

Domaines d'étude des systèmes mécaniques solides

solides rigides

Mécanique
du point

Frottements
Liaisons

Cinématique
Cinétique

Statique et
dynamique des
Systèmes multicorps

solides déformables

Statique (ou élastiques) Dynamique

Structures soumises à des
Efforts constants :

- Pas d'évolution temporelle des efforts appliqués
- Evolution très lente : **Fatigue**

Objet des cours de :

- Stat. des milieux continus (MMC)
- Résistance des matériaux (RDM)

Structures soumises à des
Efforts dynamiques :

- Evolution temporelle rapide des efforts appliqués :
 - Harmoniques, périodiques, qq
 - Caractérisés par leur **spectre**

Objet des cours de :

- Vibrations ou Dynamique des structures

Vibrations linéaires des systèmes à 1 degré de liberté

Plan du cours

- Présentation générale de l'étude des vibrations
- Position du problème et observations
- Écriture de l'équation du mouvement à 1DDL
- Étude des vibrations libres ou naturelles
 - Systèmes non amortis ou conservatifs
 - Systèmes amortis ou dissipatifs
- Étude des vibrations forcées
 - Réponse à une excitation sinusoïdale
 - Fonction de réponse en fréquence
 - Mesure de l'amortissement
 - Excitation périodique
 - Réponse à une excitation quelconque

Avant (Calcul)
Dimensionner
Modéliser
Concevoir

Rôles de l'ingénieur

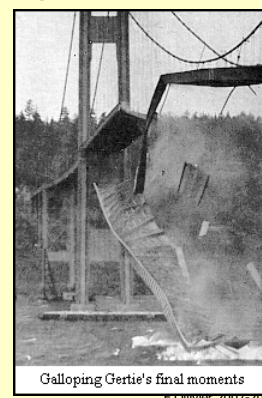
**Construction
Fabrication**

Après (Mesure)
Surveiller
Diagnostiquer

Modifier

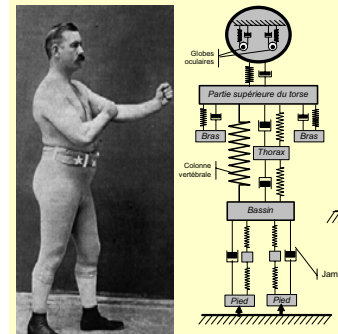
Quand un système est mal conçu ...

Destruction du pont de Tacoma (USA) (7/11/1940) - 4 mois d'existence



Exemples de Modèles

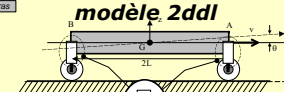
**Corps humain
Modèle discret**



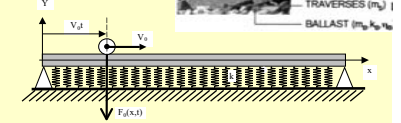
**Bâtiment
à n étages
modèle n ddl**



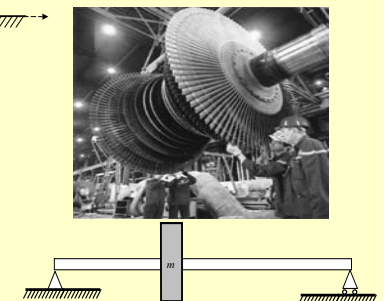
**Automobile
modèle 2ddl**



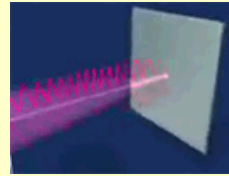
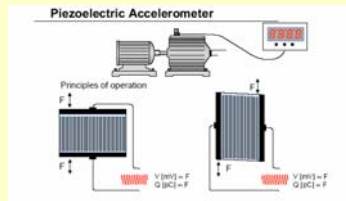
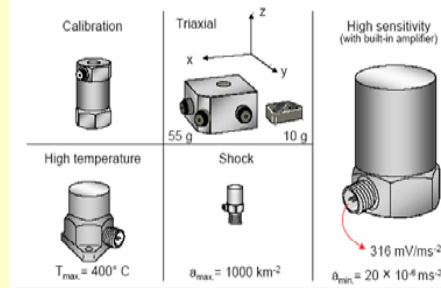
**Rail-Ballast
Modèle continu**



**Turbine de générateur
modèle 1ddl**

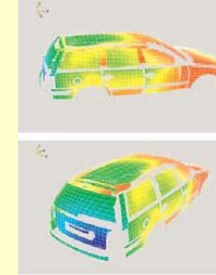
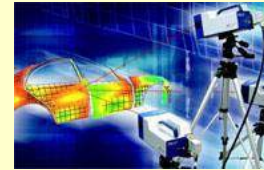


Capteurs et excitateurs



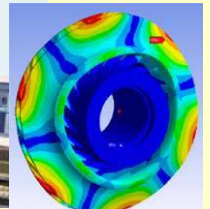
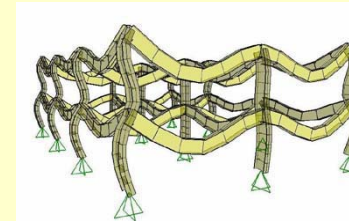
Les vibrations en pratique

Mesure des déformées opérationnelles d'un véhicule



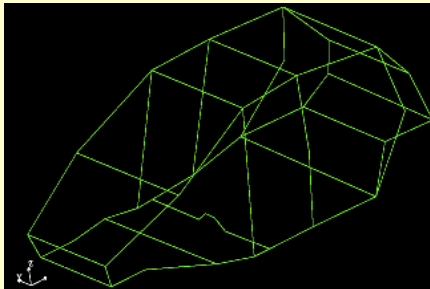
Mesure des modes de vibration d'une roue à aubes

Calcul des vibrations d'un bâtiment en grandes déformations

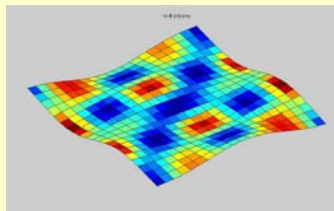
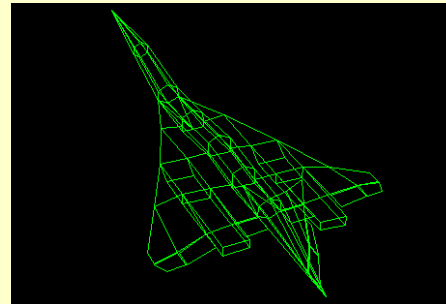


Les vibrations en pratique

Un mode de vibration
d'une caisse de voiture



Un mode de vibration du Concorde



Quelle précision est nécessaire au problème ?

Différents types de modèle

Modèles discrets

(M1S2 – MS 122)

nombre fini n de ddl

Ecriture : analytique

Solution approchée :

analytique si $n \leq 2$

numérique si $n > 2$

Modèles continus

(M1S2 – MS 138)

nbr ∞ de ddl (n)

(cordes - poutres - plaques)

Ecriture : analytique

Solution : analytique exacte

Modèles à éléments finis

(M1S2 – MIS-138)

association d'un nombre fini
de structures continues élémentaires

Ecriture numérique

Solution numérique approchée

Problème

- Quelle structure vibre ?
- Quelles causes ?
- Quel mouvement ?
- Quels paramètres ?

Observations

Mouvement :
Oscillation autour
d'une position
d'équilibre statique

Paramètres influents :

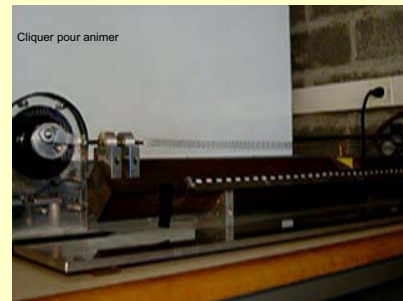
Inertie

masse, moment

Elasticité

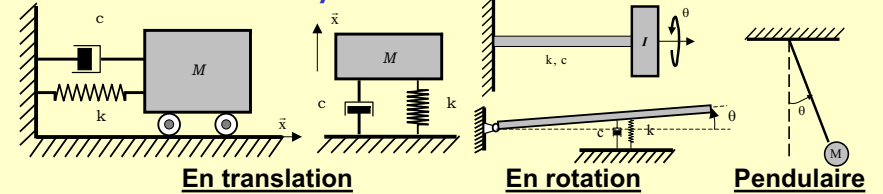
traction, cisaillement, torsion

Amortissement



F.Ollivier 2007-2008 9

Modèles de Systèmes vibrants à 1DDL



Paramétrage	Translation	Rotation	Pendulaire
Déplacement	Longitudinal : x	Angulaire : θ	Angulaire : θ
Inertie	Masse : M	Moment d'inertie : I	Masse : M
Raideur	Résistance à l'allongement : k	Résistance à la torsion : k	Pesanteur
Amortissement	Frottements visqueux : c		

Objectif :

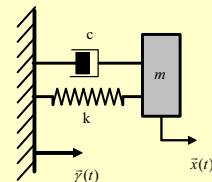
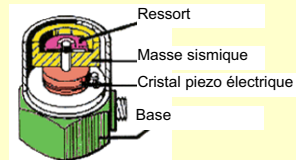
Déterminer la forme du mouvement de la structure en fonction :

- du temps : $x(t), \theta(t)$
- de la fréquence de l'excitation : $x(\Omega), \theta(\Omega)$

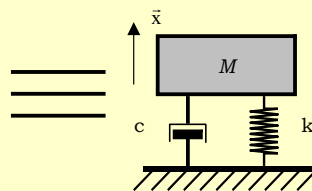
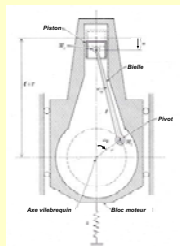
F.Ollivier 2007-2008 10

Modèles de Systèmes vibrants à 1DDL

Accéléromètre



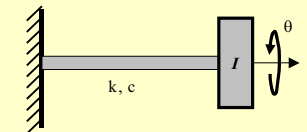
Bloc moteur monocylindre



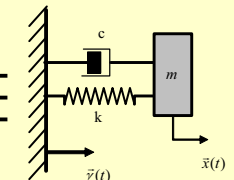
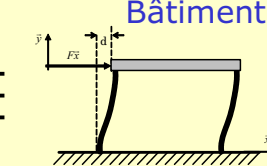
F.Ollivier 2007-2008 11

Modèles de Systèmes vibrants à 1DDL

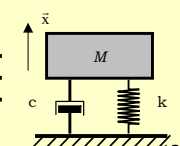
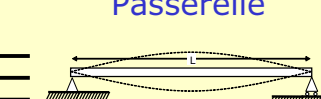
Arbre et hélice



Bâtiment



Passerelle



F.Ollivier 2007-2008 12

Écriture de l'équation du mouvement 1DDL

(en translation)

2 méthodes

Bilan des forces (PFD) :

- Force d'excitation : $F(t)$
- Force de rappel élastique : $-k x(t)$
- Force de frottement visqueux : $-c \dot{x}(t)$

$$\sum \text{Forces} = m\ddot{x}$$

$$\Leftrightarrow F - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

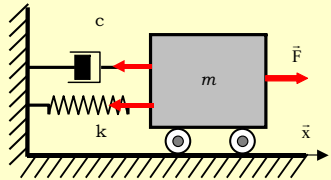
Théorème de l'énergie :

- Énergie cinétique : $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$
- Énergie potentielle élastique : $U = \frac{1}{2} k x^2$
- Puissance dissipée : $\Pi_d = c \dot{x}^2$
- Puissance extérieure : $\Pi_e = F \dot{x}$

$$\frac{d(T+U)}{dt} + \Pi_d = \Pi_e$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = F$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$



2 états de vibrations des structures

➤ Les Vibrations libres (VL)

Excitation

- Pas de force extérieure $F(t) = 0 \Rightarrow$ libre
- Position et/ou vitesse initiales non nulles



Réponse

Vibration naturelle de la structure

- sans amortissement : **Mouvement harmonique** (= à fréquence constante) à la **fréquence naturelle** (ou propre)
- avec amortissement : **Mouvement pseudo harmonique amorti**

➤ Les Vibrations forcées (VF)

Excitation

- Force extérieure entretenue (= permanente) ou transitoire (= courte durée) $F(t) \neq 0 \Rightarrow$ forcée



Réponse

Vibration forcée de la structure

- Mouvement accordé à l'excitation** : Amplitude et phase selon le spectre de l'excitation
- + Vibration libre si x_0 et/ou $v_0 \neq 0$

Solutions de l'équation du mouvement

Vibrations libres non amorties (c=0)

Équation du mouvement : $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$

Solution : 3 écritures équivalentes

$$\begin{cases} x(t) = X_1 e^{-j\omega_0 t} + X_2 e^{j\omega_0 t} \\ x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \\ x(t) = X \cos(\omega_0 t - \phi) \end{cases}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω_0 : pulsation propre,
 R_q : fonction du rapport de l'élasticité à l'inertie.

Conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$



Constantes
A, B ou X_1, X_2 ou X, f

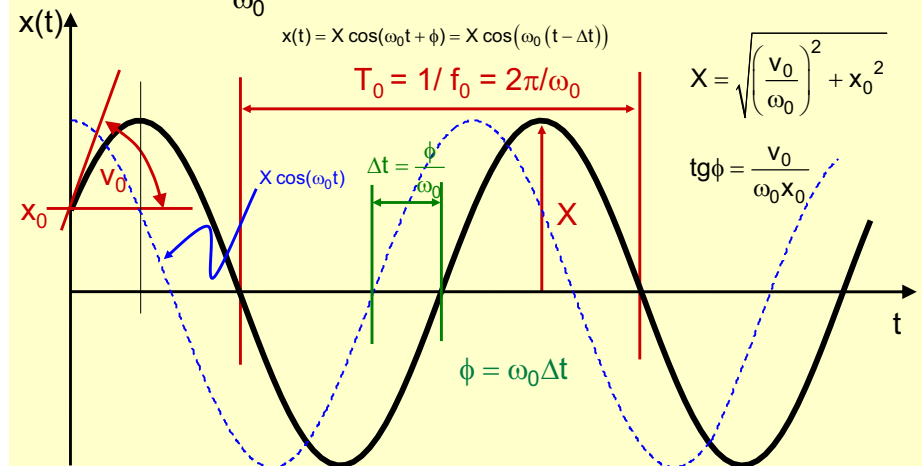
$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x_0 \cos(\omega_0 t) = X \cos(\omega_0 t + \phi)$$

X : amplitude,
 ϕ : phase

Vibrations libres d'un système non amorti

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x_0 \cos(\omega_0 t) = X \cos(\omega_0 t - \phi)$$

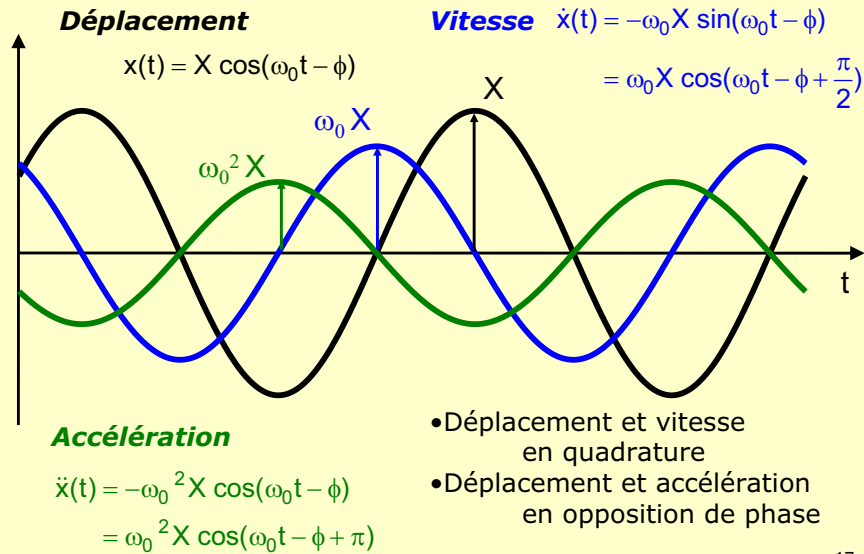
$$x(t) = X \cos(\omega_0 t + \phi) = X \cos(\omega_0 (t - \Delta t))$$



$$X = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + x_0^2}$$

$$\text{tg } \phi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}$$

Vibrations libres d'un système non amorti



Solutions de l'équation du mouvement Vibrations libres amorties ($c \neq 0$)

Équation du mouvement :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Solutions de la forme :

$$x(t) = X e^{st}$$

Équation caractéristique :

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega_0^2 = 0$$

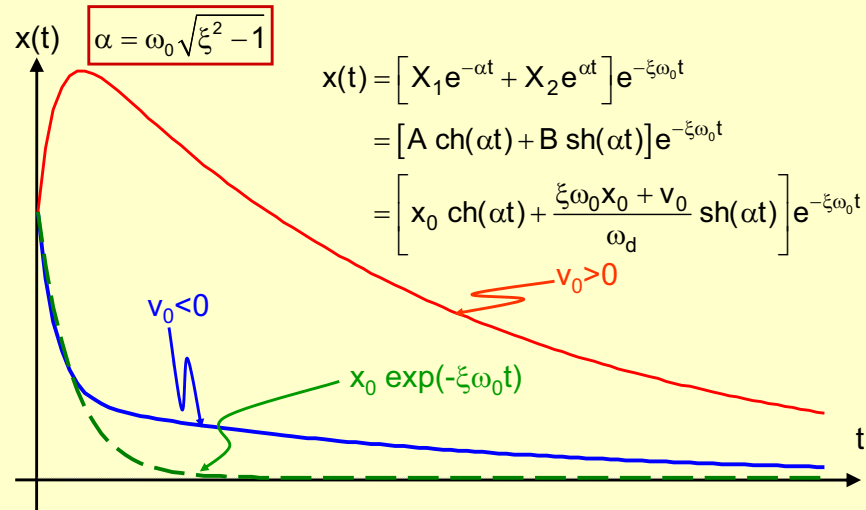
Racines :

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

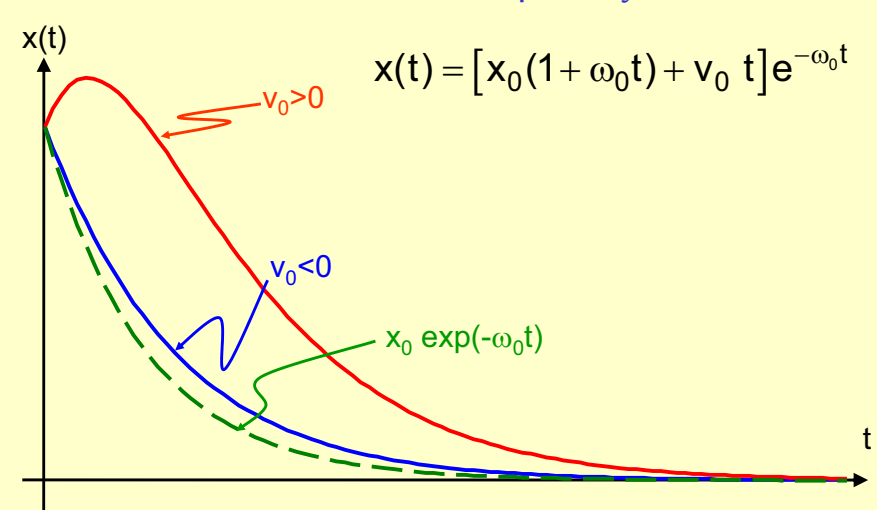
$$\xi = \frac{c}{2m\omega_0} \quad \xi : \text{facteur d'amortissement}$$

3 cas d'amortissement selon ξ

Vibrations libres d'un système amorti amortissement surcritique : $\xi > 1$

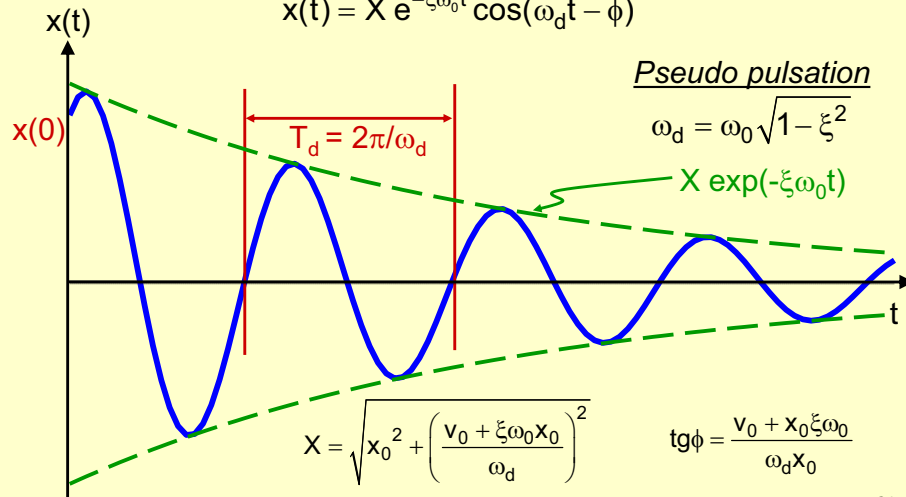


Vibrations libres d'un système amorti amortissement critique : $\xi = 1$



Vibrations libres d'un système amorti amortissement sous - critique : $\xi < 1$

$$x(t) = X e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_d t - \phi)$$



F.Ollivier 2007-2008 21

Vibrations libres d'un système amorti amortissement sous - critique : $\xi < 1$

Détermination expérimentale de l'amortissement en V.L. :

On mesure les amplitudes X_n et X_{n+1} de 2 maxima successifs séparés de T_d .
On a :

$$\frac{X_n}{X_{n+1}} = \frac{x(t_0)}{x(t_0 + T_d)} = \frac{X e^{-\xi\omega_0 t_0}}{X e^{-\xi\omega_0 (t_0 + T_d)}} = e^{\xi\omega_0 T_d}$$

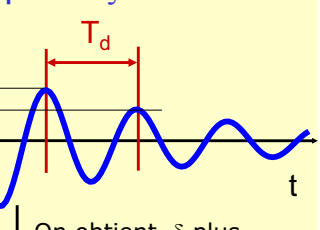
Décrément logarithmique

Soit $\delta = \ln\left(\frac{X_n}{X_{n+p}}\right)$ et $\delta = \xi\omega_0 T_d = 2\pi\xi \frac{\omega_0}{\omega_d} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

donné par la mesure *déduit de la modélisation*

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

De δ déterminé par la mesure, on déduit
Rq: si $\xi \ll 1$ alors $\delta = 2\pi\xi \Leftrightarrow \xi = \frac{\delta}{2\pi}$



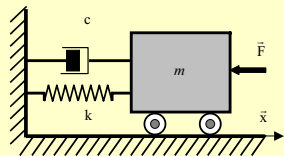
On obtient δ plus précisément avec des maxima séparés de pT_d :

$$\delta = \frac{1}{p} \ln\left(\frac{X_n}{X_{n+p}}\right)$$

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

F.Ollivier 2007-2008 22

Vibrations forcées harmoniques



Rappel de l'équation du mouvement

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

Excitation harmonique

(notation complexe) :

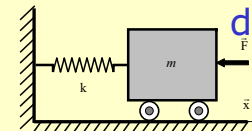
$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) = F_0 \text{Re}\left[e^{j\Omega t}\right]$$

Réponse = Rép. transitoire $x_t(t)$ + Rép. permanente $x_p(t)$

- $x_t(t)$ = Réponse en régime libre (voir + haut)
- $x_p(t)$ = mouvement après disparition du transitoire
 - Harmonique de même pulsation Ω que l'excitation
 - Amplitude X et Déphasage ψ à déterminer

F.Ollivier 2007-2008 23

Vibrations forcées harmoniques des systèmes non amortis



L'équation du mouvement est :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\Omega t) \quad (1)$$

La réponse transitoire est la solution générale (celle en V.L.) :

$$x_t(t) = X_t \cos(\omega_0 t - \phi_t)$$

La réponse permanente est la solution particulière de la forme :

$$x_p(t) = X_p \cos(\Omega t)$$

En la substituant dans (1) on a l'amplitude : $X_p = \frac{F_0}{k - m\Omega^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

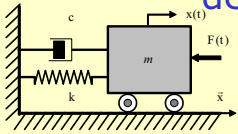
Le mouvement forcé permanent s'écrit : $x_p(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$

et la solution complète (trans. + perm.) : $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$

Remarque : Sans amortissement, l'excitation et la réponse sont en phase.

F.Ollivier 2007-2008 24

Vibrations forcées harmoniques des systèmes sous amortis



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) \quad (2)$$

La réponse transitoire (celle en V.L.) : $x_t(t) = [X_t \cos(\omega_d t - \phi_t)] e^{-\xi\omega_0 t}$

La solution particulière est de la forme : $x_p(t) = X_p \cos(\Omega t - \phi_p)$

Par substitution dans (2) on obtient le mouvement forcé permanent :

$$X_p(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4(\xi\Omega\omega_0)^2}} \quad \phi_p(\Omega) = \text{Arctg} \left(\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right)$$

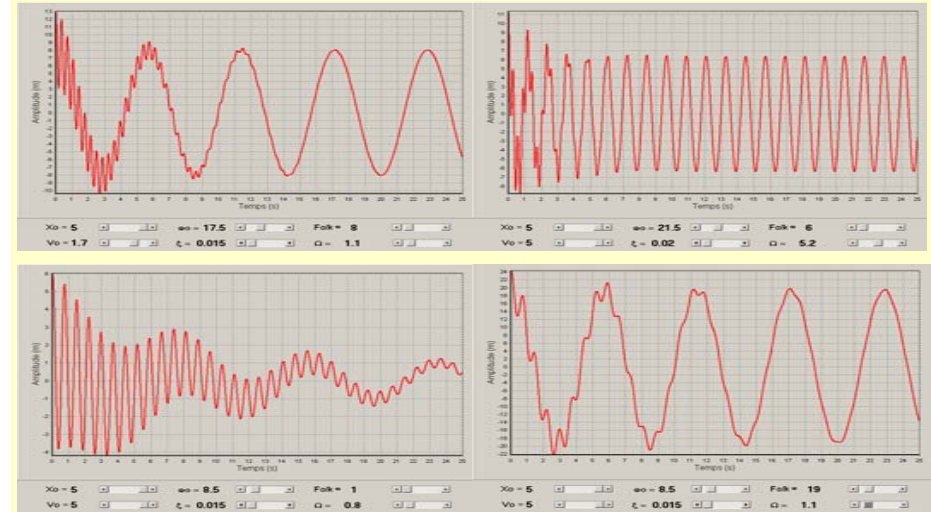
La solution complète : $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$

$$x(t) = \underbrace{[X_t \cos(\omega_d t - \phi_t)] e^{-\xi\omega_0 t}}_{\text{Réponse transitoire}} + \underbrace{X_p \cos(\Omega t - \phi_p)}_{\text{Réponse permanente}}$$

F.Ollivier 2007-2008 25

Exemples de réponses à des excitations harmoniques

$$x(t) = X_t \cos(\omega_d t - \phi_t) e^{-\xi\omega_0 t} + \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\Omega t - \phi_p)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\Omega)^2}}$$



Vibrations forcées harmoniques Étude de la réponse permanente

On a : $x_p(t) = X(\Omega) \cos(\Omega t - \Phi(\Omega))$ avec

$$X(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\Omega)^2}} \quad \text{et} \quad \Phi(\Omega) = \text{Arctg} \left[\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right]$$

Amplitude et phase de $x_p(t)$ dépendent de la pulsation Ω de l'excitation

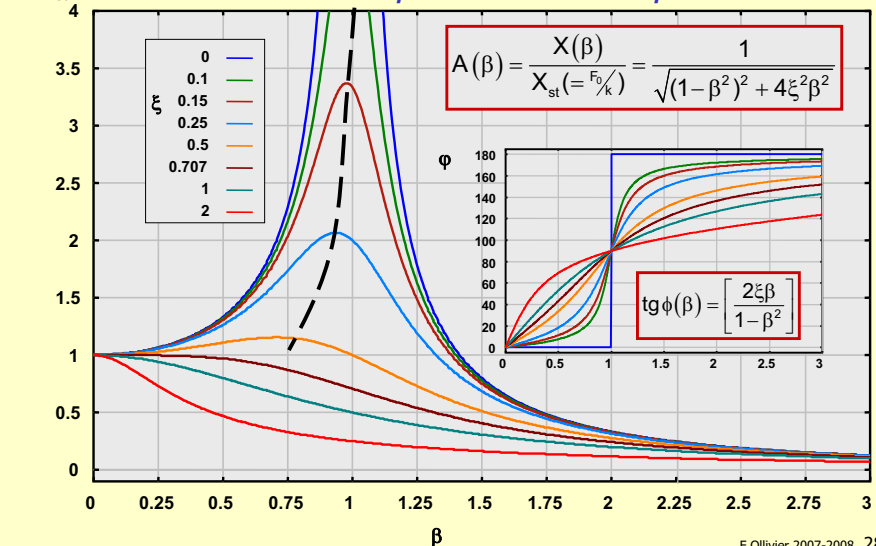
Coefficient d'amplification dynamique (sans dimension) :

$$A(\Omega) = A \left(\beta = \frac{\Omega}{\omega_0} \right) = X(\beta) \frac{k}{F_0} = \frac{X(\beta)}{X_{st}} \Leftrightarrow A(\beta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}}$$

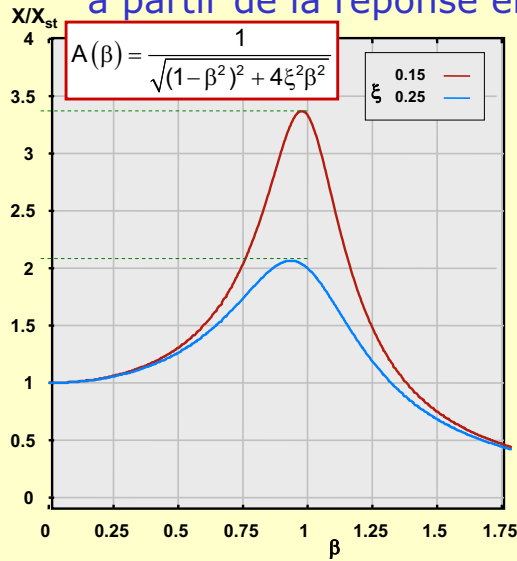
Résonance : l'amplification de la force appliquée est maximum lorsque sa fréquence tend vers la fréquence propre du système :

$\Omega \rightarrow \omega_0$ ($\beta \rightarrow 1$) alors $A(\Omega)$ et $X(\Omega)$ maximum

Vibrations forcées harmoniques Courbes de Réponses en fréquence

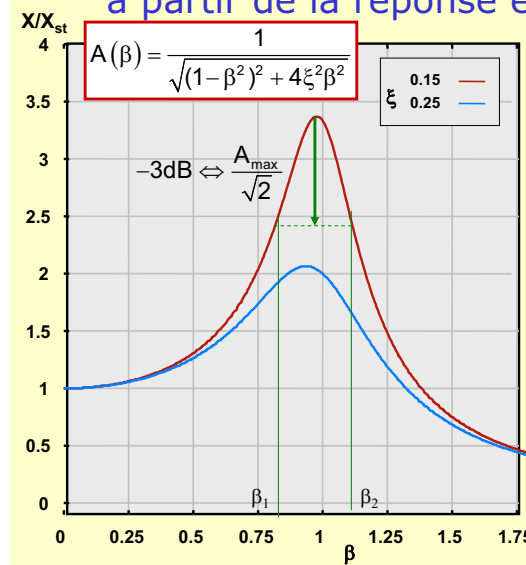


Mesure de l'amortissement à partir de la réponse en fréquence (1/2)



Méthode de l'amplification maximum
 A la résonance, l'amplification est maximum et $\beta \sim 1$.
 On mesure le **Facteur de qualité**:
 $Q = A_{\max} = A(1) = \frac{1}{2\xi}$
 On en déduit $\xi \approx \frac{1}{2Q}$
 Noter que : $Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{m\omega_0}{C} = \frac{\sqrt{mk}}{C}$

Mesure de l'amortissement à partir de la réponse en fréquence (2/2)



Méthode de la bande passante à -3dB
 (Valide lorsque $\xi \ll 1$)
 $A^2(\beta_{-3dB}) = \frac{1}{(1-\beta_{-3dB}^2)^2 + 4\xi^2\beta_{-3dB}^2}$
 $\Leftrightarrow \beta_{-3dB}^2 = 1 - 2\xi^2 \pm 4\xi\sqrt{1-\xi^2}$
 $\Leftrightarrow \beta_{-3dB} \approx 1 \pm \xi$ si $\xi \ll 1$
 $\xi \approx \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_0} = \frac{\Delta\omega_{-3dB}}{2\omega_0}$
 Noter que : $Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{-3dB}}$

Admittance et Impédance

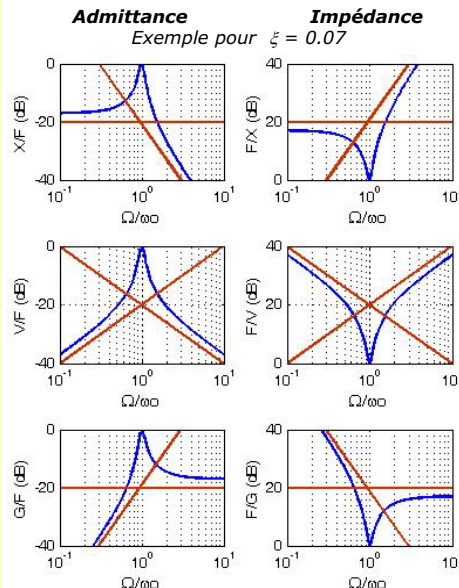
L'admittance ou mobilité

traduit la susceptibilité du système au mouvement sous l'effet d'une force appliquée : Pour une amplitude de force donnée, l'amplitude, la vitesse ou l'accélération du mouvement sont d'autant plus importants que la mobilité est grande

$$M_{FV}(\Omega) = \frac{V}{F}(\Omega)$$

L'impédance traduit la résistance du système au mouvement sous l'effet d'une force appliquée : Pour une force d'amplitude donnée, l'amplitude du mouvement est d'autant plus faible que l'impédance est grande

$$Z_{FV}(\Omega) = \frac{F}{V}(\Omega)$$



Admittance et Impédance

Aux basses fréquences

$$\Omega \ll \omega_0 : M_{FD}(\Omega) = \frac{X}{F} \approx \frac{1}{k}$$

La mobilité du système dépend de la **raideur**

Autour de la résonance

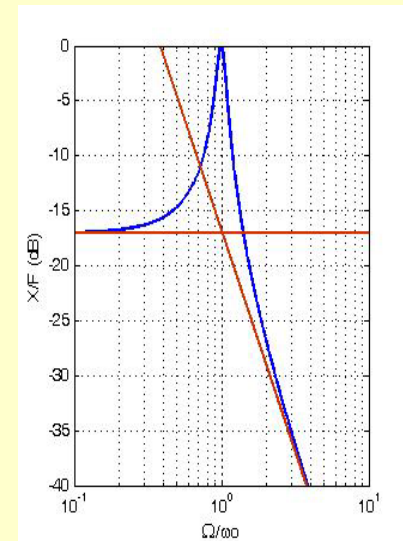
$$\Omega = \omega_0 : M_{FD}(\Omega) = \frac{X}{F} = \frac{1}{2\xi k}$$

La mobilité du système dépend de l'**amortissement**

En haute fréquence

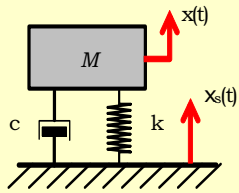
$$\Omega \gg \omega_0 : M_{FD} = \frac{X}{F} \approx \frac{\omega_0^2}{k\Omega^2} \approx \frac{1}{m\Omega^2}$$

La mobilité du système dépend de la **masse**



Transmission des vibrations

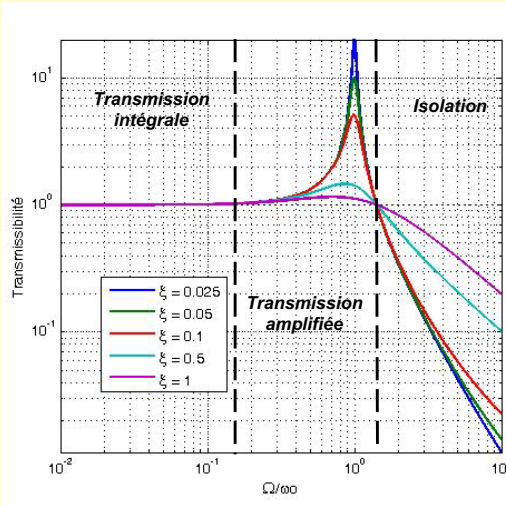
Un objet de masse M subit les vibrations de son support



On évalue le transfert vibratoire du support vers l'objet par la

Transmissibilité :

$$T = \frac{X}{X_s} = \sqrt{\frac{1 + 4\xi^2\beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}}$$



Isolation vibratoire

Pour le système non isolé (courbe bleue), la structure et la liaison au support sont caractérisés par

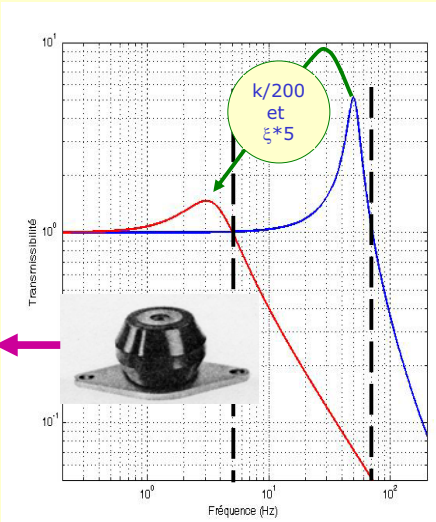
$M = 1 \text{ kg}$ et $k = 10^5 \text{ N/m}$
soit $\omega_0 = 300 \text{ rad/s}$ ou $f_0 = 50 \text{ Hz}$
avec $\xi = 0.1$

Le système est isolé des vibrations du support pour les fréquences supérieures à 70 Hz

Pour le isoler le système, on modifie sa suspension en assouplissant la liaison :

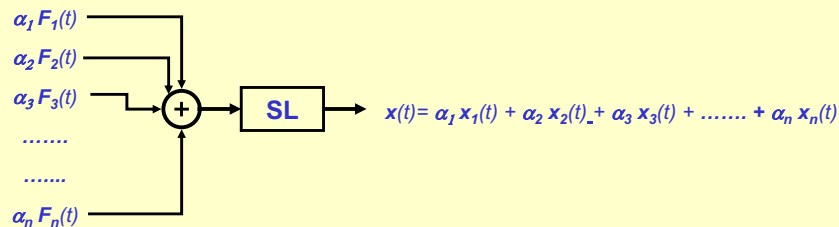
$k' = k/200 = 500 \text{ N/m}$
et en ajoutant de l'amortissement $\xi' = 5 \times \xi$

Le système est désormais isolé à partir de 5 Hz (Courbe rouge)



Système soumis à des excitations multiples Principe de superposition

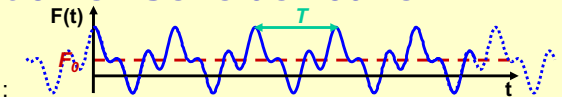
La réponse d'un système linéaire (SL) à une somme d'excitation est la superposition des réponses à chacune des excitations



Excitation T périodique

Décomposition en Série de Fourier

- Une excitation de période T
i.e. telle que $F(t+nT) = F(t)$
peut s'écrire comme une série :



$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t) + B_n \sin(n\Omega t) \text{ ou } F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\Omega t - \psi_n)$$

F_0 , A_n et B_n sont les **coefficients de Fourier**

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \quad \text{Valeur moyenne}$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\Omega t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\Omega t) dt$$

ou

$$F_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\text{tg } \psi_n = \frac{B_n}{A_n}$$

Excitation T périodique Réponse

A la composante harmonique $F_n(t)$ de l'excitation correspond la réponse harmonique $x_n(t)$ de même fréquence $n\Omega$:

$$F_n(t) = F_n \cos(n\Omega t - \psi_n) \rightarrow x_n(t) = X_n \cos(n\Omega t - \psi_n - \phi_n)$$

Avec

$$X_n(n\Omega) = \frac{F_n}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - (n\Omega)^2)^2 + 4\xi^2(\omega_0 n\Omega)^2}}$$

$$\phi_n(n\Omega) = \text{Arctg} \left(\frac{2\xi n\Omega \omega_0}{\omega_0^2 - (n\Omega)^2} \right)$$

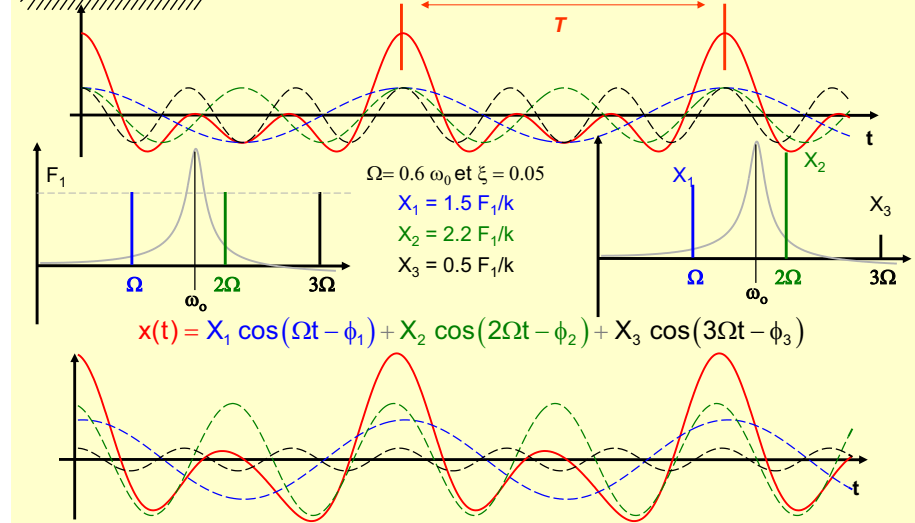
Finalement, par application du principe de superposition, on a :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cos(n\Omega t - \psi_n - \phi_n)$$

F.Ollivier 2007-2008 37

Exemple : Excitation à 3 composantes harmoniques

$$F(t) = F_1 \cos(\Omega t) + F_1 \cos(2\Omega t) + F_1 \cos(3\Omega t)$$



F.Ollivier 2007-2008 38

Exemple : Modélisation des vibrations d'un moteur de moto (1/7)

Système à étudier :

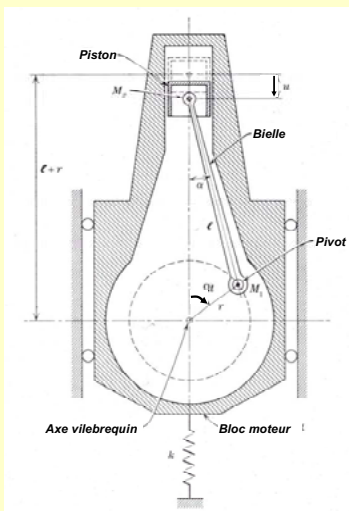
- Bloc moteur : Masse totale $M = 20$ kg
- Suspension : Raideur = k , c négligé
- Position verticale du bloc moteur : $x(t)$

Hypothèses :

- L'excitation provient du déplacement des masses mobiles concentrées en $M_1=200$ g et $M_2=700$ g
- Le déplacement horizontal est impossible
- Le bloc a un déplacement vertical seult

Paramétrage

- l : longueur de la bielle, (15 cm)
- α : angle bielle / verticale ($\ll 1$)
- r : rayon du vilebrequin (5 cm)
- Ω : la vitesse angulaire du vilebrequin
- $u(t)$: position verticale du piston/PMH



F.Ollivier 2007-2008 39

Exemple : Modélisation des vibrations d'un moteur de moto (2/7)

Force extérieures

Mouvement vertical des masses M_1 et M_2

Forces d'inertie verticales opposées :

$$F_i = -M_i \ddot{u}(t)$$

Position verticale de M_1 /PMH : $r - r \cos \Omega t$

Accélération verticale de M_1 : $r \Omega^2 \cos \Omega t$

Force verticale due à M_1 :

$$F_1 = -M_1 r \Omega^2 \cos \Omega t$$

Position verticale de M_2 /PMH : $u(t)$

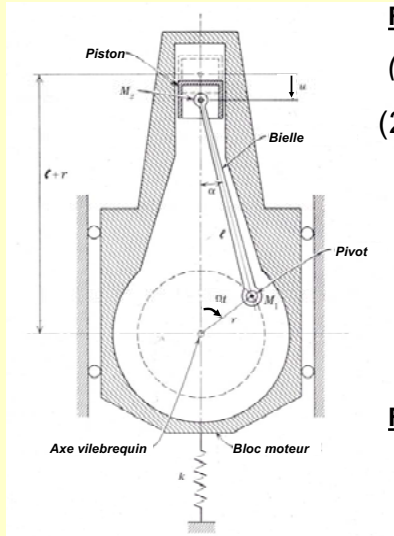
Accélération verticale de M_2 : $\ddot{u}(t)$

Force verticale due à M_2 :

$$F_2 = -M_2 \ddot{u}(t)$$

F.Ollivier 2007-2008 40

Exemple : Modélisation des vibrations d'un moteur de moto (3/7)



Relations géométriques diverses :

$$(1) l \sin \alpha = r \sin \Omega t \Leftrightarrow \alpha \approx \frac{r}{l} \sin \Omega t$$

$$(2) u + l \cos \alpha + r \cos \Omega t = l + r$$

$$\Leftrightarrow u(t) = l(1 - \cos \alpha) + r(1 - \cos \Omega t)$$

$$\Leftrightarrow u(t) = l \frac{\alpha^2}{2} + r(1 - \cos \Omega t)$$

$$\Leftrightarrow u(t) \approx \frac{r \sin^2 \Omega t}{2l^2} + r(1 - \cos \Omega t)$$

Force d'inertie due à M_2 :

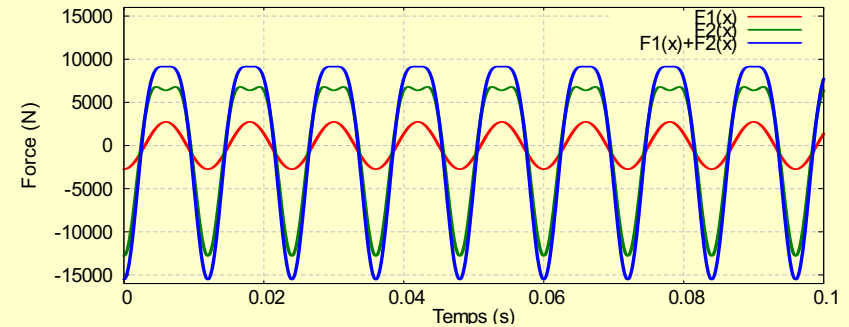
$$F_2(t) = -M_2 \Omega^2 r \left(\cos \Omega t + \frac{r}{l} \cos 2\Omega t \right)$$

Exemple : Modélisation des vibrations d'un moteur de moto (4/7)

Force d'inertie totale : Décomposition par contribution des masses

$$F(t) = -\Omega^2 r M_1 \cos \Omega t - \Omega^2 r M_2 \left(\cos \Omega t + \frac{r}{l} \cos 2\Omega t \right)$$

Représentation pour N = 5000 tours/min soit $\Omega = 523.6$ rad/s

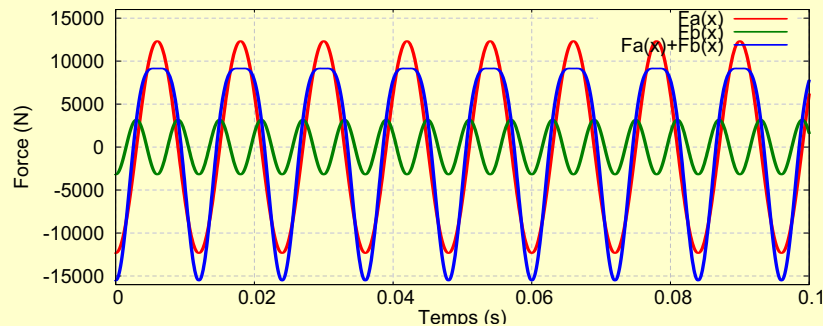


Exemple : Modélisation des vibrations d'un moteur de moto (5/7)

Force d'inertie totale : Décomposition en fréquences

$$F(t) = -\Omega^2 r (M_1 + M_2) \cos \Omega t - \Omega^2 r M_2 \frac{r}{l} \cos 2\Omega t$$

Représentation pour N = 5000 tours/min $\Rightarrow \Omega = 523.6$ rad/s
2 composantes harmoniques (Ω et 2Ω)



Exemple : Modélisation des vibrations d'un moteur de moto (6/7)

Fréquence naturelle de vibration : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$

Vitesses de rotation critiques : $\Omega_1 = \omega_0$ et $2\Omega_2 = \omega_0 \Leftrightarrow \Omega_2 = \frac{\omega_0}{2}$

On choisit la raideur k de la suspension pour qu'un régime courant du moteur ($\Omega = 5000$ tr/min) ainsi que la mi-régime, ne soient pas critiques pour la vibration.

On prend $\omega_0 = 1000$ tr/min = 104 rad/s

On en déduit k = 219300 N/m

Force d'excitation $F(t) = -\Omega^2 r \left((M_1 + M_2) \cos \Omega t + M_2 \frac{r}{l} \cos 2\Omega t \right)$

Pour obtenir la réponse permanente, on applique aux deux composantes fréquentielles, le résultat établi pour l'excitation harmonique :

Réponse permanente :

$$x_p(t) = -\Omega^2 r \left(\frac{(M_1 + M_2)/k}{(1 - \beta^2)} \cos(\Omega t) + \frac{r}{l} \frac{M_2/k}{(1 - 4\beta^2)} \cos(2\Omega t) \right)$$

Exemple : Modélisation des vibrations d'un moteur de moto (7/7)

Réponse permanente : $\Omega = 5000$ trs/min et $\omega_0 = 1000$ trs/min soit $\beta = 5$

$$x_p(t) = -\Omega^2 r \left(\frac{(M_1 + M_2)/k}{(1 - \beta^2)} \cos(\Omega t) + \frac{r}{l} \frac{M_2/k}{(1 - 4\beta^2)} \cos(2\Omega t) \right)$$



Le mouvement vertical du moteur est quasi harmonique de fréquence Ω .
La partie de la force à 2Ω est sans effet.
L'amplitude est de 2.5 mm.

Réponse à une excitation quelconque :
Utilisation de la Transformée de Laplace (1/3)

Transformée de Laplace

Définition :

$$f(t) \Leftrightarrow F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Propriétés utiles :

Linéarité

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \Leftrightarrow \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$$

Transformée des dérivées

$$\dot{f}(t) \Leftrightarrow sF(s) - f(0)$$

$$\ddot{f}(t) \Leftrightarrow s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

Propriétés de décalage

$$f(t - t_0) \Leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$$

$$e^{-ts_0} f(t) \Leftrightarrow F(s + s_0)$$

Transformée des
fonctions usuelles

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

$$t^n e^{s_0 t} \Leftrightarrow \frac{n!}{(s - s_0)^{n+1}}$$

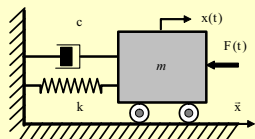
$$\sin(s_0 t) \Leftrightarrow \frac{s_0}{s^2 + s_0^2}$$

$$\cos(s_0 t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + s_0^2}$$

$$\sinh(s_0 t) \Leftrightarrow \frac{s_0}{s^2 - s_0^2}$$

$$\cosh(s_0 t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 - s_0^2}$$

Réponse à une excitation quelconque :
Utilisation de la Transformée de Laplace (2/3)



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

Lorsque $F(t)$ est une force qqc, non exprimable en combinaison linéaire de fonctions harmoniques, il peut être plus simple de passer dans l'espace complexe de Laplace où les calculs sont plus directs.

On commence par transformer chaque terme de l'équation du mouvement

$$F(t) \Leftrightarrow F(s);$$

$$x(t) \Leftrightarrow X(s); \quad \dot{x}(t) \Leftrightarrow sX(s) - x_0; \quad \ddot{x}(t) \Leftrightarrow s^2 X(s) - sx_0 - v_0$$

L'équation du mouvement s'écrit alors dans le domaine complexe

$$(ms^2 + cs + k)X(s) - (ms + c)x_0 - mv_0 = F(s)$$

$$\Leftrightarrow (s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)X(s) - (s + 2\xi\omega_0)x_0 - v_0 = F(s)/m$$

Réponse à une excitation quelconque :
Utilisation de la Transformée de Laplace (3/3)

On en déduit la transformée de la réponse cherchée :

$$X(s) = \underbrace{\frac{F(s)}{m} \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}}_{\text{Réponse permanente } X_p(s)} + \underbrace{\frac{(s + 2\xi\omega_0)x_0 - v_0}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}}_{\text{Réponse transitoire } X_t(s)}$$

Soient s_1 et s_2 les racines du dénominateur : $s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$

$$X(s) = \underbrace{\frac{F(s)}{m} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}}_{\text{Réponse permanente } X_p(s)} + \underbrace{\frac{(s + 2\xi\omega_0)x_0 - v_0}{(s - s_1)(s - s_2)}}_{\text{Réponse transitoire } X_t(s)}$$

Les deux termes se décomposent facilement en éléments simples.

On en déduit l'expression de la réponse totale $x(t)$ par transformation inverse (cf. formulaire)

Exemple : Réponse impulsionnelle

On applique cette méthode au cas d'une force impulsive : $F(t) = F_0 \delta(t)$
Pour le cas où le système est immobile initialement, on obtient :

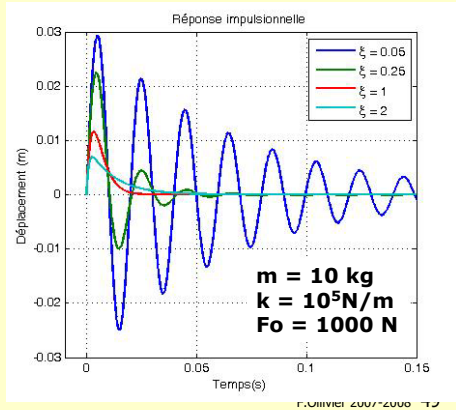
$$X(s) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad \text{avec} \quad s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Et on arrive à :

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{m\xi\omega_0} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_d t) & \text{si } \xi < 1 \\ \frac{F_0}{m} t \cdot e^{-\omega_0 t} & \text{si } \xi = 1 \\ \frac{F_0}{m\alpha} e^{-\xi\omega_0 t} \text{sh}(\alpha t) & \text{si } \xi > 1 \end{cases}$$

$$\alpha = \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$



F.Ollivier 2007-2008 47

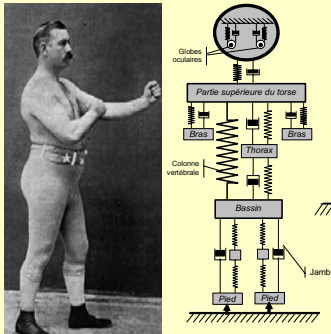
Rendez – vous en M1 pour des vibrations un peu plus complexes

...

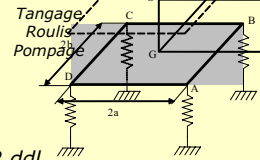
F.Ollivier 2007-2008 50

Exemples de modèles discrets

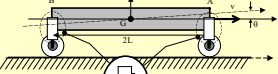
Corps humain
Modèle discret



Automobile
modèle 3 ddl



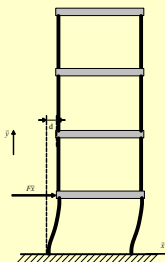
Automobile modèle à 2 ddl



Turbine de générateur
modèle 1ddl



Bâtiment
à n étages
modèle n ddl



F.Ollivier 2007-2008 51

MS122 : Dynamique des systèmes discrets

Objectif : Modélisation des structures vibrantes par n ddl

Programme Cours (JC Guinot) (10h) – TD (12h) – TP (6h)

- Rappels sur les systèmes à 1 ddl
- **Systèmes à 2 ddl :**
 - Représentation matricielle des équations du mouvement
 - Fréquences et Modes propres
 - Matrices d'Inertie et de Rigidité
 - Matrice de souplesse
 - Étude des couplages

- **Modes d'excitation**
 - Harmonique ou quelconque
 - Transitoire et permanente
 - Par des actions extérieures
 - Par le mouvement des supports

- **Outils**
 - Équations de Lagrange
 - Algèbre linéaire
 - Transformées de Fourier et Laplace

- **Systèmes à n ddl :**
 - Fréquences et modes propres
 - Analyse modale
 - Coordonnées généralisées
 - Équations couplées
 - Coordonnées principales
 - Équation découplées

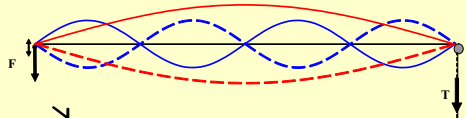
- **Travaux pratiques**
 - Systèmes discrets à 2 ddl :
 - Absorbeur dynamique
 - Oscillateur à coussin d'air
 - Modèle sismique : bâtiment à deux étages

F.Ollivier 2007-2008 52

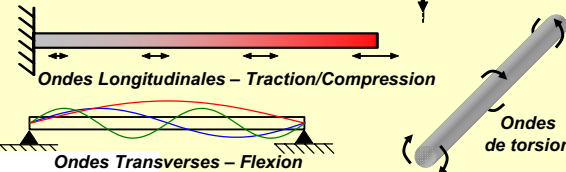
MS138 - Propagation d'ondes (Vibrations des systèmes continus)

Objectif : Étude analytique de la dynamique
des structures déformables élémentaires et de leurs assemblages

Cordes



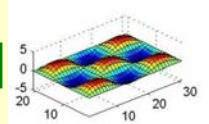
Barres et poutres



Membranes



Plaques



F.Ollivier 2007-2008 53

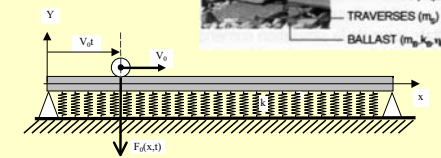
Exemples de problèmes



Modélisation
de la guitare acoustique



Rail-Ballast
Modèle continu



Vibrations des pâles d'hélicoptère

Traction-Compression
Flexion
Torsion



Torsion Load Cell

Programme Cours (JC Guinot) (10h) – TD (12h) – TP (6h)

Méthodes exactes
structures simples

- Ondes dans les cordes
- Ondes longitudinales des barres
- Ondes de torsion des arbres
- Ondes de flexion des poutres
- Ondes dans les membranes
- Ondes dans les plaques

Méthodes approchées

pour l'ingénieur
analyse rapide
des structures composées

- Méthode de Rayleigh :
approximation à 1DDL
- Méthode de Ritz :
approximation à 2 ou 3 DDL

Éléments finis

Simulation des structures complexes
▪ Principes de mise en œuvre

Méthodes expérimentales

- Analyse du signal vibratoire
- Analyse modale

Expériences

- Étude des cordes vibrantes
- Étude des ondes de flexion
dans les poutres
- Étude d'une plaque mince

F.Ollivier 2007-2008 55

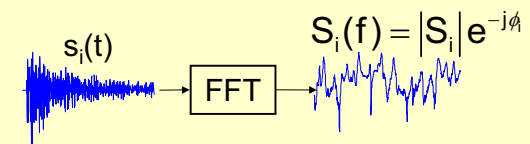
MS145 : Vibrations aléatoires ou déterministes

Objectif : Acquérir la base des outils de
traitement numérique du signal en vibration

Prolongement naturel des modules en théorie des vibrations :

- Vibration des systèmes discrets (MS122)
- Vibration des systèmes continus (MS138)

**Exploitation des signaux issus des capteurs
en vibration (force, accélération, vitesse)
pour le diagnostic dynamique des structures**



F.Ollivier 2007-2008 56

Programme Cours (F.Ollivier) (15h) – TD (12h) – TP (4h)

- Généralités sur les signaux en vibration
- Principes et mise en œuvre de l'analyse spectrale de Fourier
- Outils de l'analyse des signaux aléatoires
 - Corrélation
 - Densité spectrale
 - Fonction de réponse en fréquence
 - Fonction de réponse impulsionnelle
 - Cohérence
- Étude de techniques expérimentales d'ingénieurs

2 excitations harmoniques $\Omega_1 \approx \Omega_2$
Phénomène de Battement

$$F(t) = F_1 \cos(\Omega_1 t) + F_1 \cos(\Omega_2 t) \rightarrow x_p(t) = X_+ \cos(\Omega_+ t - \Phi_+) + X_- \cos(\Omega_- t - \Phi_-)$$

$$X_+ = X_1 + X_2$$

$$2\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2$$

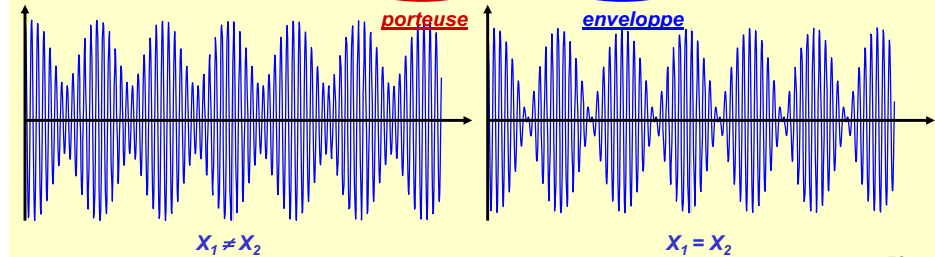
$$2\Phi_+ = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$X_- = X_1 - X_2$$

$$2\Omega_- = \Omega_1 - \Omega_2$$

$$2\Phi_- = \Phi_1 - \Phi_2$$

$$x_p(t) = X_+ \cos(\Omega_+ t - \Phi_+) \cos(\Omega_- t - \Phi_-) - X_- \sin(\Omega_+ t - \Phi_+) \sin(\Omega_- t - \Phi_-)$$



VIBRATIONS
Examen du 18 JANVIER 2006

Etude dynamique d'une passerelle piétonnière

On cherche à évaluer les caractéristiques vibratoires fondamentales de la passerelle piétonnière de la figure 1 en utilisant un modèle à un degré de liberté (figure 2)



Figure 1

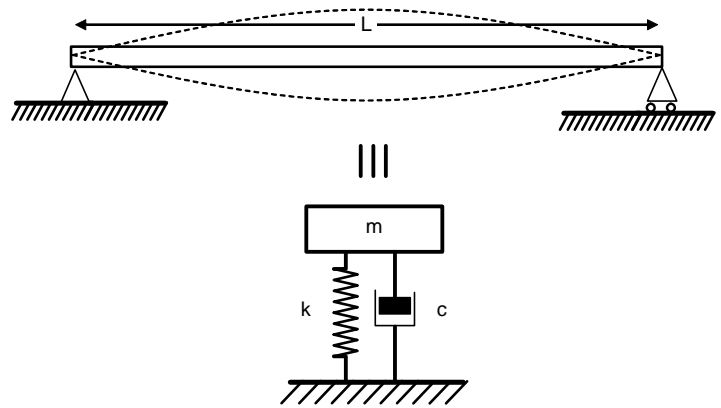


Figure 2

Dans cette étude, on considère deux étapes. La première intervient à l'origine du projet de construction, en phase de conception. La deuxième qui intervient après la construction, consiste à vérifier expérimentalement les caractéristiques dynamiques de la structure.

Etape 1 : Phase de conception préliminaire

Dans cette première phase, on se propose de modéliser la passerelle piétonnière comme un système vibrant à un degré de liberté.

Il s'agit premièrement de déterminer des valeurs approchées des masse et raideur dynamiques (m , k). Pour cela on utilise les caractéristiques des matériaux constitutifs (béton armé) et la géométrie de la passerelle

On choisit en outre, pour représenter cette dernière, un modèle de poutre déformable en appui simple à ses deux extrémités (figure 2). A partir des caractéristiques géométriques de la passerelle et des constantes du béton armé, on obtient pour la poutre modèle les données suivantes :

- Masse par unité de longueur ρ
- Module d'Young E
- La longueur L
- Le moment quadratique de section droite : I

Le point dont on cherche à déterminer le déplacement dynamique $x(t)$ est le centre de la passerelle.

1 – Pour déterminer la masse dynamique m , c'est-à-dire celle qui régit la vibration (à ne pas confondre avec la masse statique $M = \rho L$), on utilise la théorie de la statique des poutres et on évalue une énergie cinétique maximum par l'expression suivante :

$$E_c = \frac{17}{70} \rho L V^2$$

où V est l'amplitude de la vitesse d'oscillation de la poutre.

En déduire la masse dynamique m de la passerelle

- 2 - Pour déterminer une valeur approchée de la raideur dynamique k , on fait encore appel à la statique des poutres. On considère le déplacement statique X_{st} du centre de la poutre soumise à son poids dynamique. Il est donné par :

$$X_{st} = \frac{17}{35} \rho g \frac{L^4}{48EI}$$

En déduire l'expression de la raideur k .

- 3 – Donner ensuite l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction du rapport :

$$R = \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}}.$$

- 4 – Application numérique : On donne $R = 2.53$ et $\sqrt{\frac{48 \times 35}{17}} = 9.94$

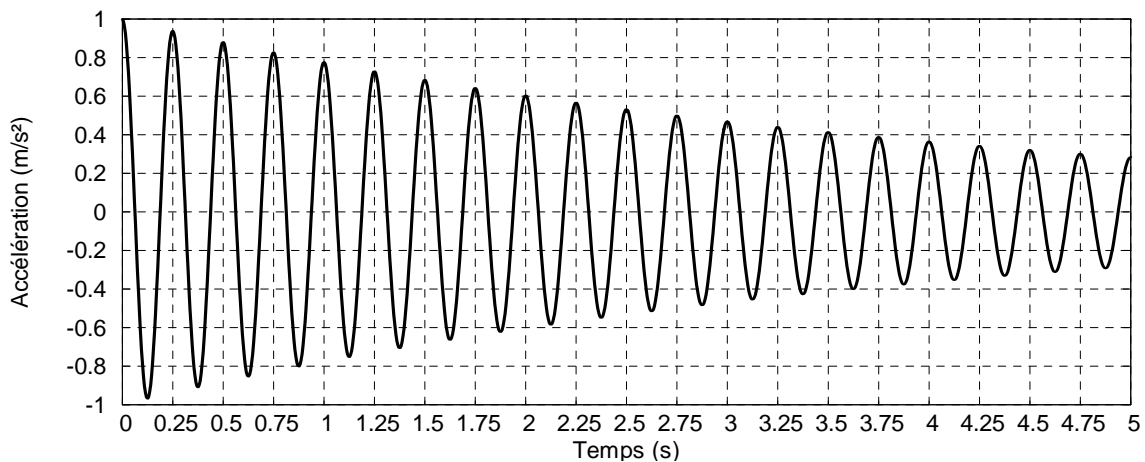
En déduire une valeur approchée de la fréquence propre f_0 de vibration de la passerelle.

Etape 2 : Phase de vérification expérimentale :

Après construction de la passerelle, l'ingénieur dynamique installe un accéléromètre au centre de la passerelle pour en vérifier les caractéristiques dynamiques.

Il utilise vérin pneumatique pour placer la structure hors de sa position statique et la relâcher instantanément.

L'accéléromètre enregistre le signal suivant.



- 5 – En terme d'amortissement quel type de structure constitue la passerelle ?
- 6 – En utilisant le décrément logarithmique entre 0 et 2.5 s, mesurer le coefficient d'amortissement ξ de la structure. (On donne $\ln(2) = 0.7$)
- 7 – Mesurer ensuite la fréquence propre de la structure. Le calcul étudié à l'étape 1 est-il correct ?
- 8 - Rappeler pour le cas de cette structure, l'expression du déplacement libre $x(t)$. On note ω_d la pseudo pulsation.
- 9 – En déduire celle de l'accélération $\gamma(t)$ et donner un ordre de grandeur de l'amplitude maximum du déplacement de la structure pendant l'essai.

La passerelle est destinée à subir le passage de piétons dont la marche engendre une excitation d'amplitude P et de fréquence fondamentale $F = 2$ Hz. (2 pas/s). On note $\Omega = 2\pi F$. La masse des piétons est négligée.

- 10 – Rappeler l'expression de l'amplitude du déplacement forcé induit par cette excitation (on ne considère que la composante fondamentale). Calculer un ordre de grandeur de cette amplitude
- 11 – Comment la prise en compte de la masse des piétons modifierait-elle ces résultats.

VIBRATIONS

Examen du 5 SEPTEMBRE 2006

En utilisant un modèle à un degré de liberté on étudie les vibrations d'une machine industrielle.

La machine en question, de masse $M = 7000$ kg, est montée sur une dalle rigide par l'intermédiaire de 4 plots de caoutchouc.

La charge étant uniformément répartie sur les 4 plots, ceux-ci présentent à l'équilibre statique de l'ensemble (lorsque la machine ne fonctionne pas) un écrasement $\Delta = l - l_0 = 5$ mm.

- 1 - En déduire la raideur K de l'ensemble et celle, notée k , d'un plot de caoutchouc. On prendra $g = 10$ m/s²
- 2 - Calculer les valeurs de la pulsation propre ω_0 et de la fréquence propre f_0 de la machine suspendue.

Oscillation libres

Dans un premier temps, on néglige l'amortissement des plots de caoutchouc

On note $x(t)$ la position de la machine par rapport à sa position d'équilibre statique.

A l'instant initial la machine est déplacée à la position $x_0 = 1$ mm et libérée avec une vitesse nulle.

- 3 - Décrire son mouvement et exprimer $x(t)$.
- 4 - Donner les expressions de la vitesse $v(t)$ et de l'accélération $a(t)$ de la machine. Donner les valeurs numériques de leur amplitude V et Γ .
- 5 - Exprimer l'énergie $E(t)$ du système vibrant, montrer qu'elle est constante et calculer sa valeur numérique.

Désormais on considère l'amortissement des plots de caoutchouc.

On souhaite qu'au bout de 10 oscillations libres, l'amplitude du mouvement de la machine soit divisée par 10.

- 6 - En déduire la valeur du décrétement logarithmique δ .
- 7 - En utilisant l'expression approchée de δ en fonction du facteur d'amortissement ξ , en déduire la valeur de ξ .
- 8 - Rappeler la relation entre ξ , le coefficient d'amortissement C du système, M et ω_0 . Calculer C .

Oscillation forcées

La machine étudiée est une machine tournante entraînée par un moteur dont on note Ω la vitesse de rotation. En présence d'un léger déséquilibre du rotor, la machine subit une force harmonique de la forme

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

- 9 - Rappeler (ou établir à partir de l'équation du mouvement forcé) l'expression de l'amplitude et du déphasage de la réponse permanente de la structure *amortie* à cette excitation.
- 10 - Donner en tours par minute la vitesse de rotation critique Ω_c du moteur d'entraînement.

Toutes les applications numériques sont faisables « à la main ». On attend des valeurs approchées en unités SI. On donne les valeurs particulières suivantes : $\sqrt{2000} = 44.72$ et $\ln(10) = 2.3$

VIBRATIONS

Examen du 12 JANVIER 2007

Durée 1h - Sans document ni calculatrice

Etude vibratoire d'un ascenseur

Un ascenseur est constitué d'une cabine de masse M suspendue à un treuil par l'intermédiaire d'un câble. La raideur k du câble dépend de sa longueur variable L .

On donne $M = 1000$ kg

Pour le câble, la section droite est $S = 3.14$ cm², la masse est négligeable et le module d'Young est $E = 1,03 \times 10^{11}$ Pa.

On donne $ES/M = 180^2$ SI

Evaluation des caractéristiques propres du système

1. Si l'on suppose une répartition uniforme de la contrainte dans la section droite du câble, montrer que l'allongement du câble sous le seul effet du poids de la cabine s'écrit

$$\Delta L_{st} = \frac{MgL}{ES}$$

2. En déduire la raideur k du câble en fonction de L
3. Exprimer la fréquence propre ω_0 du système en fonction de L .

Dans un immeuble de 10 étages, la longueur du câble varie de 36 m à 1 m

4. Donner les valeurs numériques de l'intervalle critique des vitesses de rotation du treuil.
5. Comment cet intervalle est-il modifié par la présence de passagers ?

Evaluation des efforts sur le câble

A chaque démarrage ou arrêt du treuil, une vibration libre verticale de la cabine apparaît. On souhaite étudier cette vibration pour connaître l'effort subi par le câble.

On considère un arrêt alors que la cabine se déplace à la vitesse constante v_0 . Le câble a la longueur L .

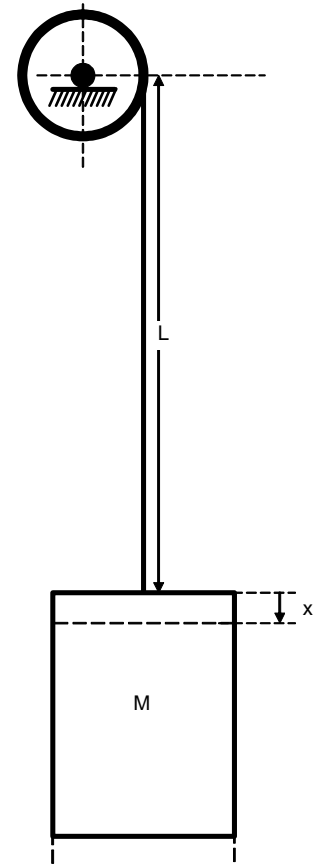
6. Si on néglige l'amortissement, rappeler l'expression générale de $x(t)$ le déplacement vibratoire de la cabine.
7. Préciser son amplitude X en fonction de v_0 .
8. En déduire la contrainte dynamique maximum σ_{max} subie par le câble en fonction de son allongement relatif maximum X/L .

Cas d'oscillations forcées

On envisage une perturbation sismique qui transmettrait à la cabine, par l'intermédiaire du câble, une force harmonique verticale de fréquence angulaire Ω .

9. Si on considère un amortissement faible de la structure du câble, rappeler l'expression $x_p(t)$ du mouvement permanent de la cabine.
10. Décrire et commenter en fonction de Ω l'amplitude de ce mouvement permanent.

Les 3 parties sont indépendantes et certaines questions peuvent être traitées indépendamment du reste.



VIBRATIONS

Examen du 29 JANVIER 2007 (2EME SESSION)

Durée 1h - Sans document – calculatrice autorisée

Afin de mesurer les caractéristiques dynamiques d'une structure, on effectue des essais pour enregistrer sa fonction de réponse en fréquence. On utilise un excitateur dynamique qui soumet la structure à une force sinusoïdale d'amplitude constante F_0 , mais dont on fait varier la fréquence de 0 à 1.2 Hz. Un capteur de vitesse est utilisé pour étudier la réponse de la structure. Le graphe joint représente l'amplitude $V(f)$ de la vitesse du déplacement permanent en fonction de la fréquence f de la force appliquée par l'excitateur. C'est à partir de ce graphe que l'on déterminera les caractéristiques de la structure. On donnera sur ce graphe (qui sera rendu avec la copie) les indications des différentes mesures.

Les grandeurs à déterminer sont : f_0 la fréquence propre, ω_0 la pulsation propre, k la raideur, m la masse, ξ le coefficient d'amortissement et c le facteur d'amortissement. Pour toutes les grandeurs, on indiquera les unités.

1. Rappeler l'expression complète du déplacement permanent $x(t, \Omega)$ de la structure soumise à une force sinusoïdale de pulsation Ω et de la forme $F(t, \Omega) = F_0 \cos(\Omega t)$. Préciser les expressions de l'amplitude $X(\Omega)$ et de la phase $\Phi(\Omega)$.
2. En déduire l'expression théorique de la vitesse permanente $v(t, \Omega)$. Exprimer son amplitude $V(\Omega)$. La réécrire en fonction de f ($V(f)$). Quelle relation de phase y a-t'il entre vitesse et déplacement ?
3. Rappeler la relation qui existe entre la fréquence de résonance de vitesse et la fréquence propre du système.
4. A partir du graphe de la réponse en fréquence $V(f)$ déterminer la fréquence propre f_0 . En déduire la pulsation propre ω_0 .

L'amplitude de la force F_0 appliquée par l'excitateur est la même pour toutes les fréquences et vaut 500 N.

5. Montrer que la pente de la courbe $V(f)$ à l'origine vaut $2\pi F_0/k$.
6. Mesurer cette pente sur le graphique et en déduire la valeur numérique de k .
7. Calculer la masse m de la structure.
8. Sur le même graphe, en utilisant la méthode de la largeur à -3 dB, mesurer une valeur approchée de ξ .
9. En déduire c .
10. La valeur de ξ ainsi obtenue n'est qu'une approximation grossière. Rappeler à quelles conditions cette méthode de mesure de l'amortissement est correcte.

Nom :

