

---

# Notions d'élasticité linéaire

---

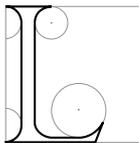
A beautiful story needs a beautiful language to tell.  
Tensor is the language of mechanics.

Y. C. FUNG, *A first Course in Continuum Mechanics*

*Ut tensio sic vis.*

The power of any springy body is in the same proportion with the extension.

Robert HOOKE, 1635-1703



LES PHYSICIENS ont depuis des siècles tenté de mettre en équations le comportement de la matière. Plus ou moins générales, précises ou robustes, ces modélisations s'appuient sur la représentation du phénomène de déformation à l'aide de champs vectoriels et de tenseurs. Ceux-ci décrivent en particulier la *déformation* de l'objet ainsi que les *contraintes internes* qu'il subit.

Des *lois de comportement* viennent ensuite lier les contraintes et la déformation qui en résulte. Ce chapitre présente succinctement cette modélisation physique et les équations principales que nous utiliserons dans les chapitres suivants. Le lecteur non familier avec les notations différentielles peut se reporter à l'Annexe A pour une brève introduction.

Les modèles physiques présentés sont parmi les plus simples. Il ne prennent pas en compte des phénomènes tels que l'influence et la variation de la température à l'intérieur du matériau, la possible anisotropie de ce dernier, etc. Ils ne sont donc pas forcément les mieux adaptés à une simulation spécifique, mais ont l'avantage de la simplicité et de la polyvalence. Pour une présentation plus complète, le lecteur pourra se référer à [LL59, TG70] (académiques), [Ger62, Cia85] (en français), [Dar95] (clair et simple) ou [Fun65, CMP89, SBG96] (plus complexe). Citons aussi [MWTT98] qui détaille plus précisément les modèles de matériaux dédiés aux applications bio-médicales.

Nous détaillons tout d'abord la modélisation des déformations en présentant deux modèles de déformation distincts. Nous présentons ensuite la modélisation des contraintes que subit le matériau puis la loi de comportement qui relie contraintes et déformations. Nous présentons enfin la façon dont sont exprimées les forces de frottement.

## 1 Le tenseur des déformations

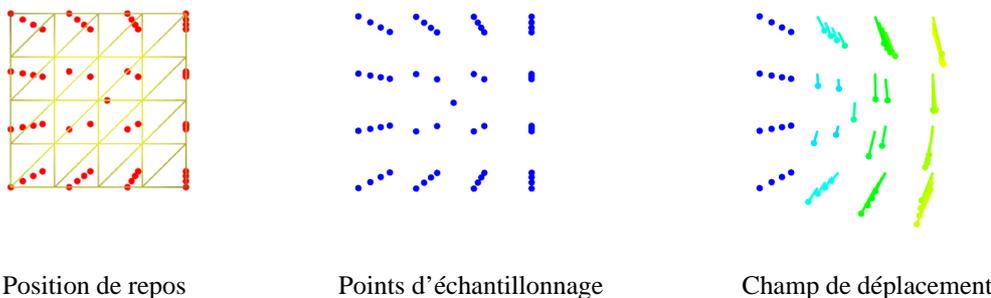
Nous présentons ici deux façons de représenter les déformations que subit un matériau, l'une étant la version simplifiée de l'autre. Chacune va, pour représenter les déformations du matériau, définir en chaque point un *tenseur des déformations*, noté  $\varepsilon$ , plus ou moins complexe. Les deux modèles ont leurs intérêts et leurs inconvénients, aussi les comparons-nous par la suite.

### 1.1 Le tenseur de Cauchy

#### Le champ de déplacement

Les déformations d'un objet sont mesurées à partir d'une position initiale, qui est généralement la position de repos de l'objet dans laquelle aucune force n'est appliquée à l'objet.

On définit alors le champ vectoriel *déplacement*, généralement noté  $\mathbf{u}$ , qui est simplement pour chaque point le vecteur reliant sa position au repos à sa position actuelle dans la configuration déformée (voir Fig. 2.1). En chaque point, et à chaque instant, on définit donc :  $\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t - \mathbf{p}_0$  où l'indice désigne ici le temps et  $\mathbf{p}$  la position du point dans un repère galiléen fixe.



Position de repos

Points d'échantillonnage

Champ de déplacement

FIG. 2.1: Un champ de déplacement dans un cube en 3D, représenté en chaque point par un vecteur.

#### Décomposition du champ

On n'utilise plus ensuite que la première dérivée spatiale de ce champ  $\mathbf{u}$  au travers de la matrice  $A$  qui est son gradient<sup>1</sup> :

$$A = \mathbf{grad} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Cette matrice  $A$  peut être séparée en la somme de deux matrices  $3 \times 3$  :

$$A = \mathbf{grad} \mathbf{u} = \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{u} + \mathbf{grad} \mathbf{u}^T)}_E + \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{u} - \mathbf{grad} \mathbf{u}^T)}_R \quad (2.2)$$

$E$  est une matrice symétrique tandis que  $R$  est antisymétrique et est liée au rotationnel  $\mathbf{rot} \mathbf{u}$  du champ de déplacement.

#### Définition

Dans le *modèle de Cauchy* que nous décrivons ici, c'est la matrice  $E$  qui va représenter les déformations du matériau et va donc être le *tenseur des déformations*,  $\varepsilon_{Cauchy}$ .  $R$ , que nous n'utiliserons pas dans les modèles simplifiés présentés, est appelé *tenseur de rotation*.

<sup>1</sup>Cette matrice est formée, sur chacune de ses lignes, du gradient de la composante associée du vecteur  $\mathbf{u}$ . Voir l'Annexe A pour des définitions plus complètes.

On a donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{Cauchy} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

En désignant par  $x_i$  la  $i^{\text{ème}}$  direction du repère du monde (fixe et galiléen) dans lequel on dérive ( $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ), les termes de la matrice peuvent s'écrire :

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_{Cauchy})_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

## Propriétés

L'opération de dérivée spatiale que l'on applique pour obtenir *A filtre* le champ  $\mathbf{u}$  pour n'en plus considérer que son *évolution* au travers du matériau. Une *translation* appliquée à tout l'objet se traduit par l'ajout d'une constante au champ  $\mathbf{u}$ , qui sera supprimée par la dérivée. Ne modifiant pas le tenseur des déformations, cette translation ne créera pas de force additionnelle. Si l'objet est donc insensible aux translations, il ne l'est par contre pas à l'autre mouvement rigide qu'est la rotation qui elle entraînera des forces internes et donc une déformation.

Ce comportement est irréaliste, mais il s'avère suffisant dans la plupart des cas, lorsqu'on se limite à de faibles déplacements et que l'objet reste donc proche de sa position d'équilibre.

Bien évidemment, lorsque l'objet est dans sa position de repos, le champ  $\mathbf{u}$  est uniformément nul et le tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}$  l'est aussi, ce qui ne créera aucune force comme on le verra dans une section suivante. La position de repos est donc une position stable.

## 1.2 Le tenseur de Green-Lagrange

### Le repère lié au matériau

Pour le tenseur de Green-Lagrange, on définit deux systèmes de coordonnées, liés à deux repères différents : le repère du monde, fixe, et dans lequel seront mesurées les positions des points, et celui, local et lié au matériau, défini par la position de repos de l'objet. En l'absence de déformation, ces deux référentiels coïncident à une transformation rigide près. C'est leur "écartement", encore une fois filtré par une dérivée spatiale, que va mesurer le tenseur des déformations de Green-Lagrange.

On désignera par  $\Omega$  le système de coordonnées lié au repère du matériau. Les dérivées par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de ce repère seront donc notées  $\frac{\partial}{\partial \Omega_i}$ .

### Définition

Le tenseur de Green-Lagrange est défini par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{Green-Lagrange} = \mathbf{grad}_{\Omega} \mathbf{p} \times \mathbf{grad}_{\Omega} \mathbf{p} - I_3 \quad (2.5)$$

où les termes  $\mathbf{grad}_{\Omega} \mathbf{p}$  sont des matrices  $3 \times 3$  de gradient de la position, définies dans le repère lié au matériau :

$$(\mathbf{grad}_{\Omega} \mathbf{p})_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \Omega_j}$$

dont on fait le produit matriciel et auxquels on soustrait la matrice identité de taille 3,  $I_3$ .

Chaque terme de la matrice  $\boldsymbol{\varepsilon}$  peut donc s'écrire :

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_{Green-Lagrange})_{ij} = \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \Omega_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \Omega_j} \right) - \delta_{ij} \quad (2.6)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et 0 sinon). Chaque terme de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$  est ainsi le produit scalaire de deux vecteurs, auquel on soustrait éventuellement 1.

### Propriétés

Cette définition du tenseur provient de l'étude de la variation du *carré de la distance* entre deux points voisins, avant et après déformation. On n'a pas de racine carrée inhérente à une distance, mais restent des termes quadratiques que l'on retrouve dans l'expression du tenseur, qui *n'est donc pas linéaire*.

Le tenseur de Green-Lagrange est une matrice symétrique (puisqu'il est un tenseur) et a plusieurs propriétés intéressantes : la première est que, tout comme pour le tenseur de Cauchy, le tenseur de Green-Lagrange est nul lorsque l'objet est dans sa position de repos. En effet, supposons dans un premier temps et pour simplifier que l'on a pris comme référentiel lié au matériau le référentiel global<sup>2</sup>. Alors la matrice  $\mathbf{grad}_\Omega \mathbf{p}$  n'est autre que l'identité puisqu'elle est le gradient de la position par rapport à la position. La matrice  $\varepsilon$  est donc nulle (après soustraction de  $I_3$ , voir Eq. 2.5).

Ce tenseur est, tout comme Cauchy, également insensible aux translations globales de l'objet (ajout d'une constante au champ  $\mathbf{p}$  qui disparaît dans la dérivée). Il a de plus l'importante propriété de ne pas être modifié par des *rotations globales* de l'objet *dans sa forme de repos*. Si l'on se trouve dans la position de repos, les dérivées  $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \Omega_i}$  qui servent à calculer les  $\varepsilon_{ij}$  sont les lignes de la matrice identité, c'est-à-dire des vecteurs de la forme  $(\delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i})^T$ . Faire tourner rigide l'objet revient à appliquer à la position de ses points une matrice de rotation  $O$ . Les nouvelles positions  $\mathbf{p}'$  sont alors  $\mathbf{p}' = O \mathbf{p}$ . On a donc, pour chaque terme du tenseur (Eq. 2.6) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \left( \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial \Omega_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial \Omega_j} \right) - \delta_{ij} \\ &= \left( \frac{\partial O \mathbf{p}}{\partial \Omega_i} \cdot \frac{\partial O \mathbf{p}}{\partial \Omega_j} \right) - \delta_{ij} \\ &= \left( O (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i})^T \cdot O (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{3j})^T \right) - \delta_{ij} \\ &= \left( (i^{\text{ème}} \text{ ligne de } O) \cdot (j^{\text{ème}} \text{ ligne de } O) \right) - \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Mais puisque  $O$  est une matrice de rotation, le produit scalaire de ses lignes  $i$  et  $j$  vaut précisément  $\delta_{ij}$ . Le tenseur  $\varepsilon$  est donc bien nul après que l'on a appliqué la rotation. Il est à noter que dans le cas général, la multiplication par la matrice  $O$  ne préserve pas le tenseur et que c'est parce qu'on est dans la forme de repos et que les vecteurs sont alors composés de 1 et de 0 que l'on peut ainsi simplifier. Une rotation rigide d'un objet *déformé* modifiera donc le tenseur.

L'annexe C décrit en détails l'implémentation de ce formalisme dans un cadre d'éléments finis *explicites* (cf Section 7.2 du chapitre précédent).

## 1.3 Comparaison des deux modèles

### Différences mathématiques

Les deux modèles se différencient par le repère par rapport auquel les dérivées spatiales sont calculées. Alors que Cauchy dérive par rapport au repère du monde, Green-Lagrange dérive dans le repère lié au matériau. Cauchy est désigné comme *Eulérien* (on mesure tout dans un repère fixe), alors que Green-Lagrange est *Lagrangien* (on "suit" les points dans leur mouvement, en mesurant par rapport à un repère lié au matériau). Ces deux façons de mesurer les choses sont équivalentes, et l'on peut passer de l'une à l'autre en prenant en compte le mouvement d'un repère par rapport à l'autre.

Outre cette différence, le modèle de Cauchy, plus simple, peut être vu comme une approximation au premier ordre de celui de Green-Lagrange. Alors que Cauchy est une combinaison linéaire de dérivées premières, Green-Lagrange introduit en plus un terme quadratique. Si l'on réécrit en effet les équations de Green-Lagrange en fonction du déplacement et non plus de la position, on obtient :

$$(\varepsilon_{\text{Green-Lagrange}})_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial \Omega_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \Omega_i} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial \Omega_i} \frac{\partial u_1}{\partial \Omega_j} + \frac{\partial u_2}{\partial \Omega_i} \frac{\partial u_2}{\partial \Omega_j} + \frac{\partial u_3}{\partial \Omega_i} \frac{\partial u_3}{\partial \Omega_j} \right) \right] \quad (2.8)$$

Si l'on remplace alors les dérivées par rapport au repère du matériau par des dérivées dans le repère du monde ( $\Omega_1$  devenant  $x$  ;  $\Omega_2$ ,  $y$  et  $\Omega_3$ ,  $z$ ), on reconnaît dans les deux premiers termes de  $\varepsilon_{\text{Green-Lagrange}}$  ceux qui

<sup>2</sup>On va montrer par la suite que la transformation rigide qui peut exister entre ces deux repères *quand on est dans la position d'équilibre* ne change pas le tenseur, qui sera donc nul quel que soit le choix du repère du matériau.

forment  $\varepsilon_{Cauchy}$  (Eq. 2.4). Ce remplacement de dérivées, cette assimilation de l'Eulérien et du Lagrangien, n'est possible que lorsque les deux repères sont très proches, ce qui est le cas uniquement dans la position de repos de l'objet. Pour de très faibles déformations, les termes quadratiques de Green-Lagrange devenant négligeables, les deux modèles sont donc équivalents. Le tenseur de Cauchy est d'ailleurs appelé tenseur *infinitésimal* de Cauchy. Ils se différencient néanmoins assez rapidement pour des déplacements plus importants.

On peut en fait définir quatre tenseurs en combinant l'utilisation ou non des termes quadratiques additionnels et la dérivation dans le repère du monde ou dans celui du matériau. Le tenseur utilisant les termes quadratiques, mais défini dans le repère du monde s'appelle d'ailleurs *tenseur d'Almansi (et Hamel)*.

### Différences comportementales

Pour illustrer la différence entre les deux tenseurs, nous présentons quelques images extraites de deux animations. Nous simulons le mouvement d'un cube sous l'action de la gravité, sa face de gauche étant fixée à un mur fixe (non représenté). Au départ, le cube est placé, sans vitesse initiale dans sa position de repos (Fig. 2.2) et nous présentons quelques images de sa première oscillation.

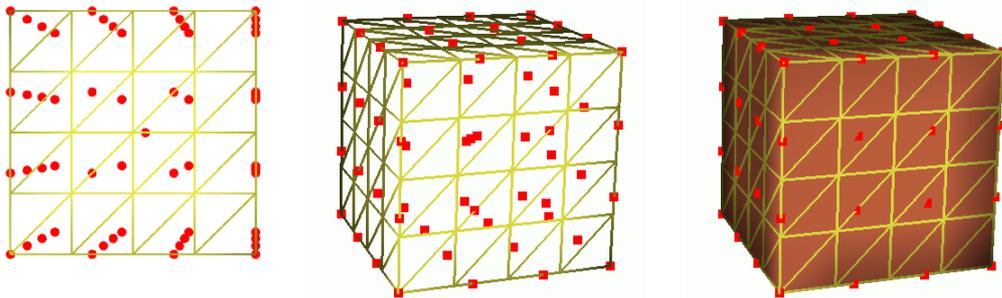


FIG. 2.2: Le cube dans sa position de repos. Vues de face et de profil des points qui vont être simulés.

Tous paramètres par ailleurs égaux<sup>3</sup>, la méthode d'intégration étant la même, seul le mode de calcul du tenseur des déformations différencie les deux animations. Les images des Figures 2.4 et 2.5 montrent en chaque point le déplacement, la vitesse et la force subie à des intervalles réguliers de la simulation.

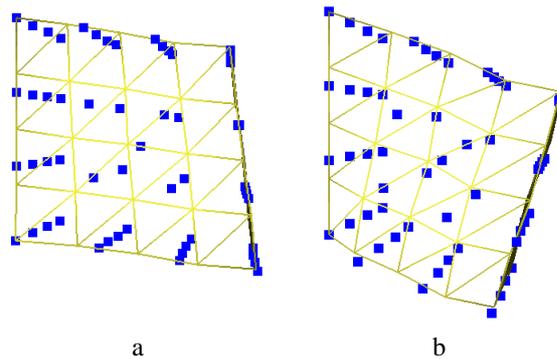


FIG. 2.3: La position d'équilibre finale du cube lorsqu'on ajoute du frottement interne est différente en utilisant Cauchy (a) et Green-Lagrange (b).

Comme on peut le voir, le tenseur de Green-Lagrange donne une animation plus naturelle, le cube s'arquant, alors qu'il a plus tendance à s'effondrer avec Cauchy (voir les positions d'équilibre des deux animations lorsqu'on ajoute un frottement interne pour les stabiliser en Figure 2.3). Le tenseur de Cauchy montre là sa limitation aux très faibles déplacements. Plus complexe, Green-Lagrange donne donc une animation plus réaliste, mais par contre plus lente à calculer (environ 2.3 fois), car nécessitant plus de calculs. L'autre défaut du tenseur de Green-Lagrange est sa plus grande instabilité numérique, contrepartie d'un mouvement plus complexe.

<sup>3</sup> $\mu = 7000, \lambda = 20000$ , aucun frottement, pas de temps de  $8.3 \cdot 10^{-4}$  secondes

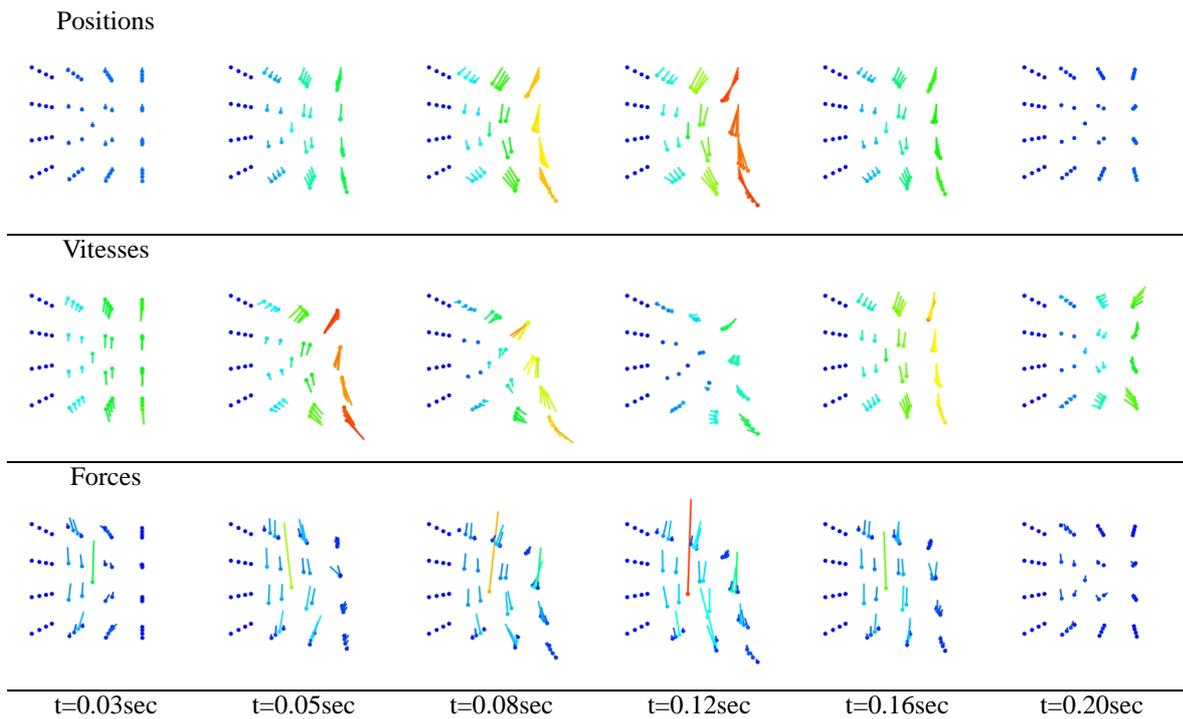


FIG. 2.4: Images de l'animation d'un cube sous l'action de la gravité avec le tenseur de Cauchy.

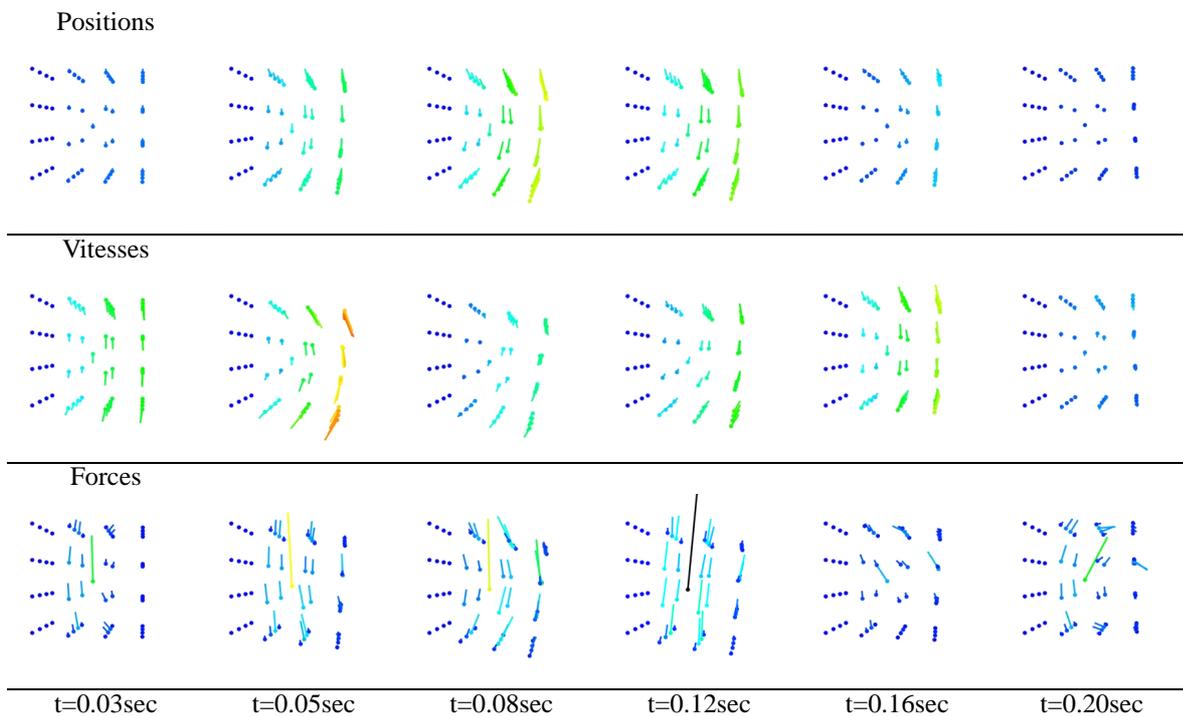


FIG. 2.5: Images de l'animation d'un cube sous l'action de la gravité avec le tenseur de Green-Lagrange.

## 2 Le tenseur des contraintes

Après la description des déformations, nous introduisons ici le *tenseur des contraintes* qui va décrire en chaque point la répartition des forces internes. Nous verrons ensuite comment relier ce tenseur aux forces et accélérations réellement subies par les points.

## 2.1 Définition

Le tenseur des contraintes, noté  $\sigma$ , est également une matrice  $3 \times 3$  symétrique. C'est tout comme le tenseur des déformations, une approximation assez grossière de ce qui se passe en chaque point du matériau.

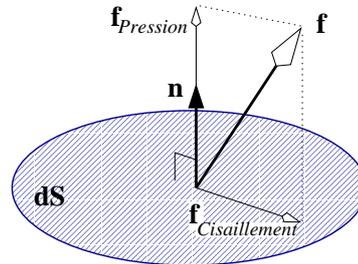


FIG. 2.6: Décomposition de la force agissant sur un élément de surface  $dS$  défini par sa normale  $\mathbf{n}$ .

Considérons, en un point donné de l'objet, un élément infinitésimal de surface  $dS$  et de normale  $\mathbf{n}$ . Ce petit élément de surface reçoit une force  $\mathbf{f}$  qui dépend de l'orientation de sa normale. On peut idéalement mesurer l'évolution de  $\mathbf{f}$  en fonction de celle de  $\mathbf{n}$  et l'écrire sous la forme :

$$\mathbf{f} = \Theta(\mathbf{n}) dS \quad (2.9)$$

Proportionnelle à l'aire, la force (intensité et direction) dépend au travers de la fonction  $\Theta$  de la normale  $\mathbf{n}$ .

La fonction  $\Theta$  peut être arbitrairement complexe. On pourra tout de même lui imposer d'être symétrique ( $\Theta(-\mathbf{n}) = \Theta(\mathbf{n})$ ), indiquant par là que la force reçue par le petit élément de surface sera la même qu'on le considère retourné ( $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$ ) ou non.

Si la fonction  $\Theta$  est une simple multiplication par un scalaire, la force est une *pression uniforme* : elle s'applique le long de la normale à la surface et a une valeur constante dans toutes les directions.

Si  $\Theta$  peut être représentée par une matrice  $3 \times 3$  de la forme  $\begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on a cette fois affaire à un

champ de pression directif (ici selon l'axe  $x$ , mais ce pourrait être dans n'importe quelle direction en multipliant par une matrice de rotation). L'élément de surface reçoit une pression  $P$  lorsqu'il est orienté le long de la direction  $x$ , et une force nulle quand il est orienté dans une direction orthogonale.

Un peu plus complexe, la classe des tenseurs de contrainte que nous allons utiliser est celle où la fonction  $\Theta$  peut-être représentée par une matrice  $3 \times 3$  quelconque. Cette matrice, qui sera dénotée  $\sigma$ , sera symétrique pour les raisons vues plus haut. L'application linéaire  $\sigma$  pourra donc être considérée comme l'*approximation au premier ordre* de  $\Theta$ , qui elle peut être quelconque. Une force linéairement dépendante de la normale est évidemment une approximation, mais elle se révèle suffisante pour des simulations générales. On a donc :

$$\mathbf{f} = \sigma \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.10)$$

## 2.2 Force et accélération

Ce tenseur des contraintes  $\sigma$  est une notion assez abstraite des contraintes internes. On peut le relier simplement à l'*accélération*  $\mathbf{a}$  que subit chaque point par l'équation :

$$\rho \mathbf{a} = \mathbf{div} \sigma \quad (2.11)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du matériau au point considéré et  $\mathbf{div}$  est le vecteur composé des divergences de chacune des lignes de la matrice  $\sigma$  (voir Annexe A).

L'accélération est inversement proportionnelle à la densité, ce qui se comprend intuitivement : pour une contrainte  $\sigma$  donnée, l'accélération subie sera d'autant moins forte que le matériau est lourd et donc difficile à déplacer, et inversement s'il est léger. L'opérateur divergence va ici indiquer la direction que doit suivre le point pour tenter d'uniformiser le champ  $\sigma$  (une contrainte d'un côté va, si elle n'est pas compensée de l'autre côté, avoir tendance à "pousser" le point dans cette direction).

La notion de force est quant à elle liée à celle de masse. La loi fondamentale de la dynamique stipule que  $\mathbf{f} = m \mathbf{a}$  où  $m$  est la masse du point considéré. Depuis le début de ce chapitre, nous nommons 'point' une position

quelconque à l'intérieur du matériau, qui est supposé continu. Le point, tel que nous l'entendons n'a donc pas de volume donc pas de masse. Pour pouvoir parler de force, il faut isoler un volume  $V$ , même infinitésimal, et considérer le tenseur des contraintes comme constant sur ce volume pour obtenir une force. On parlera alors plutôt de *force volumique* en écrivant :

$$\frac{\mathbf{f}}{V} = \frac{m\mathbf{a}}{V} = \frac{\rho V\mathbf{a}}{V} = \rho\mathbf{a} = \mathbf{div} \sigma$$

### 3 La loi de comportement

La loi de comportement va relier contraintes et déformation, en introduisant des propriétés propres au matériau considéré. Ces lois peuvent encore une fois être bien plus complexes que celle présentée ici, en faisant par exemple intervenir la température du matériau. Nous présentons la loi de comportement que nous utiliserons, ainsi que l'équation de Navier qui en résulte dans le cadre des petits déplacements et son interprétation comme la superposition de deux phénomènes simples.

#### 3.1 Définition

La loi de comportement va relier les deux tenseurs définis précédemment (déformations et contraintes). Comme cela se passe dans un ressort, on va généralement imposer que la contrainte soit linéairement liée à la déformation. On pourrait, mais c'est très rare, introduire des termes de plus haut degré. Pour simuler des comportements plus complexes et en particulier non linéaires, on préfère utiliser une fonction linéaire par morceaux pour approximer la courbe non linéaire qui relie contraintes et déformation.

On voit sur la Figure 2.7 une illustration de ce qui se passe *au delà* du comportement élastique : entre les états A et B, le matériau est élastique ; il devient ensuite plastique si l'on augmente la déformation jusqu'en C. Relâcher la contrainte en C fera revenir le matériau dans une nouvelle position d'équilibre D, selon une pente égale à celle de son comportement élastique.

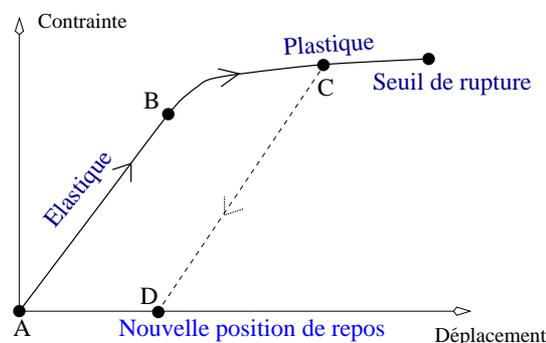


FIG. 2.7: Type de comportement d'un matériau au delà des hypothèses de linéarité.

La loi linéaire que nous allons considérer est de la forme  $\sigma = K\varepsilon$  où  $K$  est une fonction linéaire<sup>4</sup>. Les deux tenseurs  $\sigma$  et  $\varepsilon$  sont des matrices  $3 \times 3$  symétriques et ont donc chacun 6 coefficients indépendants.  $K$  comporte donc 36 coefficients indépendants qui lient linéairement ceux des deux tenseurs. Un matériau, dans le cadre des approximations linéaires qui ont été faites depuis le début de ce chapitre, va donc être représenté par 36 coefficients qui vont entièrement définir son comportement et peuvent être mesurés sur des matériaux réels par des séries de tests, qui sont dits *rhéologiques*.

#### 3.2 La loi de Hooke

En pratique, la loi linéaire introduite précédemment est souvent trop générale et peut être simplifiée. Si l'on considère que le matériau est *isotrope*, c'est-à-dire qu'il a le même comportement dans toutes les directions (c'est très souvent le cas, sauf pour des matériaux fibreux à direction privilégiée, comme le bois ou les muscles),

<sup>4</sup> $K$  est en fait un tenseur d'ordre 4

alors des raisons de symétrie font que parmi les 36 coefficients, deux seulement sont indépendants. La loi de comportement se simplifie alors grandement et peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}_3 + 2 \mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{I}_3$  est la matrice identité et  $\operatorname{tr}$  la trace de la matrice.  $\lambda$  et  $\mu$  sont les deux coefficients indépendants et s'appellent les *constantes de Lamé*. Elles sont homogènes à des pressions.

Des tests rhéologiques permettent de déterminer ces constantes, spécifiques à un matériau donné. Ces tests mesurent en fait directement deux autres valeurs : le module d'Young  $E$  (homogène à une pression) et le coefficient de Poisson  $\nu$  (sans unité). Ces valeurs sont liées aux coefficients de Lamé par les équations :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.13)$$

$E$  correspond intuitivement à la rigidité du matériau et varie entre  $10^5$  et  $10^{10}$ .  $\nu$  mesure son incompressibilité et varie entre 0.0 (aucune préservation de volume, valeur théorique, en pratique  $\nu$  est supérieur à 0.25) et 0.5 (matériaux parfaitement incompressibles).

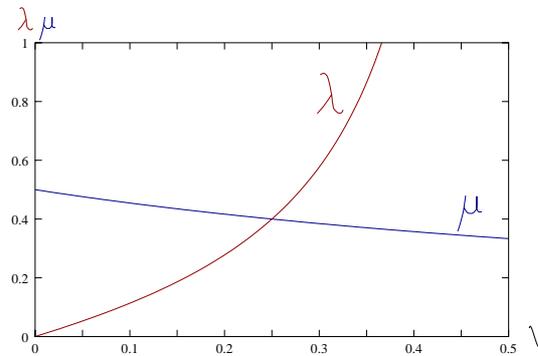


FIG. 2.8: Évolution de  $\lambda$  et  $\mu$  lorsque  $\nu$  varie entre 0 et 0.5, pour un  $E$  donné. Noter que  $\lambda$  tend vers l'infini pour des matériaux incompressibles ( $\nu = 0.5$ ).

### 3.3 Équation de Navier

On se place ici dans le cadre des petits déplacements et des petites vitesses, de sorte que l'on peut linéariser les équations. Cela revient pour nous à considérer que le tenseur de Green-Lagrange peut être assimilé à celui de Cauchy, comme on l'a vu précédemment. On a donc (Eq. 2.4) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.14)$$

Vitesse et accélération sont liés par :

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad , \quad a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (2.15)$$

La loi de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.16)$$

Celle de la conservation du moment, en omettant l'action des forces extérieures (Eq. 2.11) :

$$\rho \mathbf{a} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.17)$$

Et enfin la loi de comportement de Hooke s'écrit (Eq. 2.12) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}_3 + 2 \mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.18)$$

L'ensemble de ces équations décrit la théorie de l'élasticité. On a en tout 22 équations ( $6 + 6 + 1 + 3 + 6$ ) pour les 22 variables du système en chaque point :  $\rho, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$ . En substituant les termes en  $\sigma_{ij}$  dans ces équations, on obtient l'équation de Navier :

$$\rho \mathbf{a} = \mu \operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{u}) + (\mu + \lambda) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) \quad (2.19)$$

### 3.4 Interprétation

L'équation de Navier, qui, rappelons-le, n'est valable que dans l'hypothèse des très faibles déplacements a une interprétation intéressante. L'accélération est tout d'abord proportionnelle à l'inverse de la densité, ce qui se comprend intuitivement, car plus le matériau est lourd, moins une contrainte donnée parviendra à le déformer. L'accélération est ensuite la somme de deux termes, qui ont chacun une interprétation physique simple :

- Le premier terme,  $\rho \mathbf{a} = \mu \operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{u}) = \mu \Delta \mathbf{u}$ , est une équation hyperbolique qui simule la *propagation d'une onde* à l'intérieur du matériau. Une déformation provoquée à un endroit va se propager dans toutes les directions, à une vitesse  $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ .
- Le second terme,  $\rho \mathbf{a} = (\mu + \lambda) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u})$ , simule une *préservation du volume*.  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  mesure l'*expansion volumique*, et une accélération dirigée selon le gradient de cette valeur va chercher à déplacer le point de telle sorte que la densité soit localement préservée.

Les constantes de Lamé viennent pondérer ces deux comportements et ainsi créer des comportements plus complexes d'onde de déformation avec plus ou moins de compressibilité. À noter que lorsque le coefficient de Poisson,  $\nu$ , est proche de 0.5, ce qui correspond à un matériau parfaitement incompressible, le second terme (préservation du volume) devient prépondérant, le coefficient  $\lambda$  augmentant jusqu'à devenir infini pour  $\nu = 0.5$ . En pratique on considérera le matériau comme raisonnablement incompressible dès lors que  $\lambda > 100\mu$ .

Cette interprétation du comportement, exacte si l'on utilise le tenseur de Cauchy, devient trop réductrice si l'on utilise le tenseur de Green-Lagrange. Néanmoins, en tant qu'approximation au premier ordre de celui-ci, ce comportement se retrouvera avec Green-Lagrange, même si les termes non linéaires feront apparaître des réactions plus complexes.

## 4 Frottements

Les équations précédentes ne font pas intervenir les dérivées temporelles des déformations. Le modèle de *Kelvin-Voigt* présenté ici va les utiliser très naturellement, permettant ainsi de modéliser les forces de dissipation, aussi appelées par analogie aux fluides, forces visqueuses. La démarche mathématique est élégamment exactement la même que celle présentée plus haut et nous ne la détaillerons donc pas trop.

### 4.1 Le tenseur des taux de déformation

Ce tenseur, noté  $\kappa$ , va mesurer la vitesse à laquelle les déformations se produisent. Il est tout simplement défini comme le tenseur composé des dérivées temporelles des termes du tenseur des déformations,  $\kappa = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t}$ . Ses termes s'expriment donc ainsi :

- Pour le tenseur de Cauchy (voir Eq. 2.4),

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.20)$$

- Pour le tenseur de Green-Lagrange (voir Eq. 2.6),

$$\kappa_{ij} = \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \Omega_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \Omega_j} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \Omega_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \Omega_j} \right) \quad (2.21)$$

Rien n'interdit d'utiliser un tenseur des taux de déformations de Green-Lagrange avec un tenseur des déformations de Cauchy, et inversement, mais le comportement différent de ces deux formulations risque d'entraîner un comportement chaotique.

Puisque le tenseur des taux de déformations s'écrit de manière similaire à celui des déformations, il hérite de ses propriétés. En particulier, une translation rigide de l'objet, qui n'affecte pas  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , ne sera pas prise en compte dans  $\kappa$ . Si l'on utilise le tenseur dérivé de Green-Lagrange, il en sera de même des rotations globales et donc de tout mouvement rigide. Le tenseur des taux de déformations ne mesurera et n'atténuera donc que les vibrations *internes* au matériau.

### 4.2 Le tenseur des contraintes

Le tenseur des taux de déformations va lui aussi engendrer des contraintes à l'intérieur du matériau, elles aussi modélisées par un tenseur de taille 3. Pour différencier ces deux influences, nous notons ici  $\boldsymbol{\sigma}^{(\varepsilon)}$  les

contraintes dues aux déformations (décrites précédemment) et  $\sigma^{(\kappa)}$  celles dues aux forces visqueuses. Les contraintes vraiment exercées sur un point seront tout simplement la somme de ces deux influences  $\sigma = \sigma^{(\varepsilon)} + \sigma^{(\kappa)}$ .

### 4.3 La loi de comportement

Les considérations d'isotropie évoquées plus haut font que la loi de comportement qui relie  $\kappa$  et  $\sigma^{(\kappa)}$  se définit, tout comme la loi de Hooke (Eq. 2.12), par deux variables indépendantes :

$$\sigma^{(\kappa)} = \phi \operatorname{tr}(\varepsilon) I_3 + 2 \psi \varepsilon \quad (2.22)$$

Les constantes  $\phi$  et  $\psi$  sont encore une fois dépendantes du matériau simulé. Leur interprétation découle de celle faite de l'équation de Navier, pour de faibles déformations.  $\phi$  va atténuer la propagation des ondes dans le matériau, alors que  $\phi + \psi$  influencera la préservation du volume.

## 5 Conclusion

Ce chapitre a présenté les notions élémentaires de physique des milieux continus qui vont être utilisées dans les chapitres suivants. Les formules utilisées par la suite ne reprendront que les résultats finaux de cette modélisation, qui donnent l'expression de la force appliquée en fonction des déformations subies. Nous avons néanmoins tenu, même si nous nous sommes restreint à leur expression la plus simple, à présenter les différents tenseurs qui interviennent dans cette modélisation, pour ainsi introduire les hypothèses qui sont faites sur la classe de déformations et de matériaux qu'ils permettent de simuler.

Les équations impliquées demandent toutes le calcul de dérivées partielles, par rapport à un repère fixe ou à celui lié au matériau. Les approches présentées par la suite ont principalement pour but de trouver l'expression de ces dérivées, dans un matériau qui n'est plus continu comme on l'a supposé ici, mais qui a été *discrétisé* en un ensemble finis de points d'échantillonnage. Une fois ces formules établies et après avoir vérifié leur indépendance à la discrétisation, il restera à mettre en place le processus de multirésolution qui tirera parti du caractère intrinsèque des modèles décrits ici, qui fait que le comportement du matériau ne dépendra pas, dans une certaine mesure, de la résolution utilisée.

