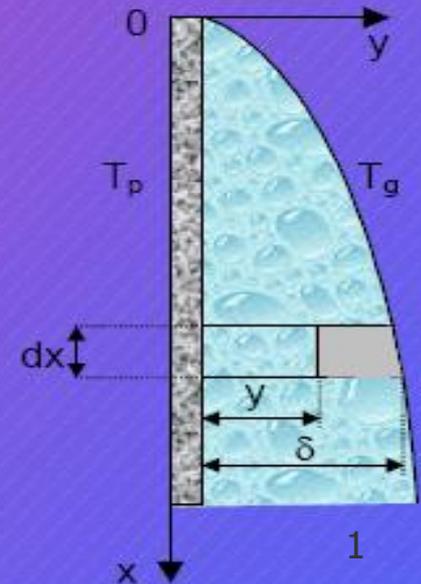
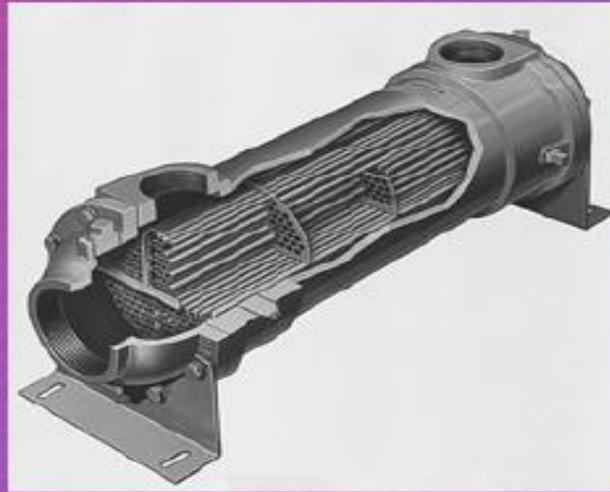
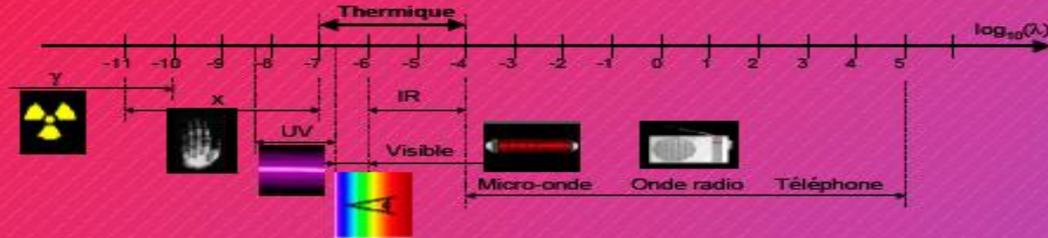
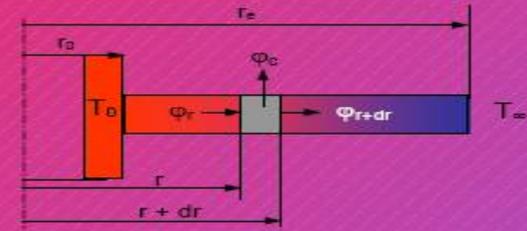


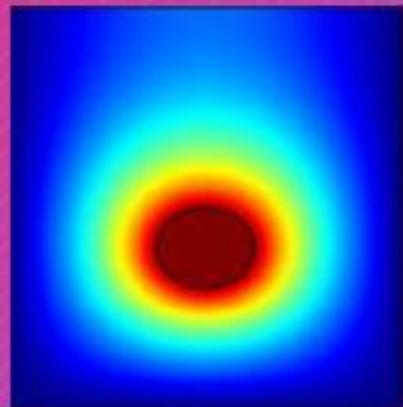


ANALYSE NUMERIQUE

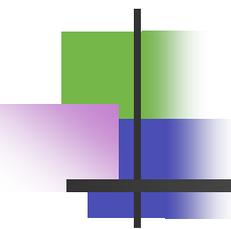
Pr. Rachid SEHAQUI



Université Hassan II Casablanca
 Faculté des sciences Aïn Chock
 2010 / 2011



ANALYSE NUMERIQUE POUR L'INGENIEUR

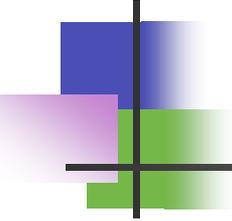


Pr. Rachid SEHAQUI

Université Hassan II Casablanca

Faculté des sciences Aïn Chck

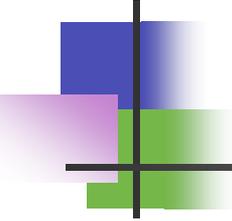
r.sehaqui@fsac.ac.ma



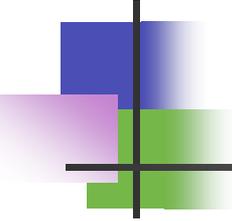
Plan du cours

- 1 Analyse d'erreurs
- 2 Equations non-linéaires
- 3 Systèmes d'équations
- 4 Interpolation et approximation
- 5 Dérivation et intégration numériques
- 6 Equations différentielles

ANALYSE NUMERIQUE POUR L'INGENIEUR



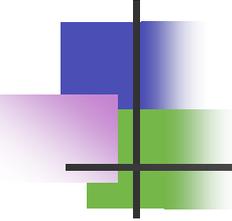
CHAPITRE 5: DERIVATION ET INTEGRATION NUMERIQUE



CHAPITRE 5

■ Plan

- 1. Dérivation numérique
 - 1.1 Dérivée d'ordre 1
 - 1.2 Dérivée d'ordre 2
 - 1.3 Applications: méthode des différences finies.
- 2. Intégration numérique
 - 2.1 Formules de Newton-Cotes simples
 - 2.2 Formules de Newton-Cotes composées
 - a) Méthode du trapèze
 - b) Méthodes de Simpson
 - 2.3 Méthodes de Gauss



Dérivation

1. Dérivation numérique

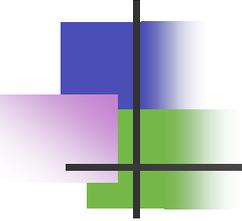
1.1 Dérivation numérique première

Dans le chapitre 5 nous avons utilisé le polynôme d'interpolation pour approcher une fonction f . Nous allons maintenant nous servir de ce polynôme pour approcher les valeurs de la fonction f' *dérivée de f* .

Soit f une fonction réelle sur $[a; b]$

Considérons $n + 1$ points distincts de $[a; b]$ notes $x_0; x_1; \dots; x_n$ et soit P_n : le polynôme de Lagrange qui interpole f sur

. On a $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$



Dérivation

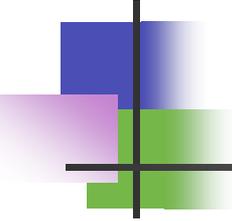
$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

Nous approchons

$$f'(x) \approx P'_n(x), \quad x \in [a, b]$$

et nous cherchons à estimer l'erreur

$$E'_n(x) = f'(x) - P'_n(x)$$

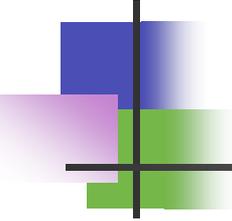


Dérivation

On a Théorème *Soit* $f \in C^{n+1}(a, b)$ *Pour tout* $x_i; i = 0; 1; \dots; n$, *il existe un point* α_i *du plus petit intervalle fermé contenant* $x_0; x_1; \dots; x_n$ *tel* $\alpha_i \in]x_i, x_{i+1}[$

$$E'(x_i) = f'(x_i) - P'_n(x_i) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j) \right) f^{(n+1)}(\alpha_{x_i})$$

Corollaire *Une borne supérieure de l'erreur* $E'(x_i)$ *est donnée par*



Dérivation

$$| E'(x_i) | \leq \frac{M}{(n+1)!} \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)$$

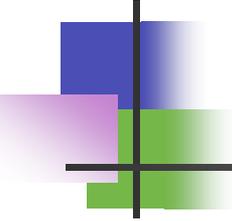
$$| f^{(n+1)}(x) |$$

ou M désigne le maximum de

Quelques formules de dérivation numérique

Nous supposons que les points x_i sont équidistants:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$



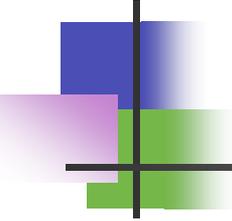
Dérivation

En dérivant les formules d'interpolation de Lagrange à deux, à trois points et en évaluant f' aux points d'interpolation, nous trouvons les formules de dérivation suivantes:

Formules à deux points d'ordre 1

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0)) - \frac{h}{2}f''(\alpha_0)$$

Formules à trois points d'ordre 2



Dérivation

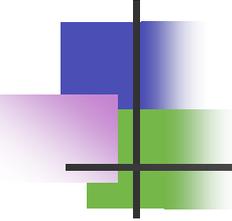
Formules à trois points d'ordre 2

Différences arrières

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} (-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)) + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\alpha_0)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h} (f(x_2) - f(x_0)) - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\alpha_1)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h} (f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)) + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\alpha_2)$$



Dérivation

D'une manière générale on a les formules suivantes

d'ordre 1:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

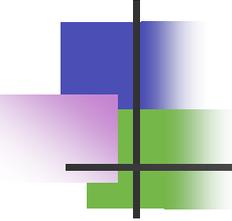
$$f'(x) \approx \frac{1}{h} (f(x) - f(x-h))$$

d'ordre 2:

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h} (-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x))$$

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h} (f(x+h) - f(x-h))$$

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h} (3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h))$$



Dérivation

1.2 Dérivation numérique seconde

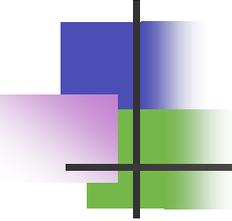
Nous approchons la dérivée seconde par

$$f''(x) \approx P_n''(x), \quad x \in [a, b]$$

Quelques formules de dérivation numérique seconde

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} (f(x - 2h) - 2f(x - h) + f(x)) + O(h)$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} (f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)) + O(h)$$



Dérivation

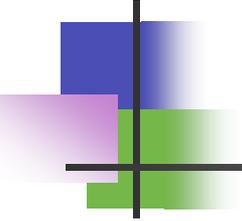
Nous approchons la dérivée seconde par

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} (f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) + O(h^2)$$

$$f''(x) = \frac{1}{12h^2} (-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) + f(x-2h)) + O(h^4)$$

1.3 Application: la méthode des différences finies

Exemple: On cherche une fonction $y(x)$ *solution* du problème aux limites:



Dérivation

$$y''(x) = 0, \quad 0 < x < 6$$

$$y(0) = -1$$

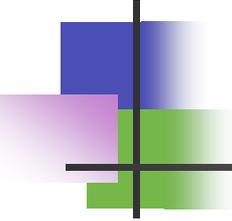
$$y(6) = 5$$

Pour cela on pose:

$$h = \frac{6}{N}, x_0 = 0, x_i = x_0 + ih, x_N = 6$$

$$y_i \approx y(x_i)$$

$$y''(x_i) \approx \frac{1}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}), i = 1, 2, \dots, N$$



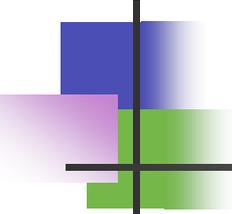
Dérivation

1.4 Instabilité numérique

But Etudier l'effet de l'arithmétique flottante sur la précision réelle d'une méthode d'approximation numérique. On va traiter le cas de la formule centrée:

$$f'(x) = \frac{1}{2h} f(x+h) - f(x-h) - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\alpha)$$

Dans la pratique le calcul de $f(x \pm h)$ est engendré par des erreurs d'arrondi:



Dérivation

On a alors

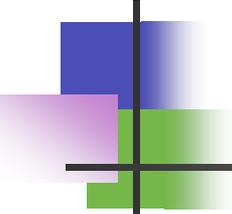
$$f'(x) - \frac{1}{2h} \left(\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x-h) \right) = \frac{1}{2h} (\epsilon_1 - \epsilon_2) - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\alpha)$$

Si

$$M = \max | f^{(3)}(x) |, \quad \epsilon = \max \{ | \epsilon_1 |, | \epsilon_2 | \}$$

On a alors la majoration suivante

$$\left| f'(x) - \frac{1}{2h} \left(\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x-h) \right) \right| \leq \frac{\epsilon}{h} + M \frac{h^2}{6}$$



Dérivation

Le choix de h optimal est celui qui minimise la fonction

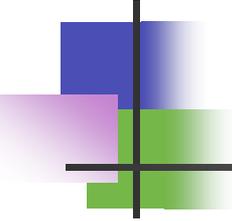
$$\frac{\epsilon}{h} + M \frac{h^2}{6}$$

C'est-à-dire

$$h = \left(\frac{3\epsilon}{M} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Exemples d'application

$$f(x) = e^x \text{ en } x = 0, h = 0.1$$



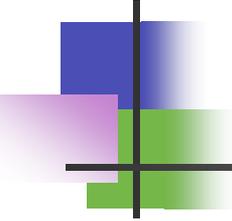
Dérivation

Extrapolation de Richardson

$$Q_{\text{exa}} = \frac{2^n Q_{\text{app}}\left(\frac{h}{2}\right) - Q_{\text{app}}(h)}{(2^n - 1)}$$

Exemples d'application avec $n = 1$ et $n = 2$

$$f(x) = e^x \text{ en } x = 0, h = 0.1$$



Intégration

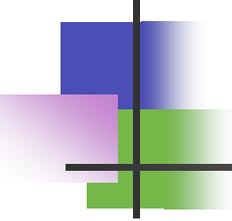
2. Intégration numérique

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

On ne sait pas toujours calculer la valeur exacte de l'intégrale

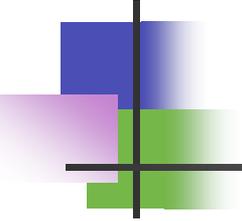
Car
$$I = \int_a^b f(x)dx$$

- f peut ne pas être donnée par une écriture mathématique mais comme résultats de mesures.
- f est définie mathématiquement mais on ne sait pas calculer explicitement sa primitive.



Intégration

On cherche alors à approcher f par un polynôme P , par exemple, et on prend la valeur numérique de l'intégrale $\int_a^b P(x)dx$ comme valeur approchée de I . Il existe de nombreuses formules d'intégration numériques ou de quadrature suivant l'approximation P que l'on choisit pour f . On étudiera dans la suite le cas où P est un polynôme d'interpolation de f .



Intégration

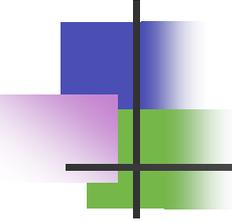
2.1 Formules de Newton-Cotes simples

a) Formule du rectangle

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(\theta), \quad \theta \in [a, b]$$

b) Formule du point milieu

$$\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\theta), \quad \theta \in [a, b]$$



Intégration

2.1 Formules de Newton-Cotes simples

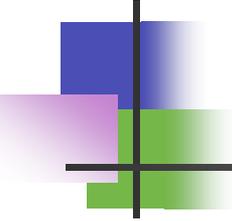
c) Formule du trapèze

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b-a)(f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\theta), \quad \theta \in [a, b]$$

d) Formule de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)) - \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{f^{(4)}(\theta)}{90}$$

Exemple $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx$



Intégration

2.2 Formules de Newton-Cotes composées

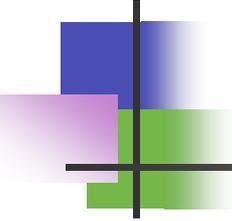
a) Méthode du trapèze composée On écrit

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n], \quad h = \frac{b-a}{n}$$

et on utilise la formule du trapèze sur chaque sous-intervalle

$$[x_i, x_{i+1}]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)) - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\theta), \quad \theta \in [a, b]$$



Intégration

Exemple $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx$ méthode des trapèzes composées $n = 4$ et $n = 8$.

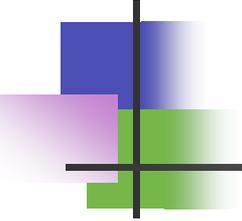
b) Méthode de Simpson composée (Simpson composée 1/3) On écrit

$$[a, b] = [x_0, x_2] \cup [x_2, x_4] \cup \dots \cup [x_{2(n-1)}, x_{2n}],$$

$$h = \frac{b-a}{2n}$$

et on utilise la formule de Simpson sur chaque sous-intervalle

$$[x_{2i}, x_{2(i+1)}]$$

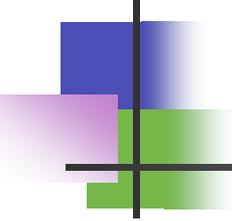


Intégration

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f(a) + 4f(x_1) + \cdots + 4f(x_{2n-1}) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{2n-2}) + f(b)) - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\theta), \quad \theta \in [a, b]$$

Exemple $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx$ méthode Simpson composée $n = 4$ et $n = 8$
 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

Trapèze composée, Simpson 1/3, exacte = 0.746 824 133



Intégration

3. Méthode de Romberg

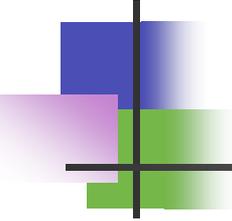
La méthode de Romberg est une méthode d'intégration qui permet d'atteindre des résultats très précis. Elle est basée sur une utilisation astucieuse de la méthode des trapèzes composées (ordre 2) et de la technique d'extrapolation de Richardson.

$$T_{2,i} = \frac{2^2 T_{1,i+1} - T_{1,i}}{2^2 - 1}$$

$$T_{3,i} = \frac{2^4 T_{2,i+1} - T_{2,i}}{2^4 - 1}$$

$$T_{4,i} = \frac{2^6 T_{3,i+1} - T_{3,i}}{2^6 - 1}$$

$$T_{5,i} = \frac{2^8 T_{4,i+1} - T_{4,i}}{2^8 - 1}$$



Intégration

Ce qui donne un triangle de la forme :

Méthode de Romberg

$T_{1,1}$	$T_{1,2}$	$T_{1,3}$	$T_{1,4}$	$T_{1,5}$	$T_{1,6}$	(ordre 2)
$T_{2,1}$	$T_{2,2}$	$T_{2,3}$	$T_{2,4}$	$T_{2,5}$		(ordre 4)
$T_{3,1}$	$T_{3,2}$	$T_{3,3}$	$T_{3,4}$			(ordre 6)
$T_{4,1}$	$T_{4,2}$	$T_{4,3}$				(ordre 8)
$T_{5,1}$	$T_{5,2}$					(ordre 10)
$T_{6,1}$						(ordre 1)