

Vibrations des systèmes mécaniques

2 domaines d'étude des
solides élastiques ou déformables (\neq rigides)

Statique

Contexte :

Structures soumise à des
Efforts constants :

- Pas d'évolution temporelle des efforts appliqués
- Evolution très lente : **Fatigue**

Objet des cours de :

- Stat. des milieux continus (MMC)
- Résistance des matériaux (RDM)

Dynamique

Contexte :

Structures soumise à des
Efforts dynamiques :

- Evolution temporelle rapide des efforts appliqués :
 - Harmoniques, périodiques, qcq
 - Caractérisés par leur spectre

Objet des cours de :

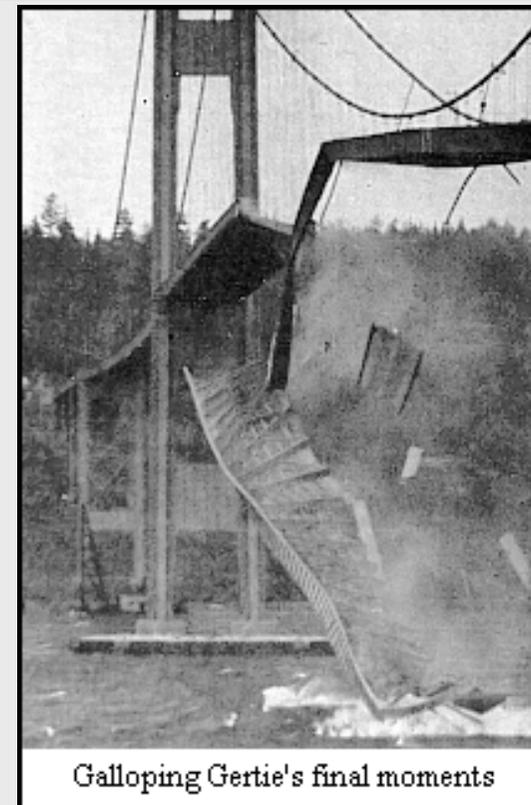
- Vibrations ou Dynamique des structures



Cliquer pour animer

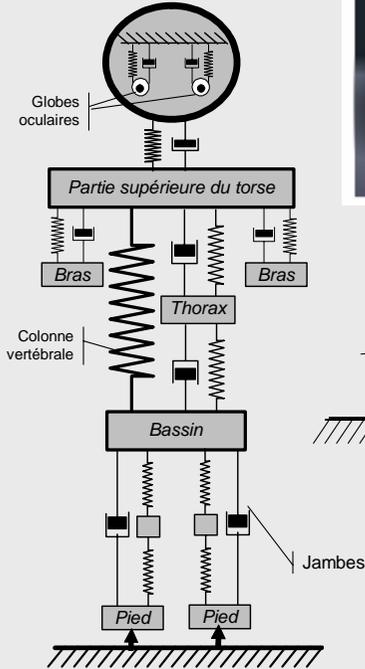
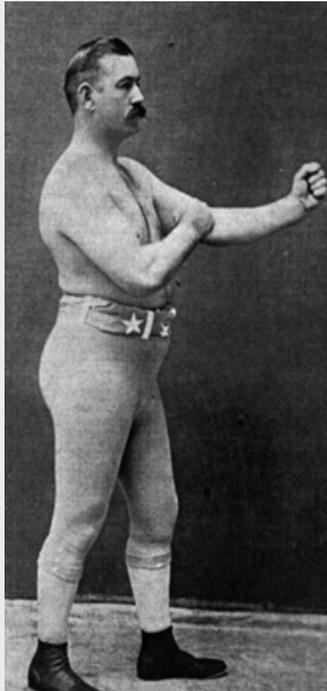
Quand un système est mal conçu ...

Destruction du pont de Tacoma (USA) (7/11/1940) - 4 mois d'existence

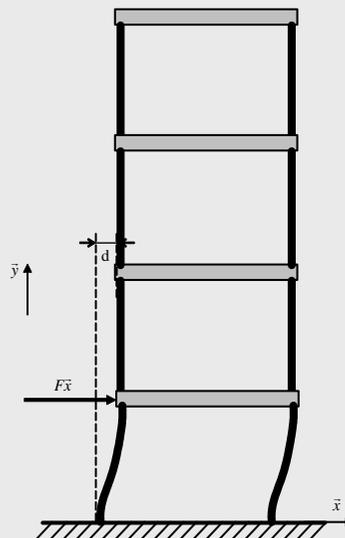
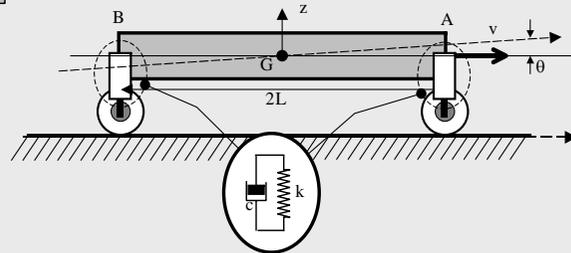


Exemples de Modèles

Corps humain
Modèle discret



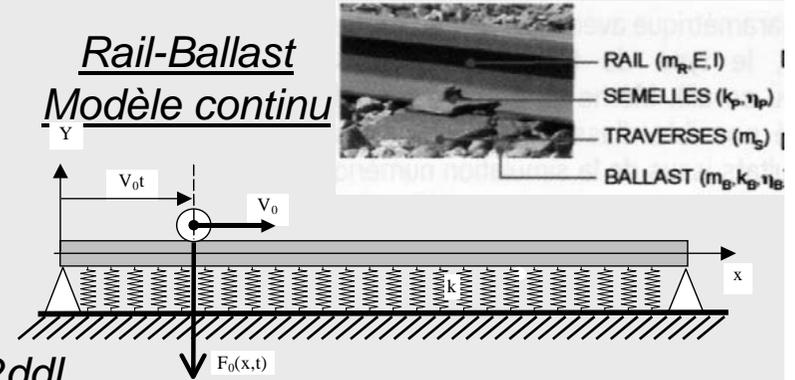
Automobile modèle 2ddl



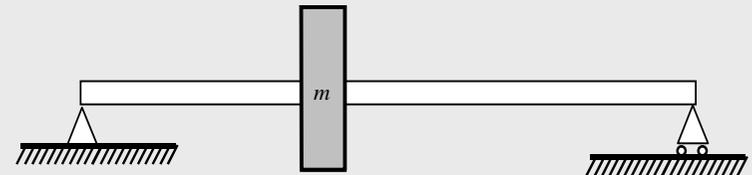
Bâtiment
à n étages
modèle n ddl



Rail-Ballast
Modèle continu

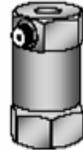
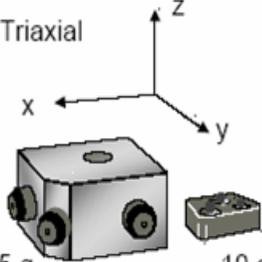
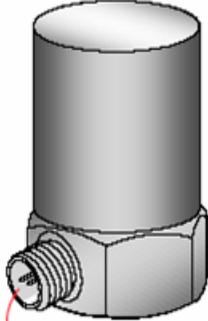
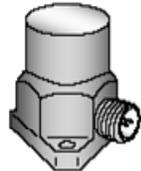


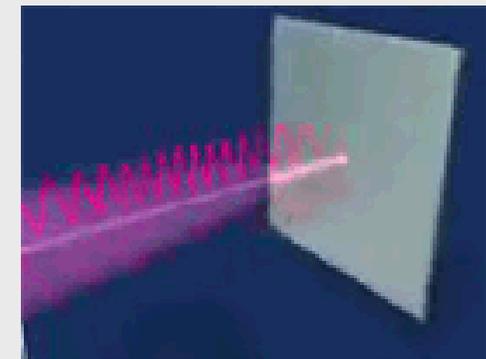
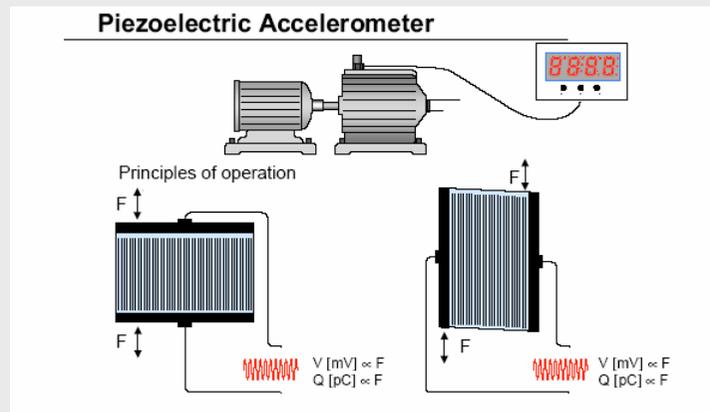
Turbine de générateur
modèle 1ddl



Capteurs et excitateurs

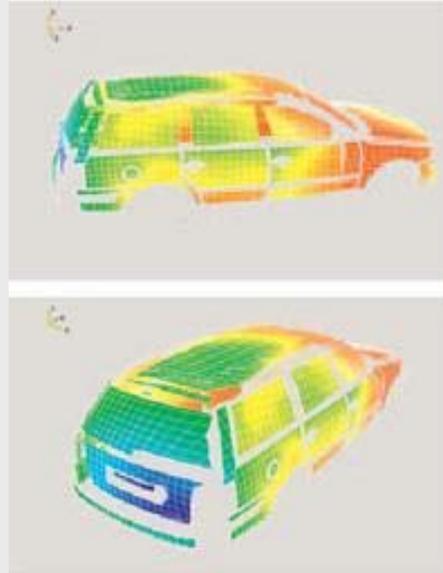
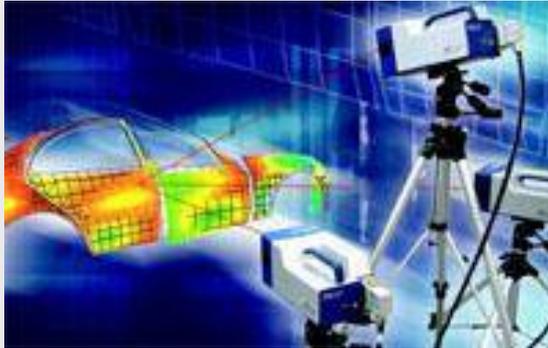


<p>Calibration</p> 	<p>Triaxial</p>  <p>55 g 10 g</p>	<p>High sensitivity (with built-in amplifier)</p>  <p>316 mV/ms⁻² a_{min.} = 20 × 10⁻⁶ ms⁻²</p>
<p>High temperature</p>  <p>T_{max.} = 400° C</p>	<p>Shock</p>  <p>a_{max.} = 1000 km⁻²</p>	



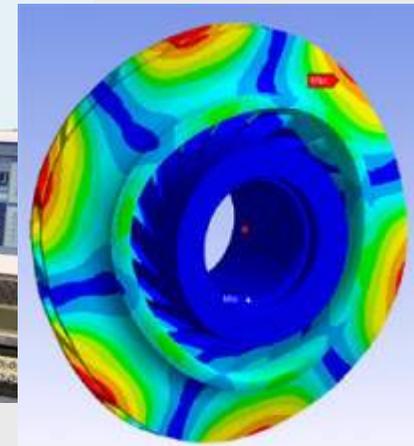
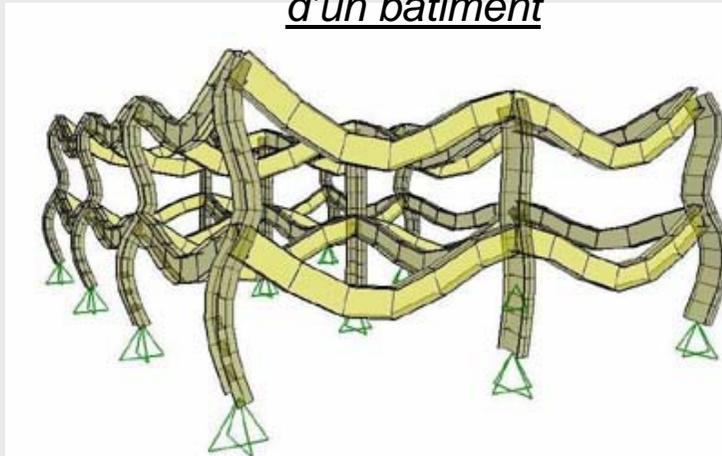
Les vibrations en pratique

Mesure des déformées
opérationnelles
d'un véhicule



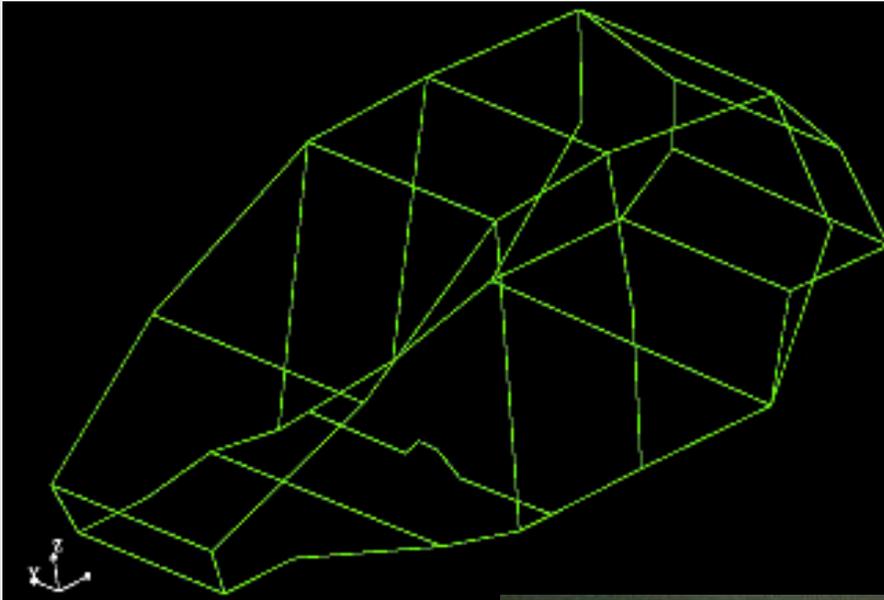
Mesure des modes de vibration
d'une roue à aubes

Calcul des vibrations
en grandes déformations
d'un bâtiment

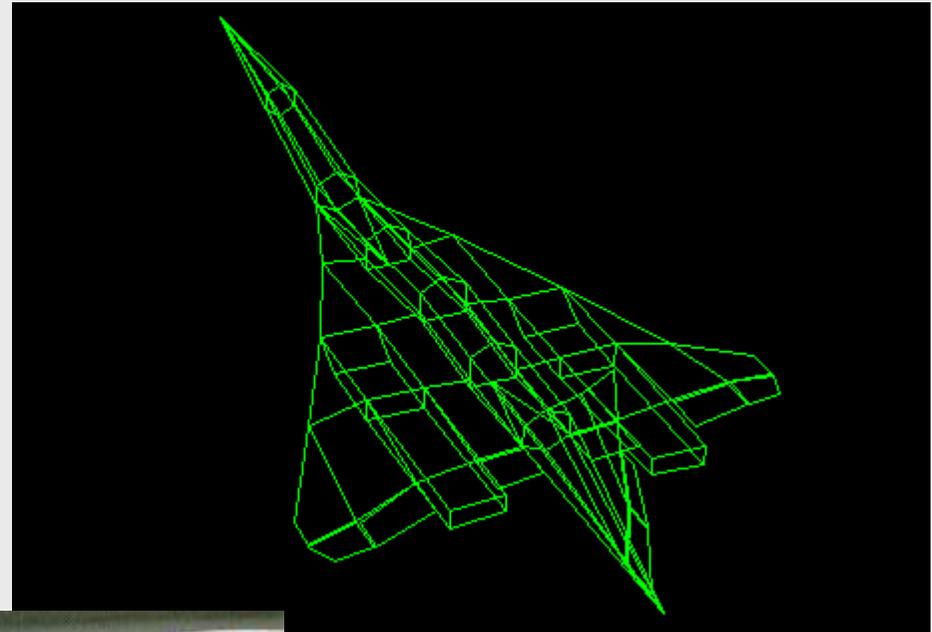


Les vibrations en pratique

Un mode de vibration
d'une caisse de voiture



Un mode de vibration du Concorde



Quelle précision est nécessaire au problème ?

Différents types de modèle

Modèles discrets

(M1S2 – MFE 122 ou MIS-108B)

nombre fini n de ddl

Ecriture : analytique

Solution approchée :

analytique si $n \leq 2$

numérique si $n > 2$

Modèles continus

(M1S2 – MIS-109E)

nbr ∞ de ddl (n)
(cordes - poutres - plaques)

Ecriture : analytique

Solution : analytique exacte

Modèles à éléments finis

(M1S2 – MIS-109B)

**association d'un nombre fini
de structures continues élémentaires**

Ecriture numérique

Solution numérique approchée

Problème

- Quelle structure vibre ?
 - Quelles causes ?
 - Quel mouvement ?
 - Quels paramètres ?

Observations

Mouvement

Oscillation autour
d'une position
d'équilibre statique

Paramètres influents :

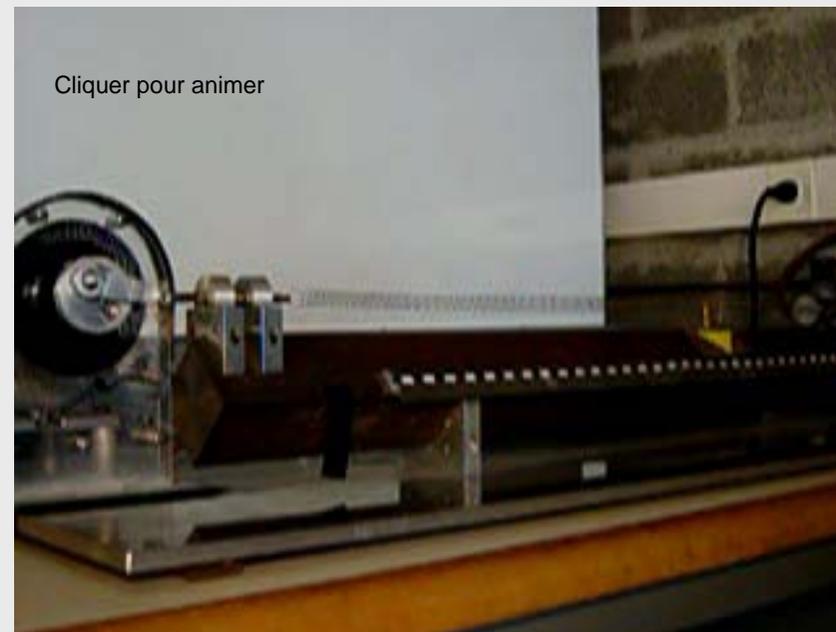
Inertie

masse, moment

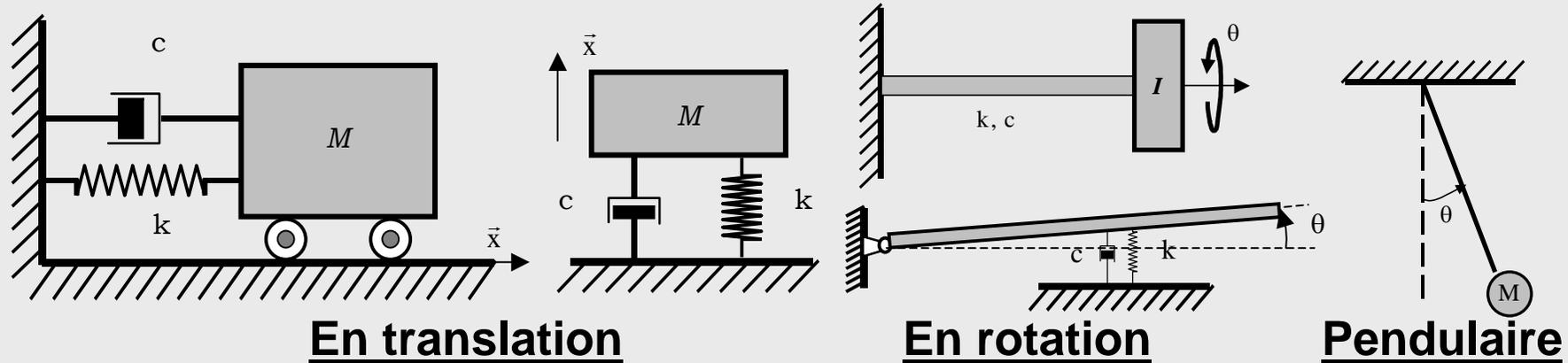
Elasticité

traction, cisaillement, torsion

Amortissement



Modèles de Systèmes vibrants à 1DDL



Paramétrage	Translation	Rotation	Pendulaire
Déplacement	Longitudinal : x	Angulaire : θ	Angulaire : θ
Inertie	Masse : M	Moment d'inertie : I	Masse : M
Raideur	Résistance à l'allongement : k	Résistance à la torsion : k	Pesanteur
Amortissement	Frottements visqueux : c		

Objectif :

Déterminer la forme du mouvement de la structure

en fonction : - du temps : $x(t), \theta(t)$

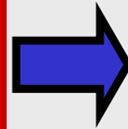
- de la fréquence de l'excitation : $x(\Omega), \theta(\Omega)$

2 types de vibrations des structures

➤ Les Vibrations libres (VL)

Excitation

- Pas de force extérieure
 $F(t) = 0 \Rightarrow$ libre
- Position et/ou vitesse initiales non nulles



Réponse

Vibration naturelle de la structure

- **sans amortissement :**

Mouvement harmonique (= à fréquence constante)
à la **fréquence naturelle (ou propre)**

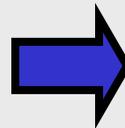
- **avec amortissement :**

Mouvement pseudo harmonique amorti

➤ Les Vibrations forcées (VF)

Excitation

- Force extérieure entretenue (= permanente) ou transitoire (= courte durée)
 $F(t) \neq 0 \Rightarrow$ forcée



Réponse

Vibration forcée de la structure

Mouvement accordé à l'excitation :
Amplitude et phase
selon le spectre de l'excitation

+

Vibration libre si x_0 et/ou $v_0 \neq 0$

Écriture de l'équation du mouvement 1DDL (en translation)

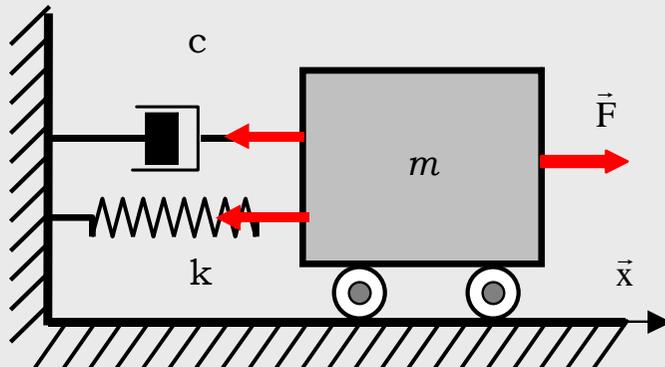
2 méthodes

Bilan des forces (PFD) :

- Force d'excitation : $F(t)$
- Force de rappel élastique : $-k x(t)$
- Force de frottement visqueux : $-c \dot{x}(t)$

$$\sum \text{Forces} = m\gamma$$

$$\Leftrightarrow F - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$



Théorème de l'énergie :

- Énergie cinétique : $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$
- Énergie potentielle élastique : $U = \frac{1}{2} k x^2$
- Puissance dissipée : $\Pi_d = c \dot{x}^2$
- Puissance extérieure : $\Pi_e = F \dot{x}$

$$\frac{d(T + U)}{dt} + \Pi_d = \Pi_e$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = F$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

Solutions de l'équation du mouvement Vibrations Libres non amorties (c=0)

Équation du mouvement : $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$

Solution :
3 écritures équivalentes

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = X_1 e^{-j\omega_0 t} + X_2 e^{-j\omega_0 t} \\ x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \\ x(t) = X \cos(\omega_0 t - \phi) \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω_0 : pulsation propre,
Rq : fonction du rapport de l'élasticité à l'inertie.

Conditions initiales :

$$\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array}$$



Constantes
A, B ou X_1, X_2 ou X, ϕ

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x_0 \cos(\omega_0 t) = X \cos(\omega_0 t + \phi)$$

X : amplitude,
 ϕ : phase

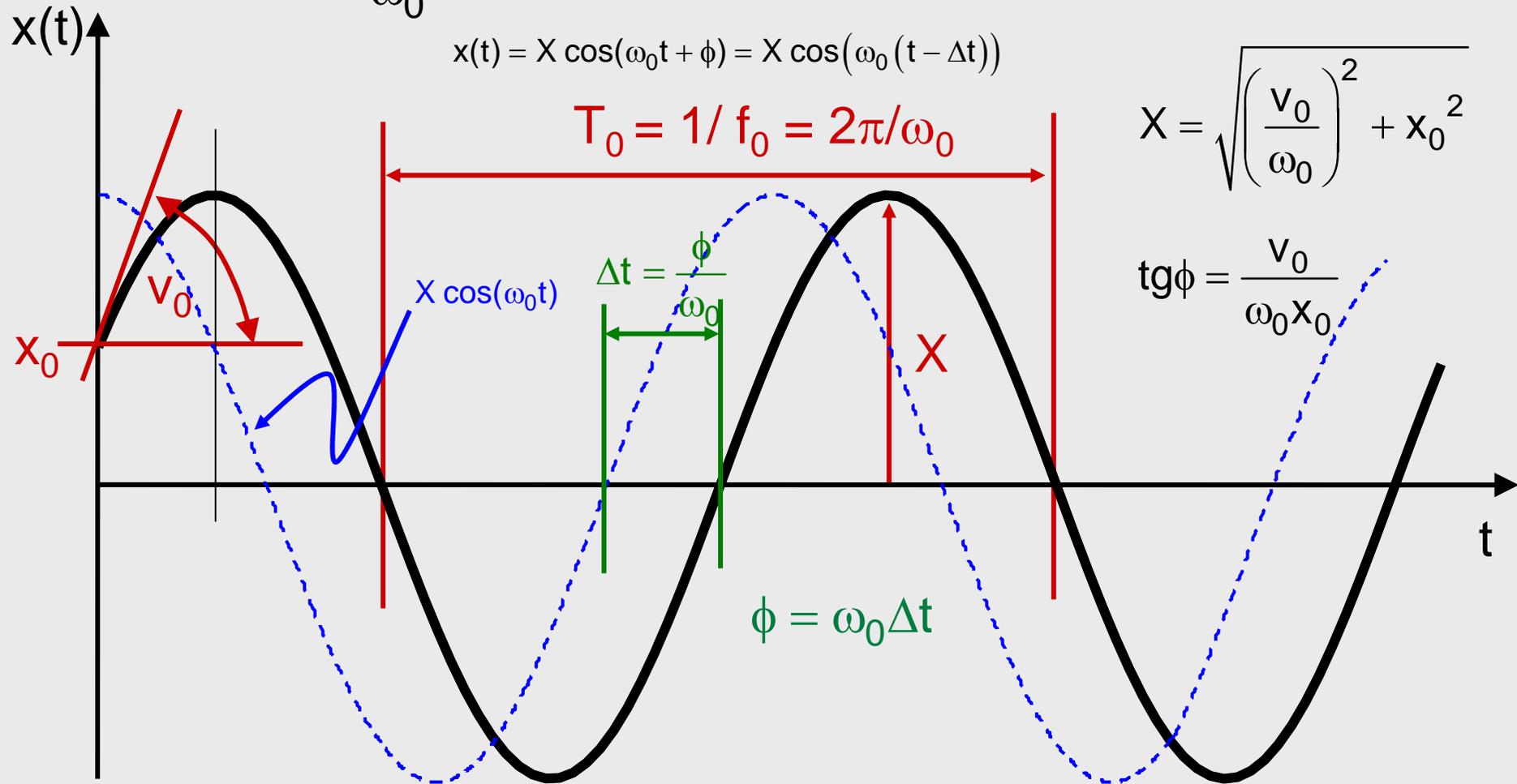
Vibrations libres d'un système non amorti

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x_0 \cos(\omega_0 t) = X \cos(\omega_0 t - \phi)$$

$$x(t) = X \cos(\omega_0 t + \phi) = X \cos(\omega_0 (t - \Delta t))$$

$$X = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + x_0^2}$$

$$\text{tg}\phi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}$$

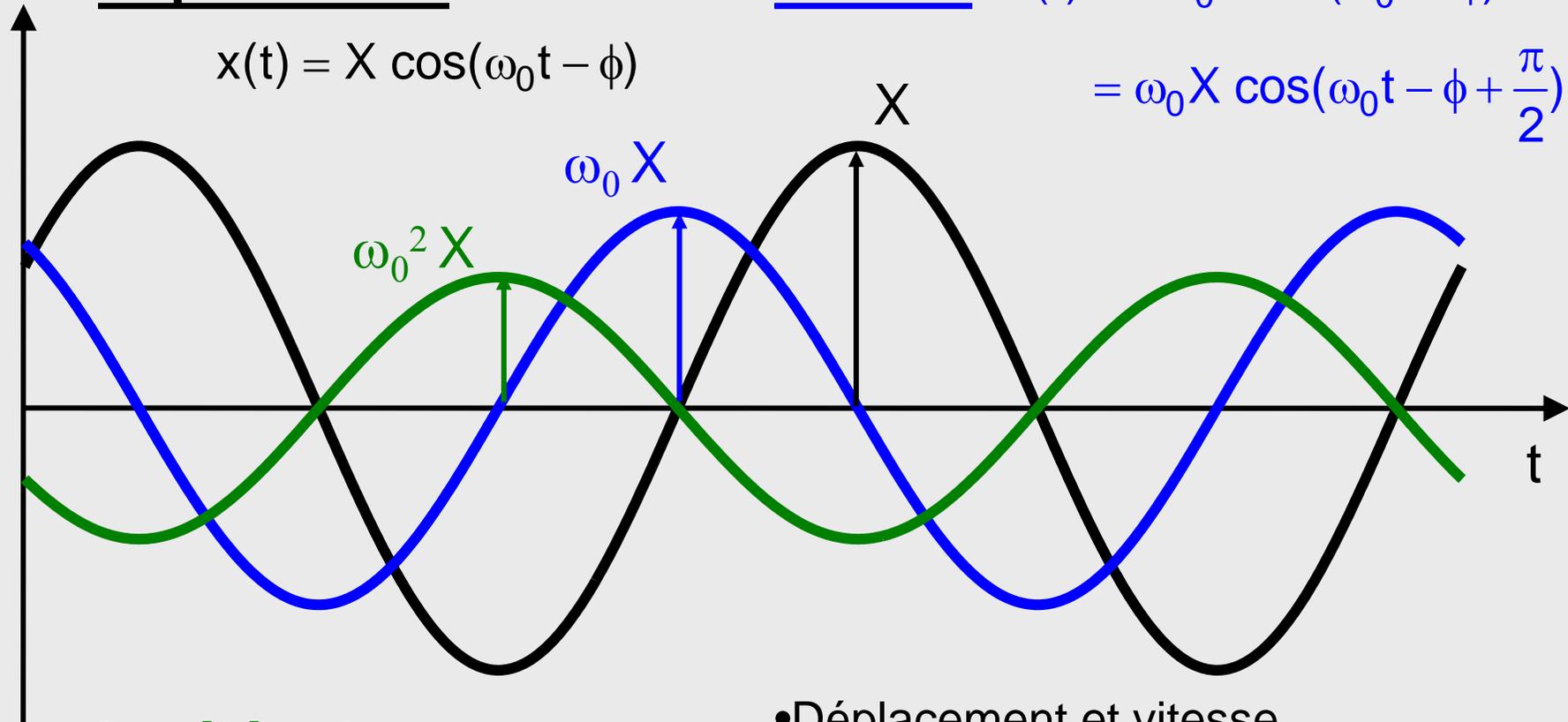


Vibrations libres d'un système non amortiDéplacement

$$x(t) = X \cos(\omega_0 t - \phi)$$

Vitesse $\dot{x}(t) = -\omega_0 X \sin(\omega_0 t - \phi)$

$$= \omega_0 X \cos(\omega_0 t - \phi + \frac{\pi}{2})$$

Accélération

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\omega_0^2 X \cos(\omega_0 t - \phi) \\ &= \omega_0^2 X \cos(\omega_0 t - \phi + \pi) \end{aligned}$$

- Déplacement et vitesse en quadrature
- Déplacement et accélération en opposition de phase

Solutions de l'équation du mouvement Vibrations libres amorties (c≠0)

Équation du mouvement :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Solutions de la forme :

$$x(t) = X e^{st}$$

Équation caractéristique :

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega_0^2 = 0$$

Racines :

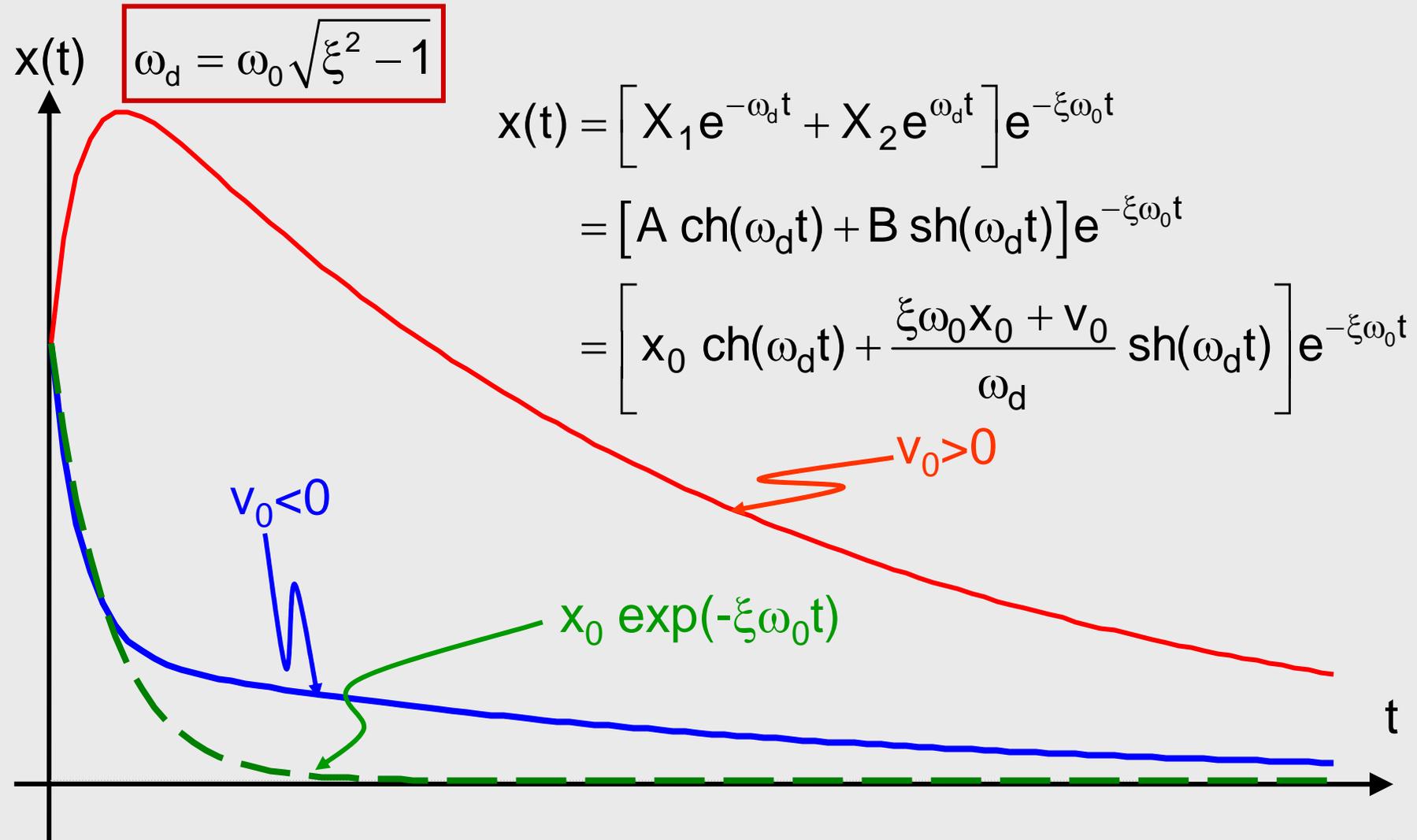
$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_0}$$

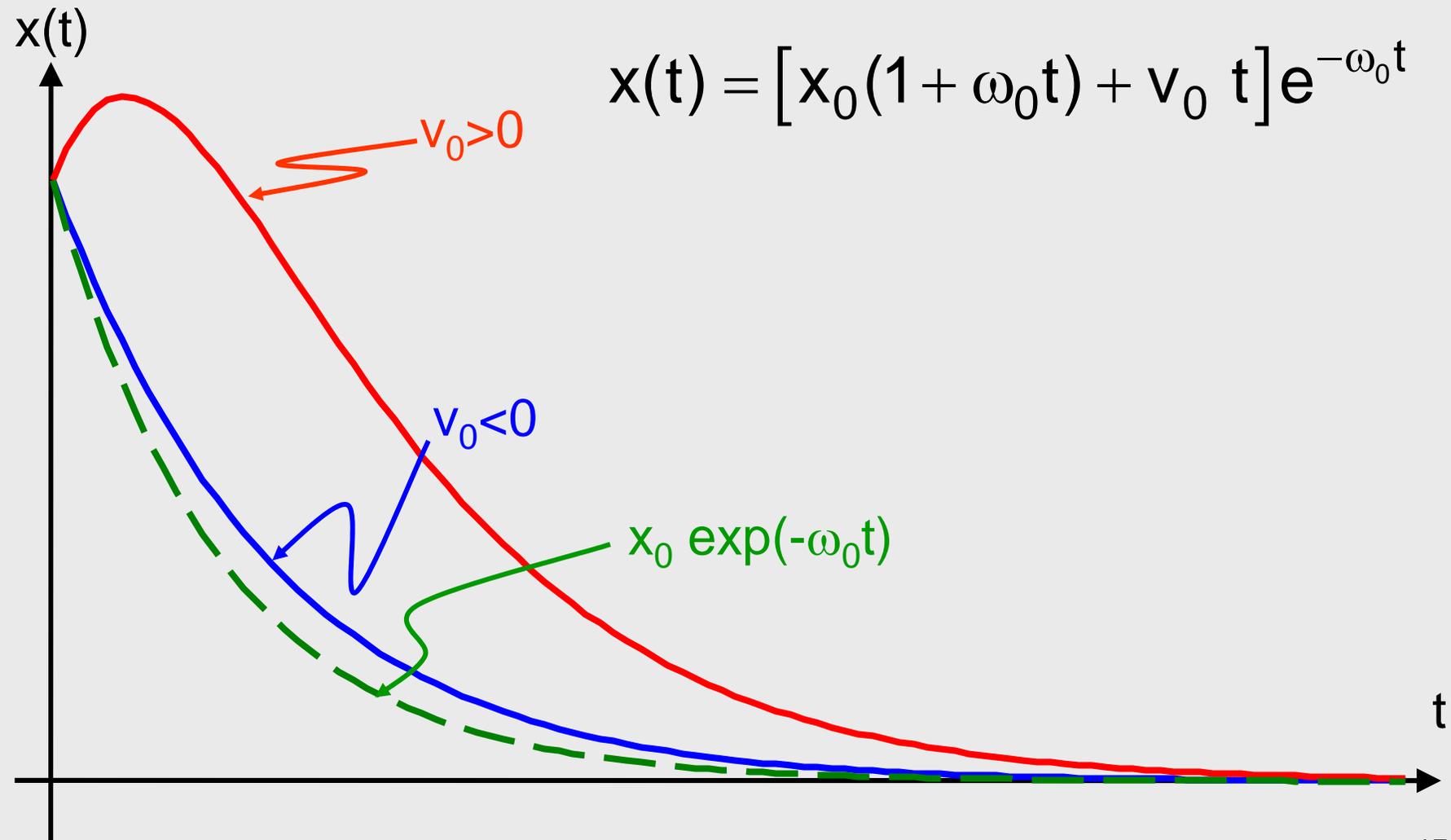
ξ : facteur d'amortissement

3 cas d'amortissement selon ξ

Vibrations libres d'un système amorti
amortissement surcritique : $\xi > 1$

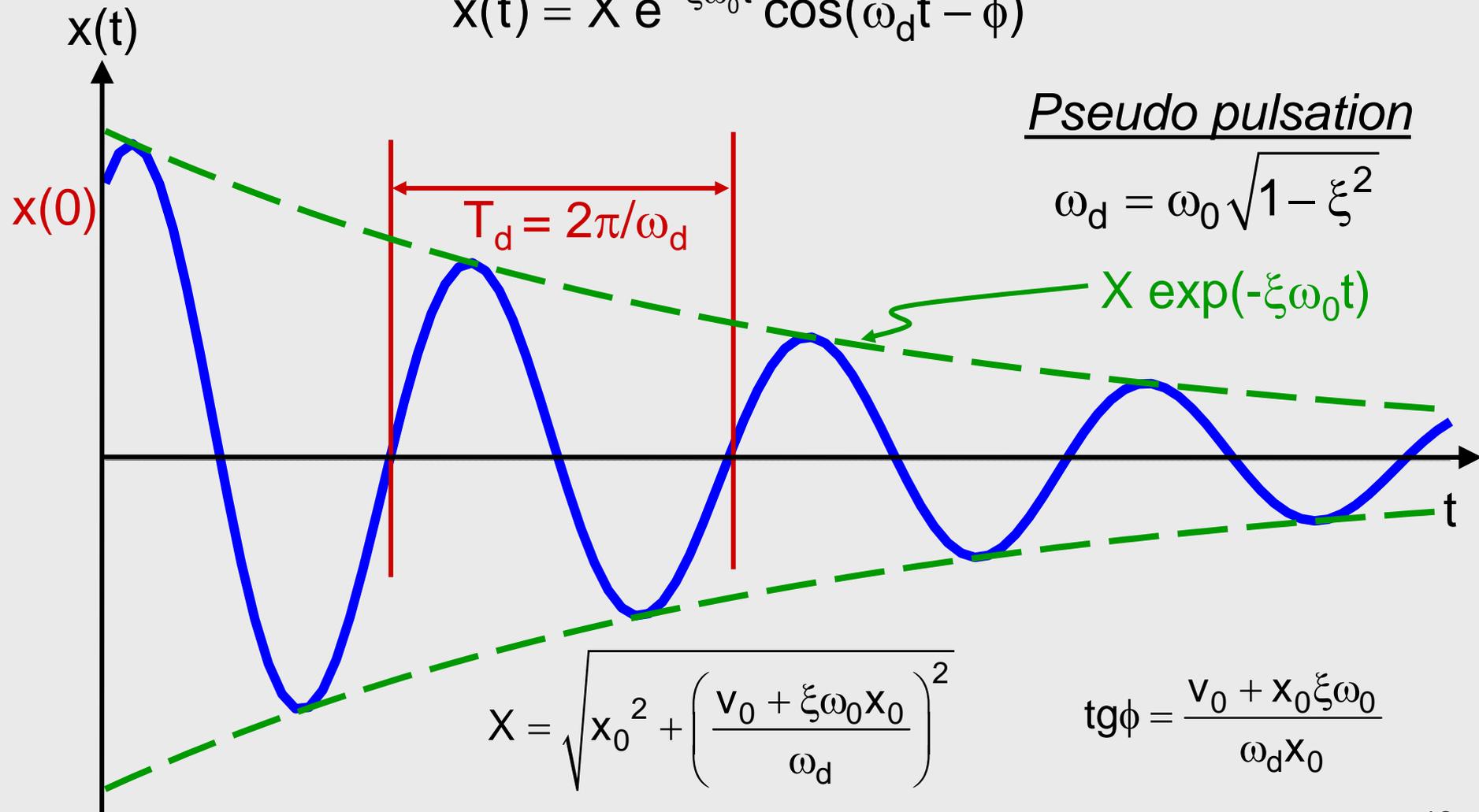


Vibrations libres d'un système amorti
amortissement critique : $\xi = 1$



Vibrations libres d'un système amorti
amortissement sous - critique : $\xi < 1$

$$x(t) = X e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_d t - \phi)$$



Vibrations libres d'un système amorti amortissement sous - critique : $\xi < 1$

Détermination expérimentale de l'amortissement en V.L. :

On mesure les amplitudes X_n et X_{n+1} de 2 maxima successifs séparés de T_d ,
On a :

$$\frac{X_n}{X_{n+1}} = \frac{x(t_0)}{x(t_0 + T_d)} = \frac{X e^{-\xi\omega_0 t_0}}{X e^{-\xi\omega_0(t_0 + T_d)}} = e^{\xi\omega_0 T_d}$$

Décrément logarithmique

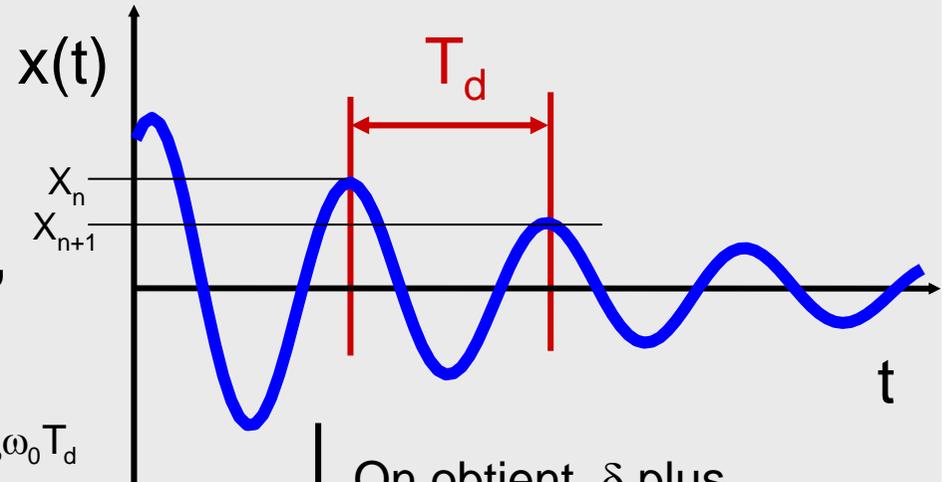
Soit $\delta = \ln\left(\frac{X_n}{X_{n+1}}\right)$ et $\delta = \xi\omega_0 T_d = 2\pi\xi \frac{\omega_0}{\omega_d} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ $\delta = \frac{1}{p} \ln\left(\frac{X_n}{X_{n+p}}\right)$

donné par la mesure *déduit de la modélisation*

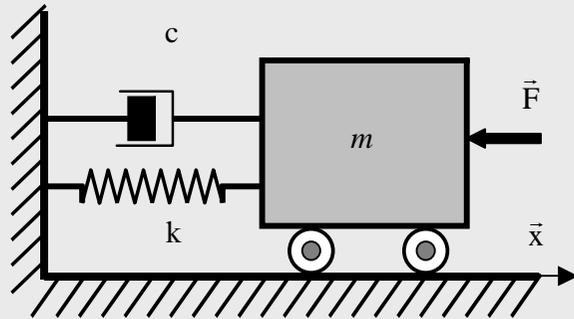
$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

De δ déterminé par la mesure, on déduit l'amortissement ξ

Rq: si $\xi \ll 1$ alors $\delta = 2\pi\xi \Leftrightarrow \xi = \frac{\delta}{2\pi}$



On obtient δ plus précisément avec des maxima séparés de pT_d :

Vibrations forcées harmoniquesRappel de l'équation du mouvement

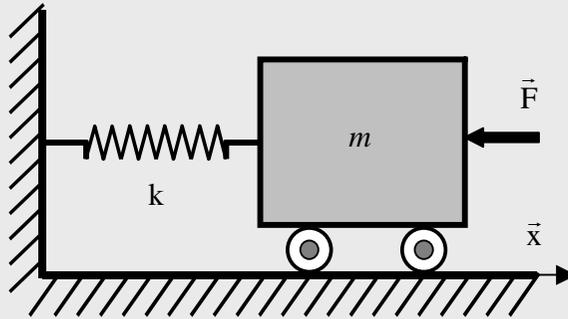
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

Excitation harmonique

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) = F_0 \operatorname{Re} \left[e^{j\Omega t} \right]$$

*(notation complexe) :*Réponse = Réponse transitoire $x_t(t)_-$ + Réponse permanente $x_p(t)$

- $x_t(t)_-$ = Réponse en régime libre (voir + haut)
- $x_p(t)$ = mouvement après disparition du transitoire
 - Harmonique de même pulsation Ω que l'excitation
 - Amplitude X et Déphasage ψ à déterminer

vibrations forcées harmoniques des systèmes non amortis

L'équation du mouvement est :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\Omega t) \quad (1)$$

La réponse transitoire est la solution générale (celle obtenue en V.L.) :

$$x_t(t) = X_t \cos(\omega_0 t - \phi_t)$$

La réponse permanente est la solution particulière de la forme :

$$x_p(t) = X_p \cos(\Omega t)$$

En la substituant dans (1) on a l'amplitude :

$$X_p = \frac{F_0}{k - m\Omega^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

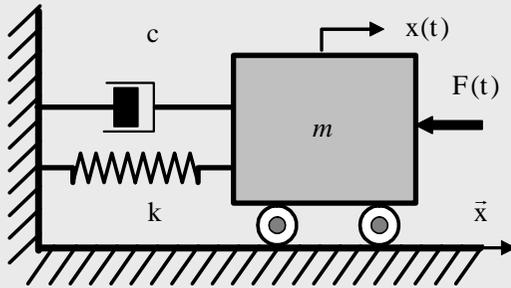
Le mouvement forcé permanent s'écrit :

$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$$

et la solution complète (trans. + perm.) : $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$

Remarque : L'excitation et la réponse sont en phase .

Vibrations forcées harmoniques des systèmes sous amortis



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) \quad (2)$$

La réponse transitoire (solution générale)
est celle obtenue en vibrations libres :

$$x_t(t) = [X_t \cos(\omega_d t - \phi_t)] e^{-\xi\omega_0 t}$$

La solution particulière est de la forme :

$$x_p(t) = X_p \cos(\Omega t - \phi_p)$$

Elle est substituée dans (2) pour obtenir l'expression du mouvement forcé permanent :

$$X_p(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4(\xi\Omega\omega_0)^2}}$$

$$\phi_p(\Omega) = \text{Arctg}\left(\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

La solution complète : $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$

$$x(t) = \underbrace{[X_t \cos(\omega_d t - \phi_t)] e^{-\xi\omega_0 t}}_{\text{Réponse transitoire}} + \underbrace{X_p \cos(\Omega t - \phi_p)}_{\text{Réponse permanente}}$$

Réponse transitoire

Réponse permanente

Vibrations forcées harmoniques
Etude de la réponse forcée permanente

On a : $x_p(t) = X_{(\Omega)} \cos(\Omega t - \Phi_{(\Omega)})$ avec

$$X(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\Omega)^2}}$$

et

$$\Phi(\Omega) = \text{Arctg} \left[\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right]$$

- Amplitude et phase de $x_p(t)$ dépendent de la pulsation Ω de l'excitation

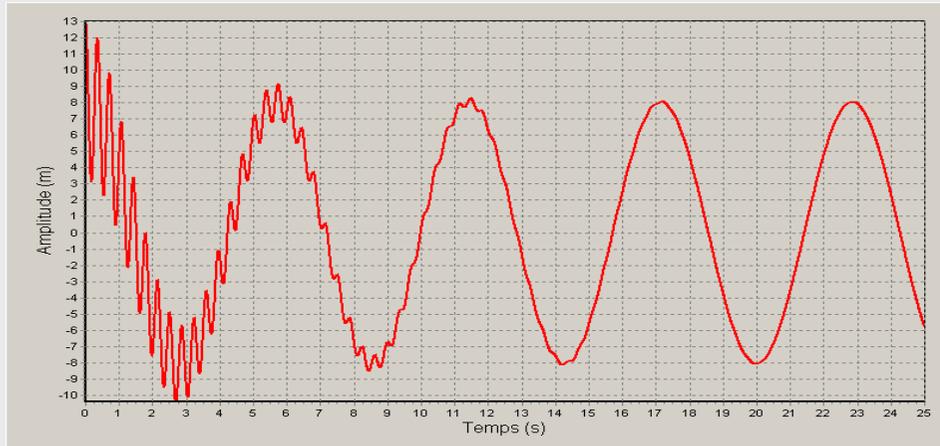
Coefficient d'amplification dynamique (sans dimension) :

$$A(\Omega) = A(\beta) = X(\beta) \frac{k}{F_0} = \frac{X(\beta)}{X_{st}} \Leftrightarrow A(\beta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}}$$

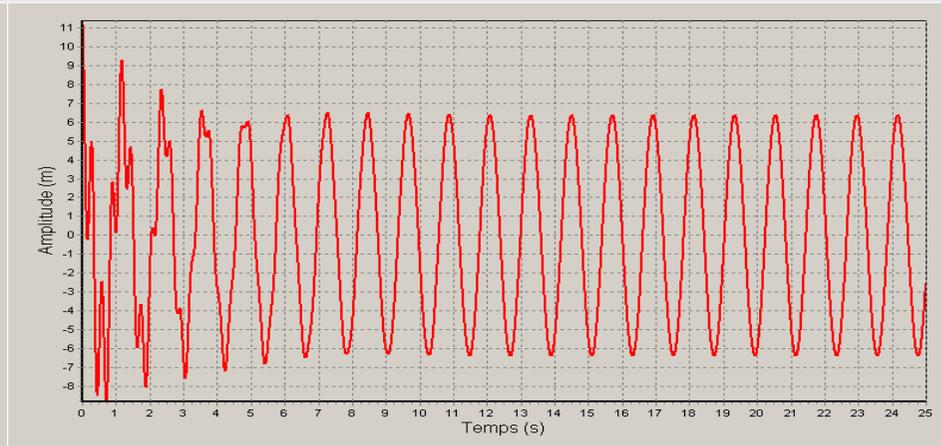
- $\Omega \rightarrow \omega_0$ ($\beta \rightarrow 1$) $\Rightarrow X(\Omega)$ Max \Leftrightarrow **Résonance**
- $\xi = 0 \rightarrow \Phi(\Omega) = 0$, excitation et réponse en phase.

Exemples de réponses
à des excitations
harmoniques

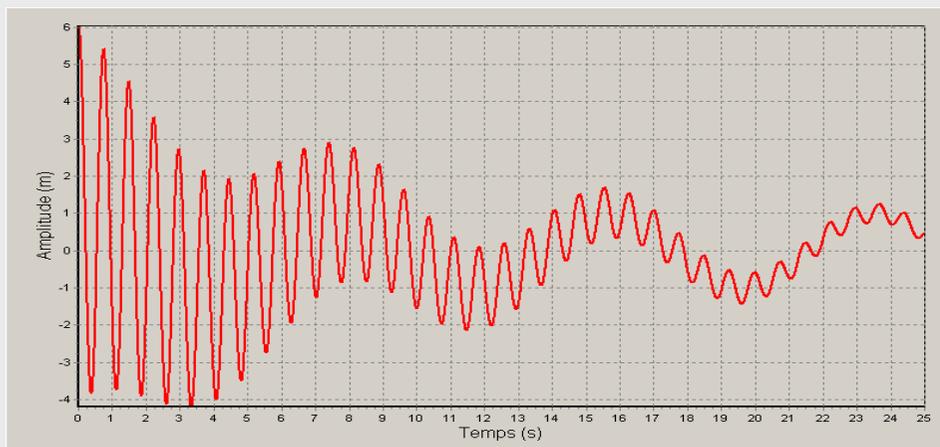
$$x(t) = X_t \cos(\omega_d t - \phi_t) e^{-\xi \omega_0 t} + \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\Omega t - \phi_p)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi \omega_0 \Omega)^2}}$$



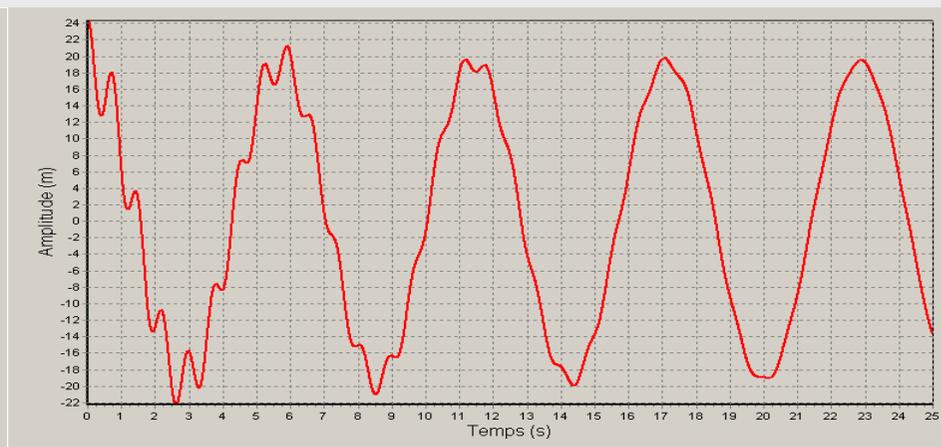
Xo = 5 ωo = 17.5 Fo/k = 8
Vo = 1.7 ξ = 0.015 Ω = 1.1



Xo = 5 ωo = 21.5 Fo/k = 6
Vo = 5 ξ = 0.02 Ω = 5.2



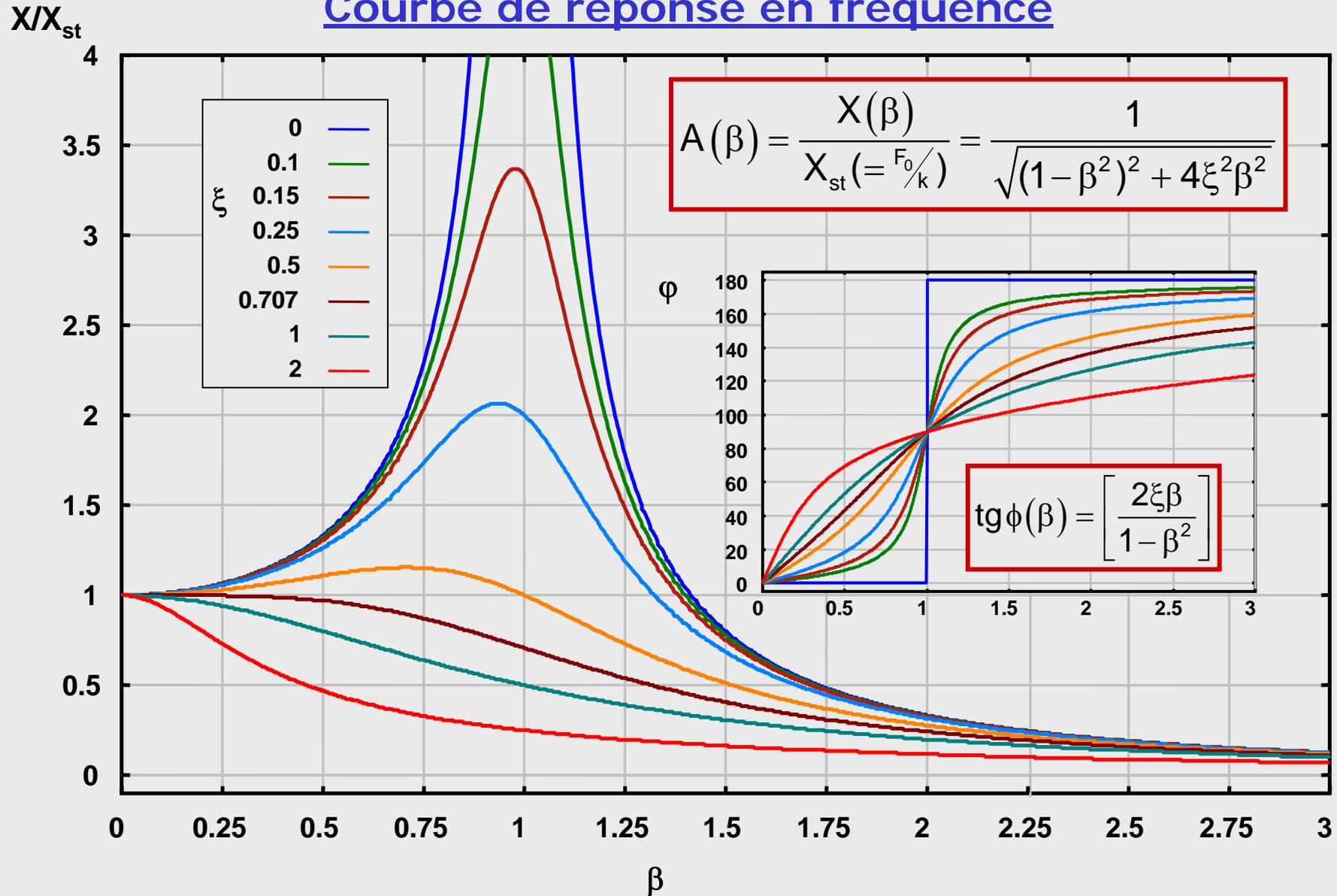
Xo = 5 ωo = 8.5 Fo/k = 1
Vo = 5 ξ = 0.015 Ω = 0.8



Xo = 5 ωo = 8.5 Fo/k = 19
Vo = 5 ξ = 0.015 Ω = 1.1

Vibrations forcées harmoniques

Courbe de réponse en fréquence



Systemes à 1DDL - Vibrations forcées harmoniques
Exemples

1DDL Vertical

Régime libre

Régime forcé : 0.25 Hz

Régime forcé : 0.7 Hz

Régime forcé : 1 Hz

Régime forcé : 1.27 Hz

Régime forcé : 1.3 Hz

Régime forcé : 1.5 Hz

Régime forcé : 2 Hz

1DDL Horizontal

Régime libre

Régime forcé : 0.25 Hz

Régime forcé : 0.5 Hz

Régime forcé : 0.7 Hz

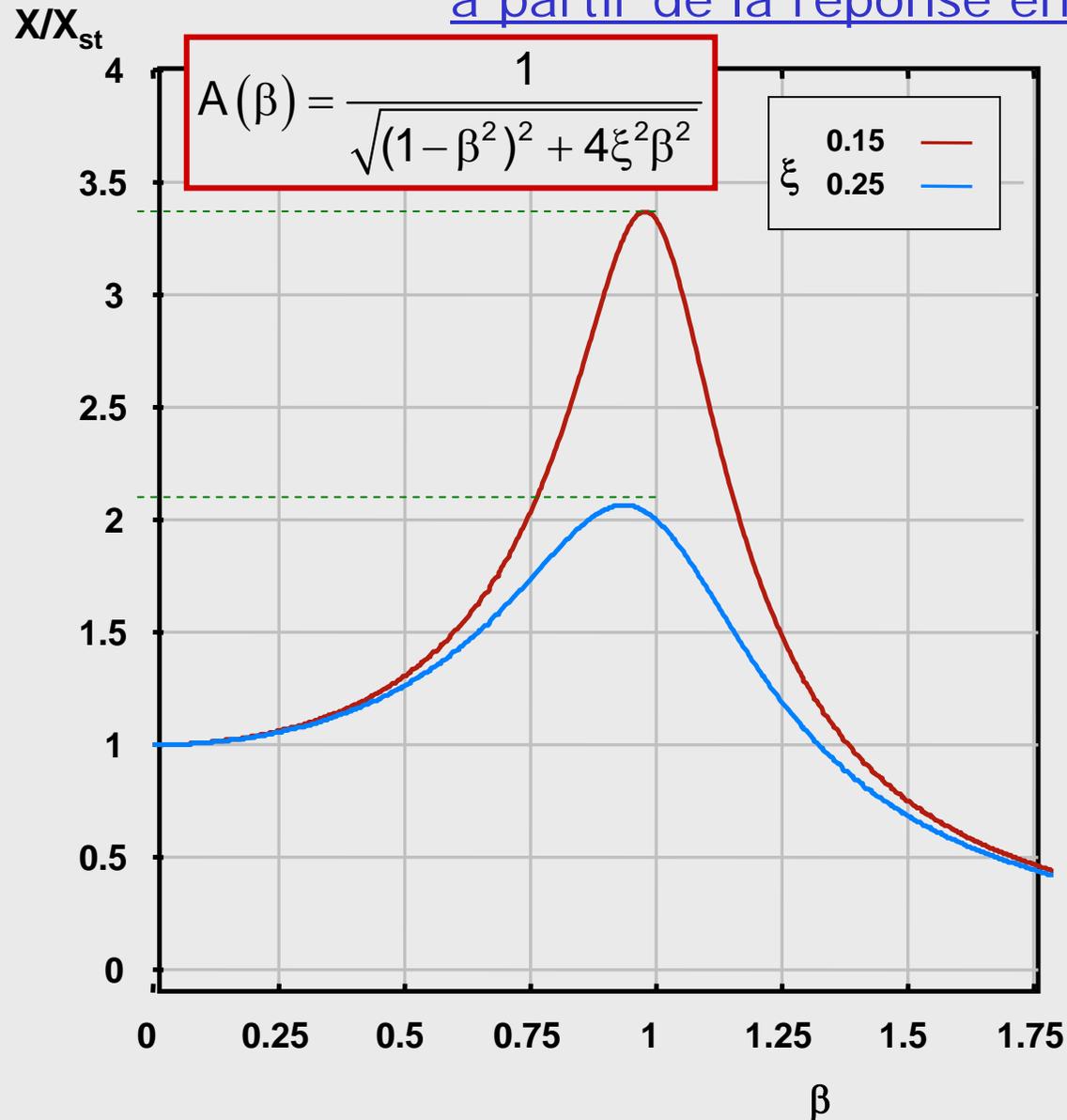
Régime forcé : 0.75 Hz

Régime forcé : 0.8 Hz

Régime forcé : 1 Hz

Régime forcé : 2 Hz

Mesure de l'amortissement à partir de la réponse en fréquence



Méthode de l'amplification maximum

A la résonance,
l'amplification est maximum
et $\beta \sim 1$.

On mesure le facteur de qualité:

$$Q = A_{\max} \approx A(1) = \frac{1}{2\xi}$$

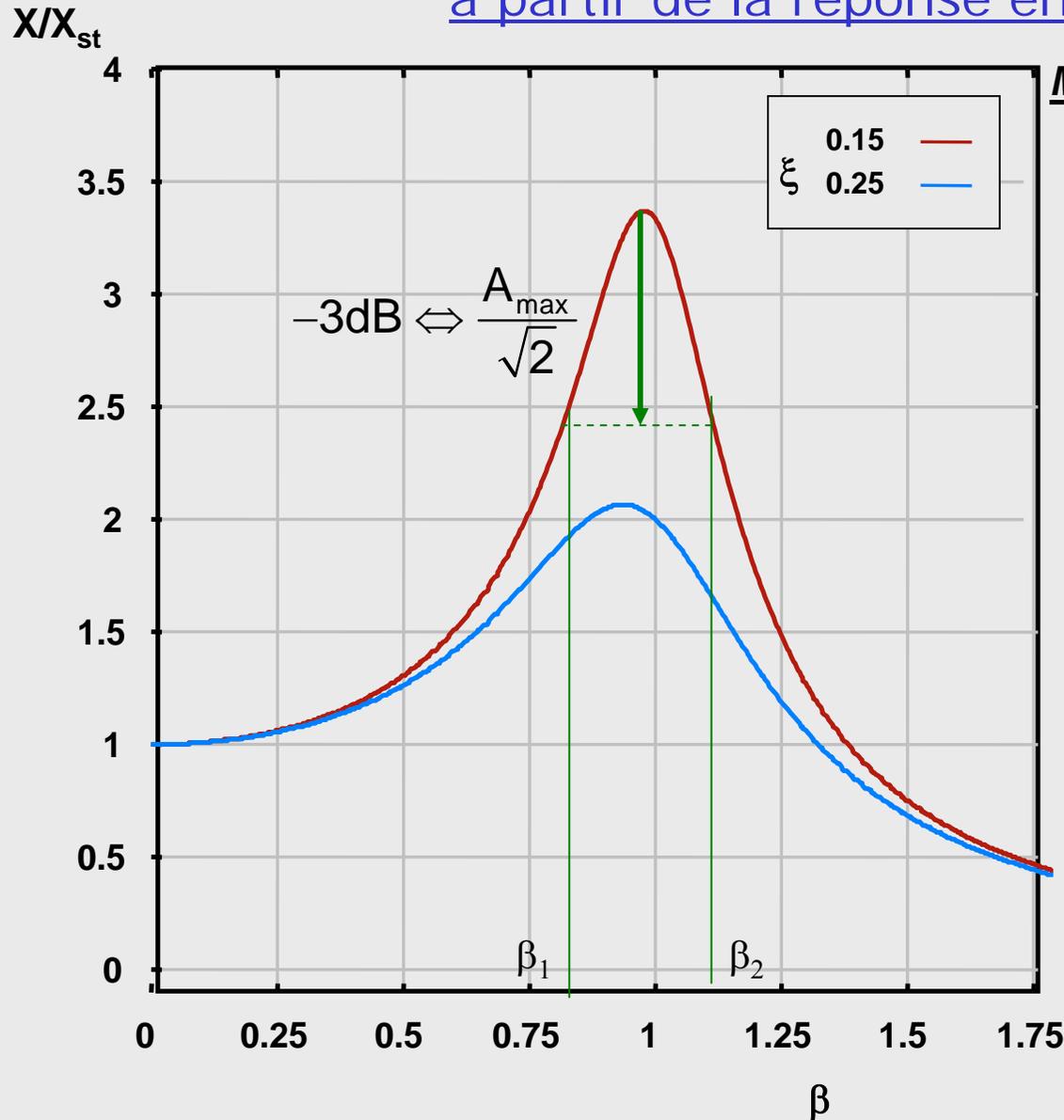
On en déduit

$$\xi \approx \frac{1}{2Q}$$

Noter que :

$$Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{m\omega_0}{C} = \frac{\sqrt{mk}}{C}$$

Mesure de l'amortissement
à partir de la réponse en fréquence



Méthode de la bande passante à -3dB

(Valide lorsque $\xi \ll 1$)

$$Q = A_{max} \approx A(1) = \frac{1}{2\xi}$$

$$\left(\frac{Q}{\sqrt{2}}\right)^2 = A(\beta_{-3dB})^2$$

$$= \frac{1}{(1 - \beta_{-3dB}^2)^2 + 4\xi^2\beta_{-3dB}^2}$$

$$\Leftrightarrow \beta_{-3dB}^2 = 1 - 2\xi^2 \pm 4\xi\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\Leftrightarrow \beta_{-3dB} \approx 1 \pm \xi \quad \text{si } \xi \ll 1$$

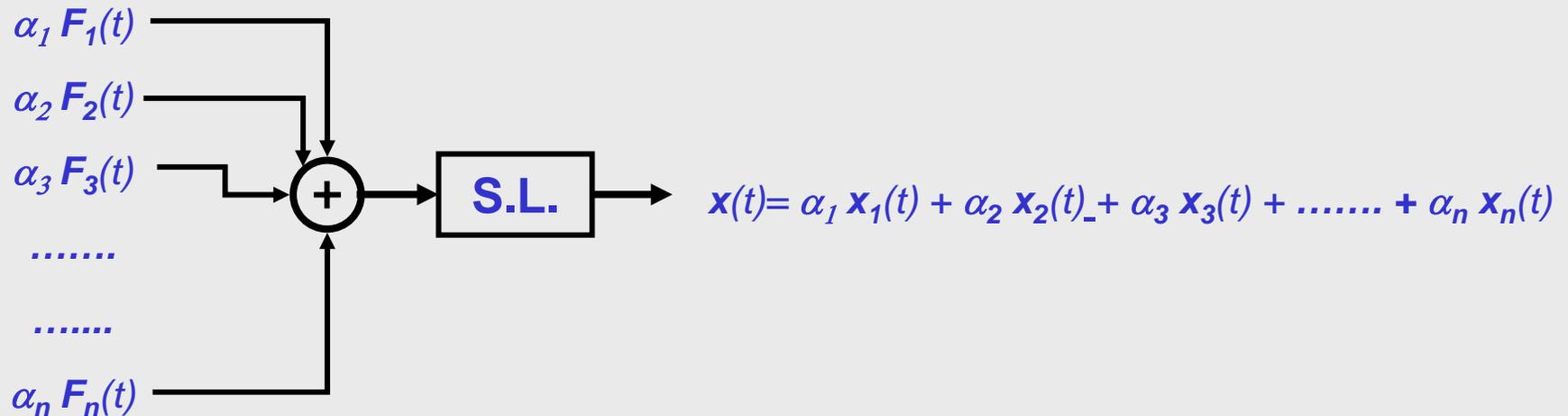
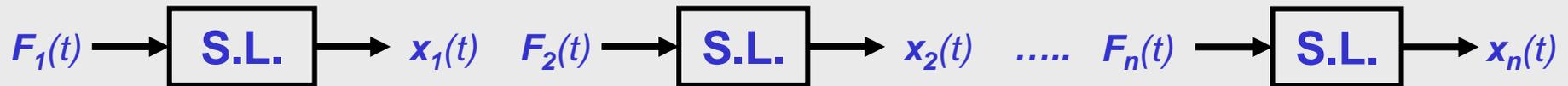
$$\xi \approx \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_0} = \frac{\Delta\omega_{-3dB}}{2\omega_0}$$

Noter que :

$$Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{-3dB}}$$

Systeme soumis à des excitations multiples
Principe de superposition

La réponse d'un système linéaire à une somme d'excitation est la superposition des réponses à chacune des excitations



2 excitations harmoniques $\Omega_1 \approx \Omega_2$
Phénomène de Battement

$$F(t) = F_1 \cos(\Omega_1 t) + F_1 \cos(\Omega_2 t) \rightarrow x_p(t) = X_1 \cos(\Omega_1 t - \Phi_1) + X_2 \cos(\Omega_2 t - \Phi_2)$$

$$X_+ = X_1 + X_2$$

$$2\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2$$

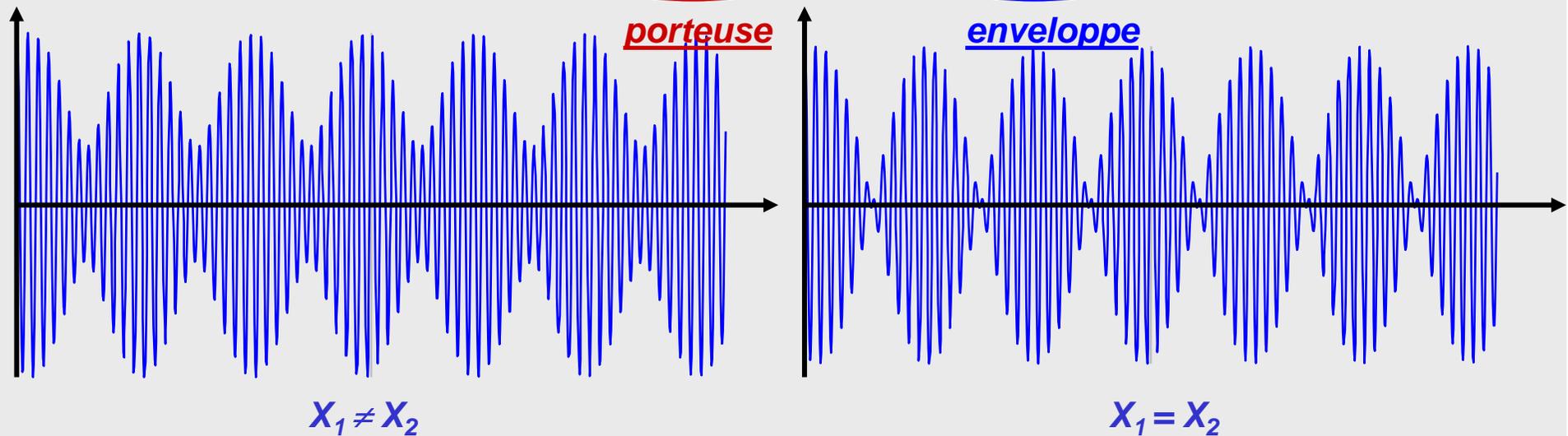
$$2\Phi_+ = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$X_- = X_1 - X_2$$

$$2\Omega_- = \Omega_1 - \Omega_2$$

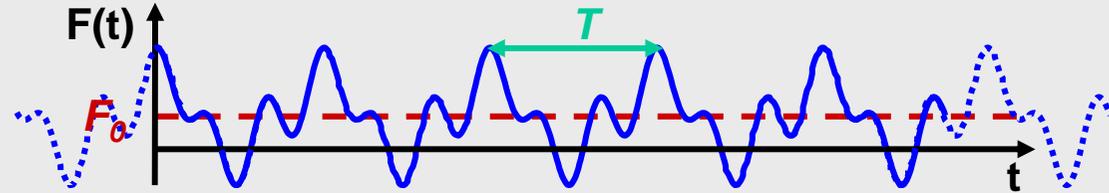
$$2\Phi_- = \Phi_1 - \Phi_2$$

$$x_p(t) = X_+ \cos(\Omega_+ t - \Phi_+) \cos(\Omega_- t - \Phi_-) - X_- \sin(\Omega_+ t - \Phi_+) \sin(\Omega_- t - \Phi_-)$$



Excitation T périodique Décomposition en Série de Fourier

- Une excitation de période T
i.e. telle que $F(t+nT) = F(t)$
peut s'écrire comme une série :



$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t) + B_n \sin(n\Omega t) \quad \text{ou} \quad F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\Omega t - \psi_n)$$

F_0 , A_n et B_n sont les **coefficients de Fourier**

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$$

Valeur moyenne

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\Omega t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\Omega t) dt$$

ou

$$F_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\operatorname{tg} \psi_n = \frac{B_n}{A_n}$$

Excitation T périodique
Réponse

A la composante harmonique $F_n(t)$ de l'excitation correspond la réponse harmonique $x_n(t)$ de même fréquence $n\Omega$:

$$F_n(t) = F_n \cos(n\Omega t - \psi_n) \quad \longrightarrow \quad x_n(t) = X_n \cos(n\Omega t - \psi_n - \phi_n)$$

Avec

$$X_n(n\Omega) = \frac{F_n}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - (n\Omega)^2)^2 + 4\xi^2 (\omega_0 n\Omega)^2}}$$

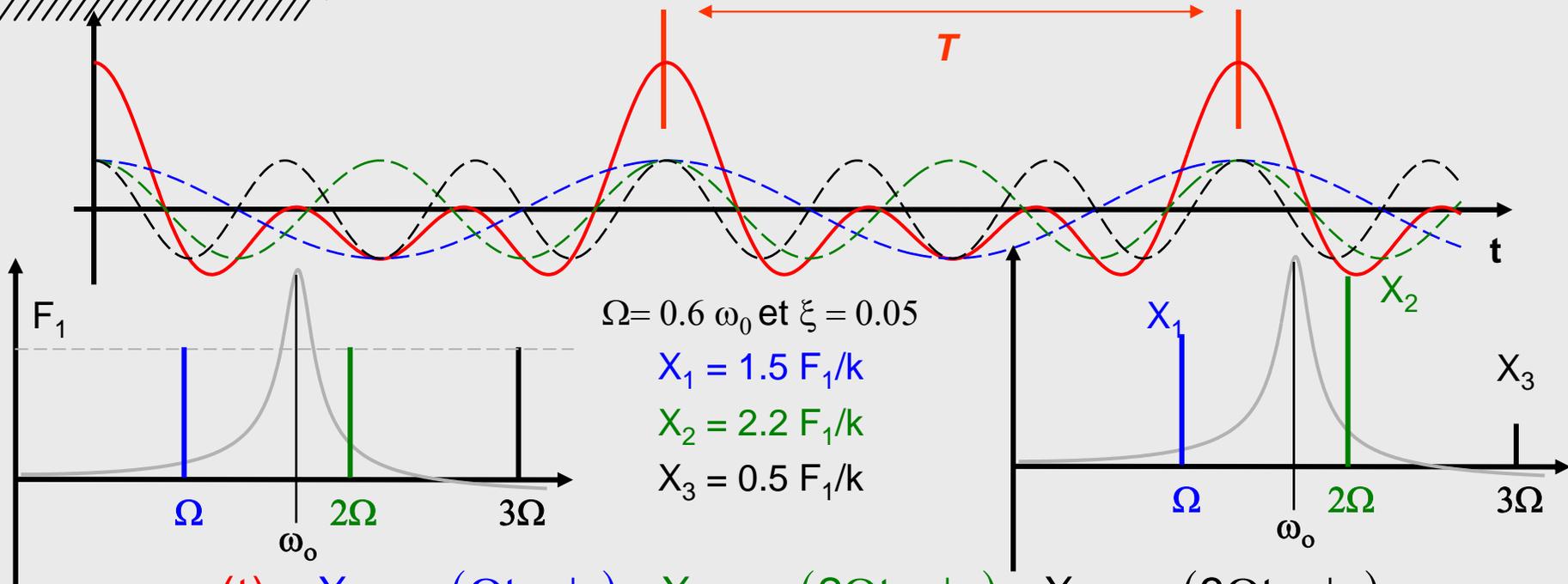
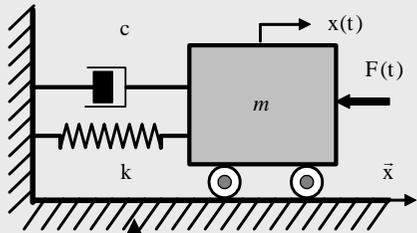
$$\phi_n(n\Omega) = \text{Arctg} \left(\frac{2\xi n\Omega \omega_0}{\omega_0^2 - (n\Omega)^2} \right)$$

Finalement par le principe de superposition on a :

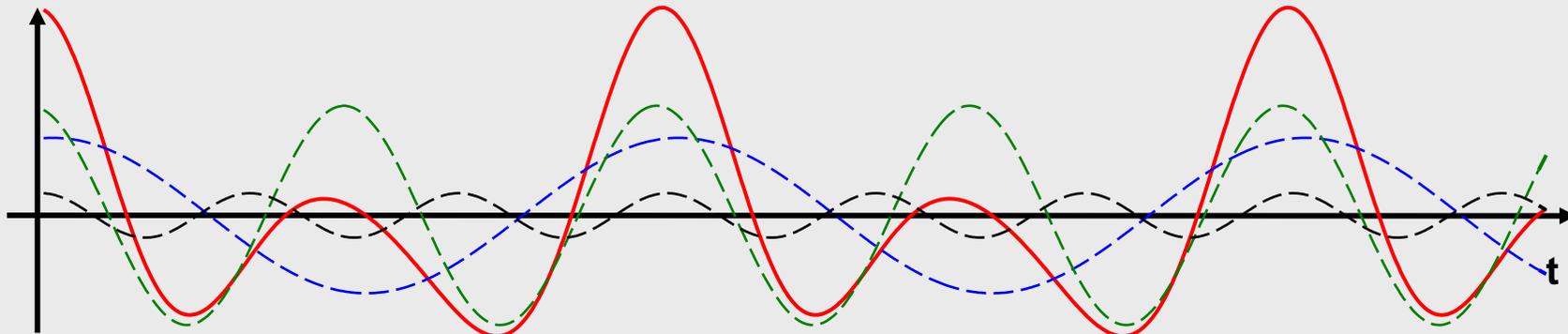
$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cos(n\Omega t - \psi_n - \phi_n)$$

Exemple : Excitation à 3 composantes harmoniques

$$F(t) = F_1 \cos(\Omega t) + F_1 \cos(2\Omega t) + F_1 \cos(3\Omega t)$$



$$x(t) = X_1 \cos(\Omega t - \phi_1) + X_2 \cos(2\Omega t - \phi_2) + X_3 \cos(3\Omega t - \phi_3)$$



Exemple : Modélisation des vibrations d'un moteur de moto (1/7)

Systeme à étudier :

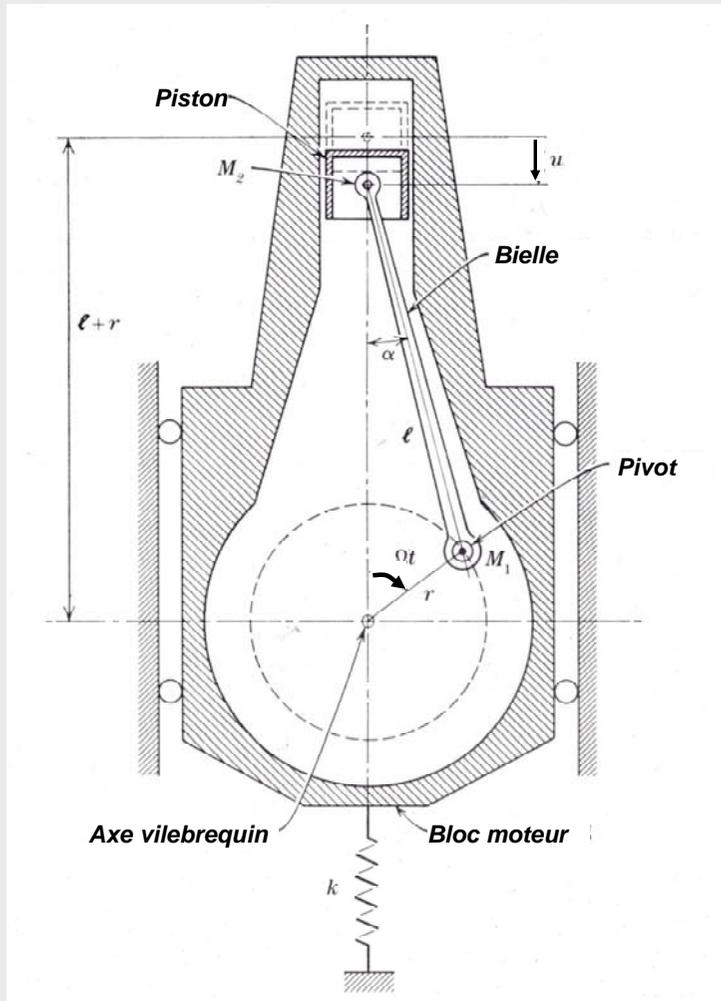
- Bloc moteur : Masse totale $M = 20$ kg
- Suspension : Raideur = k , c négligé
- Position verticale du bloc moteur : $x(t)$

Hypothèses :

- L'excitation provient du déplacement des masses mobiles concentrées en $M_1=200$ g et $M_2=700$ g
- Le déplacement horizontal est impossible
- Le bloc a un déplacement vertical seult

Paramétrage

- l : longueur de la bielle, (15 cm)
- α : angle bielle / verticale ($\ll 1$)
- r : rayon du vilebrequin (5 cm)
- Ω : la vitesse angulaire du vilebrequin
- $u(t)$: position verticale du piston/PMH



Exemple : Modélisation des vibrations d'un moteur de moto (2/7)

Force extérieures

Mouvement vertical des masses M_1 et M_2

-Forces d'inertie verticales opposées :

$$F_i = -M_i \gamma(M_i)$$

Position verticale de M_1 /PMH : $r - r \cos \Omega t$

Accélération verticale de M_1 : $r \Omega^2 \cos \Omega t$

Force verticale due à M_1 :

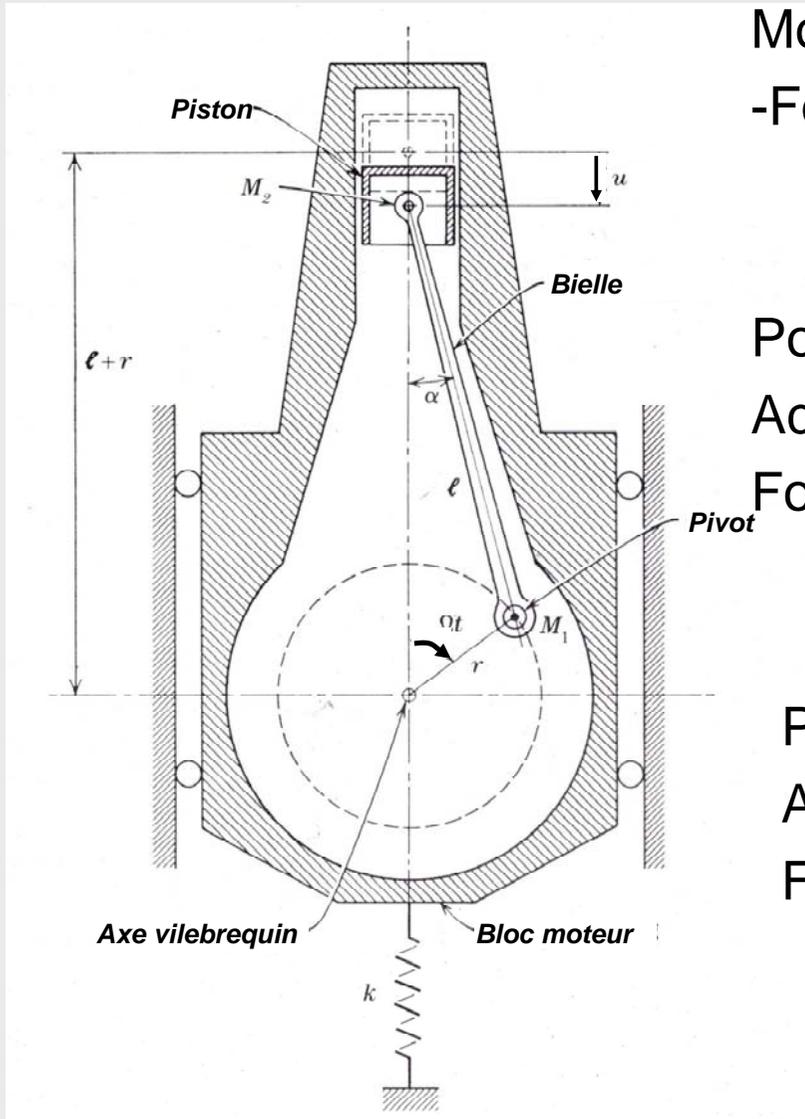
$$F_1 = -M_1 r \Omega^2 \cos \Omega t$$

Position verticale de M_2 /PMH : $u(t)$

Accélération verticale de M_2 : $\ddot{u}(t)$

Force verticale due à M_2 :

$$F_1 = -M_2 \ddot{u}(t)$$



Exemple : Modélisation des vibrations d'un moteur de moto (3/7)

Relations géométriques diverses :

$$(1) \quad l \sin \alpha = r \sin \Omega t \Leftrightarrow \alpha \approx \frac{r}{l} \sin \Omega t$$

$$(2) \quad u + l \cos \alpha + r \cos \Omega t = l + r$$

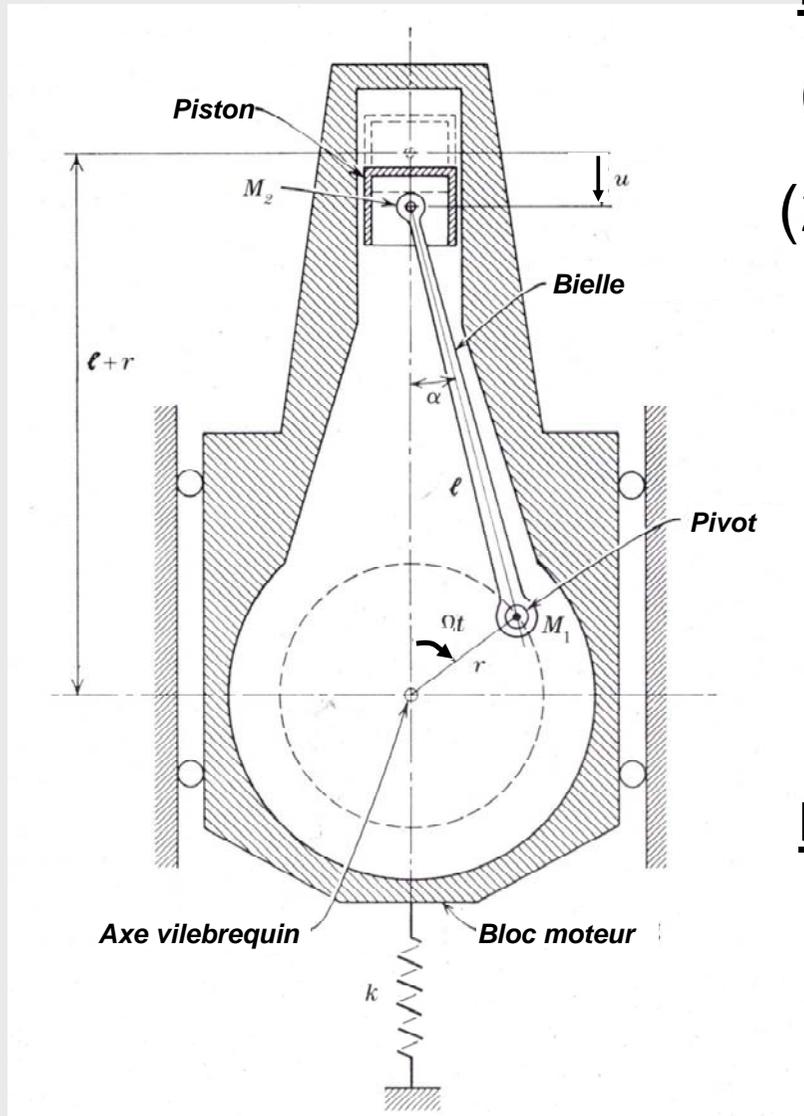
$$\Leftrightarrow u(t) = l(1 - \cos \alpha) + r(1 - \cos \Omega t)$$

$$\Leftrightarrow u(t) \approx l \frac{\alpha^2}{2} + r(1 - \cos \Omega t)$$

$$\Leftrightarrow u(t) \approx \frac{r \sin^2 \Omega t}{2 l^2} + r(1 - \cos \Omega t)$$

Force d'inertie due à M_2 :

$$F_2(t) = -M_2 \Omega^2 r \left(\cos \Omega t + \frac{r}{l} \cos 2\Omega t \right)$$

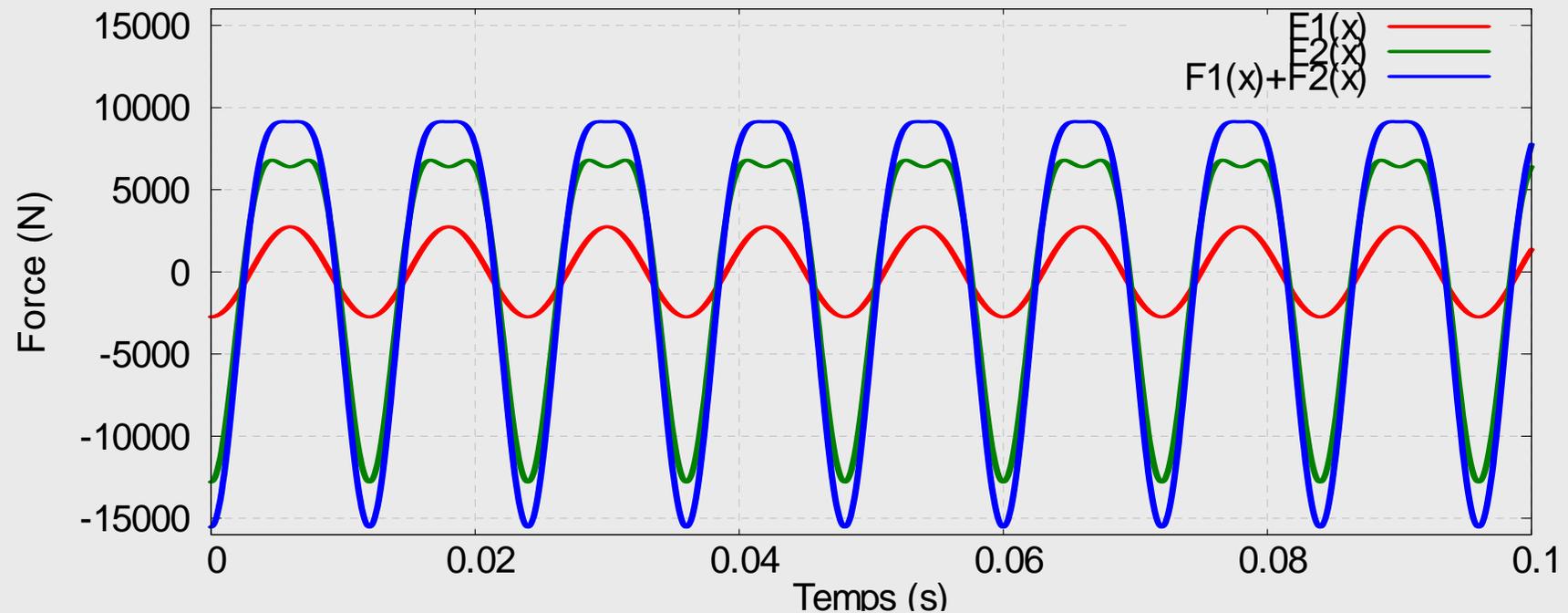


Exemple : Modélisation des vibrations d'un moteur de moto (4/7)

Force d'inertie totale : Décomposition par contribution des masses

$$F(t) = -\Omega^2 r M_1 \cos \Omega t - \Omega^2 r M_2 \left(\cos \Omega t + \frac{r}{l} \cos 2\Omega t \right)$$

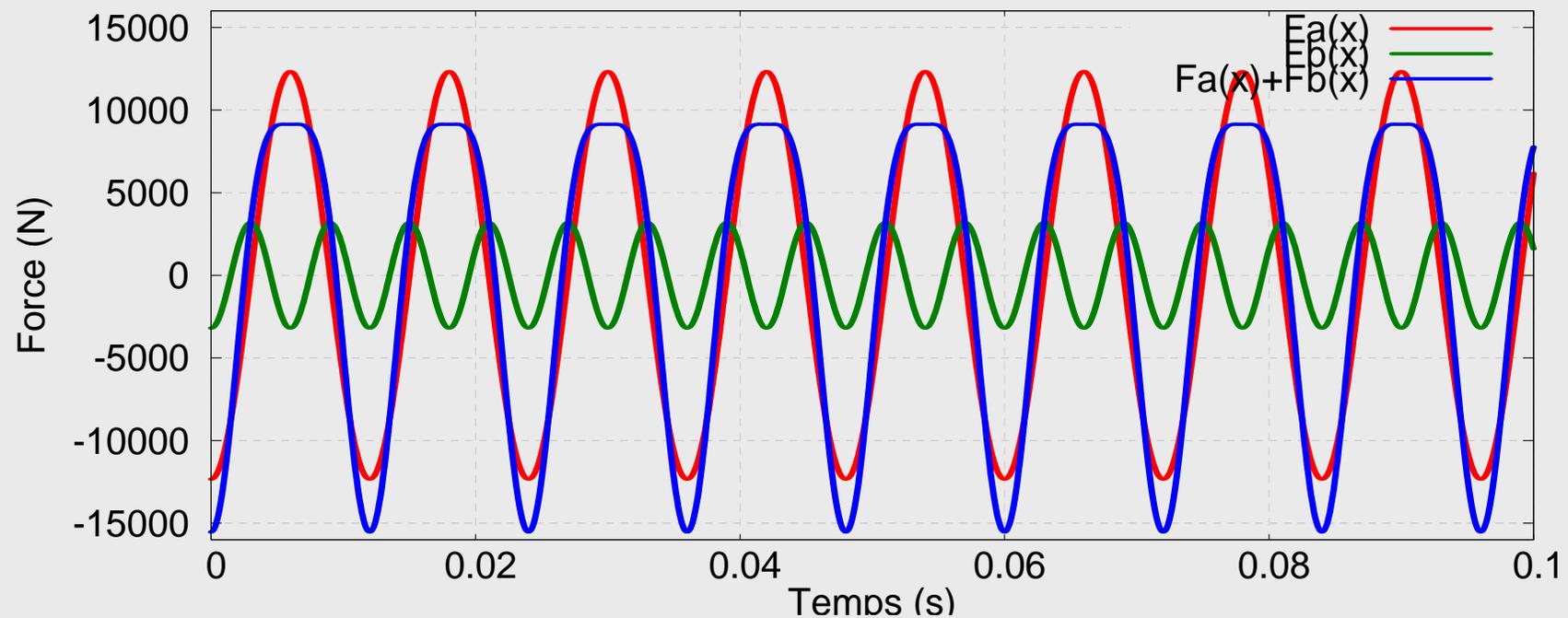
Représentation pour $N = 5000$ tours/min soit $\Omega = 523.6$ rad/s



Exemple : Modélisation des vibrations d'un moteur de moto (5/7)**Force d'inertie totale** : Décomposition en fréquences

$$F(t) = -\Omega^2 r (M_1 + M_2) \cos \Omega t - \Omega^2 r M_2 \frac{r}{l} \cos 2\Omega t$$

Représentation pour $N = 5000$ tours/min $\Rightarrow \Omega = 523.6$ rad/s
 2 composantes harmoniques (Ω et 2Ω)



Exemple : Modélisation des vibrations d'un moteur de moto (6/7)**Fréquence naturelle de vibration :**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Vitesses de rotation critiques :

$$\Omega_1 = \omega_0 \quad \text{et} \quad 2\Omega_2 = \omega_0 \Leftrightarrow \Omega_2 = \frac{\omega_0}{2}$$

On choisit la raideur k de la suspension pour qu'un régime courant du moteur ($W = 5000 \text{tr/min}$) ainsi que la mi-régime, ne soient pas critiques pour la vibration.

On prend $w_0 = 1000 \text{tr/min} = 104 \text{rad/s}$

On en déduit $k = 219300 \text{N/m}$

Force d'excitation

$$F(t) = -\Omega^2 r \left((M_1 + M_2) \cos \Omega t + M_2 \frac{r}{l} \cos 2\Omega t \right)$$

Pour obtenir la réponse permanente, on applique aux deux composantes fréquentielles, le résultat établi pour l'excitation harmonique :

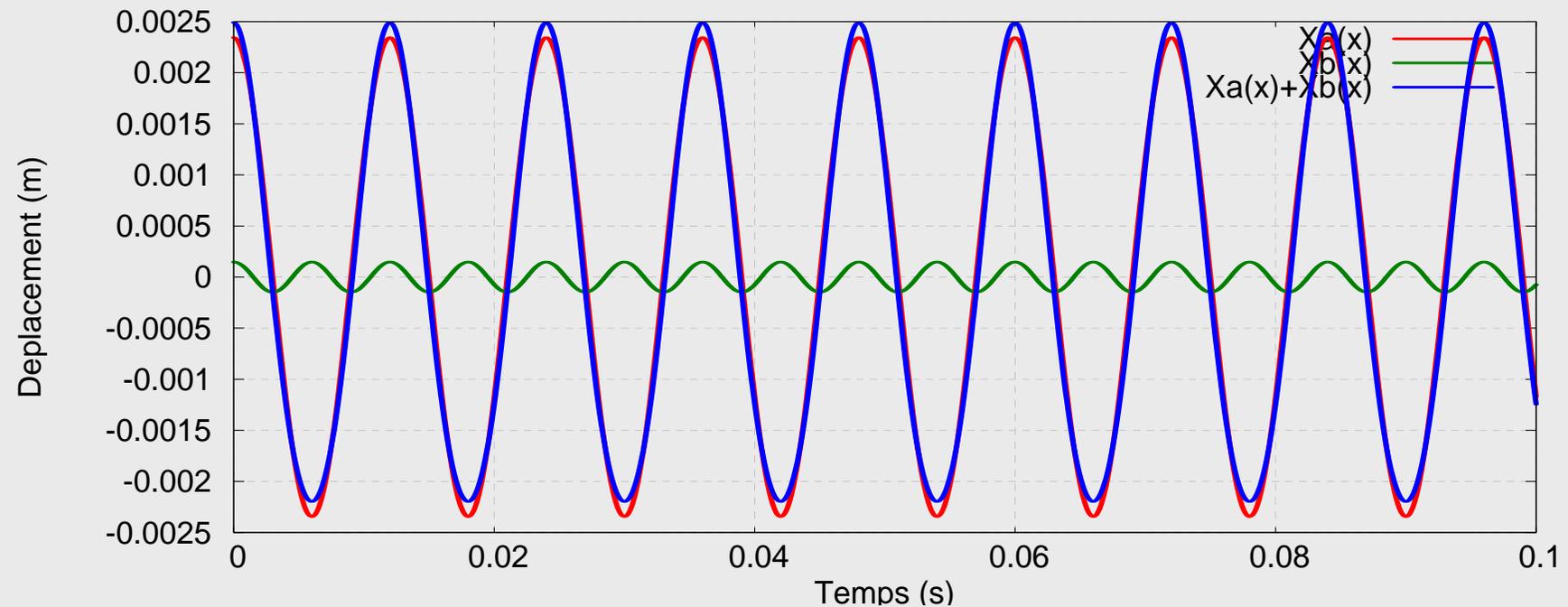
Réponse permanente :

$$x_p(t) = -\Omega^2 r \left(\frac{(M_1 + M_2)/k}{(1 - \beta^2)} \cos(\Omega t) + \frac{r}{l} \frac{M_2/k}{(1 - 4\beta^2)} \cos(2\Omega t) \right)$$

Exemple : Modélisation des vibrations d'un moteur de moto (7/7)

Réponse permanente : $\Omega = 5000$ trs/min et $\omega_0 = 1000$ trs/min soit $\beta = 5$

$$x_p(t) = -\Omega^2 r \left(\frac{(M_1 + M_2)/k}{(1 - \beta^2)} \cos(\Omega t) + \frac{r}{l} \frac{M_2/k}{(1 - 4\beta^2)} \cos(2\Omega t) \right)$$



Le mouvement vertical du moteur est quasi harmonique de fréquence Ω .
 La partie de la force à 2Ω est sans effet.
 L'amplitude est de 2.5 mm.

Réponse à une excitation quelconque :
Utilisation de la Transformée de Laplace (1/3)

Transformée de Laplace**Définition :**

$$f(t) \Leftrightarrow F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Propriétés utiles :*Linéarité*

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \Leftrightarrow \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$$

Transformée des dérivées

$$\dot{f}(t) \Leftrightarrow sF(s) - f(0)$$

$$\ddot{f}(t) \Leftrightarrow s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

Propriétés de décalage

$$f(t - t_0) \Leftrightarrow F(s) e^{-st_0}$$

$$e^{-ts_0} f(t) \Leftrightarrow F(s + s_0)$$

Transformée des fonctions usuelles

$$t^n e^{s_0 t} \Leftrightarrow \frac{n!}{(s - s_0)^{n+1}}$$

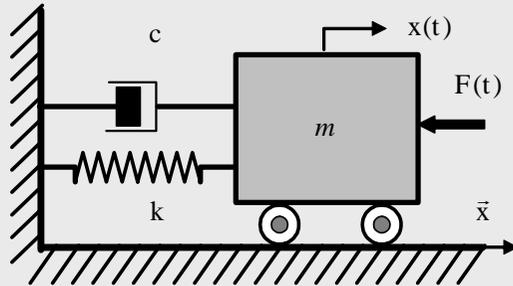
$$\sin(s_0 t) \Leftrightarrow \frac{s_0}{s^2 + s_0^2}$$

$$\cos(s_0 t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + s_0^2}$$

$$\sinh(s_0 t) \Leftrightarrow \frac{s_0}{s^2 - s_0^2}$$

$$\cosh(s_0 t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 - s_0^2}$$

Réponse à une excitation quelconque :
Utilisation de la Transformée de Laplace (2/3)



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

Lorsque $F(t)$ est une force qcq, non exprimable en combinaison linéaire de fonctions harmoniques, il peut être plus simple de passer dans l'espace complexe de Laplace où les calculs sont plus directs.

On commence par transformer chaque terme de l'équation du mouvement

$$F(t) \Leftrightarrow F(s);$$

$$x(t) \Leftrightarrow X(s); \quad \dot{x}(t) \Leftrightarrow sX(s) - x_0; \quad \ddot{x}(t) \Leftrightarrow s^2X(s) - sx_0 - v_0$$

L'équation du mouvement s'écrit alors dans le domaine complexe

$$(ms^2 + cs + k)X(s) - (ms + c)x_0 - mv_0 = F(s)$$

$$\Leftrightarrow (s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2)X(s) - (s + 2\xi\omega_0)x_0 - v_0 = F(s)/m$$

Réponse à une excitation quelconque :
Utilisation de la Transformée de Laplace (3/3)

On en déduit la transformée de la réponse cherchée :

$$X(s) = \underbrace{\frac{F(s)}{m} \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}}_{\text{Réponse permanente } X_p(s)} + \underbrace{\frac{(s + 2\xi\omega_0)x_0 - v_0}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}}_{\text{Réponse transitoire } X_t(s)}$$

Soient s_1 et s_2 les racines du dénominateur : $s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$

$$X(s) = \underbrace{\frac{F(s)}{m} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}}_{\text{Réponse permanente } X_p(s)} + \underbrace{\frac{(s + 2\xi\omega_0)x_0 - v_0}{(s - s_1)(s - s_2)}}_{\text{Réponse transitoire } X_t(s)}$$

Les deux termes se décomposent facilement en éléments simples.

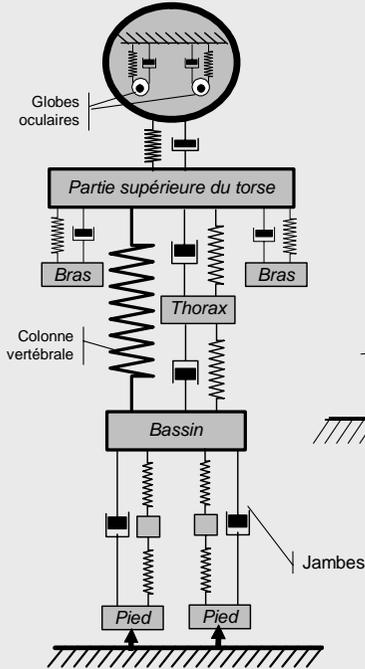
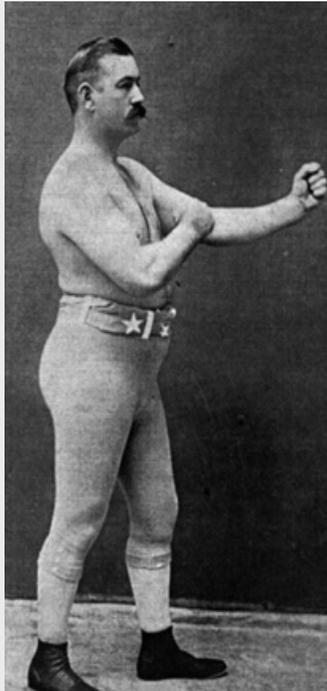
On en déduit l'expression de la réponse totale $x(t)$ par transformation inverse (*cf. formulaire*)

***Rendez – vous
en M1 pour des
vibrations un peu
plus complexes***

...

Exemples de modèles discrets

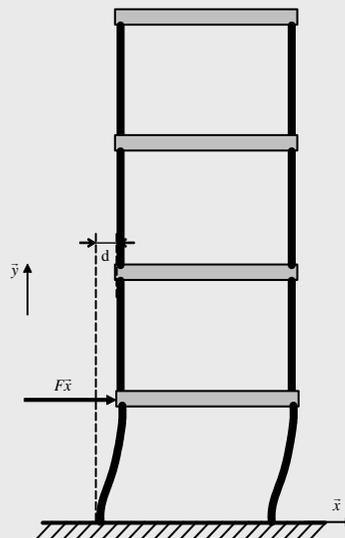
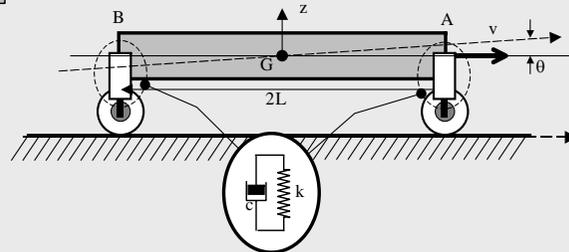
Corps humain
Modèle discret



Bâtiment
à n étages
modèle n ddl

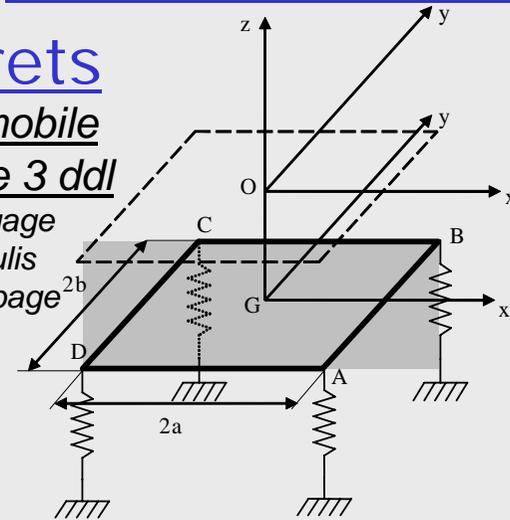


Automobile modèle à 2 ddl

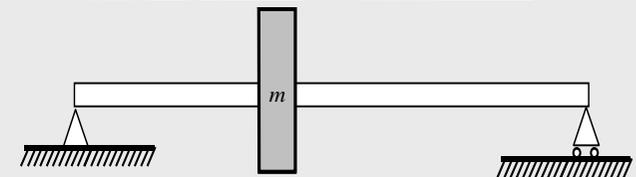


Automobile
modèle 3 ddl

Tangage
Roulis
Pompage



Turbine de générateur
modèle 1ddl



MS122 : Dynamique des systèmes discrets

Objectif : Modélisation des structures vibrantes par n ddl

Programme Cours (JC Guinot) (10h) – TD (12h) – TP (6h)

- *Rappels sur les systèmes à 1 ddl*
- **Systemes à 2 ddl** :
 - Représentation matricielle des équations du mouvement
 - Fréquences et Modes propres
 - Matrices d'Inertie et de Rigidité
 - Matrice de souplesse
 - Étude des couplages

- **Systemes à n ddl** :
 - Fréquences et modes propres
 - Analyse modale
 - Coordonnées généralisées
Équations couplées
 - Coordonnées principales
Équation découplées

- **Modes d'excitation**
- Harmonique ou quelconque
- Transitoire et permanente
- Par des actions extérieures
- Par le mouvement des supports

- **Outils**
- Équations de Lagrange
- Algèbre linéaire
- Transformées de Fourier et Laplace

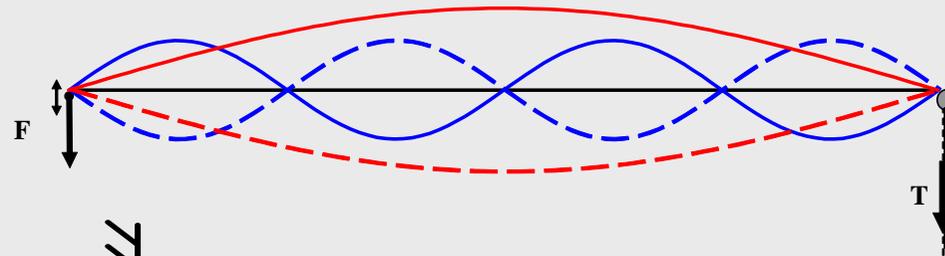
Travaux pratiques

- Systemes discrets à 2 ddl :*
- Absorbeur dynamique
 - Oscillateur à coussin d'air
 - Modèle sismique : bâtiment à deux étages

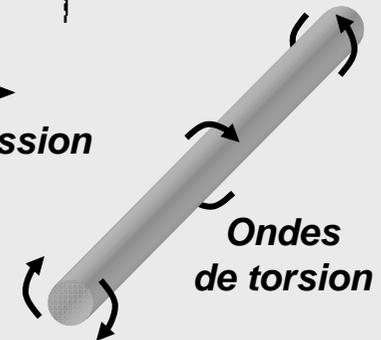
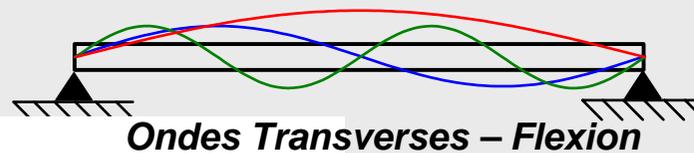
MIS – 109E : Propagation d'ondes (Vibrations des systèmes continus)

**Objectif : Étude analytique de la dynamique
des structures déformables élémentaires et de leurs assemblages**

Cordes



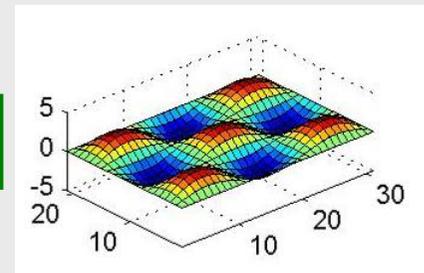
Barres et poutres



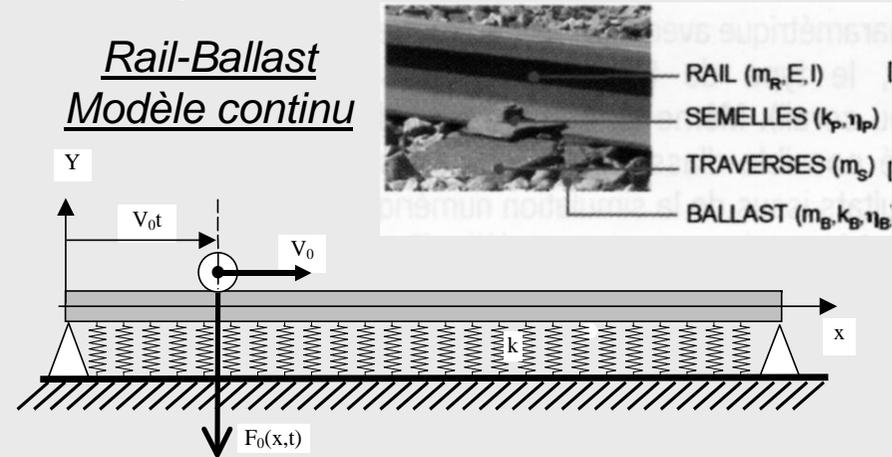
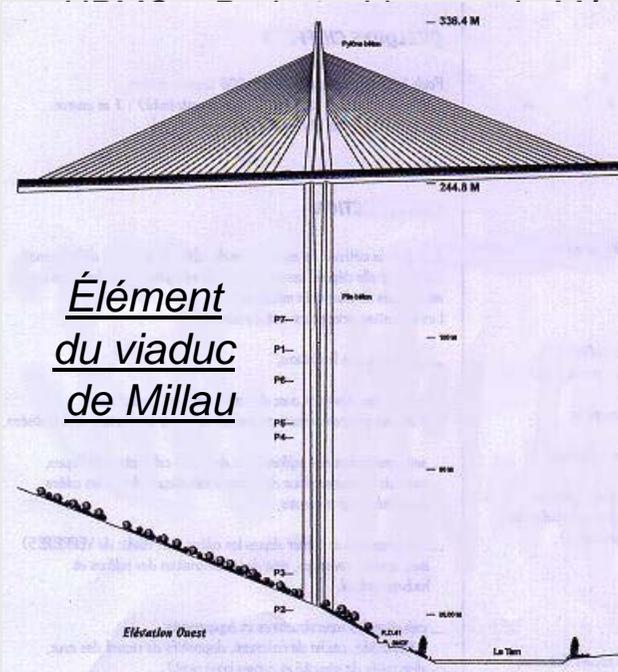
Membranes



Plaques



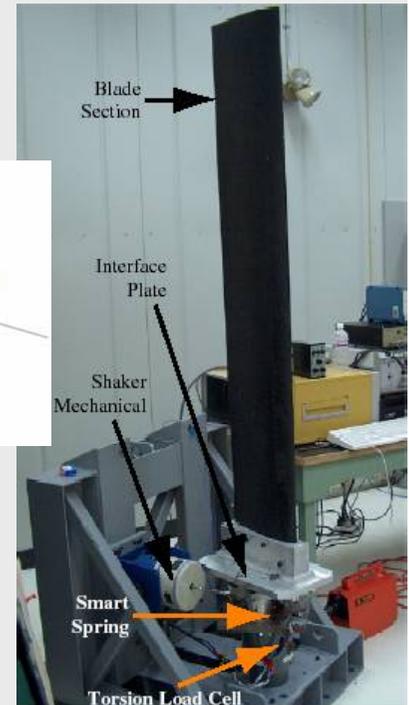
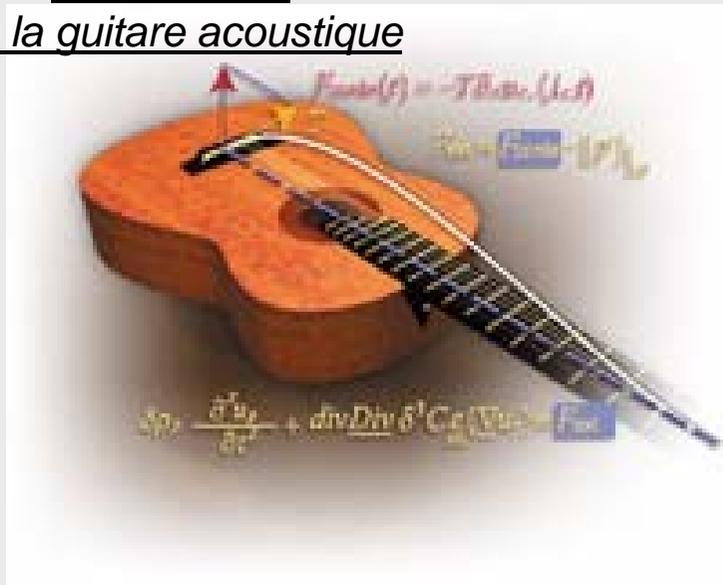
Exemples de problèmes



Vibrations des pâles d'hélicoptère

Traction-Compression
Flexion
Torsion

Modélisation de la guitare acoustique



Programme Cours (JC Guinot) (10h) – TD (12h) – TP (6h)

Méthodes exactes
structures simples

- Ondes dans les cordes
- Ondes longitudinales des barres
- Ondes de torsion des arbres
- Ondes de flexion des poutres
- Ondes dans les membranes
- Ondes dans les plaques

Méthodes approchées
pour l'ingénieur
analyse rapide
des structures composées

- Méthode de Rayleigh :
approximation à 1DDL
 - Méthode de Ritz :
approximation à 2 ou 3 DDL

Éléments finis

- Simulation des structures complexes
- Principes de mise en œuvre

Méthodes expérimentales

- Analyse du signal vibratoire
 - Analyse modale

Expériences

- Étude des cordes vibrantes
- Étude des ondes de flexion
dans les poutres
- Étude d'une plaque mince

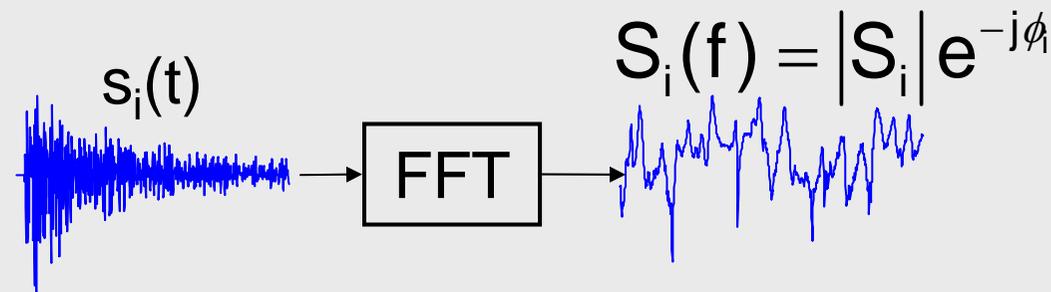
MS111C : Vibrations aléatoires ou déterministes des systèmes

Objectif : Acquérir la base des outils de traitement numérique du signal en vibration

Prolongement naturel des modules en théorie des vibrations :

- Vibration des systèmes discrets (108B)
- Propagation d'ondes ou vibration des systèmes continus (109E)

Exploitation des signaux issus des capteurs en vibration (force, accélération, vitesse) pour le diagnostic dynamique des structures



Programme Cours (F.Ollivier) (15h) – TD (12h) – TP (4h)

- Généralités sur les signaux en vibration
- Principes et mise en œuvre de l'analyse spectrale de Fourier
- Outils mathématiques de l'analyse des signaux aléatoires
 - Corrélation
 - Densité spectrale
 - Fonction de réponse en fréquence
 - Fonction de réponse impulsionnelle
 - Cohérence
- Étude de techniques expérimentales d'ingénieurs
- *(Analyse fréquentielle en ondelette)*