Chap 4 : Lois Usuelles

HDHIRI I.

loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$

Modèle: on tire au hasard un nombre entier dans l'ensemble $\{1, ..., n\}$. Ces nombres sont donc équiprobables. On note X le résultat (résultat d'un dé ou d'une boule numérotée dans une urne)

Définition: X suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$ si $X(\Omega) = \{1, ..., n\}$ et si pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $p(X = k) = \dfrac{1}{n}$

L'espérance de X est alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Loi de Bernouilli

Modèle Elle *compte* le nombre de succès en *une seule* expérience (donc 0 ou 1).

Elle vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.
Elles sont utiles à plusieurs : si X_k indique le succès lors de la $k^{ième}$ expérience, $\sum_k X_k$ compte le nombre total de succès.

Définition X suit une loi de Bernouilli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $P(X = 1) = p$

On a alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$

Loi binomiale

Modèle C'est la loi du *nombre de succès* en n expériences *indépendantes* qui ont toutes la même probabilité p de succès.

Définition X suit une loi binomiale si $X(\Omega) = \{0, ..., n\}$ et pour tout entier

$k \in \{0, ..., n\}$; $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$

On a alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

Loi géométrique

Modèle — C'est la loi du rang du premier succès dans une suite (infinie) d'expériences indépendantes qui ont toutes la même probabilité p de succès.

Définition — X suit une loi géométrique si $X(\Omega) = \{0, 1, ..., n, ...\}$ et pour tout entier $k \in \{0, 1, ..., n, ...\}$: $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$

On a alors $E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{(1-p)}{p^2}$

Loi de Poisson

Modèle C'est la loi qui modélise bien les fréquentations (nombre de clients à une caisse dans une journée, nombre d'étudiants en LFSI1 une année donnée ...)

Définition X suit une loi de Poisson de paramètre α si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N} : P(X = k) = \dfrac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}$
On a alors $E(X) = \alpha$ et $V(X) = \alpha$

Loi uniforme

Définition X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si sa densité f est définie sur $[a, b]$ par

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

et 0 ailleurs.

On a alors $E[X] = \frac{a+b}{2}$, $Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$ et la f.d.r. de X est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Loi exponentielle

Modèle Elle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement

Définition Soit λ un réel strictement positif. X suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité est la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

et 0 ailleurs.

On a alors $E[X] = \frac{1}{\lambda}$, $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ et la f.d.r. de X est donnée par $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$; $x \in \mathbb{R}_+$.

Loi Normale ou loi de Gauss

Modèle Quasiment tout ce qui est humain (taille, poids, pousse des cheveux, des ongles, durée du sommeil, ...etc)

Définition X suit la loi normale de moyenne μ et de Variance σ^2 si sa densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2}}$$

.

La v.a. $T = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale de moyenne 0 et de Variance 1 (cetrée réduite).