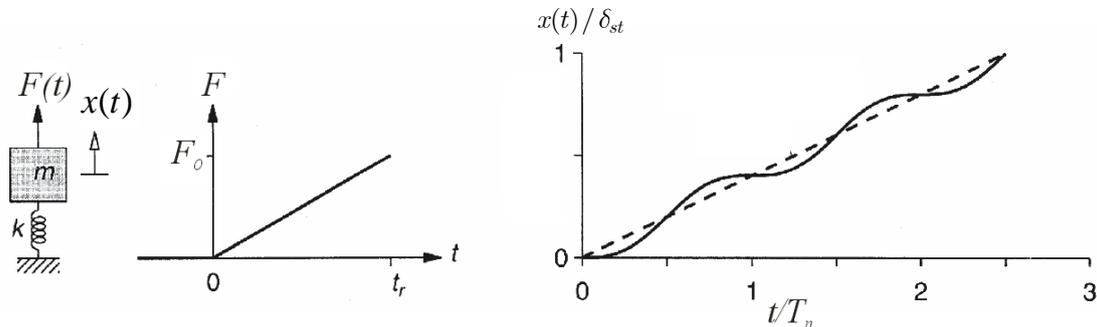


Figure (3.17) – Réponse à une force augmentant linéairement, réf [1]

La réponse s’obtient par l’intégrale de Duhamel :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t \frac{F_0}{t_r} \cdot \tau \cdot \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (60)$$

Où t_r est le temps auquel $F(t)$ vaut F_0 . Après intégration de (60) :

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n \cdot t_r} \right) \quad (61)$$

Ainsi, la réponse est un mouvement sinusoïdal oscillant autour d’une valeur moyenne.

3.6.6 Réponse à une force constante appliquée lentement

La figure (3.18) illustre le modèle et la charge. La force est modélisée par l’application d’une charge qui augmente de façon linéaire jusqu’à F_0 durant un intervalle de temps t_r et reste constante après t_r .

$$F(t) = \begin{cases} F_0(t/t_r) & \text{pour } t \leq t_r \\ F_0 & \text{pour } t > t_r \end{cases} \quad (62)$$

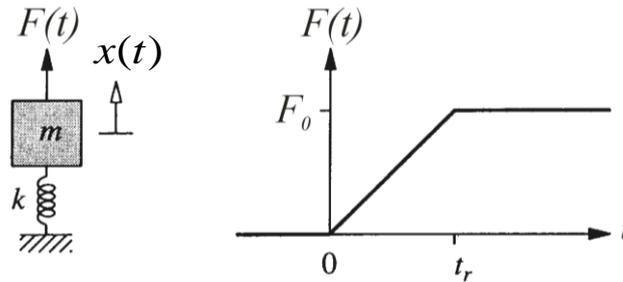


Figure (3.18) – Force constante appliquée lentement, réf [1]

La réponse s'obtient par l'intégrale de Duhamel. Pour des raisons de simplicité, on peut considérer la fonction de charge comme la somme d'une fonction variant linéairement jusqu'à t_r et d'une fonction égale mais négative appliquée après t_r .

$$F(t) = \begin{cases} F_0(t/t_r) & \text{pour } t \leq t_r \\ F_0(t/t_r) - F_0[(t - t_r)/t_r] & \text{pour } t > t_r \end{cases} \quad (63)$$

Ainsi la réponse totale est la suivante :

$$x_a(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{k} \left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_r} \right) & \text{pour } t \leq t_r \\ \frac{F_0}{k} \left(1 - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_r} + \frac{\sin \omega_n t(t - t_r)}{\omega_n t_r} \right) & \text{pour } t > t_r \end{cases} \quad (64)$$

La figure (3.19) illustre différentes réponses possibles. La réponse à ce type de chargement dépend du rapport du temps de chargement sur la période propre de la structure t_r/T_n .

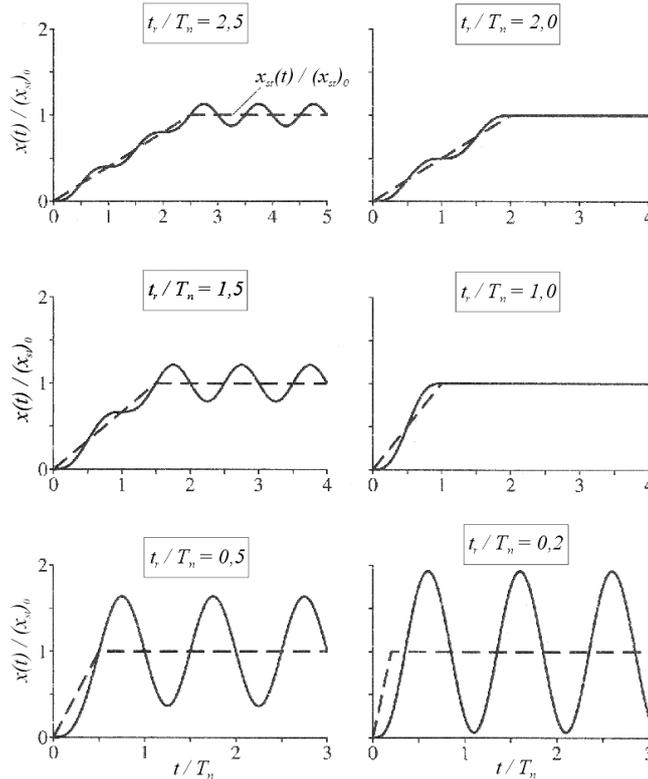


Figure (3.19) – Réponse à une force constante appliquée lentement, réf [1]

3.6.7 Réponse à une charge impulsionnelle

La charge impulsionnelle est une force appliquée brusquement et de courte durée. La réponse maximale à une charge impulsionnelle est atteinte en un très court instant et l'amortissement n'a pas le temps de dissiper de l'énergie et de réduire la réponse. Ce type de charge caractérise, par exemple, les chocs et les explosions. Rappelons l'équation de mouvement d'un système sans amortissement :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (65)$$

La figure (3.20) illustre une charge impulsionnelle quelconque. On distingue deux phases dans la réponse d'un système soumis à une impulsion de durée t_d . La première phase est la phase en régime forcé et correspond à la période de chargement t_d et la deuxième est la phase en régime libre après t_d avec des conditions initiales $x(t_d)$ et $\dot{x}(t_d)$. La réponse du système linéaire peut être trouvée par :

- superposition (3.6.7.1) ;
- l'intégrale de Duhamel ou (3.6.7.2) ;
- la résolution des équations différentielles du mouvement (3.6.7.3).

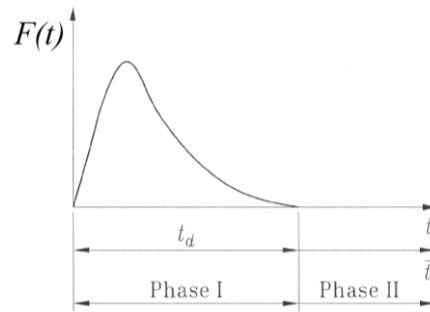


Figure (3.20) – Charge impulsionnelle, réf [3]

3.6.7.1 Réponse par superposition

La réponse à une impulsion peut être calculée à l'aide de la superposition des réponses dynamiques d'un oscillateur simple soumis à des charges types.

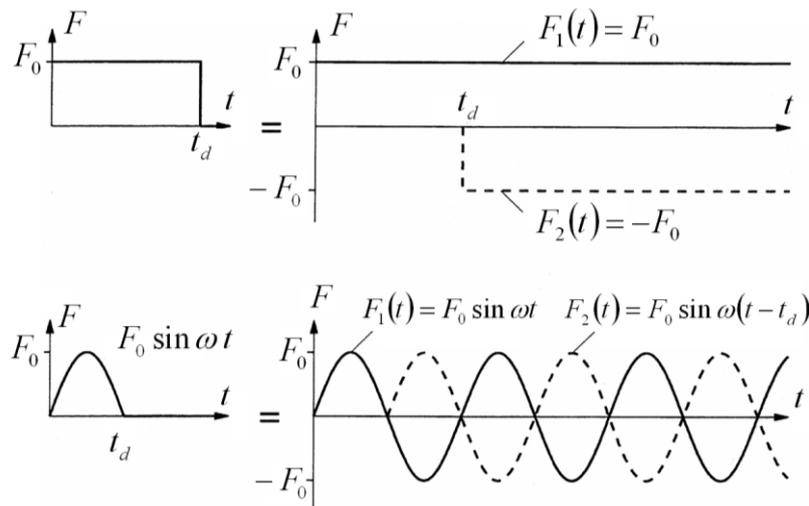


Figure (3.21) – Superposition, réf [1]

3.6.7.2 Réponse à une impulsion rectangulaire avec l'intégrale de Duhamel

La méthode de l'intégrale de Duhamel considère deux phases de sollicitations :

- la première est composée d'oscillations entretenues ($t \leq t_d$), et ;
- la seconde est composée d'oscillations libres ($t > t_d$).

Ceci revient à définir une sollicitation durant un certain temps t_d (temps d'explosion). La figure (3.22) illustre une impulsion rectangulaire de temps t_d . Cette impulsion peut être décrite par la fonction de force suivante :

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & \text{pour } t \leq t_d \\ 0 & \text{pour } t > t_d \end{cases} \quad (66)$$

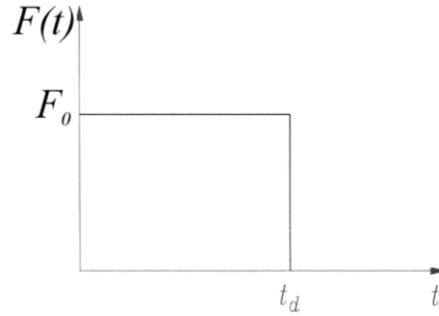


Figure (3.22) – Impulsion rectangulaire, réf [3]

Les équations du mouvement selon les deux phases sont :

▪ *Phase I* : $t \leq t_d$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n(t - \tau) d\tau = \frac{F_0}{m\omega_n} \left[\frac{\cos \omega_n(t - \tau)}{\omega_n} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t) \quad (67)$$

$$\text{Le déplacement maximal } x_{\max} \text{ vaut : } x_{\max} = \frac{\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t_d}{T_n}\right)\right) F_0}{k} \quad (68)$$

Avec $\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$, le facteur d'amplification R_d vaut :

$$R_d = \frac{x_{\max}}{\delta_{st}} = 1 - \cos(2\pi t_d / T_n) \quad (69)$$

▪ *Phase II* : $t > t_d$

Les conditions initiales étant différentes de zéro et l'amortissement nul, l'équation devient :

$$x(t) = x(t_d) \cos \omega_n(t - t_d) + \frac{\dot{x}(t_d)}{\omega_n} \sin \omega_n(t - t_d) \quad (70)$$

Par l'équation de la Phase I, on obtient la valeur du déplacement en $t = t_d$:

$$x(t_d) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t_d) \Rightarrow \dot{x}(t_d) = \frac{F_0}{k} \omega_n \sin \omega_n t_d \quad (71)$$

Ainsi,

$$x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t_d) \cos \omega_n(t - t_d) + \frac{F_0}{k} \frac{\omega_n \sin \omega_n t_d}{\omega_n} \sin \omega_n(t - t_d) \quad (72)$$

Etant donné que $\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$, l'équation (72) devient :

$$\frac{x(t)}{\delta_{st}} = 2 \sin \frac{\pi t_d}{T_n} \cdot \sin \left(\pi \left(\frac{2t - t_d}{T_n} \right) \right) = \cos(\omega_n(t - t_d)) - \cos(\omega_n t) \quad (73)$$

Si $\frac{t_d}{T_n} > \frac{1}{2}$, le facteur d'amplification est donc : $R_d = 2$.

En résumé, à partir des conditions initiales au repos, les deux phases de l'analyse sont :

- *Phase I - Oscillations entretenues*

$$x(t) = \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega_n t) \quad \text{pour } t \leq t_d \quad (74)$$

- *Phase II - Oscillations libres*

$$x(t) = \frac{F_0}{k}(\cos \omega_n(t - t_d) - \cos \omega_n t) \quad \text{pour } t > t_d \quad (75)$$

La figure (3.23) illustre différentes réponses possibles.

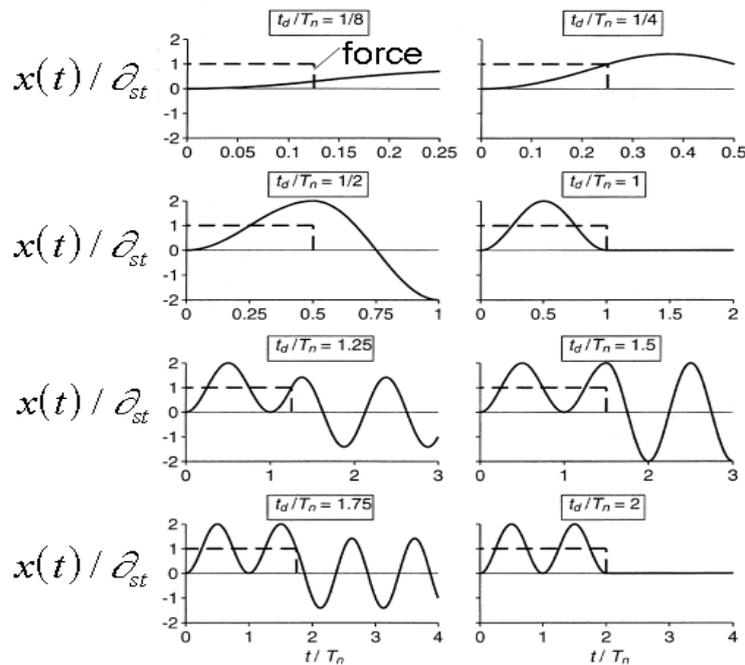


Figure (3.23) – Réponses à une impulsion rectangulaire, réf [1]

Physiquement, les réponses ci-dessus illustrent que, si $\frac{t_d}{T_n} \leq \frac{1}{2}$, le maximum se situe en oscillations libres, donc après le choc ou l'explosion, alors que, si $\frac{t_d}{T_n} \geq \frac{1}{2}$, le maximum a lieu en oscillations entretenues pendant la durée du choc ou de l'explosion.

3.6.7.3 Réponse à une impulsion sinusoïdale par les équations différentielles

Pour les équations différentielles, on considère à nouveau deux phases : la première comprenant des oscillations entretenues et la seconde des oscillations libres, et cela

selon deux cas distincts : en résonance ou non. Ceci nous ramène à considérer quatre cas.

- | | | | |
|-----------------------------------------|--|------------------------|----------------------|
| ▪ oscillations entretenues $t \leq t_d$ | | $\omega \neq \omega_n$ | $t_d / T_n \neq 1/2$ |
| | | $\omega = \omega_n$ | $t_d / T_n = 1/2$ |
| ▪ oscillations libres $t > t_d$ | | $\omega \neq \omega_n$ | $t_d / T_n \neq 1/2$ |
| | | $\omega = \omega_n$ | $t_d / T_n = 1/2$ |

La figure (3.24) illustre une impulsion sinusoïdale d'un temps t_d .

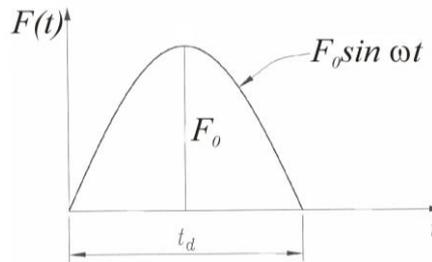


Figure (3.24) – Impulsion sinusoïdale, réf [3]

A partir de l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} + kx = f(t) = \begin{cases} F_0 \sin(\pi t / t_d) & t_d / T_n \leq 1/2 \\ 0 & t_d / T_n \geq 1/2 \end{cases} \quad (76)$$

▪ *Cas I*

En insérant les conditions suivantes dans la solution générale de l'équation du mouvement (54) : $\omega \neq \omega_n$ et $t_d / T_n \neq 1/2$, on obtient :

- Cas I.1 : $t \leq t_d$

$$\frac{x(t)}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - (T_n / 2t_d)^2} (\sin(\pi t / t_d) - (T_n / 2t_d) \sin(2\pi t / T_n)) \quad (77)$$

- Cas I.2 : $t > t_d$

$$\frac{x(t)}{\delta_{st}} = \frac{(T_n / t_d) \cos(\pi t / t_d)}{(T_n / 2t_d)^2 - 1} \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T_n} - \frac{t_d}{2T_n}\right)\right) \quad (78)$$

Déplacement maximal obtenu si $\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T_n} - \frac{t_d}{2T_n}\right)\right] = 1$, donc

$$\left[2\pi\left(\frac{t}{T_n} - \frac{t_d}{2T_n}\right)\right] = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{t}{T_n} - \frac{t_d}{2T_n} = \frac{1}{4} \Rightarrow t = T_n\left(\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n}\right)$$

$$R_d = \frac{(T_n / t_d) \cos(\pi t_d / T_n)}{(T_n / 2t_d)^2 - 1} \quad \text{si } t = T_n \left(\frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T_n} \right)$$

▪ **Cas 2 :**

En insérant les conditions suivantes dans la solution générale de l'équation du mouvement : $\omega = \omega_n$ et $t_d / T_n = 1/2$, on obtient :

- **Cas II.1 :** $t \leq t_d$

$$\frac{x(t)}{\delta_{st}} = \frac{1}{2} (\sin(2\pi t / T_n) - (2\pi t / T_n) \cos(2\pi t / T_n)) \quad (79)$$

- **Cas II.2 :** $t \geq t_d$

$$\frac{x(t)}{\delta_{st}} = \frac{\pi}{2} \cos\left(2\pi \left(\frac{t}{T_n} - \frac{1}{2}\right)\right) \quad (80)$$

La figure (3.25) illustre différentes réponses possibles.

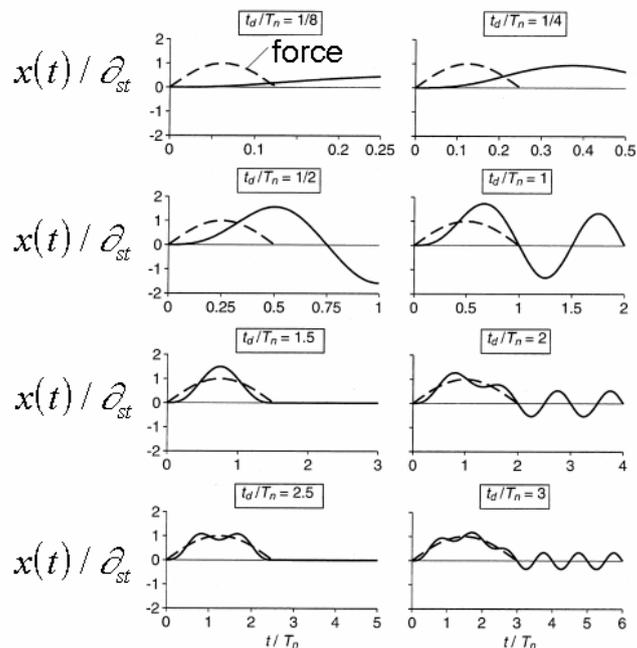


Figure (3.25) – Réponse à une impulsion sinusoïdale, réf [1]

3.6.7.4 Réponse à une impulsion triangulaire symétrique

La figure (3.26) illustre une impulsion triangulaire symétrique de durée t_d . Cette impulsion peut être décrite par la fonction de force suivante :

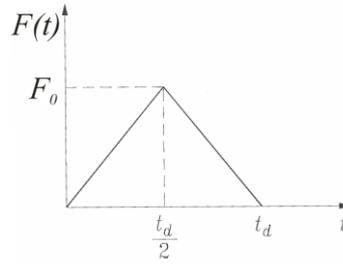


Figure (3.26) – Impulsion triangulaire symétrique, réf [3]

La force $F(t)$ est définie comme suit :

$$F(t) = \begin{cases} \frac{2F_0 t}{t_d} & \text{pour } t \leq \frac{t_d}{2} \\ \frac{2F_0(t_d - t)}{t_d} & \text{pour } t > \frac{t_d}{2} \\ 0 & \text{pour } t > t_d \end{cases} \quad (81)$$

Pour simplifier l'analyse, la fonction de charge est considérée comme étant la somme d'une fonction variant linéairement jusqu'à $t_d/2$, d'une fonction variant linéairement de $t_d/2$ jusqu'à t_d et d'une vibration libre à partir de t_d ayant comme conditions initiales le déplacement et la vitesse à t_d .

$$F(t) = \begin{cases} \frac{2F_0 t}{t_d} & \text{pour } t \leq \frac{t_d}{2} \\ \frac{2F_0 t}{t_d} - \frac{4F_0(t - t_d/2)}{t_d} & \text{pour } t > \frac{t_d}{2} \\ \frac{2F_0 t}{t_d} - \frac{4F_0(t - t_d/2)}{t_d} + \frac{2F_0(t - t_d)}{t_d} & \text{pour } t > t_d \end{cases} \quad (82)$$

A partir de la condition initiale au repos, la réponse est :

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2F_0}{k} \left(\frac{t}{t_d} - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_d} \right) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{t_d}{2} \\ \frac{2F_0}{k} \left(1 - \frac{t}{t_d} - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_d} + \frac{2 \sin \omega_n (t - t_d/2)}{\omega_n t_d} \right) & \text{pour } \frac{t_d}{2} < t < t_d \\ \frac{2F_0}{k} \left(-\frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_d} + \frac{2 \sin \omega_n (t - t_d/2)}{\omega_n t_d} - \frac{\sin \omega_n (t - t_d)}{\omega_n t_d} \right) & \text{pour } t > t_d \end{cases} \quad (83)$$

3.6.7.5 Spectre de réponse aux impulsions

En général, on s'intéresse à la valeur maximale de la réponse d'un oscillateur élémentaire pour un dimensionnement. En pratique, on utilise un graphe du facteur d'amplification R_d en fonction de t_d/T pour différentes formes de charges impulsionnelles. Ce graphique est nommé *spectre de réponse en déplacement*. La figure (3.27) illustre les spectres des trois charges impulsionnelles étudiées plus tôt.

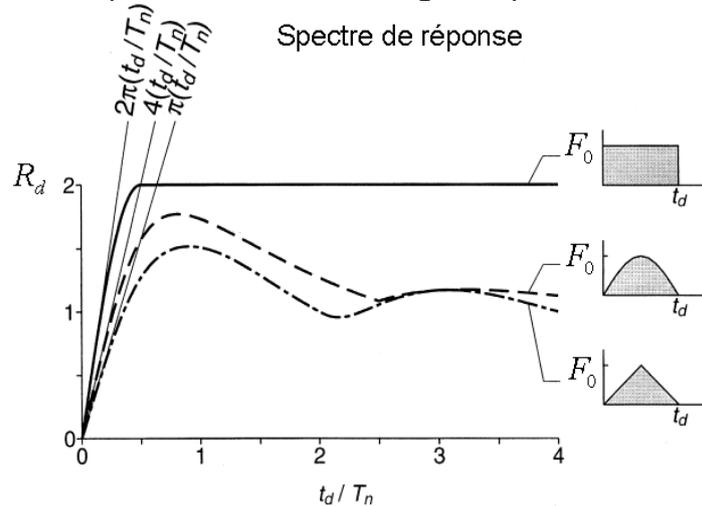


Figure (3.27) – Spectre de réponse en déplacement, réf [1]

3.6.8 **Réponse à une charge d'impact**

La réponse à une sollicitation quelconque ne sera pas la même si les conditions initiales des forces en présence changent. Par exemple, la réponse d'une structure à un impact ne sera pas la même si les masses qui créent l'impact restent sur la structure ou si elles rebondissent. Des exemples concrets sont les murs paravalanche ou les structures de protection contre les éboulements. La figure (3.28) illustre le modèle du problème :

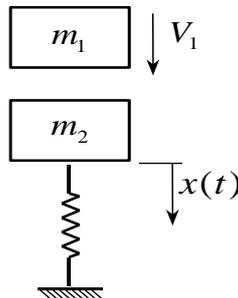


Figure (3.28) – Modèle d'impact

3.6.8.1 Cas où les masses qui créent l'impact restent sur la structure

Lorsque la masse qui entre en contact avec la structure demeure sur la structure, l'énergie cinétique est « transformée » en énergie de déformation (si la vitesse de m_2 est nulle). Cependant, la quantité de mouvement est conservée :

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2 \quad (84)$$

L'équation du mouvement (oscillations non amorties) devient donc :

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t \quad (85)$$

En considérant la condition initiale m_2 immobile, alors $x_0 = 0$. La quantité de mouvement s'écrit :

$$V_0 = V_2 = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2} \quad (86)$$

Insertion de l'équation (86) dans l'équation (85) :

$$x(t) = \frac{m_1 V_1}{(m_1 + m_2) \omega_n} \sin \omega_n t \quad (87)$$

On en déduit les valeurs maximales :

$$|x_{\max}| = \frac{m_1 V_1}{(m_1 + m_2) \omega_n} \quad (88)$$

$$|F_{\max}| = k |x_{\max}| = \frac{k \cdot m_1 V_1}{(m_1 + m_2) \omega_n} \quad (89)$$

$$\text{Où } \omega_n^2 = \frac{k}{m_1 + m_2} \quad (90)$$

$$\text{Alors, } |F_{\max}| = m_1 V_1 \omega_n \quad (91)$$

3.6.8.2 Cas où les masses qui créent l'impact rebondissent

L'impulsion est définie comme étant la quantité de mouvement de la masse. On la définira comme P dans les notes de cours :

$$P = m_1 \cdot v_1 \quad (92)$$

Par les théorèmes de la conservation d'énergie cinétique et de la quantité de mouvement, nous obtenons l'équation suivante. Remarque : la masse 2 est au repos avant le choc ($v_{2,avant} = 0$).

$$P = (m_1 v_1)_{avant} - (m_1 v_1)_{après} = (m_2 v_2)_{après} \quad (93)$$

En insérant l'équation (93) dans celle du mouvement :

$$x_a(t) = \frac{P}{m_2\omega_n} \sin \omega_n t = \frac{(m_1 v_1)_{avant} - (m_1 v_1)_{après}}{m_2\omega_n} \sin \omega_n t \quad (94)$$

3.6.9 Evaluation numérique

En général, la résolution analytique devient particulièrement compliquée car le chargement est souvent arbitraire. On doit alors utiliser des méthodes d'évaluation numérique pour calculer la réponse. Ce problème se présente dans les cas où la forme de la sollicitation quelconque est complexe et/ou lorsque le comportement de la structure n'est pas linéaire.

Le meilleur moyen pour résoudre de tels systèmes est l'utilisation de méthodes numériques telles que la méthode de Newmark. Seule cette méthode sera traitée dans le cadre de ce cours, cependant d'autres méthodes existent. (Cours de dynamique - méthodes numériques).

3.6.9.1 Principes des méthodes numériques

Les méthodes d'évaluation numériques sont des méthodes pas à pas. Ainsi, la sollicitation, de même que la réponse de la structure, sont partagées en incréments constants de temps Δt , comme illustré à la figure (3.29).

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

Ainsi, chaque pas de calcul débute par des valeurs connues $x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i$ et l'intégration numérique permet de calculer $x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, \ddot{x}_{i+1}$. A chaque instant i et $i + 1$, la loi de Newton est satisfaite :

$$m\ddot{x}_i + kx_i + c\dot{x}_i = F(i) \quad (95)$$

$$m\ddot{x}_{i+1} + kx_{i+1} + c\dot{x}_{i+1} = F(i + 1) \quad (96)$$

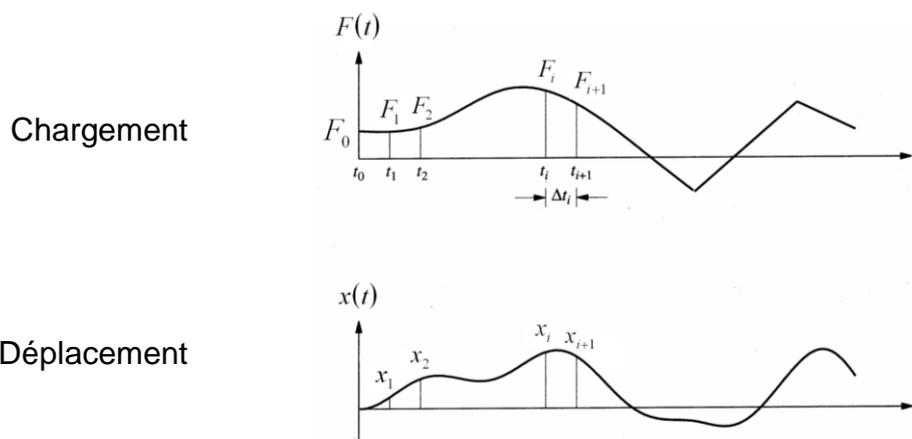


Figure (3.29) – Evaluation numérique du chargement et de la réponse, réf [1]

La force, le déplacement ou l'accélération peuvent être prescrits dans l'équation du mouvement afin de réaliser l'intégration numérique.

$$\text{Force prescrite} \quad m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = F(t) \quad (97)$$

$$\text{Déplacement prescrit} \quad m\ddot{x}_a + kx_a + c\dot{x}_a = c\dot{x}_g + kx_g \quad (98)$$

$$\text{Accélération prescrite} \quad \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_n^2 x = -\ddot{x}_g \quad (99)$$

3.6.9.2 Intégration numérique de Duhamel

Rappelons que dans le cas du comportement linéaire de la structure, l'intégrale de Duhamel pour un système dissipatif est applicable.

$$x(t) = \frac{1}{m\nu} \int_0^t F(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} \sin \nu(t-\tau) d\tau \quad (54)$$

Afin de faciliter la compréhension du phénomène, on traitera le cas où l'amortissement est nul $\rightarrow \lambda = 0$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \quad (100)$$

Le déplacement relatif :

$$x(t) = -\frac{1}{\omega_n} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \quad (101)$$

L'intégration peut se calculer numériquement :

$$x_m = \frac{\Delta t}{\omega_n} \sum_{i=0}^m \ddot{x}_{gi} \sin \omega_n t_{m-i} \quad (102)$$

3.6.9.3 Méthode de Newmark pour des systèmes linéaires

La méthode de Newmark est la plus utilisée en dynamique des structures. Elle est une extension dérivée de l'équation du mouvement.

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_n^2 x = -\ddot{x}_g \quad \text{où} \quad x = x_a - x_g$$

Cette méthode est applicable autant pour les systèmes linéaires que non-linéaires. La méthode donne des résultats approximatifs, mais propose une manière non itérative de résoudre les systèmes linéaires et une manière itérative pour les systèmes non linéaires. Ainsi pour un système linéaire :

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{x}(\tau) d\tau \quad (103)$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau) \ddot{x}(\tau) d\tau \quad (104)$$

Afin de pouvoir l'intégrer numériquement et de manière à approcher les déplacements dus à la sollicitation quelconque, on utilise des équations tirées d'un développement en série limitée de Taylor ($f(a + x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + \dots$) :

La vitesse et le déplacement à la fin du pas d'intégration donnent donc :

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + [(1 - \gamma)\Delta t]\ddot{x}_i + \gamma\Delta t\ddot{x}_{i+1} \quad (105)$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i\Delta t + [(0,5 - \beta)\Delta t^2]\ddot{x}_i + \beta\Delta t^2\ddot{x}_{i+1} \quad (106)$$

Où :

- ✓ Les paramètres de la formule de quadrature β et γ sont des constantes qui influencent la stabilité et la précision du calcul (voir figure (3.31)).
- ✓ Le paramètre γ est un facteur de pondération de l'influence de l'accélération à t_n et de l'accélération à t_{n-1} sur l'incrément de vitesse.
- ✓ Le paramètre β est un facteur de pondération de l'influence de l'accélération à t_n et de l'accélération à t_{n-1} sur l'incrément de déplacement.

Ces paramètres prennent les valeurs suivantes pour :

- Accélération moyenne $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$
- Accélération linéaire $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{6}$

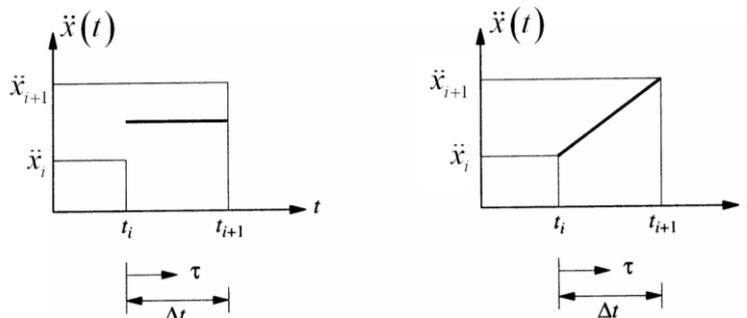


Figure (3.30) – Variation de l'accélération admise moyenne à gauche et linéaire à droite, réf [1]

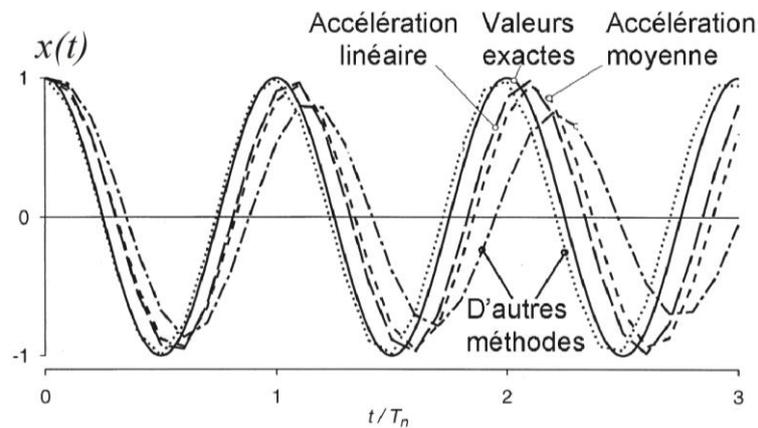


Figure (3.31) – Comparaison des réponses obtenues, réf [1]

Accélération moyenne

Le but du développement qui suit est de retrouver les valeurs $\gamma = \frac{1}{2}$ et

$$\beta = \frac{1}{4}.$$

$$\ddot{x}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1})$$

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_i + \tau \cdot \ddot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{\tau}{2} \cdot (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1})$$

Substituons, $\tau = \Delta t$ et $\dot{x}(\tau) = \dot{x}_{i+1}$

$$\text{Donc, } \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1})$$

$$x(\tau) = x_i + \dot{x}_i \cdot \tau + \frac{1}{4} \cdot \tau^2 \cdot (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1})$$

Substituons, $\tau = \Delta t$ et $x(\tau) = x_{i+1}$

$$\text{Donc, } x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{4} \cdot \Delta t^2 \cdot (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1})$$

Par conséquent, la vitesse et le déplacement à la fin du pas d'intégration donnent donc :

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + 1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \ddot{x}_i + \frac{1}{2} \Delta t \cdot \ddot{x}_{i+1} \quad (107)$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Delta t^2 \cdot \ddot{x}_i + \frac{1}{4} \Delta t^2 \cdot \ddot{x}_{i+1} \quad (108)$$

On peut comparer (107) à (105) et (108) à (106) pour retrouver γ et β .

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + [(1 - \gamma)\Delta t]\ddot{x}_i + \gamma\Delta t\ddot{x}_{i+1} \quad (105)$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i\Delta t + [(0,5 - \beta)\Delta t^2]\ddot{x}_i + \beta\Delta t^2\ddot{x}_{i+1} \quad (106)$$

L'hypothèse de l'accélération moyenne est inconditionnellement stable. Les résultats sont précis lorsque Δt est assez petit pour bien représenter le chargement et la réponse d'un système élémentaire.

Accélération linéaire

Le but du développement qui suit est de retrouver les valeurs $\gamma = \frac{1}{2}$ et

$$\beta = \frac{1}{6}.$$

$$\ddot{x}(\tau) = \ddot{x}_i + \frac{\tau}{\Delta t} \cdot (\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i)$$

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_i + \tau \cdot \ddot{x}_i + \frac{\tau^2}{2\Delta t} \cdot (\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i)$$

Substituons, $\tau = \Delta t$ et $\dot{x}(\tau) = \dot{x}_{i+1}$

$$\text{Donc, } \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \ddot{x}_i \cdot \frac{\Delta t}{2} + \ddot{x}_{i+1} \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

$$x(\tau) = x_i + \dot{x}_i \cdot \tau + \frac{1}{2} \cdot \ddot{x}_i \cdot \tau^2 + \frac{\tau^3}{6\Delta t} \cdot (\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i)$$

Substituons, $\tau = \Delta t$ et $x(\tau) = x_{i+1}$

$$\text{Donc, } x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \cdot \Delta t + \ddot{x}_i \cdot \frac{\Delta t^2}{3} + \ddot{x}_{i+1} \cdot \frac{\Delta t^2}{6}$$

La vitesse, le déplacement et l'accélération à la fin du pas d'intégration donnent :

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + 1 - \frac{1}{2} \Delta t \cdot \ddot{x}_i + \frac{1}{2} \Delta t \cdot \ddot{x}_{i+1} \quad (110)$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i\Delta t + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \Delta t^2 \cdot \ddot{x}_i + \frac{1}{6} \Delta t^2 \cdot \ddot{x}_{i+1} \quad (111)$$

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{6}{\Delta t^2} \left(x_{i+1} - x_i - \dot{x}_i \cdot \Delta t - \ddot{x}_i \cdot \frac{\Delta t^2}{3} \right) \quad (112)$$

On peut comparer (110) à (105) et (111) à (106) pour retrouver γ et β .

3.6.9.4 Méthode de Newmark pour des systèmes non-linéaires

Équations du mouvement

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) + c\dot{x} = F(t)$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \frac{f(x, \dot{x})}{m} = -\ddot{x}_g$$

La fonction $f(x, \dot{x})$ remplace kx . La méthode de Newmark est maintenant itérative puisque la force résistante dépend de l'historique du mouvement et de la vitesse. L'amortissement pourrait être non linéaire mais ce cas est rarement calculé parce que les relations nécessaires à sa détermination ne sont généralement pas connues.

La méthode de Newmark permet de résoudre de manière itérative les systèmes non linéaires à l'aide des équations de la méthode linéaire modifiée :

$$\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i = \Delta t \ddot{x}_i + \gamma \Delta t (\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i) \quad (113)$$

$$(x_{i+1} - x_i) = \Delta t \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_i + \beta \Delta t^2 (\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i) \quad (114)$$

$$(\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i) = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (x_{i+1} - x_i) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{x}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{x}_i \quad (115)$$

4. Systèmes à masse répartie

Peu de structures peuvent être considérées comme ayant une masse ponctuelle. Dans la plupart des cas, leur masse est répartie. On traite ces structures en les modélisant pour obtenir un système équivalent (masse, ressort et amortisseur) :

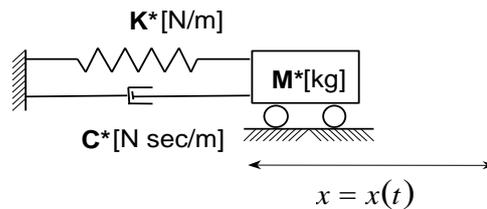


Figure (4.1) – Système équivalent

Ce qui revient à déterminer les valeurs équivalentes m^* , k^* , c^* et q^* du nouveau système équivalent. L'équation de Newton devient :

$$m^* \ddot{x} + c^* \dot{x} + k^* x = q^*(t) \quad (116)$$

Les valeurs équivalentes (m^* , k^* , c^* et q^*) sont déterminées à l'aide du théorème des travaux virtuels qui exprime la conservation d'énergie : $\delta W_i = \delta W_e$. Les travaux des forces d'inertie sont toujours positifs. Les travaux des ressorts et des amortisseurs sont toujours négatifs. On considère aussi que les réactions du ressort et de l'amortisseur comme contribution au travail virtuel extérieur.

Ces corps à masse répartie sont traités selon leur rigidité ; on distingue donc les corps rigides (considérés comme tels) et les corps flexibles.

4.1 Corps rigides

L'étude du comportement de ce type de corps se fait par l'application du théorème des travaux virtuels. Ainsi, la structure virtuellement déformée (selon un déplacement arbitrairement choisi, $z(t)$) subit un déplacement virtuel ($\delta z \rightarrow$ position incrémentée) impliquant un certain travail virtuel. Un corps rigide représenté dans un plan a un degré de liberté, alors qu'un assemblage de corps rigides, dans le plan, peut en présenter plusieurs.

Dans le cas d'un corps rigide, δW_i est constitué du travail de l'action d'inertie et δW_e englobe le travail des forces extérieures, des forces dues aux ressorts ainsi que des forces dues aux amortisseurs.

La marche à suivre pour transformer un système complexe en un système fondamental ayant les valeurs équivalentes (m^*, k^*, c^* et q^*) est donc la suivante :

Pour chaque action :

- 1) Trouver la valeur de l'effort associé à $z(t)$
- 2) Déterminer l'incrément du déplacement en fonction de δz
- 3) Calculer la contribution au travail virtuel
- 4) Organiser les termes m^*, k^*, c^* et q^* en utilisant le théorème des travaux virtuels $\delta W_i = \delta W_e$

4.2 Corps flexibles

Un corps flexible suppose une distribution de la rigidité. Dans le cas d'une poutre sollicitée en flexion (considérée comme corps flexible), on obtient un nombre infini de degrés de liberté. Cependant, une analyse à un degré de liberté est possible, à condition de connaître à priori l'allure de la déformée.

L'idée de la méthode est d'utiliser une fonction (dans le temps et l'espace) ayant comme paramètres la fonction « déformée » de l'élément ψ et l'amplitude du déplacement au point caractéristique $z(t)$. L'étude du comportement de ce type de corps s'effectue de la même manière qu'avec des corps rigides, i.e. par l'application du théorème des travaux virtuels.

La déformée de la structure est donnée par l'expression suivante :

$$u(x, t) = \psi(x) \cdot z(t) \quad (117)$$

où :

$\psi(x)$ représente la forme de la déformée

$z(t)$ représente l'amplitude du déplacement au point caractéristique

A nouveau, on utilisera le théorème des travaux virtuels que l'on appliquera aux diverses forces « agissant » sur la structure (forces extérieures, forces dues aux ressorts et forces dues aux amortisseurs) et par la structure elle-même (forces liées à la rigidité en flexion et à l'inertie).

Dans ce cas, la marche à suivre pour transformer un système complexe en un système fondamental ayant les valeurs équivalentes (m^*, k^*, c^* et q^*) est ainsi la suivante :

Pour chaque action :

- 1) Trouver la valeur de l'effort associé à $z(t)$ sur dx
- 2) Déterminer l'incrément du déplacement en fonction de δz sur dx
- 3) Calculer la contribution au travail virtuel
- 4) Intégrer $x=0 \rightarrow L/2$
- 5) Organiser les termes m^*, k^*, c^* et q^* en utilisant le théorème des travaux virtuels $\delta W_i = \delta W_e$

4.2.1 Travail virtuel lié à la rigidité en flexion

$$\delta w_{flexion} = \int_0^L M(x) \cdot d\varphi_{\delta z} \quad (118)$$

où $d\varphi_{\delta z}$ est l'incrément du déplacement

En utilisant,

$$M(x) = EI(x) \cdot u''(x, t) = EI(x) \cdot \psi''(x) \cdot z(t) \quad (119)$$

et

$$d\varphi_{\delta z} = (u''(x, t))_{\delta z} = \psi''(x) \cdot \delta z \cdot dx \quad (120)$$

Donc,

$$\delta w_{flexion} = \int_0^L EI(x) \cdot \psi''(x) \cdot z(t) \cdot \psi''(x) \cdot \delta z \cdot dx = z(t) \cdot \delta z \cdot E \int_0^L I(x) \cdot (\psi''(x))^2 dx \quad (121)$$

4.2.2 Travail virtuel lié à l'inertie

$$\delta w_{inertie} = \int_0^L m(x) \cdot dx \cdot \ddot{u}(x, t) \cdot u(x, t)_{\delta z} \quad (122)$$

où $u(x, t)_{\delta z}$ est l'incrément du déplacement

En utilisant,

$$\ddot{u}(x, t) = \psi(x) \cdot \ddot{z}(t) \quad (123)$$

et

$$u(x, t)_{\delta z} = \psi(x) \cdot \delta z \quad (124)$$

Donc,

$$\delta w_{inertie} = \delta z \cdot \ddot{z}(t) \cdot \int_0^L m(x) \cdot (\psi(x))^2 \cdot dx \quad (125)$$

4.2.3 Travail virtuel lié aux forces extérieures

$$\delta w_{F.ext} = \int_0^L N \cdot u(x, t)_{\delta z} \quad (126)$$

où $u(x, t)_{\delta z}$ est l'incrément du déplacement

En utilisant,

$$u(x, t)_{\delta z} = z(t) \cdot \delta z \cdot (\psi'(x))^2 \cdot dx \quad (127)$$

Donc,

$$\delta w_{F.ext} = N \cdot \delta z \cdot \int_0^L (\psi'(x))^2 \cdot dx \quad (128)$$

Dans le cas d'un séisme, la contribution de la sollicitation sismique au travaux virtuels est de :

$$\delta w_{F.sismique} = \delta z \cdot \ddot{u}_g \cdot \int_0^L m(x) \cdot \psi(x) \cdot dx \quad (129)$$

4.2.4 Valeurs équivalentes

On obtient comme valeurs équivalentes de l'équation (116):

$$m^* = \int_0^L m(x) \cdot (\psi(x))^2 \cdot dx \quad (130)$$

$$k^* = E \int_0^L I(x) \cdot (\psi''(x))^2 \cdot dx - N \int_0^L (\psi'(x))^2 \cdot dx \quad (131)$$

$$q^*(t) = \ddot{u}_g \int_0^L m(x) \cdot \psi(x) \cdot dx \quad (132)$$

4.2.5 Charge critique de flambage

On remarque que l'influence de la force normale ne se manifeste que sur le terme k^* et que si cette force est en compression, elle induit une diminution de la rigidité. Lorsque k^* devient nulle, on atteint donc la charge critique de flambage N_{crit} .

Par exemple, pour une poutre encastree à sa base, la charge critique est égale à :

$$N_{crit} = \frac{\int_0^L EI(x) \cdot (\psi''(x))^2 \cdot dx}{\int_0^L (\psi'(x))^2 \cdot dx} \quad (133)$$

5. Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Un système réel comprend généralement plusieurs masses reliées entre elles par des éléments de types ressort et amortisseur.

Le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour déterminer la position relative de chaque masse est appelé « nombre de degrés de liberté » ; un système comportant N masses susceptibles de se déplacer dans un plan possède donc $2N$ degrés de liberté.

Pour chaque degré de liberté, on établira les conditions d'équilibre, comportant les effets dus à l'accélération et ceux dus aux autres actions extérieures du système (Newton), au point considéré. La figure (5.1) présente un exemple d'un système à plusieurs degrés de liberté. La figure (5.2) illustre le modèle de ce système pour des poutres infiniment rigides et la figure (5.3) pour des poutres flexibles.

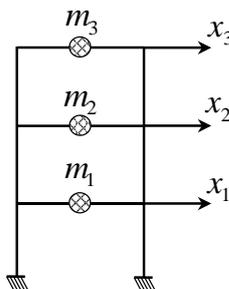


Figure (5.1) – Système à trois degrés de liberté

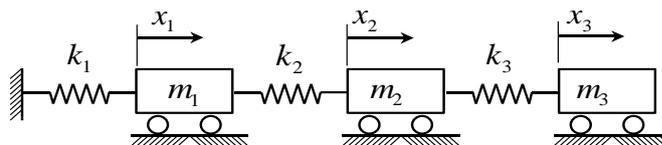


Figure (5.2) – Modèle pour poutres infiniment rigides

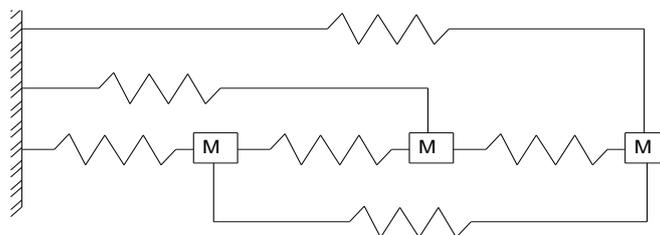


Figure (5.3) – Modèle masse avec interactions lointaines

5.1 Analyse modale

Pour chaque degré de liberté, la loi de Newton est appliquée sans amortissement :

$$m_m \ddot{x}_m + \sum_{n=1}^N k_{mn} x_n = 0 \quad (134)$$

où k_{mn} représente la force en m sous l'action d'un déplacement unique et unitaire en n .

En notation matricielle :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{x}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{x}} = 0 \quad (135)$$

où :

$\underline{\underline{K}}$ est la matrice des rigidités,

$\underline{\underline{M}}$ celle des masses et

$\underline{\underline{x}}$ est le vecteur des déplacements

Si les déplacements suivent une loi périodique en fonction du temps, ils peuvent s'écrire : $x_m = A_m \sin \omega_n t - \phi$ et l'équation de Newton devient :

$$-\omega_n^2 \underline{\underline{M}} \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{x}} = 0 \quad (136)$$

Remarque : $\underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{K}}$ sont symétriques, par exemple $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}^T$ et $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^T$

Exemple 5.1 – Valeur caractéristique d'un système

Afin d'expliciter les équations précédentes par un exemple, on reprend le système de trois masses reliées entre elles par des ressorts, figure (5.2).

La résolution de l'expression matricielle associée à un tel système devient :

$$\left| -\omega_n^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}} \right| \underline{\underline{x}} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (k_{11} - \omega_n^2 m_1) & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & (k_{22} - \omega_n^2 m_2) & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & (k_{33} - \omega_n^2 m_3) \end{vmatrix} = 0 \quad (137)$$

Hormis la solution triviale correspondant à un déplacement nul, on trouve une solution lorsque le déterminant s'annule ; les valeurs ainsi obtenues (ω_n^2)

sont les « valeurs caractéristiques » (ou fréquences propres) qui permettent de déterminer les modes propres.
 Afin de déterminer numériquement les valeurs caractéristiques, on admettra que :

$$k_{11} = k_{22} = k_{33} = k$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m$$

Le développement du déterminant de la matrice (137) conduit ainsi au polynôme suivant :

$$\left(\frac{m\omega_n^2}{k}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{m\omega_n^2}{k}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{m\omega_n^2}{k}\right) - 1 = 0$$

Avec une rigidité k et une masse m données, on obtient 3 valeurs caractéristiques : $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

5.1.1 Oscillations non-amorties

Quand deux modes propres sont exprimés par des vecteurs normalisés et lorsque les masses ont la même valeur, on voit que leur produit scalaire est nul, impliquant l'orthogonalité des modes de vibration. Ce qui peut s'exprimer ainsi :

Si $\omega_n \neq \omega_r$, les conditions d'orthogonalité : $\underline{a}_n^T \underline{K} \underline{a}_r = 0$ et $\underline{a}_n^T \underline{M} \underline{a}_r = 0$ sont valables.

Les réponses de chaque mode peuvent être calculées de manière indépendante des autres modes et elles peuvent ensuite être combinées pour obtenir la réponse totale.

Comme la superposition des différents modes est possible, on peut écrire que le mouvement d'un point considéré (généralement massique) est la somme des contributions de chaque mode de vibration au mouvement du point considéré.

Intéressons-nous au cadre à deux degrés de liberté illustré à la figure (5.4) afin de développer les équations dans le cas de structures à plusieurs degrés de liberté.

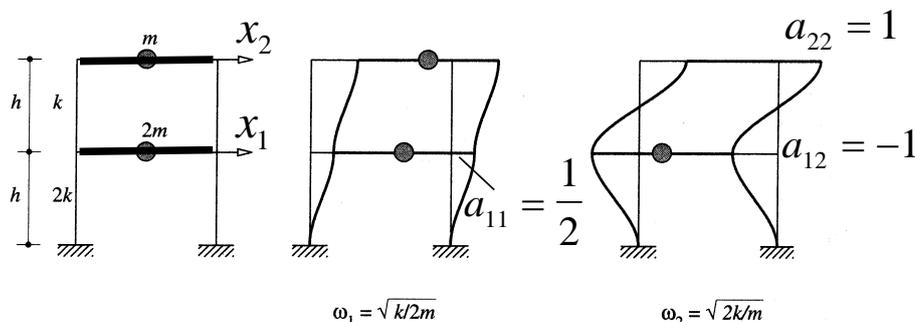


Figure (5.4) – Cadre à deux degrés de liberté, réf [1]

Les équations du mouvement pour chacun des deux degrés de liberté de la structure de la figure (5.4), en cas d'oscillations libres non amorties, s'expriment de la manière suivante :

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = 0 \quad (138)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = 0 \quad (139)$$

Celles-ci peuvent aussi s'exprimer sous forme matricielle :

$$\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} = 0 \quad (140)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (141)$$

Si \underline{M} et \underline{K} sont constantes dans le temps, le système d'équations couplées peut être découplé et transformé en un système d'oscillateurs simples. Les modes propres s'obtiennent en annulant le déterminant du système afin d'obtenir les solutions non triviales :

$$\left| -\omega_n^2 \underline{M} + \underline{K} \right| = 0 \quad (142)$$

Les déplacements relatifs x_i s'expriment alors en coordonnées modales par le changement de variables suivant :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underline{A}\underline{z} \quad (143)$$

où \underline{A} est la matrice des vecteurs modaux. Ses lignes sont formées des vecteurs propres \underline{a}_n . Le vecteur \underline{z} est le vecteur des coordonnées modales.

En introduisant l'équation (143) dans (140) et en prémultipliant par \underline{A}^T , on obtient la relation suivante :

$$\underline{A}^T \underline{M} \underline{A} \ddot{\underline{z}} + \underline{A}^T \underline{K} \underline{A} \underline{z} = 0 \quad (144)$$

En raison de l'orthogonalité des modes, les matrices résultantes sont diagonales. On introduit la notion de grandeurs généralisées. La masse généralisée pour chaque mode n est :

$$m_n^* = \underline{a}_n^T \underline{M} \underline{a}_n \quad (145)$$

La matrice des masses généralisées vaut :

$$\underline{M}^* = \underline{A}^T \underline{M} \underline{A} \quad (146)$$

De la même manière, la matrice de rigidité généralisée s'exprime ainsi :

$$\underline{K}^* = \underline{A}^T \underline{K} \underline{A} \quad (147)$$

Le système d'équations (144) se simplifie et on obtient le système d'équations découplées suivant :

$$\underline{M}^* \ddot{\underline{z}} + \underline{K}^* \underline{z} = 0 \quad (148)$$

La n -ième ligne du système d'équations (148) représente l'équilibre de la n -ième masse en coordonnées modales :

$$m_n^* \ddot{z}_n + k_n^* z_n = 0 \quad (149)$$

En divisant par m_n , on obtient l'équation bien connue de l'oscillateur simple :

$$\ddot{z}_n + \omega_n^2 z_n = 0 \quad (150)$$

Le processus de décomposition modale est illustré à la figure (5.5). Un système à n degrés de liberté est traité comme n oscillateurs simples.

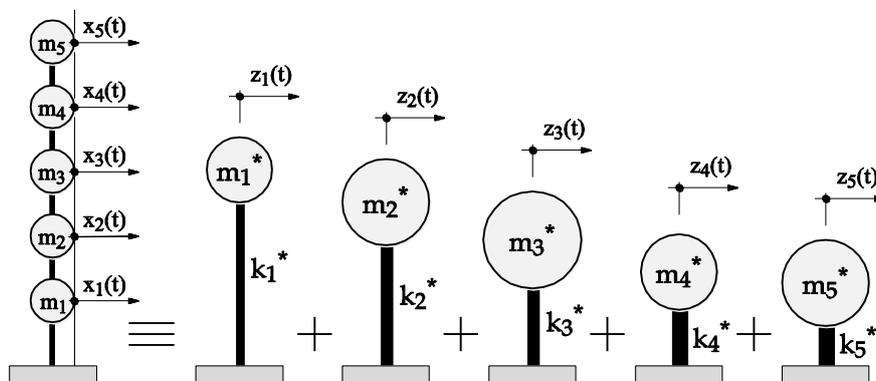


Figure (5.5) – Décomposition modale

La réponse modale s'obtient par la solution générale des oscillations libres d'un oscillateur simple en utilisant les conditions initiales modales $z_n(0)$ et $\dot{z}_n(0)$:

$$z_n(t) = z_n(0) \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{z}_n(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad (151)$$

Les déplacements relatifs sont ensuite déterminés par la superposition des réponses modales de la façon suivante :

$$\underline{x}(t) = \underline{A} \underline{z}(t) \quad (152)$$

5.1.2 Oscillations amorties et forcées

Le développement précédent n'est valable qu'en cas d'oscillations libres non amorties. Intéressons-nous maintenant au cas plus général d'oscillations forcées amorties.

On considère que l'effet de l'amortissement est négligeable sur la valeur des pulsations propres. L'équation matricielle du mouvement pour un système à plusieurs degrés de liberté, dont les oscillations sont amorties et forcées, s'écrit de la manière suivante :

$$\underline{\mathbf{M}}\ddot{\underline{x}} + \underline{\mathbf{C}}\dot{\underline{x}} + \underline{\mathbf{K}}\underline{x} = \underline{f}(t) \quad (153)$$

où $\underline{\mathbf{C}}$ est la matrice d'amortissement et $\underline{f}(t)$ est le vecteur de la force perturbatrice périodique.

Les déplacements relatifs x_i s'expriment alors en coordonnées modales par le changement de variables suivant :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{A}}\underline{z} \quad (143)$$

On introduit le changement de coordonnées et on récrit l'expression (153) en pré-multipliant par la matrice $\underline{\mathbf{A}}^T$:

$$\underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{A}} \ddot{\underline{z}} + \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}} \dot{\underline{z}} + \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{A}} \underline{z} = \underline{\mathbf{A}}^T \underline{f}(t) \quad (155)$$

On utilise la notion de grandeurs généralisées pour exprimer le système d'équations découplées suivant :

$$\underline{\mathbf{M}}^* \ddot{\underline{z}} + \underline{\mathbf{C}}^* \dot{\underline{z}} + \underline{\mathbf{K}}^* \underline{z} = \underline{f}(t)^* \quad (156)$$

Où, la matrice des masses généralisées s'exprime ainsi :

$$\underline{\mathbf{M}}^* = \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{A}} \quad (157)$$

La matrice de rigidité généralisée :

$$\underline{\mathbf{K}}^* = \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{A}} \quad (158)$$

La matrice d'amortissement généralisé :

$$\underline{C}^* = \underline{A}^T \underline{C} \underline{A} \quad (159)$$

Le vecteur des forces perturbatrices périodiques généralisées :

$$\underline{f}(t)^* = \underline{A}^T \underline{f}(t) \quad (160)$$

En divisant chaque ligne du système d'équations découplées par la masse généralisée, on obtient l'équation bien connue de l'oscillateur simple amorti et forcé :

$$\ddot{z}_n + 2\lambda_n \dot{z}_n + \omega_n^2 z_n = \frac{f_n^*(t)}{m_n} \quad (161)$$

On note qu'en pratique, il est plus facile et plus logique de définir les coefficients d'amortissement λ_n pour chaque mode que d'exprimer les coefficients c_{mn} dans la matrice d'amortissement.

La réponse modale s'obtient en résolvant l'équation 161 numériquement par une méthode habituelle (Newmark, etc). On utilise ensuite le changement de coordonnées pour obtenir les déplacements x_n .

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} z_1(t) + \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} z_2(t) \quad (162)$$

Deux types d'amortissement peuvent alors apparaître : l'amortissement « classique » et l'amortissement « non-classique ».

5.1.2.1 Amortissement classique

\underline{C}^* étant diagonale, les n équations différentielles sont exprimées en coordonnées modales; les modes propres sont, pour un même système, les mêmes que sans amortissement. Ce cas se produit lorsque \underline{C} est une combinaison linéaire de \underline{K} et \underline{M} . On peut montrer également que des modes naturels sont obtenus dans un système amorti lorsque l'une ou l'autre des trois conditions suivantes est remplie :

1. Un amortisseur est monté en parallèle de chaque ressort, la constante d'amortissement étant proportionnelle à la force de rappel du ressort.
2. Un amortisseur relie chaque masse à la base, la constante d'amortissement étant proportionnelle à la masse.
3. Toute combinaison linéaire des deux cas précédents conduit à des modes propres réels.

Le facteur d'amortissement vaut :

$$\frac{\lambda_n}{\omega_n} = \frac{c_n^*}{2m_n^* \cdot \omega_n} = \zeta_n \quad (163)$$

Dans la majorité des structures rencontrées dans la pratique, les facteurs d'amortissement sont quasi indépendants des pulsations propres. Ainsi, lorsque λ est indépendant de ω , on est en présence d'amortissement structurel.

5.1.2.2 Amortissement de Rayleigh

La matrice d'amortissement \underline{C} dépend d'une addition des composants pondérés des matrices \underline{M} et \underline{K} . La matrice \underline{C} est alors diagonale. D'avantage d'explications peuvent être trouvés dans [1].

5.1.2.3 Amortissement non-classique

\underline{C}^* n'étant pas diagonale, les modes propres sont différents de ceux du système non amorti. Les valeurs d'amortissement se déterminent de la même manière que les rigidités.

5.1.3 **Mouvement de la fondation**

En cas de mouvement de la fondation, comme par exemple lors d'un séisme, l'équation du mouvement s'écrit, sous forme matricielle, de la manière suivante :

$$\underline{M}\ddot{x} + \underline{C}\dot{x} + \underline{K}x = -\underline{M} \cdot \underline{e}_x \ddot{x}_g(t) \quad (164)$$

où la matrice des masse doit être multipliée par le vecteur direction e_x :

$$-\underline{M} \cdot \underline{e}_x = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \quad (165)$$

et $\ddot{x}_g(t)$ est l'accélération de la fondation dans le temps.

On utilise le changement de coordonnées habituel et on récrit la formulation suivante :

$$\underline{A}^T \underline{M} \underline{A} \ddot{z} + \underline{A}^T \underline{C} \underline{A} \dot{z} + \underline{A}^T \underline{K} \underline{A} z = -\underline{A}^T \underline{M} \cdot \underline{e}_x \ddot{x}_g(t) \quad (166)$$

On introduit la notion de vecteur de facteur de participation :

$$\underline{r} = \underline{A}^T \underline{M} \cdot \underline{e}_x = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad (167)$$

En utilisant les grandeurs généralisées, on peut donc récrire l'expression sous la forme suivante :

$$\underline{M}^* \ddot{\underline{z}} + \underline{C}^* \dot{\underline{z}} + \underline{K}^* \underline{z} = -r \ddot{x}_g \quad (168)$$

Il faut noter que les grandeurs généralisées et les facteurs de participation dépendent de la normalisation des vecteurs propres a_n .

Après division par m_n^* , la n -ième ligne de ce système d'équations s'écrit de la façon suivante :

$$\ddot{z}_n + 2\lambda_n \dot{z}_n + \omega_n^2 z_n = -\frac{r_n}{m_n^*} \ddot{x}_g(t) \quad (169)$$

Le processus de décomposition modale, pour $n = 5$ degrés de liberté, est illustré à la figure (5.6). Il faut bien noter l'influence des facteurs de participation qui modifient l'amplitude de l'accélération du sol de chaque mode.

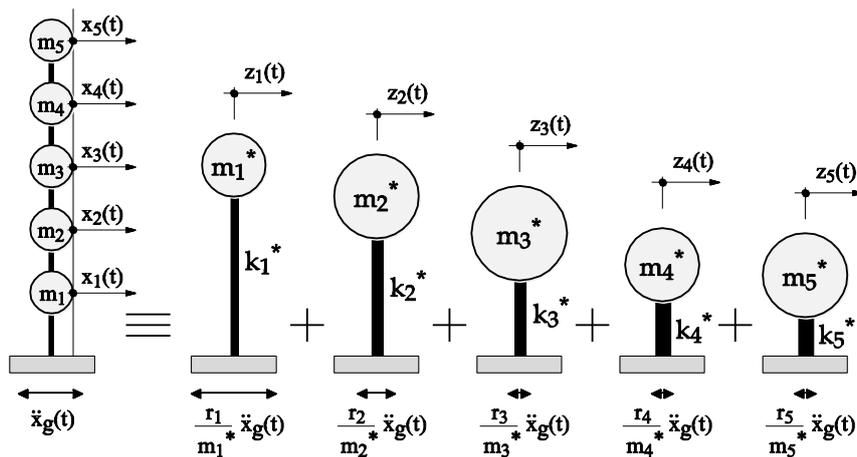


Figure (5.6) – Réponse modale

La réponse modale s'obtient en résolvant l'équation 169 numériquement par une méthode habituelle. Les déplacements relatifs sont ensuite déterminés par la superposition des réponses modales. Ainsi, pour un cadre de 2 étages, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} z_1(t) + \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} z_2(t) \quad (170)$$

Une grandeur permet de quantifier a priori la contribution de chaque mode à la réponse totale : il s'agit de la masse modale qui est définie comme suit :

$$m_{\text{mod},n} = \left(\frac{r_n}{m_n^*} \right)^2 m_n^* = \frac{\left(\sum_{m=1}^N A_{mn} m_m \right)^2}{\sum_{m=1}^N A_{mn}^2 m_m} \quad (171)$$

Contrairement au facteur de participation et à la masse généralisée, la valeur de la masse modale ne dépend pas de la normalisation des modes. Elle correspond à l'effort tranchant à la base de l'oscillateur multiple dans chaque mode. De plus, la somme des masses modales est égale à la somme des masses :

$$\sum_{n=1}^N m_{\text{mod},n} = \sum_{m=1}^N m_m \quad (172)$$

Exemple 5.2 – Bâtiment en béton armé de cinq étages

Afin d'illustrer la théorie ci-dessus, intéressons-nous à l'analyse sismique d'un bâtiment de cinq étages en béton armé. Le bâtiment est constitué de deux sous-sols rigides, de sorte que le niveau d'encastrement se situe au rez-de-chaussée. Le noyau en béton armé peut être considéré comme une poutre console pour les actions sismiques. La modélisation du bâtiment est présentée à la figure (5.7).

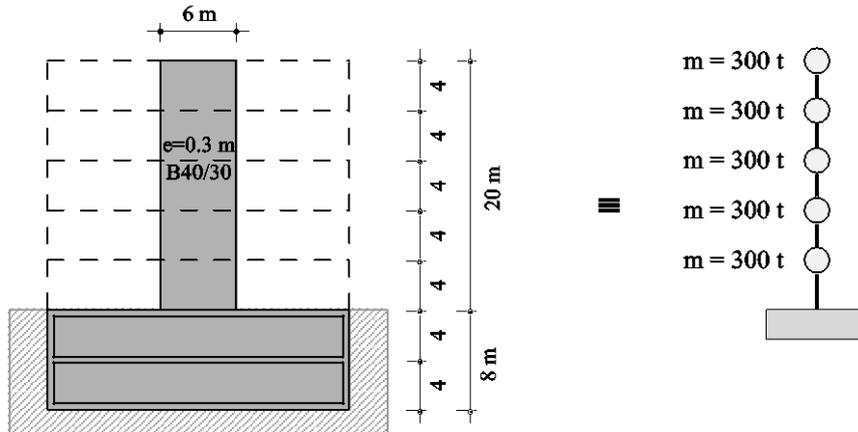


Figure (5.7) – Modèle d'un bâtiment

On écrit l'équation du mouvement pour chaque degré de liberté :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3 + k_{14}x_4 + k_{15}x_5 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3 + k_{24}x_4 + k_{25}x_5 &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + k_{31}x_1 + k_{32}x_2 + k_{33}x_3 + k_{34}x_4 + k_{35}x_5 &= 0 \\ m_4 \ddot{x}_4 + k_{41}x_1 + k_{42}x_2 + k_{43}x_3 + k_{44}x_4 + k_{45}x_5 &= 0 \\ m_5 \ddot{x}_5 + k_{51}x_1 + k_{52}x_2 + k_{53}x_3 + k_{54}x_4 + k_{55}x_5 &= 0 \end{aligned}$$

On récrit ce système d'équations sous forme matricielle :

$$\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} = 0$$

ou bien de manière explicite :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{x}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On calcule la matrice de flexibilité de manière habituelle, en considérant la modélisation du bâtiment proposée à la figure (5.7). La matrice des masses est diagonale.

$$\hat{\underline{f}} = \frac{h^3}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 5 & 16 & 28 & 40 & 52 \\ 8 & 28 & 54 & 81 & 108 \\ 11 & 40 & 81 & 128 & 176 \\ 14 & 52 & 108 & 176 & 250 \end{bmatrix} \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité est égale à l'inverse de la matrice de flexibilité.

$$\underline{K} = \hat{\underline{f}}^{-1} = \frac{6EI}{h^3} \begin{bmatrix} 3.1381 & -1.9834 & 0.7956 & -0.1989 & 0.0331 \\ -1.9834 & 2.4420 & -1.7845 & 0.6961 & -0.1160 \\ 0.7956 & -1.7845 & 2.3425 & -1.5856 & 0.4309 \\ -0.1989 & 0.6961 & -1.5856 & 1.6464 & -0.6077 \\ 0.0331 & -0.1160 & 0.4309 & -0.6077 & 0.2680 \end{bmatrix}$$

Les modes propres sont les vecteurs propres et les pulsations propres sont les valeurs propres du problème aux valeurs propres suivant, obtenu en annulant le déterminant du système d'équation :

$$\left| -\omega_n^2 \underline{M} + \underline{K} \right| = 0$$

ou bien sous forme explicite :

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega_n^2 m_1 & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} - \omega_n^2 m_2 & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} - \omega_n^2 m_3 & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} - \omega_n^2 m_4 & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} - \omega_n^2 m_5 \end{vmatrix} = 0$$

Il faut encore expliciter le déterminant et résoudre l'équation du 5^{ème} degré en ω_n^2 afin d'obtenir les cinq pulsations propres des cinq modes. On résout ensuite le système découplé pour chacune des cinq pulsations propres afin d'obtenir les modes propres. Les fréquences propres et les modes propres sont mis en évidence dans les illustrations ci-dessous :

	1	2	3	4	5
f [Hz]	1.80	11.5	32.5	62.8	93.5
m* [kNs ² /m]	531	891	1011	714	868

m*: masse généralisée

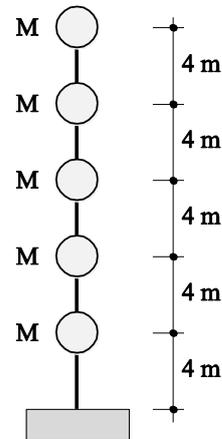


Figure (5.8) – Fréquence propre de chaque mode

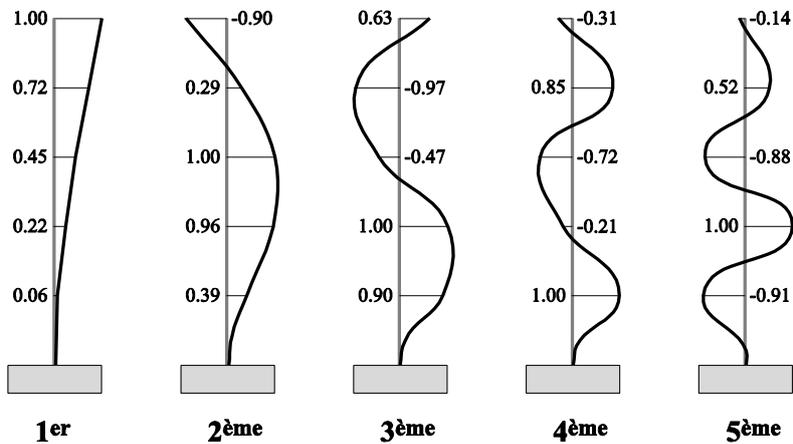


Figure (5.9) – Illustration des modes

En cas de séisme, on considère l'accélération du sol. De plus un bâtiment en béton armé possède un certain amortissement.

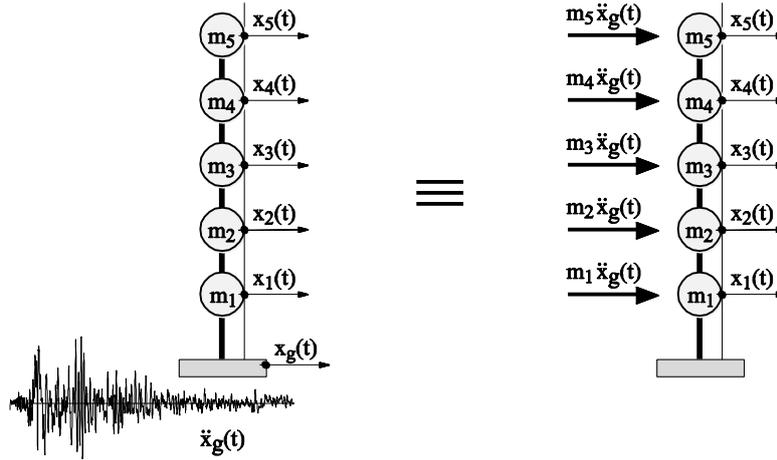


Figure (5.10) – Schéma d'un séisme

Ecrivons les équations du mouvement en cas de mouvement de la fondation. Pour ce bâtiment :

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + c \dot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3 + k_{14}x_4 + k_{15}x_5 &= -m_1 \ddot{x}_g(t) \\
 m_2 \ddot{x}_2 + c \dot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3 + k_{24}x_4 + k_{25}x_5 &= -m_2 \ddot{x}_g(t) \\
 m_3 \ddot{x}_3 + c \dot{x}_3 + k_{31}x_1 + k_{32}x_2 + k_{33}x_3 + k_{34}x_4 + k_{35}x_5 &= -m_3 \ddot{x}_g(t) \\
 m_4 \ddot{x}_4 + c \dot{x}_4 + k_{41}x_1 + k_{42}x_2 + k_{43}x_3 + k_{44}x_4 + k_{45}x_5 &= -m_4 \ddot{x}_g(t) \\
 m_5 \ddot{x}_5 + c \dot{x}_5 + k_{51}x_1 + k_{52}x_2 + k_{53}x_3 + k_{54}x_4 + k_{55}x_5 &= -m_5 \ddot{x}_g(t)
 \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{x}}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{\underline{x}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{x}} = -\underline{\underline{M}} \underline{\underline{e}}_x \ddot{x}_g(t)$$

où la matrice des masses doit être multipliée par le vecteur direction e_x :

$$-\underline{\underline{M}} \underline{\underline{e}}_x = - \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & m_3 & & \\ & & & m_4 & \\ 0 & & & & m_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{bmatrix}$$

et la matrice d'amortissement est :

$$\underline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c & & & & 0 \\ & c & & & \\ & & c & & \\ & & & c & \\ 0 & & & & c \end{bmatrix}$$

Le système d'équations couplées peut être découplé et transformé en un système d'oscillateurs simples, si $\underline{\mathbf{M}}$ et $\underline{\mathbf{K}}$ sont constantes dans le temps.

Les déplacements relatifs x_i s'expriment en coordonnées modales par le changement de variables suivant :

$$\underline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{z}} = \sum_{n=1}^5 a_n z_n$$

où \underline{a}_n sont les vecteurs propres, $\underline{\mathbf{z}}$ les coordonnées modales et $\underline{\mathbf{A}}$ la matrice des vecteurs modaux.

En tenant compte de ce changement de variables et en prémultipliant par $\underline{\mathbf{A}}^T$, on obtient :

$$\underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{A}} \ddot{\underline{\mathbf{z}}} + \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{A}} \dot{\underline{\mathbf{z}}} + \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{z}} = -\underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{M}} \underline{e}_x \ddot{x}_g(t) = -\underline{r} \ddot{x}_g(t)$$

où \underline{r} est le facteur de participation :

$$\underline{r} = \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{M}} \underline{e}_x$$

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & m_3 & & \\ & & & m_4 & \\ 0 & & & & m_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} a_{11}m_1 & a_{21}m_2 & a_{31}m_3 & a_{41}m_4 & a_{51}m_5 \\ a_{12}m_1 & a_{22}m_2 & a_{32}m_3 & a_{42}m_4 & a_{52}m_5 \\ a_{13}m_1 & a_{23}m_2 & a_{33}m_3 & a_{43}m_4 & a_{53}m_5 \\ a_{14}m_1 & a_{24}m_2 & a_{34}m_3 & a_{44}m_4 & a_{54}m_5 \\ a_{15}m_1 & a_{25}m_2 & a_{35}m_3 & a_{45}m_4 & a_{55}m_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum a_{m1}m_m \\ \sum a_{m2}m_m \\ \sum a_{m3}m_m \\ \sum a_{m4}m_m \\ \sum a_{m5}m_m \end{bmatrix}$$

En utilisant des grandeurs généralisées, on obtient :

$$\underline{M}^* \cdot \underline{e}_x = \begin{bmatrix} m_1^* \\ m_2^* \\ m_3^* \\ m_4^* \\ m_5^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 m_1 + a_{21}^2 m_2 + a_{31}^2 m_3 + a_{41}^2 m_4 + a_{51}^2 m_5 \\ a_{12}^2 m_1 + a_{22}^2 m_2 + a_{32}^2 m_3 + a_{42}^2 m_4 + a_{52}^2 m_5 \\ a_{13}^2 m_1 + a_{23}^2 m_2 + a_{33}^2 m_3 + a_{43}^2 m_4 + a_{53}^2 m_5 \\ a_{14}^2 m_1 + a_{24}^2 m_2 + a_{34}^2 m_3 + a_{44}^2 m_4 + a_{54}^2 m_5 \\ a_{15}^2 m_1 + a_{25}^2 m_2 + a_{35}^2 m_3 + a_{45}^2 m_4 + a_{55}^2 m_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum a_{m1}^2 m_m \\ \sum a_{m2}^2 m_m \\ \sum a_{m3}^2 m_m \\ \sum a_{m4}^2 m_m \\ \sum a_{m5}^2 m_m \end{bmatrix}$$

Le système se simplifie :

$$\underline{M}^* \ddot{\underline{z}} + \underline{C}^* \dot{\underline{z}} + \underline{K}^* \underline{z} = -\underline{A}^T \underline{M} \underline{e}_x \ddot{x}_g(t) = -\underline{r} \ddot{x}_g(t)$$

Il faut noter que les grandeurs généralisées et les facteurs de participation dépendent de la normalisation des vecteurs propres \underline{a}_n .

Après division par m_n^* , la n-ième ligne de ce système d'équations s'écrit :

$$\ddot{z}_n + 2\lambda_n \dot{z}_n + \omega_n^2 z_n = \frac{r_n}{m_n^*} \ddot{x}_g(t)$$

A l'exception de la modification de l'amplitude de l'accélération du sol, il s'agit à nouveau de l'équation bien connue d'un oscillateur simple, dans laquelle :

$$\omega_n^2 = \frac{k_n^*}{m_n^*}$$

La réponse modale s'obtient en résolvant l'équation en z numériquement par une des méthodes habituelles. Les déplacements relatifs sont ensuite déterminés par superposition des réponses modales :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ a_{51} \end{bmatrix} z_1(t) + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \\ a_{25} \end{bmatrix} z_2(t) + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \\ a_{53} \end{bmatrix} z_3(t) + \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \\ a_{54} \end{bmatrix} z_4(t) + \begin{bmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \\ a_{45} \\ a_{55} \end{bmatrix} z_5(t)$$

Une grandeur permet de quantifier à priori la contribution de chaque mode à la réponse totale. Il s'agit de la masse modale qui est définie comme suit :

$$m_{\text{mod},n} = \left(\frac{r_n}{m_n^*} \right)^2 m_n^* = \frac{\left(\sum_{m=1}^N a_{mn} m_m \right)^2}{\sum_{m=1}^N a_{mn}^2 m_m}$$

On peut démontrer qu'elle correspond à l'effort tranchant à la base de l'oscillateur multiple dans chaque mode. De plus, la somme des masses modales est égale à la somme des masses :

$$\sum_{n=1}^N m_{\text{mod},n} = \sum_{m=1}^N m_m$$

5.2 Résolution numérique par la méthode de Holzer

Chaque ligne du système d'équations (142) représente la condition d'équilibre relative au degré de liberté considéré. Une pulsation propre donnée (ω_n) doit remplir toutes les conditions d'équilibre du système.

La Méthode de Holzer consiste à choisir arbitrairement une pulsation propre et à vérifier si elle satisfait l'ensemble des équations d'équilibre du système ; cette méthode est donc de type itératif et approximatif.

Exemple 5.3 – Application

On reprend le système présenté par la figure (5.1). A nouveau, on considère des rigidités et des masses égales :

$$k_{11} = k_{22} = k_{33} = k \quad \text{et} \quad m_1 = m_2 = m_3 = m$$

De manière résumée, on effectue un premier choix de la valeur de la pulsation que l'on insère dans les équations d'équilibre et on vérifie que ces équations sont satisfaites ; si ce n'est pas le cas, on recommence le processus avec une autre valeur de pulsation et ce, jusqu'à obtenir la pulsation propre du système qui satisfait toutes les équations d'équilibre.

La démarche peut être représentée par le tableau qui suit.

Première itération

$$\omega = 0.5$$

$$x_3 = 1, x_2 = 0.75, x_1 = 0.313 \rightarrow F = 0.206$$

F : force extérieure nécessaire pour que l'équilibre soit garanti.

1	2	3	4	5	6	7	8
position	m_m	$m_m\omega^2$	x_m	$x_m m_m \omega^2$	$\sum_{m=0}^n x_m m_m \omega^2$	k_{mn}	$\frac{\sum_{m=0}^n x_m m_m \omega^2}{k_{mn}}$
3	1	0.25	1	0.25	0.25	1	0.25
2	1	0.25	0.75	0.19	0.44	1	0.44
1	1	0.25	0.31	0.08	0.52	1	0.52
fondation	∞		0.21				

Le premier élément défini est le déplacement de la masse 3 : $x_3 = 1$; à partir de cette valeur, on obtient l'ensemble des valeurs de la ligne correspondante. Ensuite, connaissant la valeur de x_2 par l'intermédiaire de la colonne 8 ($1 - 0.25 = 0.75$), on obtient l'ensemble des valeurs de la ligne correspondante ; à noter la colonne 6 qui effectue la sommation de l'ensemble des masses considérées jusqu'au niveau considéré.

Le dernier point considéré est la fondation qui est par définition immobile, ce qui implique une valeur de déplacement nulle. Résultat auquel on doit aboutir lorsque la bonne valeur de la pulsation a été trouvée.

$$\omega = 0.4$$

$$x_3 = 1, x_2 = 0.84, x_1 = 0.54 \rightarrow F = -0.16$$

Par interpolation linéaire on obtient :

$$\omega = 0.4 + 0.1 \frac{0.16}{0.16 + 0.206} = 0.4447 \text{ sec}^{-1}$$

Lorsque F est nulle, le système peut varier de façon harmonique sans nécessiter l'apport d'une force extérieure.

5.3 Amortisseur massique

Ce type d'amortissement, qui est utilisé dans les bâtiments, tours et ponts, permet de limiter l'amplitude des oscillations (fréquence de sollicitation proche de la fréquence propre de la structure) néfastes pour la structure. L'idée de cette technique est d'ajouter à la structure une masse permettant de modifier la fréquence propre de l'élément auquel elle est accrochée.

On remarque que le déplacement minimal de la masse M (arbitrairement définie comme représentant la structure) est atteint lorsque la fréquence de sollicitation est équivalente à la fréquence propre de l'amortisseur. Le déplacement de l'élément est par ailleurs fonction du rapport des masses $\mu = m/M$.

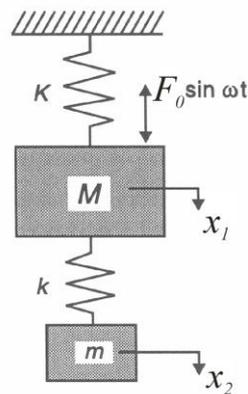


Figure (5.11) – Modèle d'amortisseur massique, réf [4]

D'autres systèmes plus sophistiqués sont installés dans différents bâtiments. Il s'agit, d'une part, d'amortisseurs massiques actifs (AMD) et, d'autre part, de systèmes hybrides (HMD) qui combinent un amortisseur massif passif avec un actuateur contrôlé.

L'article de Bachmann et Weber, dont un résumé se trouve dans les transparents du cours est cité comme référence. Le lecteur intéressé peut, aussi consulter [4].

6. Réponses et spectres

6.1 Méthode des forces de remplacement

Pour le dimensionnement des structures, seule la réponse maximale est intéressante. Elle peut être estimée rapidement à l'aide du spectre de réponse. Si le comportement de la structure est linéaire, la réponse modale maximale s'obtient directement par le spectre de réponse. La figure (6.1) illustre un spectre de réponse en accélération en fonction de la période propre de la structure pour les séismes pris en compte par la norme SIA. La grandeur S_e représente l'accélération horizontale maximale alors que a_{gd} est l'accélération gravitationnelle.

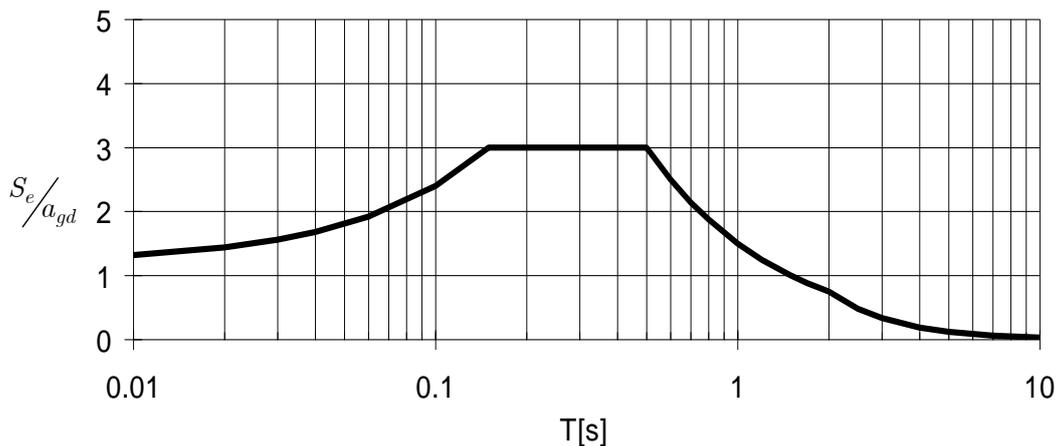


Figure (6.1) – Spectre d'accélération SIA

De ce spectre, on obtient l'accélération élastique horizontale maximale pour une structure donnée, en ayant la période propre de la dite structure. On calcule ensuite l'accélération de dimensionnement S_d qui contient des paramètres faisant intervenir le type de structure (classe d'ouvrage) et leur comportement non linéaire (coefficient de comportement).

On multiplie ensuite l'accélération horizontale maximale de dimensionnement S_d par la masse de la structure pour obtenir la force de remplacement.

$$F = m \cdot S_d \quad (174)$$

Cette force remplace le séisme et peut être utilisée pour le dimensionnement de la structure.

6.2 Exemple pour une structure à un degré de liberté

On veut connaître les efforts dans la structure ci-dessous pour la dimensionner au séisme du spectre de la figure (6.1).

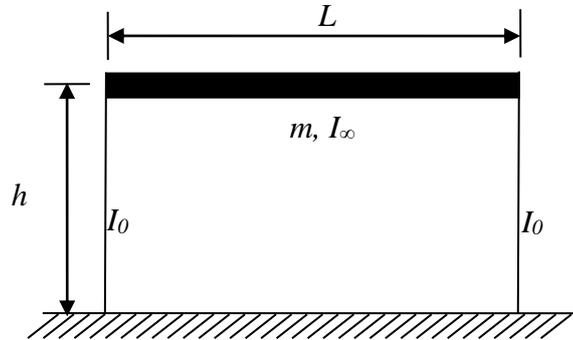


Figure (6.2) – Cadre simple

Les données de cette structure sont les suivantes :

$$\begin{aligned} E &= 210\,000 \text{ Mpa} \\ I_0 &= 11,26 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ m &= 9000 \text{ kg} \\ h &= 8 \text{ m} \\ L &= 11 \text{ m} \end{aligned}$$

On calcule la période propre de la structure de la manière suivante :

$$\begin{aligned} k_{eq} &= 2 \cdot 12 \frac{EI_0}{h^3} = 110,8 \cdot 10^3 \text{ N/m} \\ \omega_n &= \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = 3,51 \text{ rad/s} \rightarrow T_n = 1,79 \text{ s} \end{aligned}$$

On entre dans le spectre de la figure (6.1) avec cette valeur de la période propre et on obtient l'accélération horizontale maximale :

$$\begin{aligned} \frac{S_e}{a_{gd}} &= 2,45 \\ S_e &= 2,45 \cdot 9,81 = 24,0 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

En admettant que $S_e = S_d$,

$$F = 9000 \cdot 24,0 = 216\,310 \text{ [N]}$$

Selon la méthode des forces de remplacement, l'effet du séisme peut donc être remplacé par une force horizontale de 216,3 [kN] appliquée à la traverse.

6.3 Analyse des réponses dans le domaine fréquentiel

Le comportement dynamique des structures peut être examiné dans les domaines temporel et fréquentiel. Chacune de ces analyses fournit des détails spécifiques sur la réponse d'une structure. L'analyse temporelle nous permet d'obtenir la réponse maximale d'une structure. L'analyse fréquentielle permet, par exemple, d'identifier la fréquence fondamentale d'une structure à partir de la mesure de ses oscillations.

Le contenu fréquentiel de la réponse d'une structure est obtenu en calculant la transformée de Fourier de celle-ci. Largement utilisée en Physique, la transformée de Fourier d'une fonction à une variable (par exemple le temps) est devenue l'outil incontournable de la représentation fréquentielle d'un signal grâce surtout à l'apparition de la FFT (de l'anglais : Fast Fourier Transform, Transformée de Fourier rapide) : un algorithme performant qui a permis de réduire le temps de calcul d'une façon considérable.

6.3.1 Du domaine temporel au fréquentiel

L'analyse dans le domaine fréquentiel permet la détermination des caractéristiques dynamiques des structures. La connaissance de ces paramètres structuraux est essentielle à la résolution de plusieurs problèmes, notamment :

- L'identification des fréquences critiques pour une structure,
- La justification pour un amortissement supplémentaire et d'autres modifications,
- La justification pour limiter des actions sur une structure (le trafic, etc.).

Les figures suivantes schématisent le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel de la réponse en accélération d'une structure.

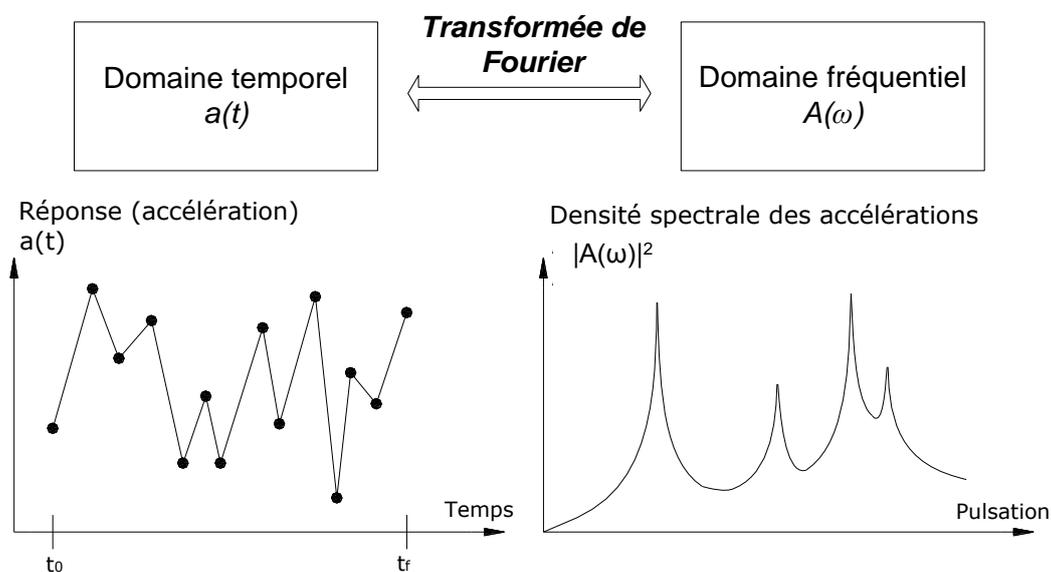


Figure (6.3) – Du domaine temporel au fréquentiel

La transformée de Fourier transforme les échantillons capturés dans le domaine temporel $a(t)$ en une série d'échantillons dans le domaine fréquentiel $A(\omega)$. La réponse fréquentielle d'une structure est décrite par la répartition en fréquence de la réponse. Le carré du module de la fonction $A(\omega)$ est appelé densité spectrale et est défini comme la répartition moyenne de l'énergie du signal en fonction de la fréquence. On peut donc déterminer les fréquences excitées de la structure en repérant les pics d'énergie, i.e. pics de la TF.

6.3.2 La transformée de Fourier

L'analyse spectrale par la transformée de Fourier s'appuie sur le principe que toute fonction périodique peut être développée en une série de fonctions harmoniques dont la fréquence est un multiple de la fréquence de la fonction considérée. Cette décomposition est connue sous le nom de séries de Fourier. La figure ci-dessous schématise la décomposition d'une fonction périodique quelconque de période D_m en un ensemble de fonctions périodiques simples de périodes (D_m/i) avec $i=1, \dots, 4$.

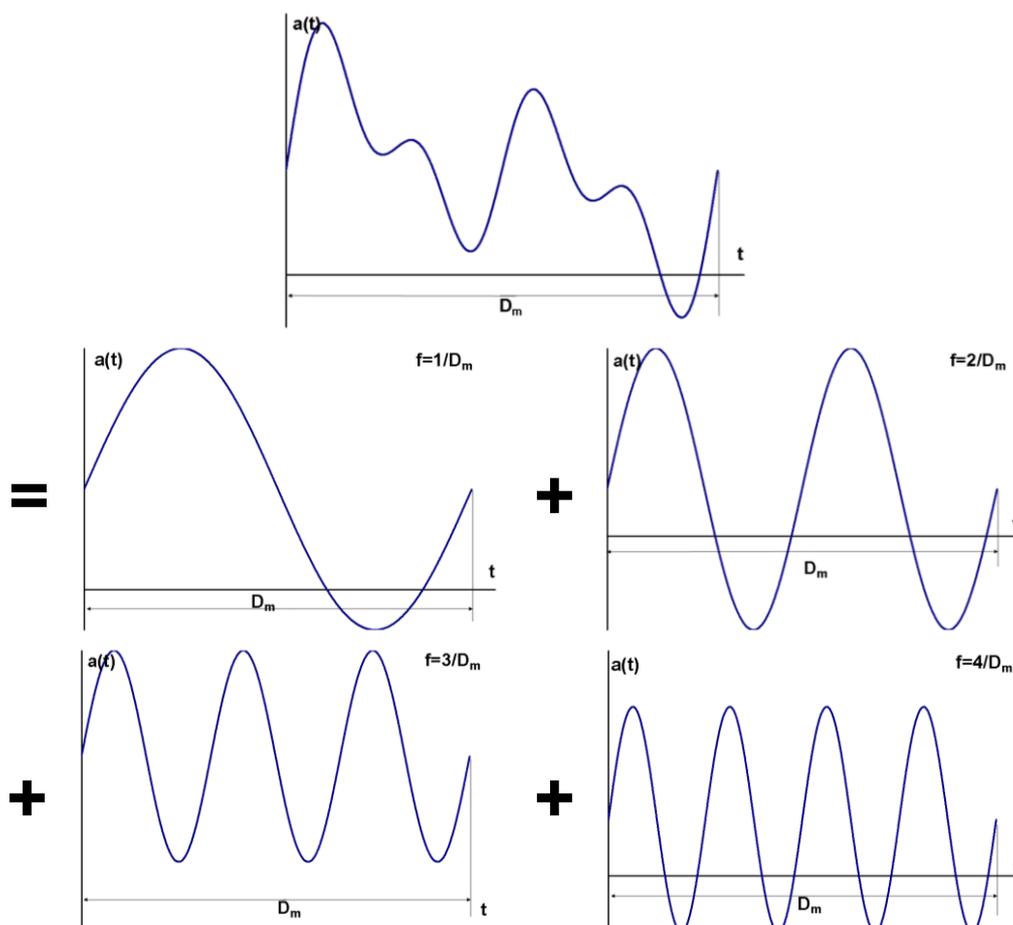


Figure (6.4) – Décomposition d'un signal périodique en une série de fonctions harmoniques

La transformée de Fourier est une opération mathématique qui transforme une fonction réelle, non nécessairement périodique mais intégrable, en une autre fonction, décrivant le spectre fréquentiel de cette dernière. Si a est une fonction réelle de la variable t , sa transformée de Fourier est la fonction $A(\omega)$ définie comme :

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{-i\omega t} dt \quad (175.1)$$

Une autre définition de la transformée de Fourier est celle qui correspond à une représentation en fréquence au lieu de celle en pulsation donnée ci-dessus :

$$A(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{-2\pi i f t} dt \quad (175.2)$$

Il est à noter que cette transformation est uniquement valable pour des systèmes linéaires.

6.3.3 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

La définition de la transformée de Fourier continue d'une fonction fournit des informations essentielles sur le contenu fréquentiel de la fonction. Cependant, cette définition n'est pas adéquate pour le traitement numérique des données. Pour une implémentation informatique, il est nécessaire de représenter la fonction continue par un ensemble de valeurs discrètes. D'une façon similaire, les valeurs de la transformée de Fourier doivent être définies pour un ensemble fini de valeurs discrètes de fréquence. Aussi, dans les situations courantes (mesures de vibration, etc.), la fonction $a(t)$ est échantillonnée à intervalles réguliers donnant lieu à un ensemble fini de mesures digitalisées.

Supposons qu'une grandeur physique $a(t)$ (force, déplacement, accélération, etc.) soit échantillonnée à intervalles de temps égaux Δt sur une durée d'échantillonnage totale T . On obtient alors un nombre fini N de points où la fonction $a(t)$ a été échantillonnée :

$$a_k = a(k) \quad \text{avec } k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

La transformée de Fourier de la fonction $a(t)$ engendrera N valeurs A_n dans le domaine fréquentiel séparées par un pas en fréquence $\Delta f = 1/T$ et correspondant à des pulsations ω_n telles que :

$$A_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i\omega_n k} \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (176)$$

avec : $\omega_n = \frac{2\pi n}{N}$

Si on définit : $w = e^{i2\pi/N}$, alors la transformée de Fourier discrète peut être écrite comme :

$$A_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k w^{-nk} \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (177)$$

La transformé de Fourier discrète peut alors s'exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$A_N = \frac{1}{N} W_N \cdot a_N \quad (178)$$

Telles que:

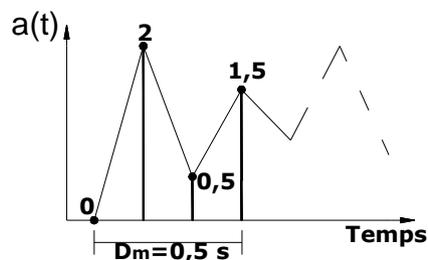
$$A_N = [A_0, A_1, \dots, A_{N-1}]^T \quad (179)$$

$$a_N = [a_0, a_1, \dots, a_{N-1}]^T \quad (180)$$

$$W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & \dots & w^{-(N-1)} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & \dots & w^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{-(N-1)} & w^{-2(N-1)} & \dots & w^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (181)$$

Exemple 5.4 – Application

Nous nous proposons de faire une analyse fréquentielle du signal de la figure ci-dessous :



Nous disposons des données suivantes :

- le nombre de mesures : $N = 4$;
- La durée d'enregistrement : $D_m = 0.5s$;
- $a_n = 0, 2, 0.5, 1.5$ ^T

a) Pour $N = 4$, nous avons : $w = e^{i\pi/2}$

b) Nous allons évaluer la transformée de Fourier discrète de a_n en utilisant l'expression matricielle :

$$A_N = \frac{1}{N} W_N \cdot a_N$$

$$\text{Avec : } W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & w^{-3} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & w^{-6} \\ 1 & w^{-3} & w^{-6} & w^{-9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & +i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & +i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

où :

$$w^{-1} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = -i \quad (\text{Rappel : } e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta)$$

$$w^{-2} = \cos \pi - i \sin \pi = -1$$

$$w^{-3} = \cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2} = +i$$

$$w^{-4} = \cos 2\pi - i \sin 2\pi = 1$$

$$w^{-6} = \cos 3\pi - i \sin 3\pi = \cos \pi - i \sin \pi = -1$$

$$w^{-9} = \cos \frac{9\pi}{2} - i \sin \frac{9\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = -i$$

e) Le spectre d'amplitude est obtenu en calculant le module $|A_N|$ des transformées de Fourier des composantes du vecteur a_n :

$$\begin{aligned} |A_N| &= \frac{1}{N} |W \cdot a_N| \\ &= \frac{1}{4} \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & +i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & +i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{4} \left\| \begin{bmatrix} 4 \\ -0.5 - 0.5i \\ -3 \\ -0.5 + 0.5i \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ \sqrt{2}/2 \\ 3 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.177 \\ 0.75 \\ 0.177 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

f) L'écart entre les points

$$\Delta f = \frac{1}{\text{la durée totale du signal, } D_m} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ Hz}$$

$$f_0 = 0, f_1 = 2 \text{ Hz}, f_2 = 4 \text{ Hz}$$

g) Nombre de valeurs utiles = $\frac{N}{2} + 1 = \frac{4}{2} + 1 = 3$

h) Les valeurs pour le spectre d'amplitude pour les trois valeurs de fréquence utilisables sont données dans le tableau ci-dessous :

Fréquence, $f \text{ Hz}$	Amplitude, $ A_N \left[\frac{m}{s^2} \right]$
0,0	1,000
2,0	0,177
4,0	0,750

i) On obtient le graphe suivant pour le spectre d'amplitude :

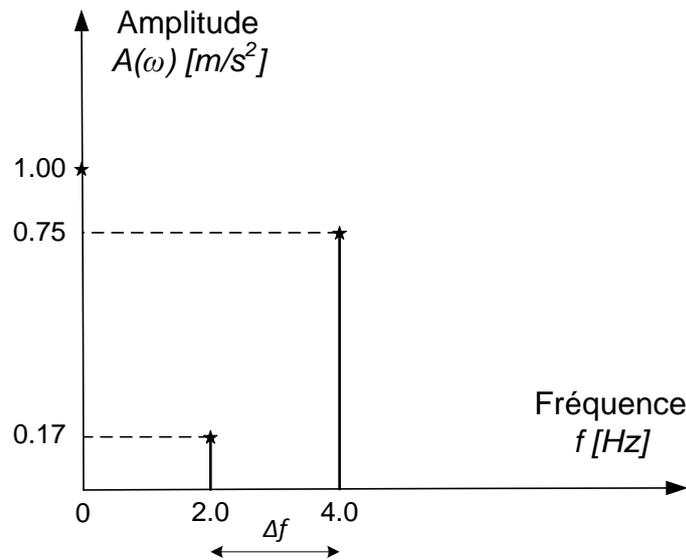


Figure (6.5) – Spectre d’amplitude : Représentation de façon discrète des coefficients de la série de Fourier

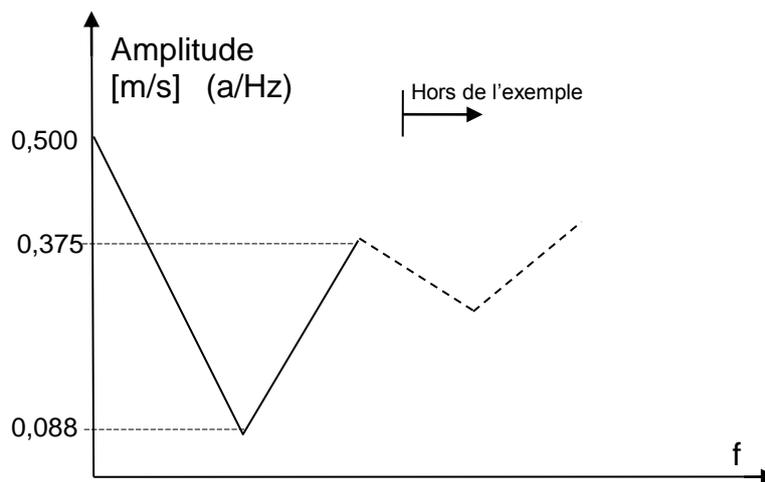


Figure (6.6) – Densité spectrale : Représentation de façon continue des coefficients de la série de Fourier ($\frac{A_N}{\Delta f}$)

6.3.4 Transformée de Fourier Rapide, Fast Fourier Transform (FFT)

L'idée fondamentale de la transformée de Fourier rapide (FFT) vient du fait que la transformée de Fourier discrète d'un nombre pair de points peut être écrite comme la somme de deux transformées distinctes (le produit par $1/N$ a été omis par souci de simplicité) :

$$A_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{2\pi i k n / N} = \sum_{k=0}^{N/2-1} a_{2k} e^{2\pi i (2k) n / N} + \sum_{k=0}^{N/2-1} a_{2k+1} e^{2\pi i (2k+1) n / N} \quad (182)$$

$$= \sum_{k=0}^{N/2-1} a_{2k} e^{2\pi i k n / (N/2)} + w^n \sum_{k=0}^{N/2-1} a_{2k+1} e^{2\pi i k n / (N/2)} \quad (183)$$

Ce qui donne :

$$A_n = A_n^{[1]} + w^n \cdot A_n^{[2]} \quad (184)$$

Où $A_n^{[1]}$ est la transformée de Fourier des éléments pairs de a_k et $A_n^{[2]}$ la transformée de Fourier des éléments impairs. Le nombre de termes dans chacune de ces deux transformées est $(N/2)$. De plus, si $(N/2)$ est aussi un nombre pair, alors cette subdivision peut être effectuée encore une fois :

$$\begin{aligned} A_n &= A_n^{[1]} + w^n \cdot A_n^{[2]} \\ &= (A_n^{[11]} + w^n \cdot A_n^{[12]}) + w^n \cdot (A_n^{[21]} + w^n \cdot A_n^{[22]}) \end{aligned} \quad (185)$$

Toutes les transformées de Fourier de cette dernière expression sont de longueur $N/4$. En effet, si N est une puissance de 2, alors ce processus peut être appliqué récursivement jusqu'à ce que chacune des transformées ne contienne qu'un seul élément.

Complexité algorithmique

Rappelons que la transformée de Fourier discrète de a s'exprime comme :

$$A_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k w^{nk} \quad \text{avec} \quad w = e^{-i2\pi / N}$$

Ainsi le vecteur (a_k) est multiplié par une matrice de coefficients w^{nk} . Sans utiliser d'astuces particulières, le calcul de la transformée de Fourier discrète de N points requiert N^2 multiplications complexes et $N(N-1)$ additions complexes. La transformée de Fourier discrète est alors en $O(N^2)$. Dans la pratique, on trouve $N > 10^5$ ce qui implique des temps d'exécution assez longs.

En utilisant les équations récursives de la transformée de Fourier rapide, le nombre de multiplications complexes pour $N = 2^m$ n'est que de $\frac{N}{2} \log_2 N$. La transformée de Fourier rapide serait alors $O(N \log N)$.

7. Vent¹

7.1 Introduction

Les grandes tempêtes peuvent produire des dégâts considérables. Les quelques exemples tirés de tempêtes récentes attestent que ces dégâts ne concernent principalement que le second œuvre. Les dégâts ne sont pas seulement importants pour les constructions touchées mais sont aussi la source de débris qui vont propager les dégâts sur de grandes distances.

Remarque :

Ce chapitre constitue une introduction à la documentation Do188. De plus, un complément à ce chapitre se trouve en annexe de ce polycopié (Annexe B).

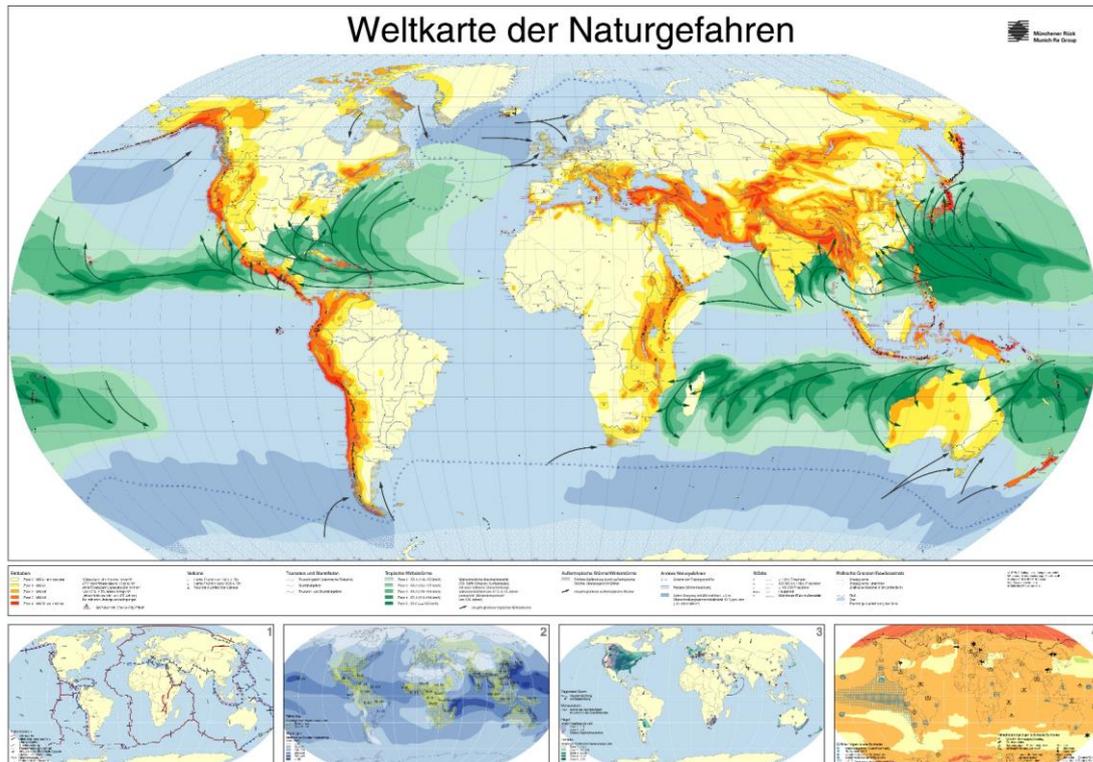
7.1.1 Généralités

Rappelons tout d'abord que l'une des missions essentielles des ingénieurs et des architectes est de protéger les hommes, leurs animaux et leurs biens contre les risques naturels et industriels. Cette protection est assurée d'une part par l'habitat, soit les immeubles en général, et d'autre part sur les infrastructures qu'ils empruntent.

Pratiquement, la maîtrise des risques est assurée par l'ingénieur qui dimensionne les bâtiments et les ouvrages de manière à résister aux charges découlant des phénomènes naturels et de l'utilisation qui est faite de ces constructions. Ces charges sont définies assez simplement dans les normes sur les actions et, de ce fait, le concept de protection contre les risques naturels est implicite. Le rôle de cette introduction est de rendre explicite ce concept en ce qui concerne les charges dues au vent.

Les effets du vent sur les constructions représentent le risque naturel le plus important pour les compagnies d'assurance. A l'échelle de la Terre, les dégâts provoqués par les tempêtes sont plus importants que ceux provoqués par les crues et les tremblements de Terre. (Munichre.com)

¹ La rédaction de ce chapitre, ainsi que celle des annexes correspondantes, ont été réalisées par M. J.-A. Hertig.



Des dégâts considérables découlent naturellement des grands cyclones tropicaux, pensons au cyclone Katrina qui a dévasté la Floride et la Louisiane en août 2005 (fr.wikipedia.org/wiki/katrina) et dont les conséquences sont loin d'être effacées.

Dans ce contexte, les effets du vent prennent une importance particulière pour les constructions soumises à des conditions plus extrêmes qu'en Suisse et l'ingénieur doit prendre conscience de ce fait.

Il convient de relever aussi que le problème de la définition des charges sur les constructions est relativement récent. La figure (7.1) montre l'évolution du poids propre des constructions à travers les âges. L'auteur de cette figure (Sagers) voulait montrer que le XXème siècle représente un tournant dans ce domaine. En effet, grâce aux matériaux et aux techniques de construction développées depuis cette époque, le poids propre des constructions et leur élancement sont devenus tels que le vent représente une charge de dimensionnement principale. Sous cet angle, le cas de charge vent est devenu critique pour de nombreuses constructions. Il est aussi évident que la tendance à réaliser des constructions plus audacieuses ira en s'amplifiant dans le futur. Par conséquent, la connaissance des phénomènes liés aux interactions dynamiques complexes entre le vent turbulent et les structures continueront de jouer un rôle essentiel dans la sécurité des constructions.

Lorsqu'il s'agit de constructions de grande hauteur, de ponts de grandes portées, de constructions spéciales tant par leur géométrie que par leur souplesse ou leur allongement, la question de la détermination des charges dues au vent se pose avec une grande acuité. Le but de la présente introduction aux effets du vent sur les constructions est de montrer que :

- ce domaine de l'ingénierie est aujourd'hui très bien connu et maîtrisé ;
- ce domaine fait appel à des connaissances de base assez approfondies, notamment en matière d'analyse des risques naturels et de dynamique des constructions ;

- les effets du vent sont aussi et surtout l'affaire du bon sens car les mesures à prendre font souvent plus appel à un sens pratique développé qu'à des connaissances scientifiques évoluées.

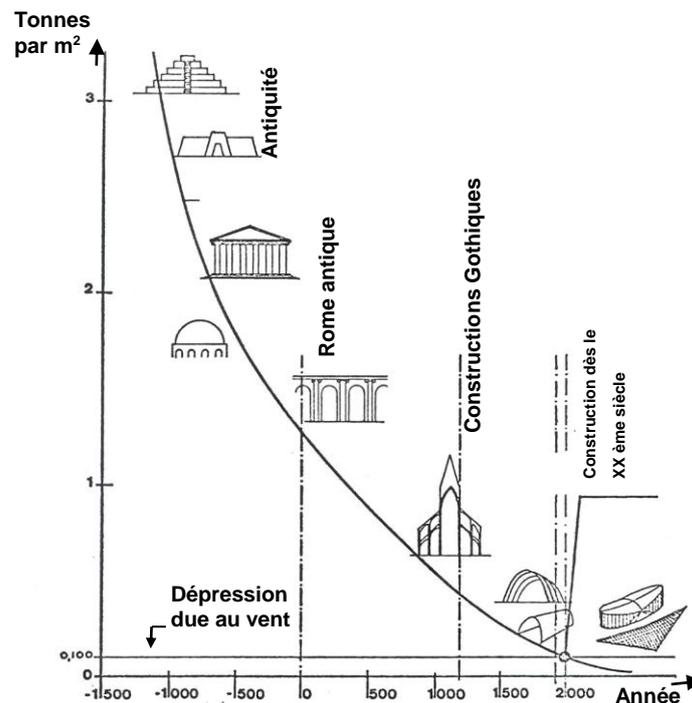


Figure (7.1) – Evolution du poids propre des constructions à travers les âges

Le cas de la tornade survenue dans la vallée de Joux en 1971 est particulier car les vitesses du vent ont, localement, largement dépassé les valeurs de dimensionnement.

Il y a eu des effets de soulèvement de l'ensemble de quelques toitures et la ruine par instabilité de hangars. On observe généralement ce type de dégâts uniquement sur le passage de cyclones tropicaux. Ce phénomène est donc très rare en Suisse (la période de retour est supérieure à 100 ans).

En conclusion, la nature et l'ampleur des dégâts peuvent être très différentes :

- soulèvement total ou partiel de toitures
- arrachement de façades
- rupture par fatigue d'éléments, ou de l'ensemble d'une construction, sollicités par des vibrations entrant en résonance avec l'action du vent
- dégâts secondaires induits par l'impact de débris volants emportés par le vent

L'ingénieur doit assurer la sécurité structurale de l'ouvrage au cours de sa durée de vie, c'est-à-dire qu'il faut à tout instant que :

$$R \geq E$$

L'ingénieur doit aussi assurer l'aptitude au service.

7.1.2 Origine du vent

Le vent a pour origine les différences de pression induites par les différences de température à la surface de la Terre. Ces différences de pression produisent la circulation générale des masses d'air autour de la Terre.

7.2 Couche limite atmosphérique

Le frottement de l'air sur les obstacles provoque de la turbulence dans la couche limite atmosphérique.
L'influence du sol se fait sentir à plus grande hauteur lorsque les obstacles sont plus grands.
La dimension des tourbillons augmente avec la taille des obstacles.

7.2.1 Couche limite de l'atmosphère et turbulence

Dans le cas d'un vent fort, en atmosphère neutre², le courant d'altitude s'étend jusqu'au sol. Il est freiné par les obstacles tels que les bâtiments, les arbres, les forêts, les collines, les blocs, les escarpements ainsi que par les prairies et les champs. Ce freinage provient des tourbillons dont l'arrangement aléatoire complexe forme la turbulence mécanique. Ce phénomène est identique à celui observé en laboratoire lorsqu'un écoulement se produit au-dessus d'une surface rugueuse et forme ce que l'on appelle une couche limite turbulente. Chacune des rugosités du sol génère des tourbillons qui, par interaction entre eux, forment une couche turbulente s'étendant du sol jusqu'à 500 ou 1000 m.

Par conséquent, le vent au voisinage du sol est un phénomène aléatoire.

La vitesse moyenne est d'environ la moitié de la vitesse de la rafale. Cette vitesse est définie comme la plus grande valeur instantanée pendant la durée de moyennage. En Suisse, la vitesse mesurée tous les 1/10 de seconde environ est moyennée sur un intervalle de temps constant de 10 minutes. Cette durée de moyennage peut être portée à 1 heure. Dans ce cas, les valeurs ne peuvent pas être utilisées pour des analyses statistiques. Durant chaque période de 10 minutes, la plus grande valeur de la vitesse du vent est enregistrée comme vitesse de la rafale.

Les enregistrements des vitesses de vent montrent que celles-ci varient dans le temps de manière aléatoire (figure (7.2)). Les fluctuations correspondent à la turbulence du vent. Il en résulte des variations temporelles de la charge sur les structures porteuses rigides. Les structures porteuses flexibles peuvent être mises en résonance par ces variations de vitesse et ainsi être exposées à des charges accrues. L'ingénieur s'intéresse surtout à l'intensité de turbulence, la mesure intégrale de la turbulence et le spectre de la variation turbulente de la vitesse. La

² Une **atmosphère neutre** est formée d'air dont la densité varie avec l'altitude de la même manière que celle de particules en mouvement vertical rapide. L'atmosphère neutre est adiabatique.

dépendance des vitesses maximales en fonction de la durée de moyennage est aussi importante.

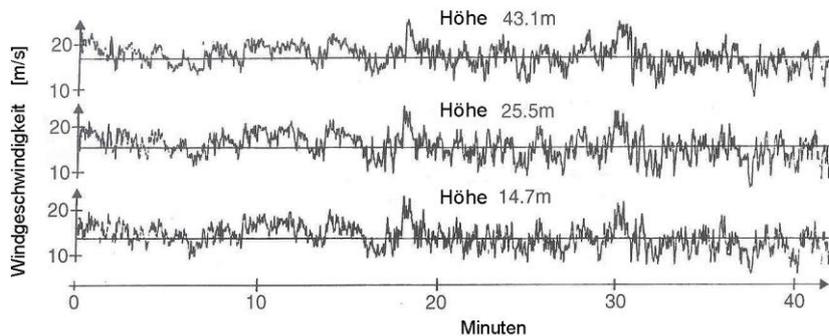


Figure (7.2) – Vitesses du vent mesurées à différentes altitudes au Danemark, réf [4]

7.2.2 Profil vertical des vitesses moyennes

L'écoulement turbulent de la couche limite présente un profil de vitesse dont l'allure générale croît de manière monotone avec l'altitude. La forme du profil et l'épaisseur de la couche limite atmosphérique varient en fonction de la hauteur des rugosités et des obstacles (figure (7.3)).

Les profils de la vitesse moyenne du vent correspondent à ceux d'un écoulement horizontal homogène. Cet écoulement est valable pour un terrain plus ou moins plat avec une rugosité constante.

Cette forme de profil s'explique par des échanges d'énergie entre les différentes couches en cisaillement. Le cisaillement est plus fort proche du sol qu'en altitude. La perte d'énergie par cisaillement s'accompagne par un gain d'énergie dans les structures de la turbulence. En fait, au voisinage du sol, il y a plus de turbulence que dans les couches supérieures.

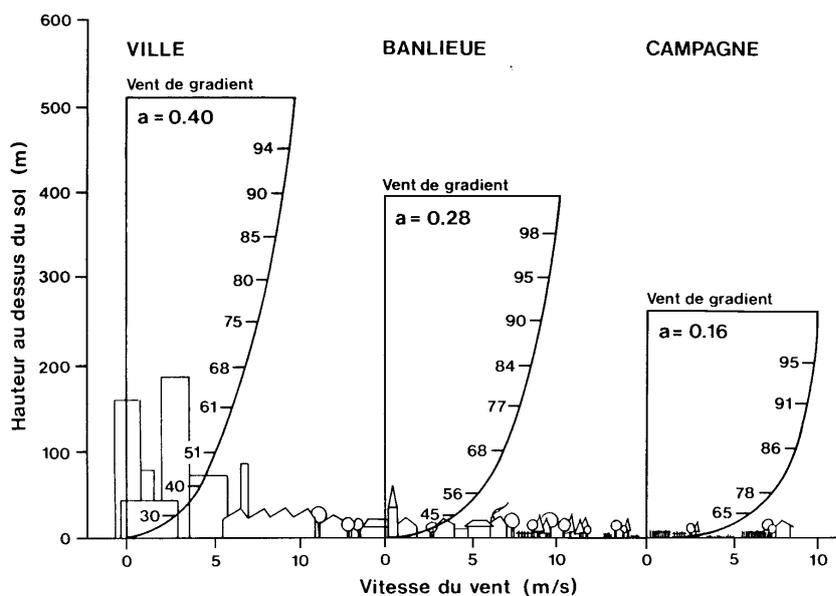


Figure (7.3) – Profil de vitesse moyenne en fonction de la hauteur au-dessus du sol et de la rugosité selon Davenport, réf [15]

7.2.3 Intensité de turbulence

La manière la plus simple est de décrire la turbulence avec l'intensité de turbulence.

L'intensité de la turbulence est définie par le rapport entre l'écart-type (σ) des fluctuations et la vitesse moyenne \bar{v} .

$$I = \frac{\sigma}{\bar{v}} \quad (181)$$

7.2.4 Macro-échelle de la turbulence

La macro-échelle de la turbulence correspond à la taille moyenne des tourbillons les plus énergétiques.

Le spectre du vent montre que les différentes tailles des tourbillons se mélangent en continu.

7.2.5 Fonction de densité spectrale énergétique

L'écoulement, ralenti par la rugosité du sol, produit, en fonction de la vitesse du vent, des grosses structures turbulentes dont la dimension est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite. Ces gros tourbillons, en frottant les uns sur les autres et sur le sol, se décomposent en tourbillons plus petits qui, par frottement, se décomposent en structures de plus en plus petites, jusqu'à une dimension d'équilibre entre les forces visqueuses et l'énergie de rotation. La dissipation de l'énergie cinétique en chaleur se fait par les couches visqueuses qui se développent entre toutes les structures turbulentes. Dans une couche limite, il y a constamment un transfert d'énergie de grands tourbillons vers les plus petits. Ce phénomène est appelé cascade de turbulence. Les structures de turbulence les plus grandes (> 800m) ne sont pas les plus énergétiques. La dimension des structures ayant le maximum d'énergie du spectre se situe à une longueur d'onde plus petite, soit d'environ 500m. Les très basses fréquences, comme les plus hautes ne produisent que des contributions négligeables à la réponse de la construction.

- la répartition des diamètres des tourbillons suit une loi universelle (décroissance en $e^{-5/3 \lambda}$)
- le spectre est fonction de la vitesse moyenne du vent et de la taille des tourbillons les plus énergétiques
- la taille des tourbillons les plus énergétiques ne dépend que de la rugosité, cette taille est appelée échelle de la turbulence

Il a été montré que le diamètre des tourbillons les plus énergétiques est proportionnel à la hauteur au-dessus du sol.

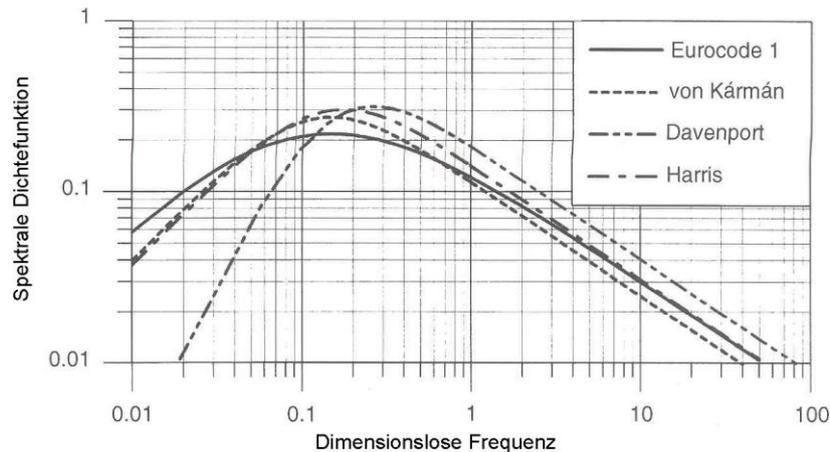


Figure (7.4) – Fonction spectrale de densité

7.2.5.1 Collines

L'écoulement du vent à travers une colline singulière dans une plaine est défini de manière claire (figure (7.5)).

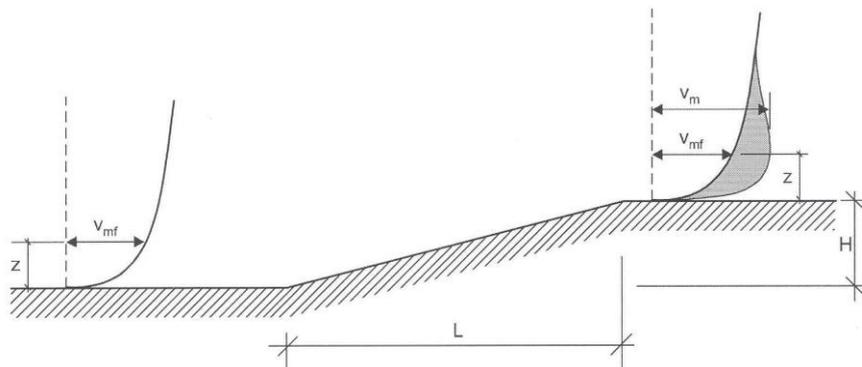


Figure (7.5) – Augmentation de la vitesse du vent au dessus de collines, réf [10]

- v_m vitesse moyenne
- v_{mf} vitesse moyenne au-dessus du sol plat

7.3 Introduction à la norme SIA 261

7.3.1 Méthodologie

C'est l'utilisation des connaissances acquises en Suisse, suite aux mesures des rafales, qui permet de retenir comme base de calcul une pression dynamique de pointe. On cherche la charge instantanée la plus forte s'exerçant sur la construction avec une période de retour de 50 ans.³

³ Dans les autres pays, par manque de données appropriées sur les rafales, ce sont les valeurs moyennes sur 10 minutes qui sont utilisées comme référence et multipliées par un coefficient de rafale. On est alors en présence du produit de deux incertitudes.

Le choix de cette vitesse de pointe comme référence a conduit à une remise à jour de tableaux de coefficients. Les chiffres des tableaux ont été adaptés et complétés par de nouvelles mesures en soufflerie. A cause de cette définition, il n'est possible d'utiliser des coefficients tirés de tableaux de normes étrangères que si les bases de mesures sont les mêmes. C'est aujourd'hui le cas pour la plupart des normes, entre autres, pour l'EN [10]. Notons que les coefficients de pression d'anciennes normes [20, 21, 22] sont obtenus par la division de pressions aérodynamiques moyennes par la pression dynamique moyenne. De ce fait, les coefficients de ces normes sont parfois très différents, généralement plus élevés, des valeurs de la norme SIA 261.

La décomposition des effets du vent ou *segmentation* utilisée dans la présentation de la formule de référence montre qu'il est théoriquement possible d'introduire dans le calcul d'un ouvrage des données de vent, mesurées sur un site.

Il est aussi possible d'y introduire des coefficients obtenus en soufflerie par un essai spécifique ou encore des coefficients de réduction et des coefficients dynamiques extraits d'expériences ou de calculs.

Si ces possibilités sont offertes par la segmentation, il faut encore s'assurer que les définitions retenues dans la norme soient correctement utilisées et que les données soient de qualité suffisante.

7.3.2 Forces dues au vent, approche simple

Le modèle de la norme SIA 261 est basé sur une approche semi-empirique de la part quasi-statique des effets du vent lorsque la partie dynamique est négligeable, soit pour la grande majorité des cas.

Principe de la méthode de la norme SIA 261 : Multiplication d'une pression de référence par des facteurs tenant compte de l'influence de la géométrie de la construction, de l'environnement et des caractéristiques mécaniques de la construction.

$$Q_{k=C_{red}} = c_d \cdot c_f \cdot q_p \cdot A_{ref} \quad \text{avec} \quad q_p = c_h \cdot q_{p0} \quad (182)$$

Cette formule est le produit des 6 facteurs suivants :

c_d facteur dynamique

Le facteur dynamique est fixé à 1.0 pour les bâtiments peu sensibles aux problèmes dynamiques. Le calcul du coefficient est abordé dans la SIA 261/1.

c_{red} facteur de réduction

Le facteur de réduction, qui inclut la relation entre le diamètre des tourbillons et les dimensions des bâtiments (sans le toit), est toujours inférieur à 1.0 et souvent proche de 0.8. Ceci compense les valeurs les plus fortes de c_f ;

c_f coefficient de force

Généralement, les coefficients de force, qui tiennent compte de la forme du bâtiment, varient entre 0.85 et 1.3 dans les tableaux 33 à 62 de la norme avec une valeur proche de 1.0 pour les formes trapues les plus courantes ;

c_h coefficient de hauteur

Le coefficient de hauteur a été fixé à une valeur de 1.0 pour la courbe III (milieu rural) de la SIA 261, à 10 mètres au-dessus du sol. Cette valeur varie, selon la hauteur au-dessus du sol et la rugosité, entre 0.74 (10m au-dessus du sol pour les zones

urbaines) et 2.36 (100m au-dessus du sol pour les rives de lac). Sur le Plateau Suisse, c'est généralement la courbe III du milieu rural qui est applicable.

q_p pression dynamique

La pression dynamique (valeur de référence) est indiquée dans la carte des pressions dynamiques des vents de la norme SIA 261. Il s'agit d'une pression dynamique calculée avec la vitesse extrême tirée de la mesure des rafales instantanées les plus fortes. Cette vitesse extrême est associée à une probabilité d'excédence de 0.02 par an. Cette probabilité est associée, en statistique des valeurs extrêmes, à une période de retour de 50 ans. Dans le langage courant, on appelle cette vitesse : vent cinquantenal. Cette pression dynamique correspond à la valeur de la courbe III à 10m au-dessus du sol. Notons enfin que le produit $q_p * C_h$ correspond à la pression dynamique provoquée par la vitesse extrême du vent (rafale) au niveau du toit de la construction et sur le site de sa réalisation.

A_{ref} surface de référence (surface frappée ou maître couple)

La surface de référence pour le calcul des forces globales du vent est définie dans les tableaux de la SIA 261 (annexe C). Généralement, cette surface correspond au maître couple (surface de la construction projetée sur un plan vertical et perpendiculaire à la direction du vent) en m².

La multiplication des facteurs avec la pression dynamique donne pour les bâtiments courants une valeur proche de 1. Ainsi, la valeur caractéristique de la force du vent sera (comme première approximation) égale à la surface frappée (A_j) mesurée en m².

$$Q_j = A_j \cdot 1 \text{ kN/m}^2 \quad (183)$$

Cette estimation ne s'applique pas aux toitures.

7.3.3 Risques acceptés

- *Les normes SIA 261 et SIA 261/1 ne donnent aucune information sur les calculs dynamiques (la prise en compte des effets dynamiques n'est pas considérée dans les normes mais est précisée dans le commentaire).*
- *Période de retour des rafales considérées : 50 ans.*
- *Les coefficients c_p et c_f ne considèrent que des géométries simplifiées de bâtiments.*
- *Débris volants⁴*

Même dans le cas de risques acceptés, il faut tenir compte de certaines particularités. Les couvertures en plastique, par exemple, comme celles utilisées pour les plantes, peuvent être transportées par des vents forts à travers de longues distances. Elles peuvent avoir l'effet de transformer un filet de protection de chantier, normalement perméable, en un mur imperméable. Ainsi la structure porteuse d'un tel

⁴ Dans le cas de vents extrêmes, des objets peuvent être transportés par le vent même dans des altitudes élevées. Les façades et les fenêtres peuvent être détruites par les objets frappants. De tels dégâts sont constatés surtout dans les étages supérieurs d'un aménagement de bâtiment. La SIA 261 ne prévoit pas de mesures contre de tels événements ce qui signifie qu'ils sont considérés comme des risques acceptés.

filet peut être surchargée et s'écrouler. Il faut vérifier avec le maître d'ouvrage, si une telle défaillance peut être considérée comme un risque accepté. Par exemple, un filet de protection le long d'un rail de chemin de fer n'est, en général, pas qualifié de risque accepté.

La norme SIA 261 ne s'applique pas aux ouvrages exceptionnels tels que les :

- Ouvrages de géométrie particulière
- Ouvrages construits sur des sites exposés
- Structures dynamiquement sensibles (ponts haubanés et suspendus, cheminées)
- Très grandes toitures
- Ouvrages soumis à des interactions ou interférences avec d'autres constructions
- Constructions dont la hauteur dépasse 200m.

8. Conclusion

Ces notes de cours sont destinées aux étudiants de génie civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Ce document tient lieu de support pour le cours de dynamiques des structures. Il s'agit d'une introduction et les sujets y sont traités de manière synthétique. Les étudiants voulant approfondir leur connaissance dans le domaine de la dynamique des structures ont la possibilité de suivre les cours de « dynamique des structures - méthodes numériques » et de « génie parasismique ». Ils peuvent aussi référer aux ouvrages suivants :

- [1] Chopra, A.K., *Dynamics of Structures - Theory and Application to Earthquake Engineering*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [2] Bachmann, H. et al., *Vibration Problems in structures*, Birkhäuser, Basel 1995.
- [3] Paultre, P., *Dynamique des structures – application aux ouvrages de génie civil*, Hermes-Lavoisier, Paris, 2005.
- [4] Soong, T.T. and Dargush, G.F., *Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering*, John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [5] Arbenz, K. et Wohlhauser, A., *Compléments d'analyse*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1981.

A. Annexe – Rappel sur les structures

A.1 Rigidité

- **Rigidité axiale**

La rigidité axiale d'un élément de structure est donné par :

$$k = \frac{EA}{L} \quad (N/m)$$

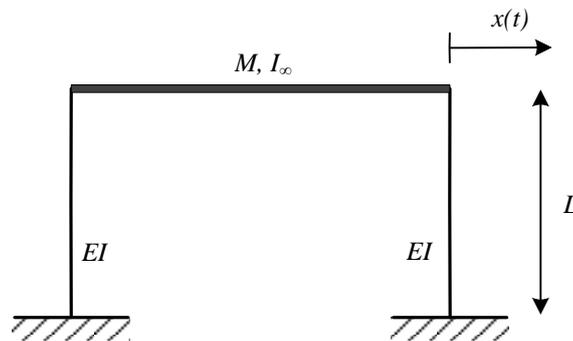
Avec : A : aire de la section droite de l'élément (m^2) ;
 E : module d'élasticité longitudinale ou module d'Young (N/m^2) ;
 L : longueur de l'élément (m).

- **Rigidité flexionnelle**

La rigidité flexionnelle d'un élément de structure dépend des conditions de liaison à ses deux extrémités. On peut distinguer les deux cas suivants :

- Élément bi-encasté :

Par exemple, une colonne d'un cadre avec des liaisons rigides aux deux extrémités.



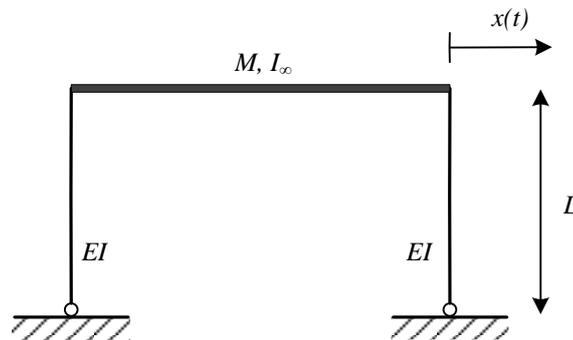
La rigidité de chaque colonne dans ce cas de figure vaut :

$$k = \frac{12EI}{L^3} \quad (N/m)$$

Avec : I : moment d'inertie de la section droite de l'élément (m^4) ;
 E : module d'élasticité longitudinale ou module d'Young (N/m^2) ;
 L : longueur de l'élément (m).

- Élément articulé-encastré :

Par exemple, une colonne d'un cadre ayant une liaison de type rotule dans l'une de ses deux extrémités.



La rigidité de chaque colonne dans ce cas de figure vaut :

$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (N/m)$$

Avec : I : moment d'inertie de la section droite de l'élément (m^4) ;
 E : module d'élasticité longitudinale ou module d'Young (N/m^2) ;
 L : longueur de l'élément (m).

A.2 Détermination des caractéristiques de rigidité d'une structure : application de la méthode des déplacements

La matrice de rigidité d'une structure peut être déterminée en utilisant la méthode des déplacements.

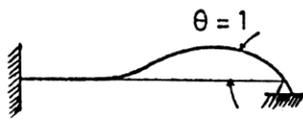
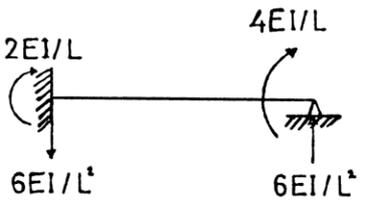
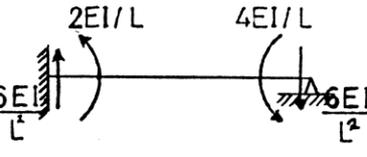
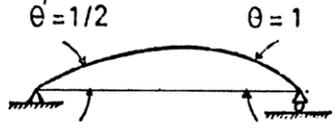
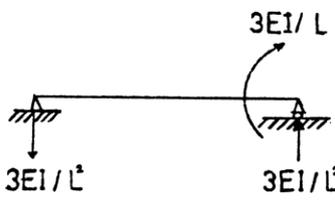
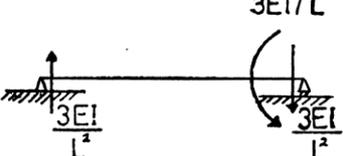
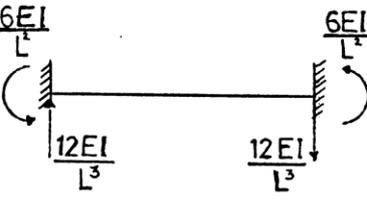
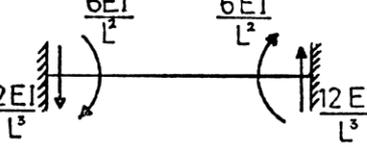
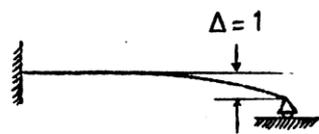
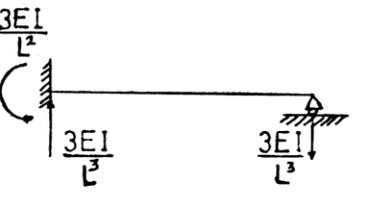
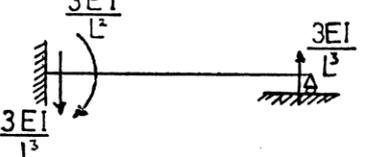
La méthode des déplacements consiste à écrire les équations d'équilibre d'une structure en fonction des inconnues cinématiques qui sont les déplacements des nœuds.

Pour un système à plusieurs degrés de liberté la démarche pratique consiste à traiter les inconnues cinématiques une par une. Les coefficients des équations d'équilibre sont déterminés dans un système fondamental, où tous les degrés de liberté sont bloqués. Les inconnues y sont appliquées une à une, avec une valeur unitaire. Les efforts engendrés par chacun de ces déplacements unitaires sont recensés pour tenir compte des interactions entre les inconnues. L'utilisation d'un tableau synoptique (causes/effets), permet d'avoir une représentation d'ensemble en visualisant les interactions entre les inconnues.

Les relations déplacement-force d'un certain nombre de cas fréquents sont données dans le tableau ci-après.

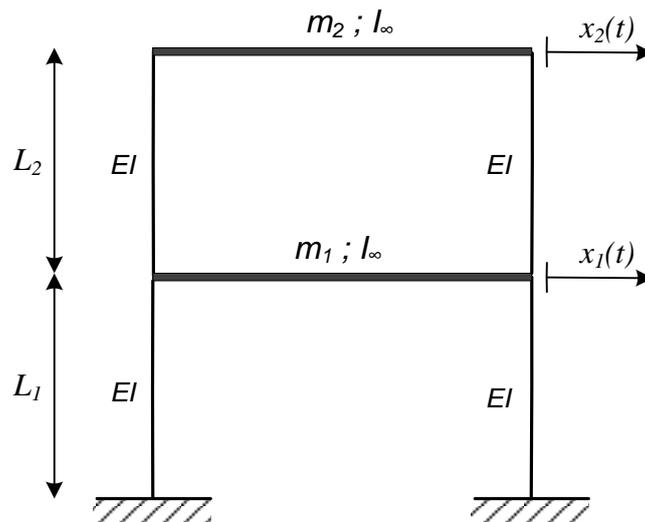
Relations déplacement-force: cas fondamentaux

(Référence : Lestuzzi P. : Analyse des Structures et Milieux Continus. Structures Hyperstatiques. Polycopié N° 290. EPFL, 2006.)

<u>CAS DE DEPLACEMENT</u>	<u>FORCES EXTERIEURES ET REACTIONS D'APPUI</u>	<u>ACTIONS DE LA BARRE SUR LES NOEUDS</u>
		
		
		
		

▪ **Exemple 1 : cadre à deux étages**

A titre d'exemple, considérons le cadre à deux étages de la figure ci-après. On va supposer dans ce premier exemple que l'inertie des traverses est infinie ce qui empêche toute rotation au droit des nœuds. Les déplacements horizontaux x_1 et x_2 des deux niveaux du cadre sont donc les seuls inconnues cinématiques de la structure.

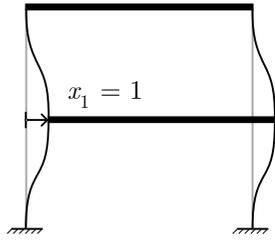
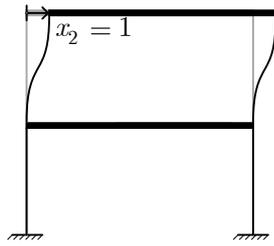
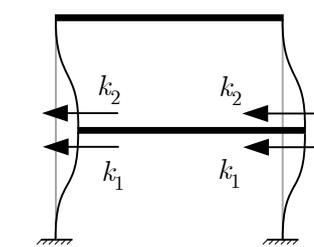
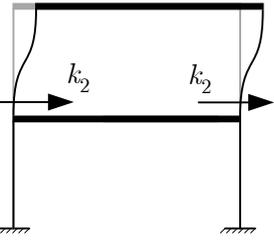
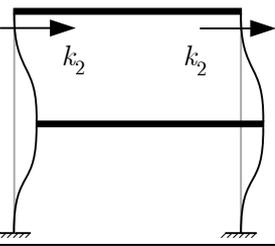
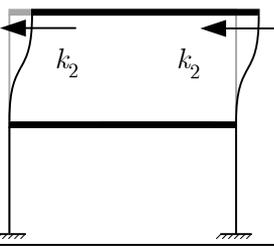


Le tableau synoptique correspondant à cette structure est donné ci-dessous. Il présente schématiquement les coefficients des équations d'équilibre de la structure. Les inconnues cinématiques étant les translations horizontales des nœuds, les coefficients associés représentent les forces agissant sur ces nœuds. Dans le tableau synoptique, les colonnes correspondent aux différents déplacements des nœuds, imposés successivement au système fondamental. En présence de charges extérieures, une colonne supplémentaire est ajoutée. Il est à remarquer à ce niveau que si l'objectif est de déterminer la matrice de rigidité de la structure, l'analyse pourrait être faite sans considérer les charges extérieures.

Dans chaque colonne du tableau synoptique, c'est l'effet d'un déplacement unitaire qui est considérée. Les lignes se rapportent aux efforts associés à chaque inconnue. Dans chaque ligne, c'est le même nœud qui est considéré. Chaque ligne correspond alors à la condition d'équilibre du nœud considéré.

Soient : $k_1 = \frac{12EI}{L_1^3}$ et $k_2 = \frac{12EI}{L_2^3}$ les rigidités des colonnes du premier et du deuxième niveau du portique, respectivement.

Attention : La convention de signe consiste à choisir le signe positif des efforts de façon à avoir des termes positifs dans la diagonale de la matrice de rigidité.

	Déplacement unitaire dans le sens et à la position qui correspond à 1 degré de liberté	
Causes		
Effets selon x1		
Effets selon x2		

L'équation d'équilibre des nœuds selon x_1 s'écrit alors en sommant les termes de la ligne correspondant à cette inconnue :

$$2k_1 + 2k_2 x_1 - 2k_2 x_2 = 0$$

De la même manière, l'équation d'équilibre des nœuds selon x_2 s'écrit en sommant les termes de la ligne correspondant à cette inconnue :

$$-2k_2 x_1 + 2k_2 x_2 = 0$$

Sous forme matricielle le système d'équations s'écrit :

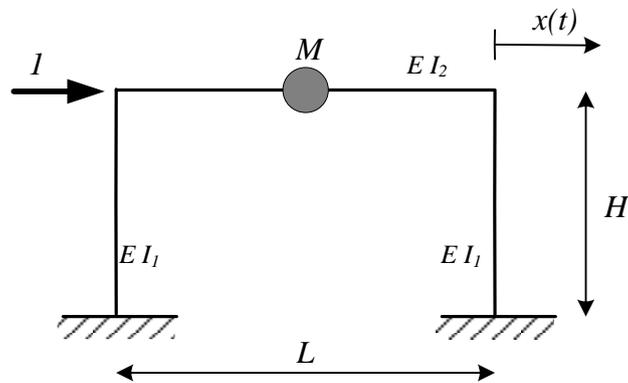
$$\begin{bmatrix} 2k_1 + 2k_2 & -2k_2 \\ -2k_2 & 2k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité du portique est alors donnée par :

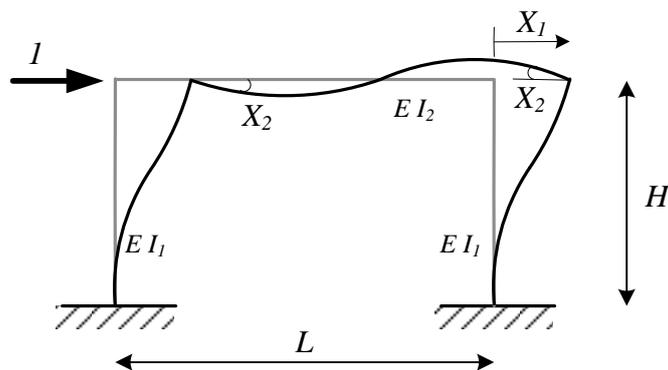
$$K = \begin{bmatrix} 2k_1 + 2k_2 & -2k_2 \\ -2k_2 & 2k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24EI}{L_1^3} + \frac{24EI}{L_2^3} & -\frac{24EI}{L_2^3} \\ -\frac{24EI}{L_2^3} & \frac{24EI}{L_2^3} \end{bmatrix}$$

▪ **Exemple 2 : cadre simple à traverse flexible**

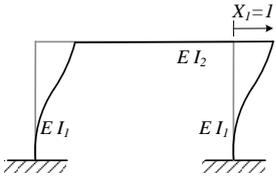
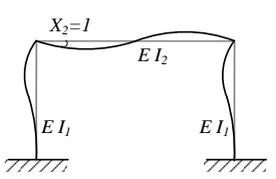
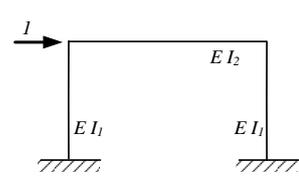
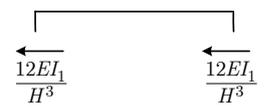
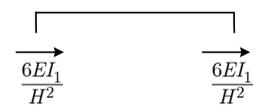
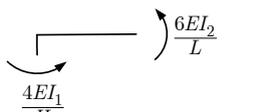
Nous allons examiner ici le cas d'un cadre à traverse flexible. L'objectif étant de déterminer la rigidité horizontale du cadre de la figure ci-dessous. Pour cela, on va utiliser la méthode des déplacements pour déterminer le déplacement horizontal engendré par une charge unité. La rigidité horizontale du cadre sera alors calculée comme l'inverse de ce déplacement.



Appliquons la méthode des déplacements pour écrire les équations d'équilibre du portique sous l'effet d'une force unitaire. Il y a deux inconnues cinématiques dans ce cas: le déplacement horizontal de la traverse (qu'on notera X_1) et la rotation aux extrémités de cette dernière (qu'on notera X_2).



Le tableau synoptique ci-dessous présente schématiquement les coefficients des équations d'équilibre du portique.

Causes			
Effets			
Forces selon X1			
Moments selon X2			

Les équations d'équilibre des nœuds selon x_1 et x_2 s'écrivent alors :

$$\frac{24EI_1}{H^3} X_1 - \frac{12EI_1}{H^2} X_2 - 1 = 0$$

$$-\frac{6EI_1}{H^2} X_1 + \left(\frac{6EI_2}{L} + \frac{4EI_1}{H} \right) X_2 = 0$$

La résolution de ce système d'équations nous donne les valeurs des inconnues cinématiques à l'équilibre :

$$X_1 = \frac{H^3}{24EI_1} \left(1 + \frac{3EI_1/H}{\frac{6EI_2}{L} + \frac{EI_1}{H}} \right)$$

$$X_2 = \frac{H/4}{\frac{6EI_2}{L} + \frac{EI_1}{H}}$$

Pour le cas où : $I_2 = k.I_1$ et $L = n.H$, le déplacement latéral de la traverse (X_1) est donné par :

$$X_1 = \frac{H^3}{24EI_1} \left(1 + \frac{3}{6\frac{k}{n} + 1} \right)$$

La rigidité horizontale de la structure est alors déterminée en considérant:

$$K_H = 1/X_1 = \frac{24EI_1}{H^3} \left(1 + \frac{3}{6\frac{k}{n} + 1} \right)^{-1}$$

L'expression de la rigidité latérale K_H montre bien que si la traverse du portique a une rigidité infinie ($k \gg$), on retrouve bien la rigidité due aux colonnes uniquement :

$$K_H = \frac{24EI_1}{H^3}$$

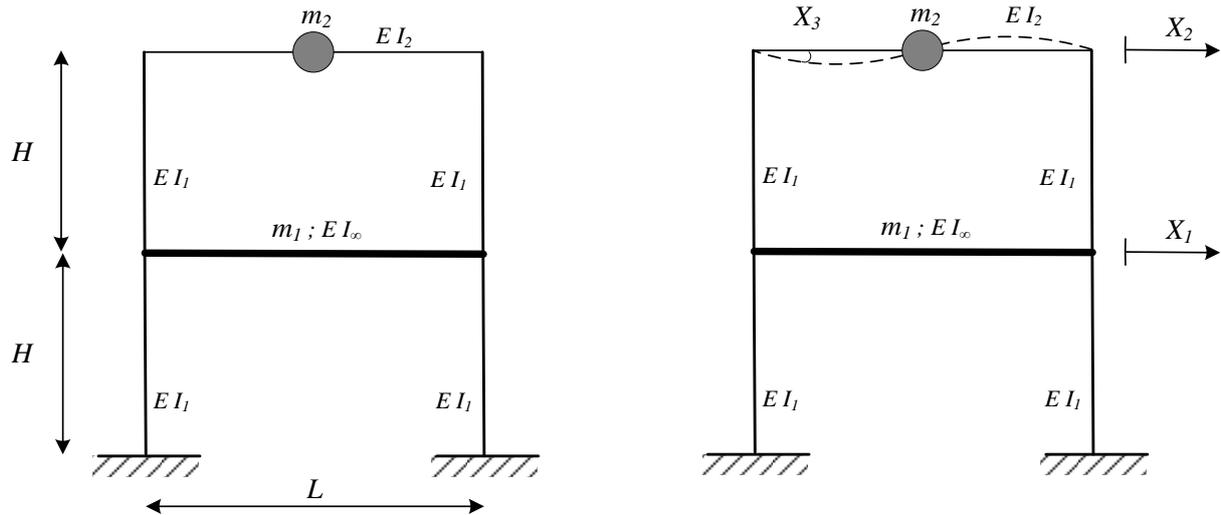
Remarques importantes :

1. Les deux exemples traités présentent deux applications distinctes de la méthode des déplacements dans le cadre de la détermination des caractéristiques de rigidité d'une structure. Dans le premier exemple, le portique possède deux degrés de liberté dynamiques et l'objectif était de déterminer la matrice de rigidité de la structure. Les effets des déplacements unitaires sont alors évalués pour constituer les termes de la matrice de rigidité. Aucun chargement extérieur n'est alors considéré. Par contre, dans le deuxième exemple, la rigidité horizontale ne peut pas être déterminée intuitivement à cause de l'existence d'une deuxième inconnue cinématique qui est la rotation de la traverse. Le déplacement horizontal de la traverse dépend de la rigidité des colonnes et aussi de celle de la traverse. La rigidité horizontale du portique peut alors être déterminée en évaluant le déplacement engendré par une force horizontale unitaire appliquée en tête des colonnes. Dans cet exemple, la méthode des déplacements est utilisée pour calculer ce déplacement.

2. Le deuxième exemple illustre la différence entre les degrés de liberté dynamiques et les degrés de liberté statiques. Dans le cas du portique avec une traverse flexible, deux inconnues cinématiques (une rotation et une translation) sont nécessaires pour établir les conditions d'équilibre de la structure. Cependant, dans le cadre d'une analyse dynamique on peut montrer que les effets des inerties rotationnelles sont négligeables. Le système est alors réduit à un modèle à un degré de liberté de translation horizontale.

- **Exemple 3 : cadre à deux étages avec une traverse flexible**

Nous allons examiner dans ce troisième exemple le cas d'un cadre à deux étages avec une traverse flexible. En considérant la symétrie, le cadre possède trois inconnues statiques : deux translations (X_1 et X_2) et une rotation (X_3). Cependant du point de vue du comportement dynamique, seules importent les deux translations. On va utiliser la méthode des déplacements pour déterminer la matrice de rigidité de cette structure.



Le tableau synoptique ci-dessous présente schématiquement les coefficients des équations d'équilibre du portique.

Causes			
Effets			
Forces selon X1	$\frac{12EI_1}{H^3}$ $\frac{12EI_1}{H^3}$ $\frac{12EI_1}{H^3}$ $\frac{12EI_1}{H^3}$	$\frac{12EI_1}{H^3}$ $\frac{12EI_1}{H^3}$	$\frac{6EI_1}{H^2}$ $\frac{6EI_1}{H^2}$
Forces selon X2	$\frac{12EI_1}{H^3}$ $\frac{12EI_1}{H^3}$	$\frac{12EI_1}{H^3}$ $\frac{12EI_1}{H^3}$	$\frac{6EI_1}{H^2}$ $\frac{6EI_1}{H^2}$
Moments selon X3	$\frac{6EI_1}{H^2}$ $\frac{6EI_1}{H^2}$	$\frac{6EI_1}{H^2}$ $\frac{6EI_1}{H^2}$	$\frac{4EI_1}{H}$ $\frac{6EI_2}{L}$ $\frac{4EI_1}{H}$

L'équation d'équilibre des nœuds selon X_1 s'écrit alors en sommant les termes de la ligne correspondant à cette inconnue :

$$\frac{48EI_1}{H^3} X_1 - \frac{24EI_1}{H^3} X_2 + \frac{12EI_1}{H^2} X_3 = F_{X_1}$$

De la même manière, l'équation d'équilibre des nœuds selon X_2 s'écrit en sommant les termes de la ligne correspondant à cette inconnue :

$$-\frac{24EI_1}{H^3} X_1 + \frac{24EI_1}{H^3} X_2 - \frac{12EI_1}{H^2} X_3 = F_{X_2}$$

Et la somme des moments selon X_3 s'écrit :

$$\frac{12EI_1}{H^2} X_1 - \frac{12EI_1}{H^2} X_2 + \left(\frac{8EI_1}{H} + \frac{12EI_2}{L}\right) X_3 = M_{X_3}$$

La matrice de rigidité du portique est alors donnée par :

$$K = \begin{bmatrix} \frac{48EI_1}{H^3} & -\frac{24EI_1}{H^3} & \frac{12EI_1}{H^2} \\ -\frac{24EI_1}{H^3} & \frac{24EI_1}{H^3} & -\frac{12EI_1}{H^2} \\ \frac{12EI_1}{H^2} & -\frac{12EI_1}{H^2} & \frac{8EI_1}{H} + \frac{12EI_2}{L} \end{bmatrix}$$

Cependant, dans le cadre d'une analyse du comportement dynamique du portique, seules les deux translations importent. La matrice de rigidité s'écrit alors :

$$K_{dym} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

Les termes k_{ij} dans la matrice de rigidité s'obtiennent à partir des solutions des deux systèmes d'équations suivants :

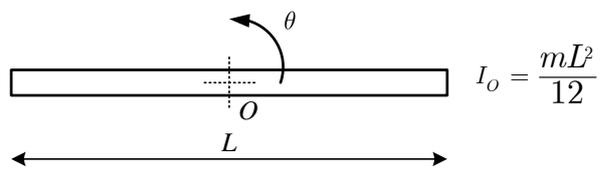
$$K \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad K \cdot \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec

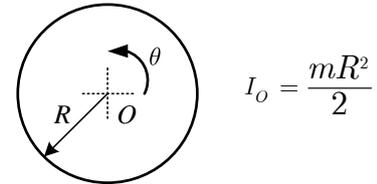
$$K_{dym} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/x_{11} & 1/x_{12} \\ 1/x_{21} & 1/x_{22} \end{bmatrix}$$

A.3 Corps rigides – moment d'inertie

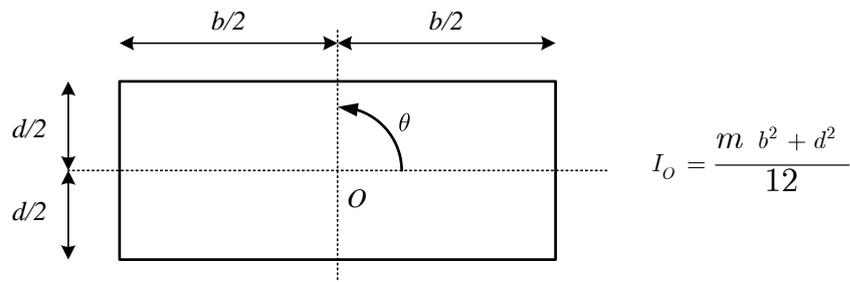
Dans le cas d'assemblages de corps rigides, les équations du mouvement peuvent être déterminées en appliquant le principe des travaux virtuels. Les moments d'inertie de masse sont alors nécessaires pour évaluer les travaux des forces internes dans les corps rigides. La figure ci-dessous montre certains corps rigides et les moments d'inertie de masse qui leur correspondent.



Barre



Disque



Plaque rectangulaire

B. Annexe mathématique

B.1 Algèbre matricielle

- Notation matricielle

Pour un ensemble d'équations linéaires :

$$5x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$$

$$-4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0$$

$$x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0$$

La notation matricielle de l'ensemble des équations, soit $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$, est :

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Matrice identité - (diagonale de 1)

$$\underline{I} = \text{diag}(1), \quad \text{par exemple } \underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Opérations matricielles

- Addition, $\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{C} = \underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2.5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplication par un scalaire, $k\underline{A} = \underline{C}$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad k = 2; \quad \underline{C} = k\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- Multiplication, $\underline{A}\underline{B} = \underline{C}$

(A est une matrice $p \times m$, B une matrice $m \times q$ et C une matrice $p \times q$)

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} b_{rj}$$

Par exemple, si $\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Alors,

$$c_{11} = (5)(1) + (3)(2) + (1)(3) = 14$$

$$c_{21} = (4)(1) + (6)(2) + (2)(3) = 22$$

$$c_{31} = (10)(1) + (3)(2) + (4)(3) = 28 \quad \text{etc.}$$

Donc, $\underline{C} = \begin{bmatrix} 14 & 39 \\ 22 & 48 \\ 28 & 70 \end{bmatrix}$

- La multiplication matricielle n'est pas commutative

$$\underline{AB} \neq \underline{BA}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{AB} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 63 \\ 34 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\underline{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 34 \\ 46 & 60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 53 & 63 \\ 34 & 30 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 19 & 34 \\ 46 & 60 \end{bmatrix}$$

- Transposition d'une matrice, \underline{A}^T ou échanger les lignes et les colonnes de la matrice initiale. Par exemple :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}; \quad \underline{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

- Évaluer le produit $\underline{v}^T \underline{A} \underline{v}$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}; \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \underline{A} \underline{v} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}^T \underline{A} \underline{v} = \underline{v}^T \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} = 23$$

- La transposée d'un produit matriciel est égale au produit des matrices transposées dans l'ordre inverse, $(\underline{ABC})^T = \underline{C}^T \underline{B}^T \underline{A}^T$

- Matrice inverse, \underline{A}^{-1}

$$\underline{A}\underline{A}^{-1} = \underline{I} \quad \text{et} \quad \underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{I}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{A}^{-1}\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Pour des produits matriciels

$$\underline{G}\underline{A}\underline{B} = \underline{I} \quad \text{où} \quad \underline{G} = (\underline{A}\underline{B})^{-1}$$

$$\text{donc, } (\underline{A}\underline{B})^{-1}\underline{A}\underline{B} = \underline{I}$$

- Déterminant d'une matrice

$$\det \underline{A} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det \underline{A}_{1j}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{A} = (-1)^2 a_{11} \det \underline{A}_{11} + (-1)^3 a_{12} \det \underline{A}_{12} \quad \text{où} \quad \det \underline{A}_{11} = a_{22} \quad \det \underline{A}_{12} = a_{21}$$

donc

$$\det \underline{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Exemple de déterminant d'une matrice 2X2

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (-1)(3) - (2)(2) = -3 - 4 = -7$$

- Exemple de déterminant d'une matrice 3X3

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{A} = (-1)^2 a_{11} \det \underline{A}_{11} + (-1)^3 a_{12} \det \underline{A}_{12} + (-1)^4 a_{13} \det \underline{A}_{13}$$

$$\det \underline{A} = (-1)^2(2) \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + (-1)^3(1) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + (-1)^4(0) \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{A} = (2) (3)(2) - (1)(1) - (1)(2) - (0)(1) + 0$$

$$\det \underline{A} = 8$$

- Problèmes aux valeurs propres

$$\underline{A}\underline{v} = \lambda \underline{v}$$

$$\underline{A}\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$$

Il y a n valeurs propres correspondant aux n vecteurs propres

$$(\underline{A} - \lambda \underline{I})\underline{v} = 0$$

Cette équation a une solution non triviale seulement si

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0$$

Les valeurs propres sont les racines de l'équation

$$p(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda \underline{I})$$

- Exemple de valeurs propres et vecteurs propres

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \lambda \underline{I} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = \det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = (-1 - \lambda)(2 - \lambda) - (2)(2)$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6$$

$$p(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 3)$$

donc il y a deux valeurs propres : $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 3$

Il y a aussi deux vecteurs propres correspondants

$$(\underline{A} - \lambda_i \underline{I}) \underline{v}_i = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 - \lambda_1 & 2 \\ 2 & 2 - \lambda_1 \end{bmatrix} \underline{v}_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 - (-2) & 2 \\ 2 & 2 - (-2) \end{bmatrix} \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} -1 - \lambda_2 & 2 \\ 2 & 2 - \lambda_2 \end{bmatrix} \underline{v}_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 - (3) & 2 \\ 2 & 2 - (3) \end{bmatrix} \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Décomposition spectrale

$$\underline{A} \underline{V} = \underline{V} \underline{\Lambda}$$

$$\underline{A} = \underline{V} \underline{\Lambda} \underline{V}^T$$

$$\underline{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v}_i \underline{v}_i^T$$

où

$$\underline{V} = [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$$

$$\underline{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_i)$$

- Exemple de décomposition spectrale

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \underline{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \underline{V} = [\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\underline{V} = \underline{V}\underline{\Lambda}$$

$$\underline{A}\underline{V} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

B.2 Equations différentielles homogènes du 2^e ordre

$$y'' + ay' + by = 0$$

Remarque : si y_1 et y_2 sont solutions, alors $a_1y_1 + a_2y_2$ est aussi solution pour $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

▪ Solution générale

On cherche des solutions de la forme $y = e^{rx}$ et on associe l'équation du second degré, dite *équation caractéristique* :

$$r^2 + ar + b = 0$$

La solution générale s'exprime comme combinaison linéaire de 2 solutions de base y_1 et y_2 indépendantes.

On a 3 cas suivant le type de l'équation du second degré :

- 2 racines réelles r_1 et r_2

$$y(x) = ae^{r_1x} + be^{r_2x}$$

- 1 racine réelle double r

$$y(x) = ae^{rx} + bxe^{rx}$$

- 2 racines complexes $r = \alpha + i\beta$ et $\bar{r} = \alpha - i\beta$

$$y(x) = \lambda e^{rx} + \mu e^{\bar{r}x}$$

On réécrit sous forme réelle :

$$y(x) = (a \cos(\beta x) + b \sin(\beta x))e^{\alpha x}$$

Dans ce cas, la solution est périodique de période $\frac{2\pi}{\beta}$.

Les solutions de base y_1 et y_2 sont *indépendantes* en ce sens que pour tous les x du domaine de résolution :

$$y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0$$

▪ Solution particulière telle que

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$$

(Problème de conditions initiales)

Si y_1 et y_2 sont les 2 solutions particulières de base, on résout le système linéaire de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} a_1 y_1(x_0) + a_2 y_2(x_0) = y_0 \\ a_1 y'_1(x_0) + a_2 y'_2(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Ce système a une solution unique car $y_1(x_0)y'_2(x_0) - y_2(x_0)y'_1(x_0) \neq 0$.

▪ **Solution particulière telle que**

$$y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

(Problème de conditions aux limites)

On résout le système linéaire de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} a_1 y_1(a) + a_2 y_2(a) = \alpha \\ a_1 y'_1(b) + a_2 y'_2(b) = \beta \end{cases}$$

Attention: Ce système n'a pas toujours de solution. En effet, dans le cas où les racines de l'équation caractéristique sont complexes, la solution est périodique et ne peut donc pas prendre n'importe quelles valeurs en des points à des intervalles multiples de la période.

B.3 Equations différentielles non homogènes du 2^e ordre

$$y'' + ay' + by = g$$

Si le second membre est une somme, $g = g_1 + g_2$, on peut chercher des solutions particulières correspondant à g_1 et g_2 puis les ajouter

$$y''_1 + ay'_1 + by_1 = g_1$$

$$y''_2 + ay'_2 + by_2 = g_2$$

$$(y''_1 + y''_2) + a(y'_1 + y'_2) + b(y_1 + y_2) = g_1 + g_2$$

▪ **Recherche d'une solution particulière**

Dans le cas où le second membre est de la forme suivante, on cherche une solution particulière de la même forme :

- fonction exponentielle ;
- fonction polynômiale ;

- produit d'une exponentielle et d'une fonction polynômiale ;
- combinaison linéaire de fonctions trigonométriques.

En effet, dans ces cas-là, y' et y'' sont de la même forme et, en développant, on obtient un système d'équations pour les coefficients inconnus.

- Fonction exponentielle $g(x) = ke^{\alpha x}$

On pose $y = ce^{\alpha x}$

et on a $y' = \alpha ce^{\alpha x}$, $y'' = \alpha^2 ce^{\alpha x}$

$$\alpha^2 ce^{\alpha x} + a\alpha ce^{\alpha x} + bce^{\alpha x} = ke^{\alpha x}$$

d'où $c = \frac{k}{\alpha^2 + a\alpha + b}$ à condition que $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$, c'est-à-dire que α ne soit pas racine de l'équation caractéristique.

Remarque : si α est racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution de la forme $xe^{\alpha x}$.

- Fonction polynômiale $g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

On pose $y = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$

et on a $y' = b_1 + 2b_2x + \dots + nb_nx^{n-1}$

$$y'' = 2b_2 + \dots + n(n-1)b_nx^{n-2}$$

On identifie alors les 2 membres de l'équation différentielle :

$$2b_2 + ab_1 + bb_0 = a_0$$

$$6b_3 + 2ab_2 + bb_1 = a_1$$

$$\dots$$

$$k+2 \quad k+1 \quad b_{k+2} + \quad k+1 \quad ab_{k+1} + bb_k = a_k$$

$$\dots$$

$$nab_n + bb_{n-1} = a_{n-1}$$

$$bb_n = a_n$$

Si $b \neq 0$, on résout ce système d'équations en commençant par b_n et en remontant jusqu'à b_0 , sinon on cherche la solution sous forme d'un polynôme de degré $n+1$.

- Fonctions trigonométriques $g(x) = k \cos \alpha x + l \sin \alpha x$

On pose $y = u \cos \alpha x + v \sin \alpha x$

et on a $y' = -u\alpha \sin \alpha x + v\alpha \cos \alpha x$ $y'' = -u\alpha^2 \cos \alpha x + v\alpha^2 \sin \alpha x$

D'où, par identification :

$$-u\alpha^2 + av\alpha + bu = k \quad -v\alpha^2 + au\alpha + bv = l$$

$$\begin{cases} (b - a^2)u + a\alpha v = k \\ a\alpha u + (b - \alpha^2)v = l \end{cases}$$

et ce système de 2 équations linéaires a une solution unique si son déterminant est non nul.

B.4 Formules trigonométriques

- Addition

$$\cos A \pm B = \cos(A) \cos(B) \mp \sin(A) \sin(B)$$

$$\sin(A \pm B) = \sin(A) \cos(B) \pm \sin(B) \cos(A)$$

$$\tan A \pm B = \frac{\tan(A) \pm \tan(B)}{1 \mp \tan(A) \tan(B)}$$

- Transformation d'une somme en produit

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

- Transformation d'un produit en somme

$$\cos(p) \cos(q) = \frac{1}{2} \cos p - q + \cos p + q$$

$$\sin(p) \sin(q) = \frac{1}{2} \cos p - q - \cos p + q$$

$$\sin(p) \cos(q) = \frac{1}{2} \sin p + q + \sin p - q$$

- Autres formules

$$\text{si } x \in [-1, 1]$$

$$\sin(\text{Arc cos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\cos(\text{Arc sin}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\cos(\text{Arc tan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\sin(\text{Arc tan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

C Vent

C.1 Introduction

C.1.1 Généralités

Pour l'ingénieur, les charges dues au vent ont encore une signification particulière et souvent relativement ambiguë. La charge due au vent est, en fait, la seule véritable charge horizontale qui s'exerce sur une construction. Les autres actions créant des déplacements horizontaux sont les forces de freinage des véhicules, les tremblements de Terre et la poussée de l'eau ou des terres. Or, les forces de freinage n'existent pas dans le cas des bâtiments et n'agissent pas significativement transversalement aux ouvrages des voies de communication ; les tremblements de Terre produisent des déplacements de la fondation mais ne sont pas de véritables charges et la poussée de l'eau et des terres ne concerne pas (normalement) les bâtiments.

Par conséquent, le vent est souvent la seule charge horizontale à prendre en compte pour une construction. A ce titre, elle sert d'abord comme charge de référence pour l'examen de la pertinence du système statique. Une fois les contreventements dimensionnés, les déformations sous l'action du vent sont contrôlées et généralement ramenées à des valeurs très petites grâce à l'augmentation de la rigidité qui entraîne des réserves de résistance importantes. C'est pourquoi, les actions du vent ne posent pas de problèmes très importants dans le cadre de l'étude des constructions courantes.

Les enseignements concernant la situation en Suisse que l'on peut tirer des événements récents sont les suivants :

Les grandes tempêtes qui ont marqué la fin du 20^{ème} siècle, Lothard et Martin pour les plus connues, mais aussi Viviane et différentes tempêtes localisées, ont toutes été marquées par des dégâts au second œuvre. Il n'a pas été recensé de cas de ruine généralisée de constructions récentes. Il convient de noter que ce ne fût pas le cas de la tornade qui a dévasté la vallée de Joux en 1972. Les dégâts ont effectivement touché des constructions récentes pour l'époque aussi bien que les toitures des bâtiments plus anciens. On peut déduire de ce constat que les normes sont calibrées de manière adéquate compte tenu de périodes de retour des événements considérés.

C.1.2 Origine du vent

Dans l'atmosphère, les mouvements ne peuvent être créés que par des différences de pression d'origine hydrostatique, il n'existe aucune origine mécanique, ni d'inertie. Les différences de pression hydrostatiques résultent de la différence de poids entre des colonnes d'air plus ou moins éloignées. Les variations de la densité de l'air sont dues aux variations de température et d'humidité. La principale cause de variation de température est la différence d'ensoleillement entre les régions polaires et la zone intertropicale. Les températures du sol varient entre le jour et la nuit et en fonction de la saison. Les grandes variations saisonnières de la température sont à l'origine de la circulation générale dont les principales caractéristiques seront présentées dans la section suivante. Les vents de la circulation générale déplacent les masses d'air qui se chargent en humidité en passant au-dessus des océans, des grandes surfaces d'eau ou des terrains humides. Ces masses d'air perdent leur humidité, principalement suite aux précipitations, en s'éloignant des côtes. En s'asséchant, l'air devient plus dense, donc plus lourd et provoque des zones de haute pression qui sont à l'origine des grands déserts.

A l'opposé, les grandes chaînes montagneuses soulèvent les masses d'air océaniques et provoquent les précipitations.

D'autre part, la topographie influence les vents locaux et régionaux. Ces vents sont aussi très sensibles à l'influence des nuages sur la température du sol.

Afin de bien comprendre les processus, il est également important de savoir que les vents ascendants et descendants dans l'atmosphère, dans les nuages ou le long des reliefs, subissent un changement de température adiabatique. Par vents descendants, la variation de température (augmentation) est produite en suivant une compression adiabatique sèche, c'est-à-dire sans apport ni rejet de chaleur latente car il n'y a pas de condensation associée au réchauffement. Par vents ascendants, la transformation suit souvent un profil adiabatique humide et provoque la formation de nuages.

Dans l'atmosphère, l'air s'écoule des régions de haute pression vers les régions de basse pression tout en s'enroulant autour de ces régions. L'air tend à sortir des hautes pressions par le bas et provoque ainsi une subsidence de la masse d'air. Cette subsidence entraîne une compression *adiabatique sèche* de l'air qui se réchauffe, provoquant ainsi une diminution de l'humidité relative et l'évaporation de l'eau des nuages.

L'air des dépressions tend par contre à s'échapper par le haut et provoque une élévation de la masse d'air. L'air se refroidit en montant suite à la détente adiabatique. L'humidité relative augmente. Lorsqu'elle atteint 100%, il y a condensation et formation de nuages avec libération de chaleur latente.

En raison de cet apport de chaleur, l'air devient instable et peut entraîner la formation d'orages violents, de tornades, de petits cyclones et parfois de cyclones tropicaux. C'est pourquoi, les dépressions sont associées à une augmentation de l'activité nuageuse, à la formation de vents forts et à des phénomènes extrêmes.

C.1.2.1 Circulation atmosphérique générale

La circulation générale est formée de la superposition de cyclones et anticyclones, entraînés par un mouvement plus général. Il est possible de décomposer la circulation atmosphérique en 6 zones distinctes réparties en trois par hémisphère (figure (C.1)). Les dimensions de ces zones varient en fonction des saisons et l'équateur météorologique suit assez bien, avec un décalage temporel, la variation saisonnière de l'ensoleillement (figure (C.3)).

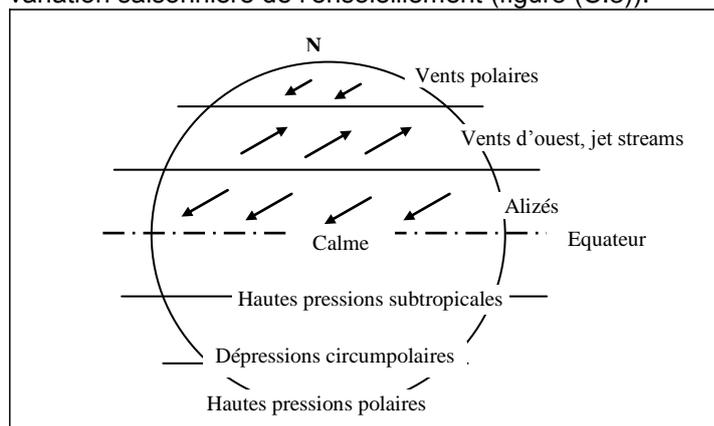


Figure (C.1) – Mouvements généraux dans l'hémisphère nord

La première zone importante est la zone polaire s'étendant plus ou moins jusqu'au cercle polaire, elle est toutefois un peu plus large en hiver. Cette zone est soumise à un grand anticyclone créé par les masses d'air les plus froides. La limite de ces masses d'air est appelée front polaire (figure (C.2)). Cet anticyclone est entraîné par la rotation de la Terre et tourne avec elle mais un peu moins vite. A la limite du front polaire, des cyclones se forment par interaction avec les masses d'air des régions tempérées.

La deuxième zone à soulever est la zone située entre l'équateur et les tropiques, soit dans les régions intertropicales. Il s'y forme globalement des dépressions liées au réchauffement des masses d'air. L'activité convective ascendante à l'équateur et descendante sous les tropiques provoque de grandes cellules de convection appelées « intropical cells ».

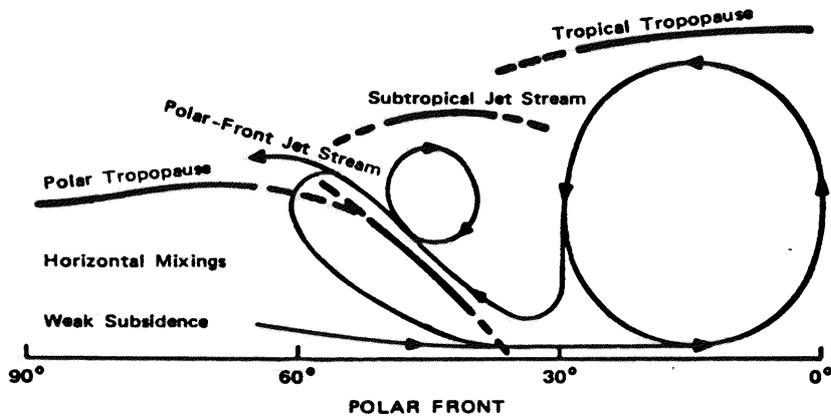


Figure (C.2) – Les masses d'air troposphériques et les fronts

Les mouvements de ces cellules sont généralement très réguliers et provoquent des vents modérés. Comme pour les régions polaires, ces cellules sont entraînées par la rotation de la Terre et il se forme, au sol, des vents dans la direction inverse à la rotation. Ce mécanisme est à l'origine des alizés. Ces grandes régions dépressionnaires peuvent aussi être le siège de phénomènes violents comme les cyclones tropicaux, la mousson, etc.

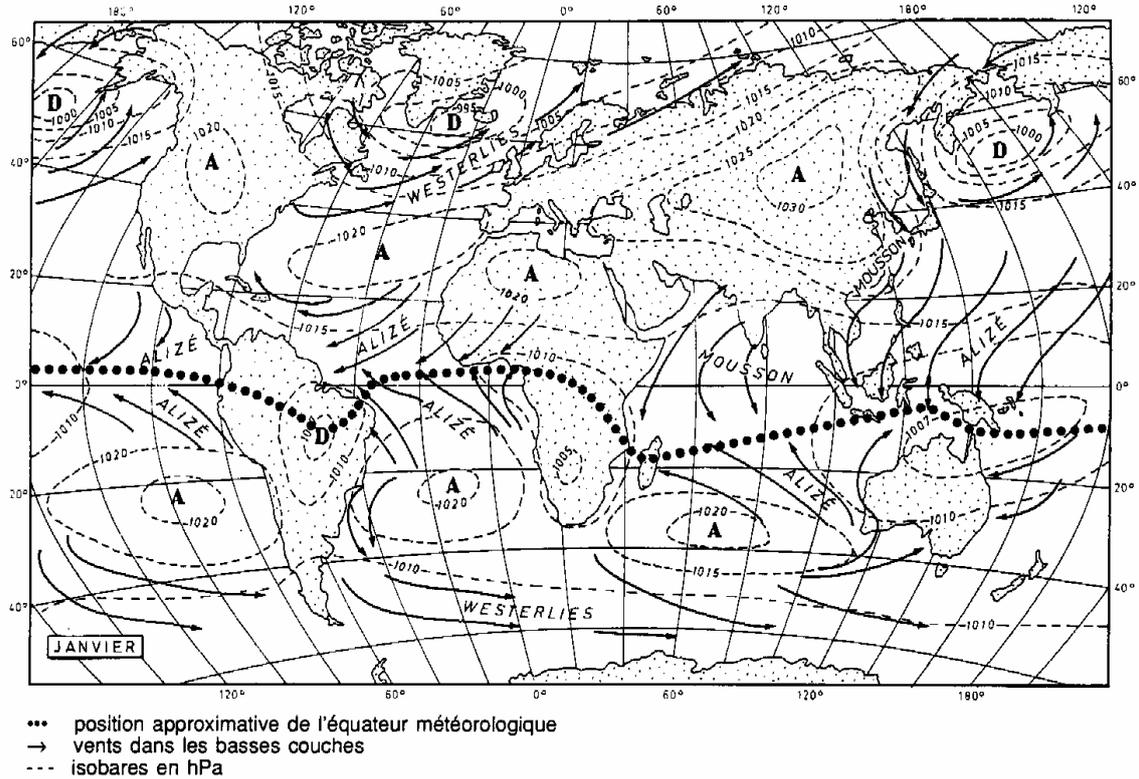


FIG. 5.1 — Répartition moyenne des pressions et des principaux flux à la surface du globe en janvier.

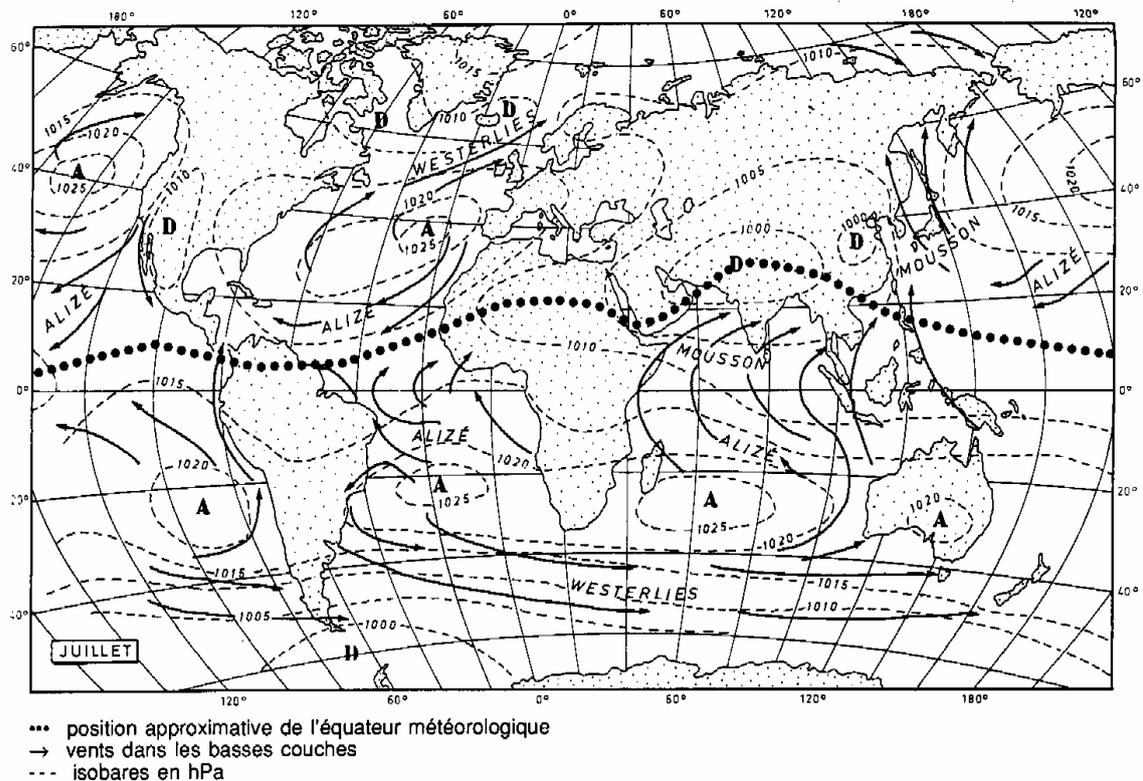


Figure (C.3) – Répartition moyenne des pressions et des principaux flux à la surface du globe

Dans les régions tempérées, il se produit, par compensation dynamique des vents polaires et subtropicaux, un flux général d'ouest en est. Ce flux est associé à des courants en altitude plus locaux

et violents appelés « jet stream ». Ce flux entraîne les perturbations provenant des zones tropicales et polaires. Il est aussi à l'origine de la formation de grandes cellules par l'orographie, notamment par les Alpes, l'Himalaya et surtout les Rocky Mountains. Le contact de masses d'air tempérées avec le front polaire provoque des perturbations qui se propagent dans ces régions tempérées. Le régime des vents et le climat varient aussi sous l'influence des masses d'air polaires et tropicales. Ainsi, la diversité du climat tempéré provient de séquences liées à une succession de masses d'air d'origines très différentes. Un épisode de froid lié au passage d'une masse d'air polaire peut être suivi d'un épisode très chaud lié au passage d'une masse d'air tropical. Entre deux, il peut se produire des épisodes de hautes pressions quasi immobiles sur de très longues durées ou une succession de perturbations arrivant de l'ouest.

C.1.2.2 Mousson

La mousson résulte des alizés soufflant des hautes pressions subtropicales (ou continentales en Asie en hiver) vers les basses pressions équatoriales (zone de convergence intertropicale). Au départ, les alizés sont secs et ne s'humidifient qu'après un long parcours sur les océans.

La mousson est un courant sec ou humide selon le cheminement des alizés. Les pluies de la « vraie » mousson sont amenées par les alizés de l'hémisphère opposé.

C.1.2.3 Cyclones tropicaux

Les cyclones tropicaux constituent un des plus graves dangers de nature météorologique existant dans les zones tropicales car ceux-ci dévastent des cités entières.

Ces dépressions se forment dans la partie occidentale des océans, à la limite de la zone des calmes tropicaux, soit à une latitude de 6 à 7°, à laquelle la force de Coriolis commence à faire sentir ses effets. L'époque de leur apparition la plus fréquente est *la fin de l'été et le début de l'automne* (août, septembre et octobre dans les Antilles), c'est-à-dire l'époque à laquelle la zone des calmes tropicaux est décalée vers le nord en vertu du jeu des saisons ou, respectivement, vers le sud.

Dans l'hémisphère sud, la période s'étend de février à mars à l'exception de la partie nord de l'Océan Indien.

La température de la mer doit être supérieure à 26 ou 27°C. Ces cyclones sont engendrés par des discontinuités du vent ou de la température. Comme nous l'avons vu dans le chapitre sur l'histoire des cyclones, l'origine des cyclones tropicaux est thermique.

Les hurricanes sont des cyclones tropicaux qui puisent leur énergie dans la chaleur latente de condensation. Sous les tropiques, l'air sec est en subsidence. Lorsque cet air sec se charge d'humidité au contact de l'océan chauffé par le soleil, il devient très léger et tend à s'élever en formant des instabilités. Des cellules convectives se développent. Les colonnes d'air chaud et humide s'élèvent au centre de ces cellules. La pression diminuant, l'air se détend adiabatiquement et provoque une condensation avec libération de chaleur latente. Il y a formation de nuages et accélération verticale. Ces cellules convectives se développent en chapelet et interagissent. Elles provoquent une dépression dans tout l'espace concerné. Cette dépression se met à tourner dans le sens cyclonique et devient de plus en plus profonde en fonction du temps car elle est alimentée par l'humidité provenant de l'océan.

Ce phénomène est autoentretenu et durera tant que la dépression reste au-dessus de l'eau chaude. La vitesse augmente ainsi au cours du temps. Toutes les dépressions ne sont pas des cyclones tropicaux. Ce terme est réservé aux cyclones dont la vitesse dépasse 120 km/h. C'est dans les cyclones tropicaux que la vitesse la plus grande est observée sur la Terre. Le vent qui souvent atteint des vitesses de 50 m/s (180 Km/h, voire 250 km/h), peut présenter des rafales de 100 m/s (360 km/h) dont l'effet dévastateur est catastrophique.

Lors de l'approche d'un cyclone tropical, l'air qui était relativement frais et sec est remplacé par de l'air chaud et humide (atmosphère oppressante). La pression barométrique peut descendre de 50 à 70 millibars en quelques heures.

Cinq conditions sont nécessaires pour le développement d'un cyclone tropical :

- Mer chaude, $T > 26$ ou 27°C
- Les cyclones tropicaux sont les plus fréquents à la fin de l'été et au début de l'automne lorsque les eaux sont les plus chaudes
- Présence d'une perturbation initiale : cellules de convection, ondes d'Est
- Force de Coriolis suffisante (il n'y a pas de cyclone entre les latitudes 5°S et 5°N)
- Cisaillement des vents faibles dans la troposphère
- Divergence des courants en altitude capables d'aspirer l'air chaud depuis le sol et de maintenir la dépression au sol et les ascendances.

Il convient de relever que l'Europe n'est pas touchée par ce type de cyclones.

Dans les régions arctiques, des phénomènes identiques peuvent se produire. Ils sont alimentés par les dépressions polaires et les flux de masses d'air chaudes venant des surfaces des océans. Ils prennent le nom de cyclones arctiques.

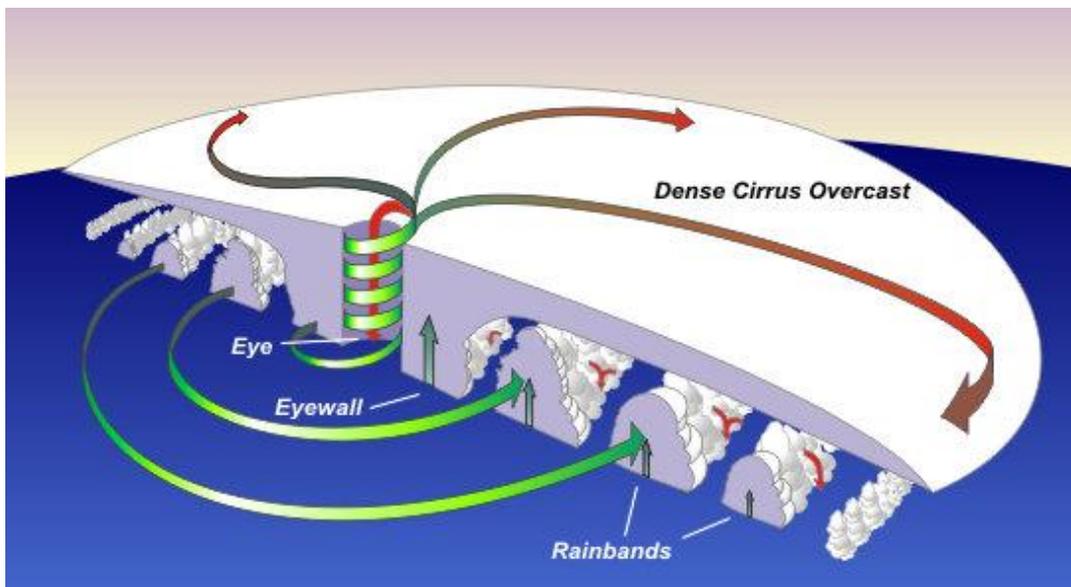


Figure (C.4) – Circulation de l'air dans un cyclone tropical



Figure (C.5) – Cyclone Elena

La figure (C.4) montre que, contrairement à une vision simpliste d'une circulation monocellulaire ayant une aspiration à la base de l'air humide qui se dirige vers le centre du cyclone, monte dans l'œil et est rejetée en altitude, le cyclone tropical est formé d'une multitude de cellules convectives très actives qui s'enroulent sur une spirale. Les masses d'air proches de l'œil montent jusqu'à grande altitude et se répandent au-dessus de l'ensemble des cellules convectives de plus basse altitude. Ceci est illustré par la photographie du cyclone Elena (figure (C.5)).

C.1.3 Fonction de densité spectrale énergétique

Après la région d'énergie maximale, les structures sont plus petites (du décimètre jusqu'au mètre) et la cascade d'énergie se fait par inertie, on appelle cette zone du spectre la zone inertielle. Dans cette région, l'énergie diminue fortement avec la diminution des dimensions des structures turbulentes. Dans la région des dimensions les plus faibles, les structures de turbulence n'ont plus d'influence sur les charges aérodynamiques exercées par le vent sur le bâtiment. L'énergie est, comme mentionné, plus grande pour les structures les plus grandes. Cependant, celles-ci sont plus rares que les petites. Comme ce sont les grands tourbillons qui ont des interactions dynamiques avec la construction et qui sont les plus énergétiques, il faut que la partie du spectre qui décrit l'énergie des tourbillons d'une dimension égale et supérieure à celle du bâtiment soit bien décrite. Les très basses fréquences, comme les plus hautes ne produisent que des contributions négligeables à la réponse de la construction.

De nombreux auteurs se sont penchés après Taylor sur la formulation du spectre longitudinal de la turbulence.

La distribution de fréquence de la composante turbulente de la vitesse dans la direction du vent est décrite par la fonction adimensionnelle de la densité spectrale énergétique, appelée plus simplement spectre du vent :

$$S_N(z,n) = \frac{n \cdot S_v(z,n)}{\sigma_v^2(z)} \quad (184)$$

$S_v(z,n)$ Spectre du vent de la turbulence dans la direction du vent

n Fréquence en Hz

Suite à une adaptation des formules de **Davenport, Kaimal** (1972/1973) a proposé une formule simple pour le spectre du vent :

$$\frac{n \cdot S(n)}{v_z^2} = \frac{105 \cdot f}{(1 + 33 \cdot f)^{\frac{5}{3}}} \quad f_z = \frac{n \cdot z}{v_m(z)}$$

avec v_m Vitesse moyenne en fonction de la hauteur

Ici, la fréquence réduite f_z traduit, en termes de nombre d'onde la fréquence des fluctuations du vent. En effet, la variation temporelle de la fluctuation du vent dépend de la vitesse et de la dimension des tourbillons. Le nombre d'onde est en fait l'inverse de la dimension des tourbillons puisqu'il est calculé par le rapport de la fréquence et la vitesse du vent.

C.2 Couche limite atmosphérique

C.2.1 Intensité de turbulence

Dans le cas de la loi de puissance, l'équation de la répartition verticale de l'intensité de turbulence est simplement

$$\frac{I_v}{I_{v0}} = \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-\alpha_r}$$

avec I_{v0} Intensité de turbulence 10m au-dessus du sol :

$$I_{v0}(\alpha_r = 0.23) = 0.30$$

$$z_0 = 10m$$

avec α_r Exposant de la loi de puissance qui décrit l'intensité de la turbulence, en relation avec la rugosité (cf. SIA261, Tableau 4)

C.2.2 Macro-échelle de la turbulence

La macro-échelle de la turbulence correspond à la taille moyenne des tourbillons les plus énergétiques. Pratiquement, cette grandeur est mesurée par l'intégration de la fonction d'inter-corrélation spatiale entre la composante transversale à l'écoulement et la composante longitudinale de la vitesse turbulente. Elle est aussi connue sous le nom de longueur intégrale de la turbulence. Plus simplement, il s'agit d'une mesure pour la taille moyenne des grands tourbillons d'un écoulement turbulent. L'Eurocode propose la relation suivante :

$$L(z) = L_t \cdot \left(\frac{z}{z_t} \right)^\alpha \quad \text{pour } z > z_{min} \quad \text{resp.} \quad L(z) = L(z_{min}) \quad \text{pour } z \leq z_{min} \quad (185)$$

$$L_t = 300m \quad \alpha = 0.67 + 0.05 \cdot \ln(z_0)$$

C.3 Introduction à l'aérodynamique des constructions

C.3.1 Généralités

Les actions aérodynamiques de la couche limite atmosphérique sur les bâtiments sont complexes. Les grandes lignes des phénomènes sont présentées dans cette section. L'interaction entre la couche limite atmosphérique et certaines formes de bâtiments typiques sera abordée plus particulièrement. La grande majorité des phénomènes liés aux écoulements d'un fluide sur des formes ayant la géométrie des bâtiments sont aujourd'hui bien connus. Certains phénomènes, notamment les instabilités de la couche limite turbulente et les interactions aéroélastiques, font encore l'objet de recherches fondamentales et sont parfois encore un sujet de controverses.

Considérons, dans un premier temps, la grille d'un treillis plan (figure (C.6.a)), placée perpendiculairement à l'écoulement. L'extension longitudinale, donc dans la direction du vent, est celle du diamètre des barreaux. Elle est négligeable en comparaison à la surface frontale soumise à l'écoulement. La grille dans son ensemble n'offre que peu de résistance à l'écoulement, proportionnellement à la surface des barreaux qui, dans le cas de la figure (C.6.a), présentent une faible extension. Le vent n'est, de ce fait, que faiblement influencé par la présence de la grille.

Dans ce cas, la déviation de l'écoulement étant faible, la traînée aérodynamique du barreau de la grille ne dépend que de la vitesse locale du vent.

En revanche, lorsque la surface des barreaux augmente et que la grille devient plus fermée (figure (C.6.b)) (la porosité diminue), la perturbation de l'écoulement augmente. La traînée (force exercée dans le sens de l'écoulement) augmente proportionnellement avec l'augmentation de la surface des barreaux. L'ensemble de la grille arrête l'écoulement dans son centre et le flux d'air est dévié dans sa totalité pour contourner la grille. Cette déviation est d'autant plus grande si la surface est plane et étanche.

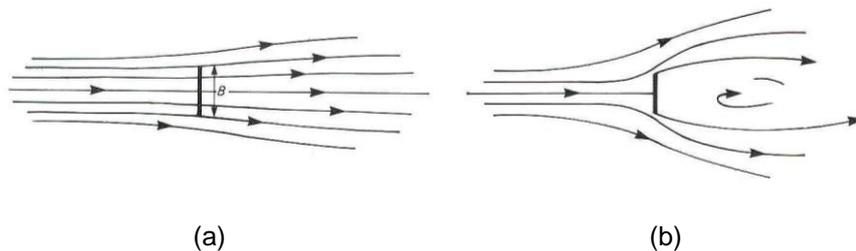


Figure (C.6) – Écoulement autour d'un treillis et d'une plaque

Dans le cas d'une plaque fermée placée perpendiculairement à l'écoulement ou au vent (figure (C.6.b)), le flux d'air sera fortement dévié sur les quatre côtés de la plaque, même si cette dernière est mince. L'extension dans le sens du vent ne joue aucun rôle si elle reste plus faible que la moitié de la largeur de la plaque. La déviation du flux provoque, derrière la plaque, la formation de gros tourbillons qui créent une traînée importante. Ces tourbillons ne sont pas stables et se détachent de la plaque de manière aléatoire. Si la plaque est allongée, l'écoulement se fera de manière préférentielle perpendiculairement aux deux grands côtés. Deux longs tourbillons apparaîtront le long de la plaque. Ils se détacheront de la plaque d'une manière plus organisée, c'est-à-dire successivement, l'un chassant l'autre. La traînée est proportionnellement plus faible que celle de la plaque carrée.

Lorsque l'épaisseur de la plaque augmente, la forme devient plus massive. Il se produit ainsi des forces perpendiculaires à la direction du vent. Ces forces sont, en théorie, symétriques et sont provoquées par les dépressions (succions) sur les faces latérales liées à la déviation du flux au bord de la plaque.

En pratique, la formation puis le décollement des tourbillons qui a lieu alternativement et à intervalles de temps réguliers, de chaque côté de la forme, provoque une force transversale périodique appelée

Vortex Shedding. Ce phénomène se produit dans tous les cas, il est très remarquable par sa soudaineté d'apparition lorsque les vents sont faiblement turbulents.

La longueur de la plaque joue un rôle réduit sur ce phénomène. Son seul rôle concerne la réduction de traînée due aux écoulements tridimensionnels se produisant aux extrémités de la plaque.

Les effets du vent sur les éléments porteurs placés selon une ligne sont analogues à ceux se produisant sur une grille.

C.3.2 Répartition des pressions autour des bâtiments

Considérons maintenant le cas d'un corps trapu, c'est-à-dire présentant un allongement plus faible que la plaque mentionnée ci-dessus. Ces corps sont d'une géométrie analogue à celle des bâtiments. Ils présentent aussi une longueur importante dans le sens de l'écoulement.

Autour de ce type de géométrie, il se forme un écoulement tridimensionnel. Globalement, le flux incident est dévié dans les deux directions perpendiculaires au vent. Ce type de déviation apparaît aussi aux extrémités d'une structure de géométrie plus allongée. Lorsque le corps est placé perpendiculairement à une surface, comme un bâtiment à la surface du sol, il faut en plus tenir compte de l'influence de la variation de la vitesse moyenne en fonction de la distance à la paroi. Dans le cas d'une variation de cette vitesse correspondant à une couche limite, comme c'est le cas du vent, diverses particularités doivent être relevées. Les lignes d'écoulement et les répartitions de pression sont présentées à la figure (C.7) ci-dessous. Comme on le voit sur cette figure, l'écoulement sur la face frontale s'évacue non seulement sur les côtés et par-dessus le corps mais aussi vers le bas. A environ deux tiers de la hauteur du bâtiment, l'écoulement se stabilise (R). Au-dessus de ce point, l'écoulement s'évacue par-dessus le bâtiment. En dessous, l'écoulement se dirige vers le bas jusqu'au sol. A ce niveau, soit au bas de la face, il possède plus d'énergie cinétique que celle de la vitesse du vent à cette même hauteur. De ce fait, cet écoulement peut alors souffler dans la direction opposée à celle du vent, il remonte jusqu'au point T. L'interaction entre ce flux descendant la face et le vent incident provoque un tourbillon au pied du bâtiment. Ce tourbillon prend l'allure d'un rouleau horizontal devant la face soumise au vent. Il est analogue à celui qui se produit au pied d'une falaise. Dans le cas d'un bâtiment, ce tourbillon se prolonge par entraînement sur les deux côtés du bâtiment. Vu en plan (figure (C.7.b)), l'air pénétrant dans le tourbillon s'évacue sur les deux côtés du bâtiment et prend la forme d'un fer à cheval. Ce tourbillon a une influence significative sur la répartition des pressions.

La structure du champ de vitesses et son énergie sont donc liées à la vitesse au sommet du bâtiment. La répartition des pressions autour d'un bâtiment ne suit en aucun cas la répartition de la pression dynamique en fonction de la hauteur mais ne dépend que de la pression dynamique au sommet du bâtiment.

L'écoulement autour d'un bâtiment peut être comparé à celui provoqué par l'interaction entre une couche limite et un talus (Figure (C.8)).

Dans le cas de bâtiments élevés, les grandes vitesses de vent provenant d'environ les deux tiers de la hauteur du bâtiment sont ramenées dans la zone située près du sol. Il en découle des effets de vent désagréables pour les piétons. La présence d'un second bâtiment moins élevé devant la tour aggravera encore cet effet. Les vitesses proches du sol sont ainsi de plus de 50 % plus élevées que les vitesses dans un environnement non construit.

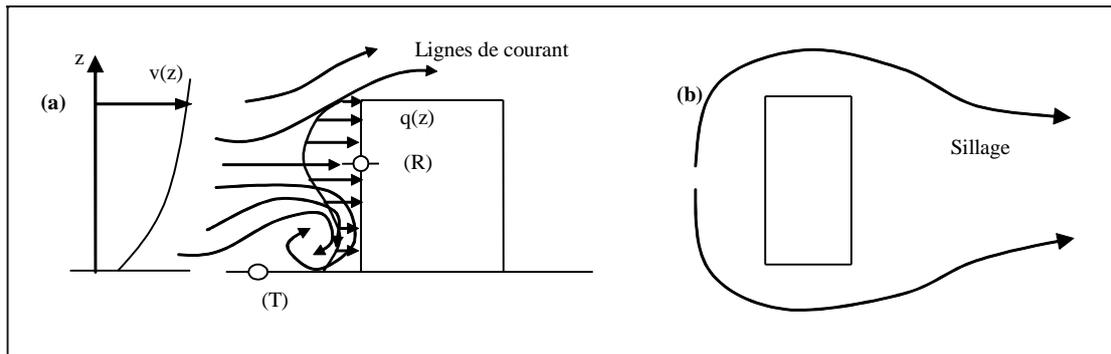


Figure (C.7) – Effet de l'écoulement de couche limite sur un corps

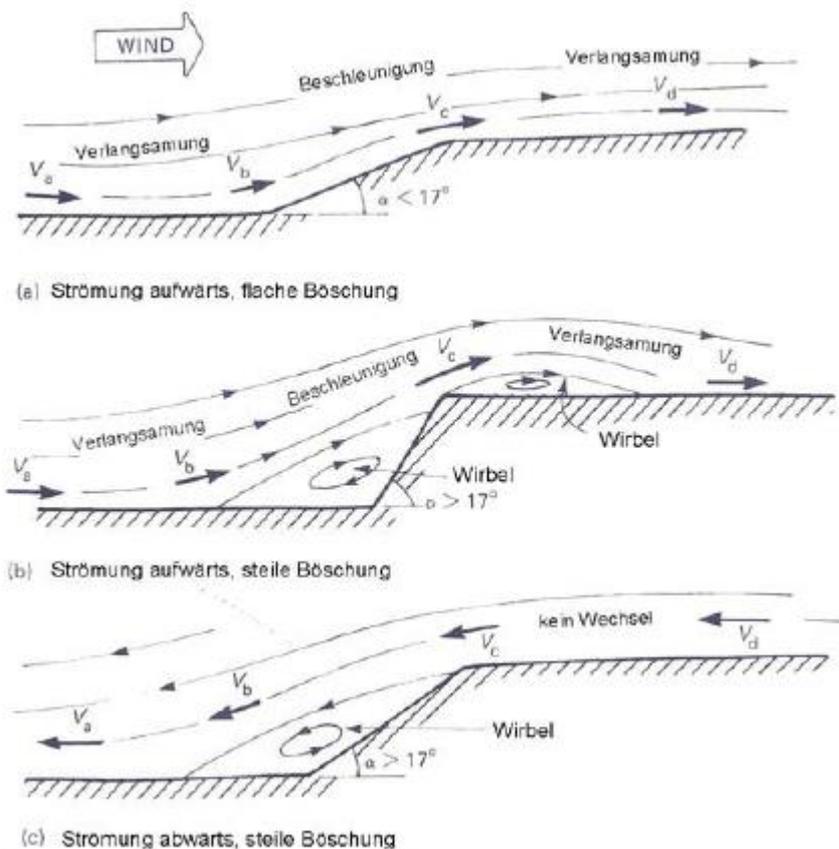


Figure (C.8) – Ecoulement à travers un talus

C.3.3 Répartition des pressions sur les faces et les toits

Analysons maintenant la répartition des pressions sur les faces latérales et sur un toit plat. Le flux qui s'écoule sur la face exposée au vent décolle aux angles avec les faces latérales et le toit s'il est plat. (figure (C.9)). Si la longue face du bâtiment est exposée au vent, l'écoulement se sépare d'une manière nette sur l'angle et ne recolle pas sur la face latérale. L'écoulement dans le tiers supérieur A n'est pas beaucoup modifié. L'écoulement dans la partie inférieure B, qui est dévié vers le bas, est sensiblement plus rapide que celui qui arrive au même niveau. La formation de tourbillons provoque une compensation verticale. Les pressions à l'emplacement du décollement le long des arêtes des

faces latérales prennent des valeurs de dépression importante mais qui diminuent rapidement avec l'éloignement des arêtes. Les différences de pression le long de la verticale sont relativement faibles. On notera cependant une exception lorsque l'effet de fer à cheval est renforcé par la présence d'un bâtiment plus bas situé à l'amont du bâtiment élevé étudié. Dans ce cas, une dépression plus forte se produit à proximité du sol. Le profil de couche limite, avec sa vitesse décroissante en direction du sol, voit son effet inversé [1], la vitesse au sol s'accélère et provoque de fortes dépressions sur les faces latérales du bâtiment.

Dans le cas d'une géométrie plus allongée dans le sens du vent, cas de la figure (C.9.b), le point de recollement ne reste pas localisé de manière stable. Il se produit aussi un sillage oscillant qui provoque des variations de pression très irrégulières sur les faces latérales.

En ce qui concerne l'écoulement sur un toit en terrasse (figure (C.10)), seul le flux provenant du tiers supérieur de la face exposée au vent s'écoule le long de la toiture. La vitesse de la couche limite d'approche augmentant avec la hauteur, la poussée du flux provenant de la face provoquant une dépression dans la cavité formée par la zone de séparation du bord du toit (T1) et les frottements sur le toit (dus aux tensions de Reynolds de l'écoulement) concourent à provoquer un recollement de filets fluides sur le toit (point AP). Ce recollement augmente la dépression dans le bord du toit. L'intensité de la dépression locale dépend aussi de la hauteur de l'acrotère⁵ et de l'éventuelle présence d'un parapet qui empêcherait le recollement de l'écoulement sur le toit.

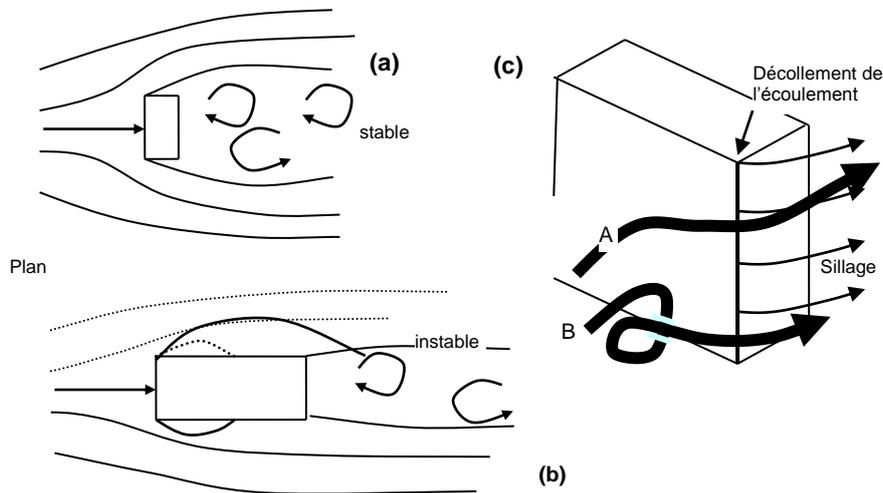


Figure (C.9) – Écoulement autour des corps massifs

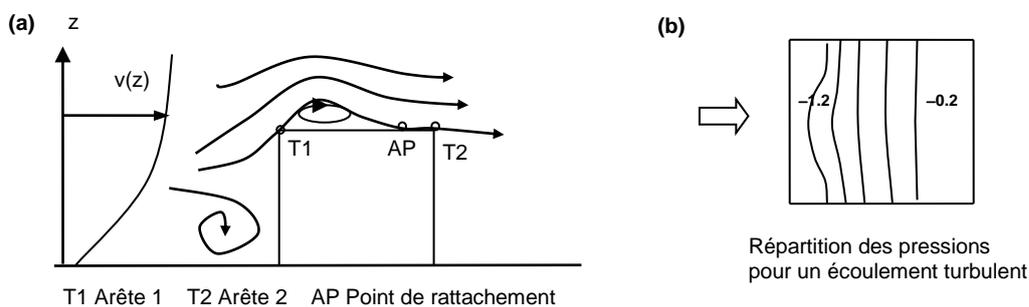


Figure (C.10) – Écoulement sur toits plats

⁵ Saillie verticale d'une façade, au-dessus du niveau d'une toiture-terrasse, ou d'une toiture à faible pente pour en masquer la couverture.

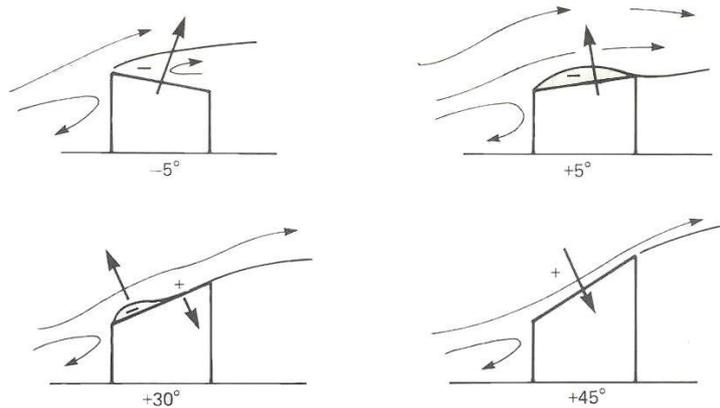


Figure (C.11) – Écoulement sur toits en pente

La comparaison entre les dépressions locales sur un corps placé dans un écoulement laminaire et celles exercées par un écoulement en couche limite du vent montre que les dépressions locales se produisant le long du bord du toit exposé au vent sont considérablement plus grandes dans le cas de la couche limite. Par contre, les forces globales sont plus importantes dans le cas de l'écoulement laminaire. Ceci n'est pas contradictoire, la turbulence a pour effet d'amincir la couche limite existant à la surface du corps et de provoquer des courbures des filets plus grandes. Cette augmentation des courbures crée des dépressions locales plus grandes, alors que l'amincissement des couches limites réduit la largeur du sillage et, par conséquent, la traînée.

En ce qui concerne les toits en pente, la répartition de la pression et la position du point de rattachement, dans le cas de l'écoulement détaché, dépendent fortement de l'angle d'inclinaison de la toiture (figure (C.11)). Pour les pentes négatives, le rattachement de l'écoulement est déplacé vers l'aval. Il peut être empêché. Lorsque la pente augmente à partir du toit plat, on observe un basculement du signe des pressions, les dépressions existant sur la surface deviennent une pression positive lorsque l'inclinaison atteint 30° environ. Au-delà de 45° et au-delà, l'écoulement ne se détache plus, il reste collé sur toute la surface du pan du toit.

Pratiquement, le vent n'est jamais orienté perpendiculairement à une face du bâtiment, il y a toujours un angle d'incidence provoquant un écoulement de biais sur une construction (figure (C.12)). Pour un angle d'attaque de 45°, deux tourbillons d'axe horizontal, appelés tourbillons de delta, se forment sur un toit plat. Ces tourbillons cohérents sont puissants et produisent sur le toit un fort courant latéral et des valeurs de dépression correspondantes.

L'axe de chaque tourbillon est incliné à 22°30 par rapport à l'arête. Le long de cet axe, d'importantes dépressions apparaissent. Les coefficients de dépression associés à ce type d'écoulement sont présentés à la figure (C.12). De nombreux dégâts aux toitures découlent de ces tourbillons.

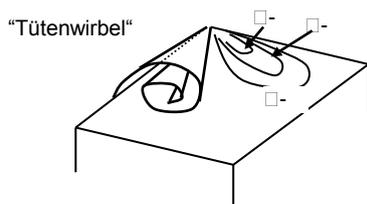


Figure (C.12) – Toitures soumises à un vent diagonal

Le sillage turbulent derrière un bâtiment trapu (figure (C.13)) est analogue à celui d'un bateau. Il est possible d'y distinguer deux régions. La région interne (B) est formée par une circulation fermée immédiatement derrière le mur. La région externe (A) se déplace avec l'écoulement général et se mélange progressivement avec la couche limite turbulente. L'écoulement A correspond, vu en plan, au tourbillon en forme de fer à cheval (figure (C.7.b)) et a tendance à renforcer le déplacement vers le haut des tourbillons B. L'écoulement au point de stagnation peut alors soit s'éloigner avec le courant, soit revenir vers le bâtiment. L'écoulement C marque la partie qui est entraînée dans le sillage.

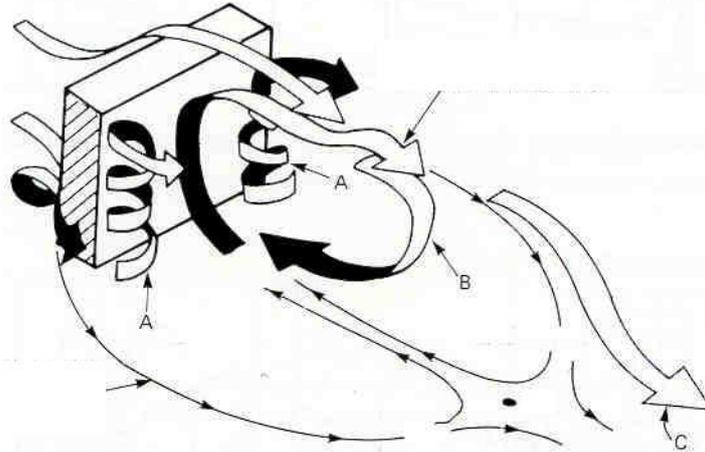


Figure (C.13) – Écoulement au sillage d'un corps, réf [1]

C.4 Facteur dynamique dans le cas de la résonance dans le sens du vent

Dans le concept de la norme SIA 160, le calcul de l'influence des effets dynamiques doit se faire par un coefficient de majoration exprimant un effet statique équivalent C_{dyn} . La détermination du calcul se trouve dans l'annexe A1 de la Documentation Do188. En effet, comme cette norme calcule directement les valeurs extrêmes instantanées des forces, le coefficient dynamique ne doit pas tenir compte de la réponse quasi-statique ni de la réduction de la charge extrême par le moyennage des tourbillons qui sont déjà pris en compte dans le calcul. Il n'exprime que l'amplification dynamique. Ceci diffère des méthodes d'autres normes (partie détaillée de l'Eurocode, normes Anglaise, Australienne, Canadienne, etc.) qui sont basées sur la moyenne extrême de 10 minutes et qui incluent dans le coefficient dynamique la réponse dynamique totale, soit le coefficient de rafale (passage de 10 minutes à la rafale) représentant la réponse quasi-statique, le background, soit la réduction par le moyennage et la résonance. La méthode utilisée repose toutefois sur une analyse dynamique complète.

Les actions dynamiques du vent sont présentées à la figure (C.14). Les tourbillons, représentés par leur spectre, interagissent dynamiquement avec la forme de la construction caractérisée par la réponse aérodynamique et produisent la sollicitation forcée. La structure caractérisée par sa réponse dynamique interagit avec la sollicitation et présentera un spectre de charge ou de mouvement $\square\square\square$. Cette manière de calculer est expliquée plus en détail dans l'exemple A2 de la Documentation Do188, dans le cas d'un immeuble.

Pour les besoins de la normalisation, on décompose ce spectre de charge ou de mouvement en une partie quasi-statique représentant l'aspect forcé par les tourbillons du mouvement et en une partie résonante représentant les pics de résonance du mouvement. Dans l'exemple de la figure (C.14), on voit un pic correspondant au seul mode de la structure. La partie quasi-statique (A) n'est autre que l'effet moyen déjà calculé par C_{red} alors que la partie résonante est définie par le produit du spectre du

vent (F) par la réponse aérodynamique (S) divisée par l'amortissement (ceci pour chaque mode i de la construction).

$$R_i = \frac{S_i \cdot F_i}{1.91 \cdot \xi_i} = \frac{C_{dim,i} \cdot C_{spec,i}}{\xi_i}$$

$C_{spec,i}$: Spectre du vent $C_{dim,i}$: Réponse aérodynamique ξ_i : Amortissement modal

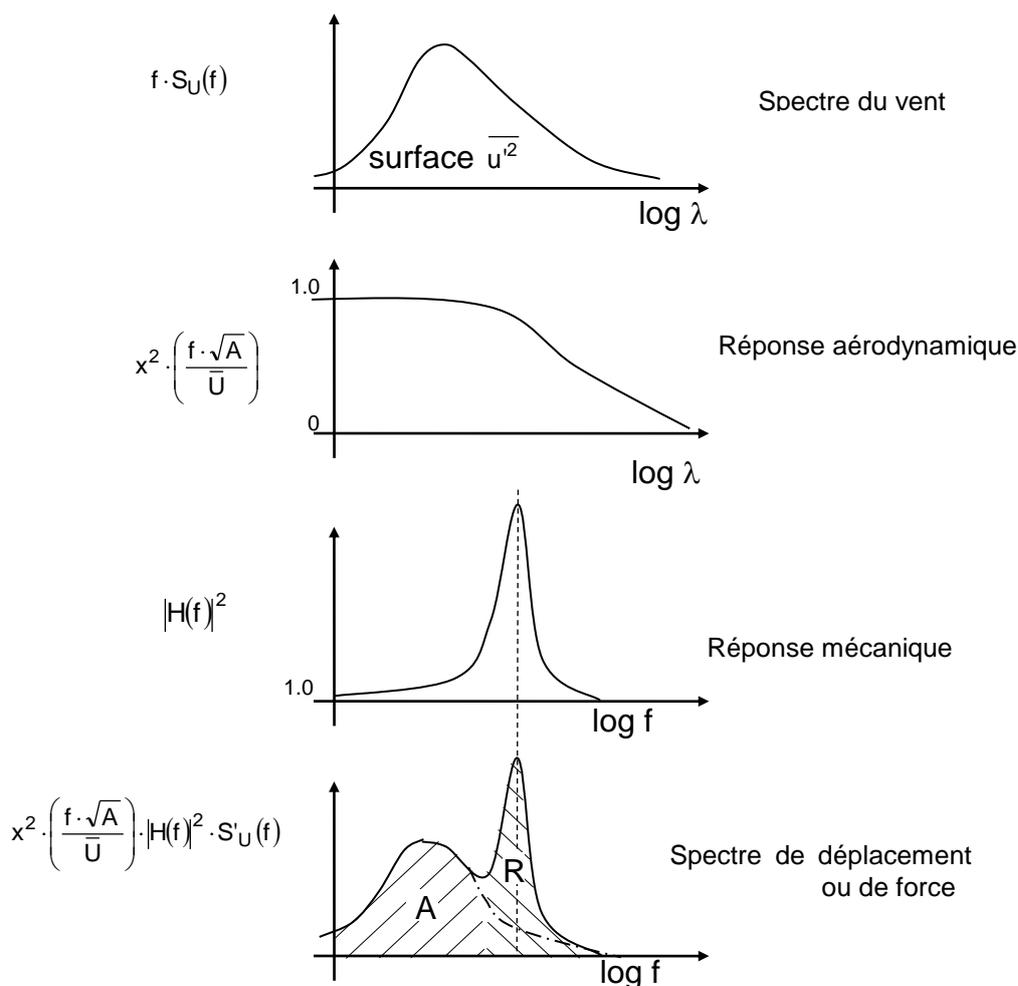
Ainsi, le coefficient dynamique (G) selon Davenport, pour une pression dynamique moyenne, est défini par :

$$G_q = 1 + 4 \cdot g_i \cdot I_v \cdot \sqrt{B + \sum R_i} \quad 4 \cdot g_i \cdot I_v : \text{Coefficient de turbulence}$$

$$C_d = \frac{I}{G_q \cdot C_{red}} \cdot \left(1 + \sqrt{(G_q \cdot C_{red} - I)^2 + \frac{C_{dim} \cdot C_{spec}}{1.91 \cdot \xi} \cdot (G_q - I)^2} \right)$$

Tous les calculs sont faits en tenant compte d'un rapport entre la pression dynamique de pointe et la pression dynamique moyenne de 6,1. La conversion à la notation de la SIA 261 conduit à la relation :

$$C_d = \frac{I}{C_{pic} \cdot C_{red}} \cdot \left(1 + \sqrt{(C_{pic} \cdot C_{red} - I)^2 + \frac{C_{dim} \cdot C_{spec}}{\xi} \cdot (C_{pic} - I)^2} \right) \quad (186)$$



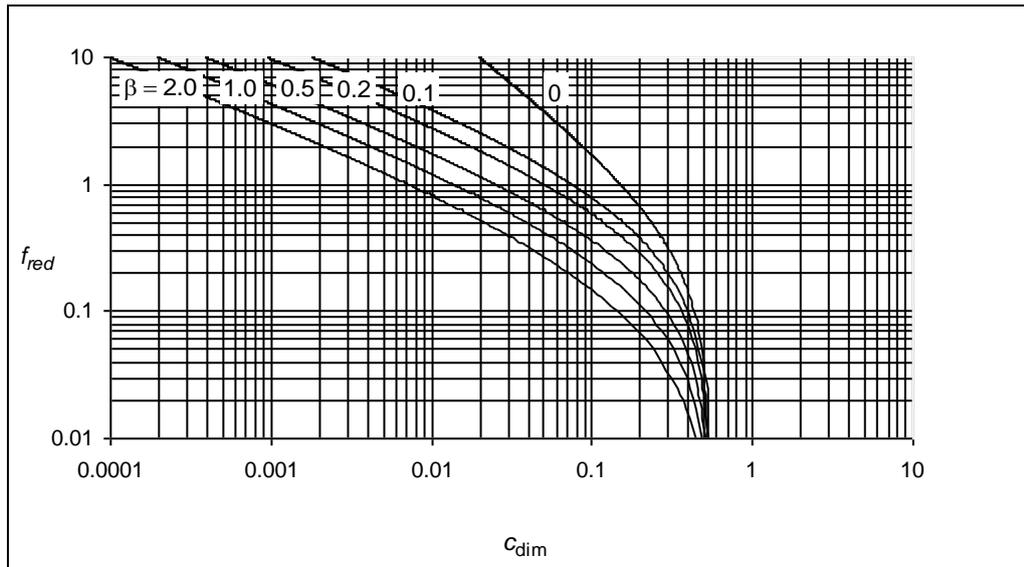


Figure (C.14) – Calcul spectral pour l'évaluation du comportement dynamique d'une construction, réf [16]

C.5 Références sur le vent

- [1] Cook N.J. The Designers Guide to Wind Loading of Building Structures, BRE, Butterworths, *Part 1*, 1985, (371pages) and *Part 2*, 1990, (586 p)
- [2] Gandemer J., Barnaud G, Biétry J. Aérodynamique, Centre scientifique et technique du bâtiment, REEF Volume II, 1980, (106 p)
- [3] Simiu E., Scanlan R.H. Wind Effects on Structures, John Wiley & Sons, Third Edition, Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc. 688 p.
- [4] Dyrbye C., Hansen S.O. Wind Loads on Structures, John Wiley & Sons, 1997 (229 p)
- [5] Holmes J.D. Wind Loading of Structures, Spon Press, 2001 (356 p)
- [6] Sockel H. Aerodynamik der Bauwerke, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, Wiesbaden, 1984 (412p)
- [7] CICIND Model Code for Concrete Chimneys Comité International des cheminées industrielles, Düsseldorf, 1984
- [8] CICIND Model Code for Steel Chimneys Comité International des cheminées industrielles, 136, North Street, Brighton, BN1 1RG, England, 1988
- [9] EKS – ECCS Recommendations for Calculating the Effect of Wind on Constructions. European Convention for Constructional Steelwork, TC 12, Wind, Second Edition 1987, (106 p)
- [10] Eurocode 1: Actions on structures – Part 1-4: General actions – Wind actions, Stand Juni 2002
- [11] Janser, F. Windbeanspruchung belüfteter Aussenwände, Dissertation, TU Berlin, 1995
- [12] Gerhardt, H.J., Janser, F., Kramer, C. Windbeanspruchung belüfteter Aussenwände, WTG 1997
- [13] Hertig J.A., Alexandrou C., Kokkoni A., Berney M. Essais en soufflerie à couche limite en vue de mesurer les coefficients de pression pour les tableaux de la norme SIA 160, IHE, EPFL, 1989
- [14] Davenport A. G., 1961 : The application of statistical concepts to the wind loading of structures. Proc. Inst. Civ. Engrs., 19, Aug 1961.
- [15] Davenport, A. G., 1963 The relationship of wind structures to wind loading, symposium Wind effects on Buildings and Structures, Teddington June 1963, Her Majesty's stationary office, London, 1965.
- [16] Davenport, A. G., 1965 : The dependence of wind loads on meteorological parameters. International Research Seminar on Wind Effects on Buildings and Structures, National Research Council of Canada, Ottawa, Vol 1, 20-82.
- [17] Davenport, A. G., , M. Novak, 1976: Vibration of structures induced by wind, chap 29 in Shock and Vibration handbook, second edition, by C. M. Harris and C. E. Crede, McGraw- Hill Book Company.

- [18] Davenport, A. G., 1982 : "The interaction of wind and structures" in Engineering Meteorology (E. Plate editor), chap.12, ELSEVIER SCIENTIFIC PUBLISHING COMPAGNY, 557-572.
- [19] Normes concernant les charges, la mise en service et la surveillance des constructions, Société Suisse des ingénieurs et des architectes (SIA 160, édition 1970).
- [20] Minimum design loads for buildings and others structures, American National Standard (ANSI A58.1-1982), (revision of ANSI A58.1-1972).
- [21] Lastannahmen für Bauten, Verkehrslasten, Windlasten beinicht schwingungsanfälligen Bauwerken, Deutsche Norm, (DIN 1055, Teil 4, 1986).
- [22] Règles définissant les effets de la neige et du vent sur les constructions et annexes. Document technique unifié, 1983, (Règles N.V.65 et annexes) Editions Eyrolles, Paris.
- [23] McNamara, K., 1976 : Characteristics of the Planetary Boundary Layer and Its Effects on Tall Towers. Phd Thesis, UWO.
- [24] Alexandrou, C., 1999, Dissipation Length and the Mean Velocity Profile of a Two Dimensional Turbulent Boundary Layer. Thèse EPFL No 1957.
- [25] Vickery, B. J. and Basu, R. I., 1983 : Simplified approaches to the evaluation of acrosswind response of chimneys, JWEIA, 14, pp153-166.
- [26] Davenport A. G., King J. P. C., 1982 : A study of wind effects for the Sunshine Skyway Bridge, Tampa, Florida. Steel alternate, BLWT-SS25-1982.
- [27] Kutzbach, Gisela, 1979, The thermal theory of cyclones, a history of meteorological thought in the nineteenth century, American meteorological society, Boston. 255 p
- [28] Actions on structures, Swiss Society of Engineers and Architects (SIA 160, standard edition 1989).
- [29] Loiseau H., Szechenyi E. (1981). Prévision et prévention des instabilités aéroélastiques des ponts à haubans. Proceedings Colloquium Designing with the wind Nantes June 1981.
- [30] Scanlan R. H., Tomko J. J., 1971 : Airfoil and bridge deck flutter derivatives. J. Eng. Mech. Div. ASCE, 97, 1717-1737.
- [31] Singh L., N. P. Jones, R.H. Scanlan, O. Lorendeaux, 1996 : Identification of lateral flutter derivatives of bridge decks. JWEIA ,10, pp. 81-89.
- [32] Zasso A., Cigada A., Negri S., (1996). Flutter derivatives identification through full bridge aeroelastic model transfer function analysis. JWEIA, 10, pp. 17-33.
- [33] Alexandrou, C., P. Goulpié, J.-A. Hertig, 1997 . Generalisation of the aerodynamic admittance concept with application to the aeroelastic behaviour of bridges. 2 EACWE, Genova, Italy.
- [34] Alexandrou C., Hertig, J.-A., Zago L., 1992 : Wind tunnel test on a large astronomical telescope. JWEIA, 41, 1483-1494.
- [35] Harris R. I., Deaves D. M. 1981 The structure of strong winds. Proceedings of the CIRIA conference held on 12/13 Nov 1989 CIRIA.
- [36] Hertig, J.-A., 1977, Similitude entre écoulements turbulents, thèse EPFL No 288.
- [37] Blackadar, A. K., Tennekes, H., 1968 : Asymptotic similarity in neutral barotropic planetary boundary layer. J. Atm. Sci, 25, pp 1015-1020.
- [38] Zilitinkevitch, S.S., 1989 : Velocity profiles, the resistance law and the dissipation rate of mean flow kinetic energy in a neutral and stably stratified planetary boundary layer, Bound. Layer Meteorol.,46, pp 367-387.
- [39] Manson, P. J., Thomson D. J., 1987 : Large-eddy simulation of neutral static-stability Planetary Boundary Layer . Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 113. pp 413-443.
- [40] Montavon Christiane, 1998 : Simulation of atmospheric flows over complex terrain for wind power assessment. Thèse EPFL N°1865.
- [41] Zilitinkevitch, S.S., Mironov, D.V., 1996, A multi-limit formulation for the equilibrium depth of a stably stratified planetary boundary layer, Bound. Layer Meteorol.,81, pp 325-351.
- [42] Hertig J.-A. : "Analysis of Meteorological Data and Main Problems related to the Determination of Building Exposure". NASI 1993. J.-E. Cermak et al, (eds). Wind climate in cities, 153-182. 1995, Kluger Academic Publishers.
- [43] Hertig J.-A., C. Alexandrou : "The influence of surroundings on pressure distributions around buildings". NASI 1993. J.-E. Cermak et al, (eds). Wind climate in cities, 293-317. 1995, Kluger Academic Publishers.
- [44] Hagel, Eine Veröffentlichung der Münchener Rückversicherungs-Gesellschaft, 1984
- [45] Hertig J.-A., J. Herrera, calcul des vents dans la région de Zermatt, LASEN No , 2004
- [46] Hertig J.-A. : "Some Indirect Scientific Paternity of Alan Davenport", Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 91,(2003) 1329-1347.
- [47] Goulpie P. : Maximisation numérique et mesure acoustique des précipitations Thèse EPFL (2004)
- [48] Schlichting, h., 1968, Boundary layers, Mc Graw Hill New York

- [49] Townsend, A. A., 1976, "The structure of turbulent shear flow", Cambridge University Press, second edition, 429 p.
- [50] Cotton W.-R., Anthes R.-A. : „Storm and Cloud Dynamics“, International geophysics series; 44, 1989 Academ
- [51] Cook N.J. : Wind Loading, a practical guide to wind loads on buildings, BS 6399-2, 2002 (243 p)
- [52] Godard A., Tabaud M. : Les Climats, Mécanismes et repartition, Armand Colin, Paris, 1998 (192p)
- [53] Zimmerli B. Überarbeitung ENV 1991-2-4: 1995 zu EN 1991-1-4, Winderregte Schwingungen von Tragwerken, WtG-Berichte Nr. 6, TU Berlin, ISBN 3-928909-05-03, 1999
- [54] Zimmerli B. Process of Drafting the Eurocode on Wind Action, Proceedings, 3rd European & African Conference on Wind Engineering Eindhoven, ISBN 90-6814-121-X, 2001
- [55] Zimmerli B., Hortmanns M. Aktueller Stand der europäischen Windlastnormung, Windwirkungen auf Bauwerke und deren Umgebung, WtG-Berichte Nr. 8, ISBN 3-928909-07-X, 2003
-