Chapitre 2

Probabilités conditionnelles et indépendance d'événements

2.1 Probabilités conditionnelles

On tire deux cartes successivement et sans remise d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité que ce soient deux piques ?

La réponse "intuitive" est la suivante : il y a 8 chances sur 32 de tirer un pique pour la première carte, puis 7 chances sur 31 pour la deuxième (puisqu'il reste 31 cartes dont 7 piques), donc la probabilité demandée est égale à $\frac{8}{32} \times \frac{7}{31}$.

La notion de probabilité conditionnelle permet de formuler rigoureusement une telle réponse.

Définition (Probabilité conditionnelle)**.** *Soient E et F deux événements. On note $P(E|F)$ (ce qui se lit "probabilité de E sachant F") la probabilité que l'événement E se réalise sachant que l'événement F est réalisé.*

Autrement dit, à partir d'une expérience probabiliste où E et F sont aléatoires, on change de situation : on suppose que F n'est plus aléatoire mais réalisé, et on cherche à calculer la probabilité de E dans cette nouvelle situation. Sur un schéma ensembliste (figure 2.1), ce changement de situation probabiliste consiste à considérer l'ensemble F comme le nouvel univers, à la place de Ω, et donc à ne plus considérer ce qui est en dehors de F. Autrement dit, la probabilité d'un événement E sera obtenue en ne retenant que la probabilité de sa partie contenue dans le nouvel univers, c'est-à-dire l'intersection $E \cap F$, et en divisant par $P(F)$, afin que dans la nouvelle situation, la probabilité de l'univers F soit égale à 1.

FIGURE 2.1 – Schéma du changement de situation probabiliste correspondant au conditionnement par rapport à un événement F. A gauche, situation initiale dans l'univers Ω ; à droite, situation conditionnée à F : l'événement F devient le nouvel univers, et seule la partie de E comprise dans F est considérée.

Ceci permet de justifier la formule fondamentale suivante, qui est en fait la définition mathématique de la probabilité conditionnelle :

$$\boxed{P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.}$$

On voit par cette formule que $P(E|F)$ n'est défini que si $P(F) \neq 0$; ce qui est cohérent : on ne peut pas supposer que F est réalisé s'il n'a aucune chance de se réaliser.

remarque : Attention, $E|F$ ne signifie rien en soit, ce n'est pas un événement. Seule l'expression $P(E|F)$ a un sens. En fait la probabilité conditionnelle $P(E|F)$ se note parfois $P_F(E)$, notation moins usuelle mais bien plus juste car elle traduit précisément le changement de situation probabiliste évoqué plus haut : la fonction P_F est la fonction de probabilité de la nouvelle situation, en remplacement de la fonction P initiale.

Voici maintenant comment exprimer rigoureusement la réponse à l'exemple précédent : soient A l'événement "La première carte est un pique", B l'événement "La deuxième carte est un pique", et C l'événement "Les deux cartes tirées sont des piques". On a donc $C = A \cap B$. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a

$$P(C) = P(A \cap B) = P(B|A)P(A).$$

La probabilité de tirer un pique en premier est de $P(A) = \frac{8}{32}$. Maintenant si A est réalisé, alors il reste 31 cartes dont 7 piques, et donc la probabilité de tirer à nouveau un pique est de $\frac{7}{31}$: ainsi $P(B|A) = \frac{7}{31}$. Finalement on obtient

$$P(C) = P(B|A)P(A) = \frac{7}{31} \times \frac{8}{32} = \frac{7}{124}.$$

remarque : Toujours penser à vérifier que la probabilité calculée est bien un nombre compris entre 0 et 1.

2.2 Formule des probabilités totales

On dispose de deux urnes. La première contient deux boules noires et une boule blanche ; et la deuxième contient trois boules noires et deux boules blanches. On tire au hasard une boule de la première urne et on la place dans la deuxième urne. Puis on tire au hasard une boule de la deuxième urne. Quelle est la probabilité que cette deuxième boule soit blanche ?

On note B_1 l'événement "la première boule tirée est blanche", et B_2 l'événement "la deuxième boule tirée est blanche". On cherche donc à calculer $P(B_2)$. La formule suivante, vue au premier chapitre, est le point de départ du calcul :

$$P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap B_1^c).$$

Autrement dit on décompose l'événement "la deuxième boule tirée est blanche" en deux : "la deuxième boule tirée est blanche et la première était blanche", et "la deuxième boule tirée est blanche et la première n'était pas blanche (donc était noire)". On utilise alors la définition mathématique des probabilités conditionnelles pour calculer $P(B_2 \cap B_1)$ et $P(B_2 \cap B_1^c)$, ce qui donne :

$$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|B_1^c)P(B_1^c).$$

C'est la formule des probabilités totales. A présent toutes les probabilités à droite de l'égalité peuvent se calculer :

- Pour déterminer $P(B_2|B_1)$ on se place dans la situation où B_1 est réalisé, c'est-à-dire que la première boule tirée est blanche. Dans ce cas la deuxième urne contiendra trois boules blanches et trois boules noires, et donc la probabilité de tirer une boule blanche sera de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Ainsi on a montré que $P(B_2|B_1) = \frac{1}{2}$.
- Pour déterminer $P(B_2|B_1^c)$ on se place dans la situation inverse : la première boule tirée est noire, donc la deuxième urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ainsi $P(B_2|B_1^c) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- $P(B_1)$ est la probabilité que la première boule tirée soit blanche : $P(B_1) = \frac{1}{3}$.
- Enfin $P(B_1^c) = 1 - P(B_1) = \frac{2}{3}$.

Finalement on trouve donc

$$P(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{18}.$$

On a démontré et utilisé dans ce calcul la formule des probabilités totales :

Formule des probabilités totales, cas simple. *Soient E et F deux événements, avec $P(F)$ et $P(F^c)$ non nuls. Alors*

$$\boxed{P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c).}$$

La version générale de la formule consiste à conditionner non plus par seulement deux événements (F et F^c) pour le calcul de $P(E)$, mais par un nombre n :

Formule des probabilités totales, cas général. *Soient E un événement et $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des événements formant une partition de Ω, avec $P(F_i) \neq 0$ pour tout i. Alors*

$$\boxed{P(E) = P(E|F_1)P(F_1) + P(E|F_2)P(F_2) + \cdots + P(E|F_n)P(F_n).}$$

En voici un exemple d'utilisation (cas $n = 3$) :

Pour traiter une maladie, les médecins disposent de trois nouveaux médicaments MA, MB, MC. Dans un premier cas, les médecins prescrivent indifféremment l'un des trois médicaments pour chaque traitement. Dans un deuxième cas, ils commencent à connaître mieux ces médicaments, et prescrivent MA dans 50% des cas, MB dans 30% des cas, et MC dans 20% des cas. En fait les taux de réussite de ces médicaments sont respectivement de 98%, 96% et 95%. Calculer la probabilité d'échec du traitement dans chaque cas.

On va noter A l'événement "recevoir le médicament MA", et de même B et C. On cherche la probabilité de E="échec du traitement". Il faut bien comprendre les données du problème : les taux de réussite correspondent en fait à des probabilités conditionnelles : "si on reçoit le médicament MA, alors on guérit dans 98% des cas". On a donc $P(E^c|A) = 0.98$, et de même $P(E^c|B) = 0.96$ et $P(E^c|C) = 0.95$. On va donc utiliser la formule des probabilités totales en remarquant que A, B et C forment une partition de Ω (car un et un seul des trois médicaments est administré lors d'un traitement) :

$$P(E^c) = P(E^c|A)P(A) + P(E^c|B)P(B) + P(E^c|C)P(C).$$

<u>1er cas</u> : $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$. Donc $P(E^c) = 0.98 \times \frac{1}{3} + 0.96 \times \frac{1}{3} + 0.95 \times \frac{1}{3} = 0.963$. Finalement $P(E) = 1 - P(E^c) = 0.037$.
<u>2e cas</u> : $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ et $P(C) = 0.2$. Donc $P(E^c) = 0.98 \times 0.5 + 0.96 \times 0.3 + 0.95 \times 0.2 = 0.968$, et $P(E) = 0.032$.

2.3 Formule de Bayes

Revenons au problème des deux urnes, et cherchons à répondre à cette deuxième question :

Si la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche aussi ?

Ici on demande de calculer $P(B_1|B_2)$. Cette probabilité conditionnelle ne peut pas être trouvée directement comme c'est le cas pour $P(B_2|B_1)$. En effet ici on cherche la probabilité d'un événement en conditionnant par rapport à un événement qui en découle, ce qui va contre l'intuition. Il faut donc faire une manipulation pour "retourner" la probabilité conditionnelle :

$$P(B_1|B_2) \quad = \quad \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(B_2|B_1)P(B_1)}{P(B_2)}.$$

A présent on peut effectuer le calcul :

$$P(B_1|B_2) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{3}{7}.$$

Nous avons donc utilisé la formule suivante, qui est la base de la formule de Bayes :

Soient E et F deux événements avec $P(E)$ et $P(F)$ non nuls. Alors

$$\boxed{P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E)}}.$$

La formule de Bayes est simplement la combinaison de cette formule et de la formule des probabilités totales pour le calcul de $P(E)$:

Formule de Bayes, cas simple. *Soient E et F deux événements avec $P(E)$, $P(F)$ et $P(F^c)$ non nuls. Alors*

$$\boxed{P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)}}.$$

Dans l'exercice des deux urnes, cette formule aurait permis de répondre à la deuxième question directement. A présent voici la version générale de la formule :

Formule de Bayes, cas général. *Soient E et F deux événements, et $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des événements formant une partition de Ω, avec $P(E)$, $P(F)$ et $P(F_i)$ non nuls pour tout i. Alors*

$$\boxed{P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F_1)P(F_1) + P(E|F_2)P(F_2) + \cdots + P(E|F_n)P(F_n)}}.$$

remarque : Le cas simple correspond au cas $n = 2, F_1 = F$ et $F_2 = F^c$.

2.4 Indépendance

2.4.1 Indépendance de deux événements

La définition intuitive de l'indépendance est la suivante : deux événements sont indépendants lorsque le résultat de l'un n'influence pas le résultat de l'autre. Autrement dit si E et F sont ces deux événements, le fait de supposer que F est réalisé ne change pas la probabilité de réalisation de E et inversement. On a donc :

$$P(E|F) = P(E) \quad \text{et} \quad P(F|E) = P(F).$$

Or $P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$ et $P(F|E) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$, et par conséquent on voit que les deux conditions ci-dessus se résument en une seule : $P(E \cap F) = P(E)P(F)$. C'est la définition mathématique de l'indépendance :

Définition. *Deux événements E et F sont* **indépendants** *si et seulement si*

$$P(E \cap F) = P(E)P(F).$$

remarque : Cette définition a l'avantage de ne pas supposer $P(E)$ et $P(F)$ non nuls, à la différence de la double condition précédente. En fait si $P(E) = 0$ ou si $P(F) = 0$, la formule est toujours vérifiée. Autrement dit : un événement de probabilité nulle est toujours indépendant de tout autre événement.

En pratique c'est souvent l'intuition qui permet de décider si deux événements sont indépendants ou pas. La formule $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ est alors utilisée pour faire des calculs.

exemple 1 : *On lance une pièce de monnaie deux fois de suite sur une table. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois face ?*

On note $A =$"on obtient face au premier lancer" et $B =$"on obtient face au deuxième lancer". Ici ces deux événements sont clairement indépendants : le fait d'obtenir face en premier ne change pas la probabilité d'obtenir face au deuxième. Par conséquent la probabilité demandée ("obtenir deux fois face") sera : $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

exemple 2 : *A Paris il pleut en moyenne un jour sur deux en octobre. Quelle est la probabilité qu'il pleuve à la fois le* 15 *et le* 16 *octobre ?*

Ici on notera $A =$"il pleut le 15 octobre" et $B =$"il pleut le 16 octobre", et on cherche donc à calculer $P(A \cap B)$. Ici il est sans doute faux de penser que les deux événements A et B sont indépendants car en général beau et mauvais temps évoluent sur des échelles de temps plus grandes que la journée : autrement dit il y a plus de chances que le 16 il fasse un temps similaire à celui du 15 ; et donc s'il a plu le 15 il y aura une plus grande probabilité qu'il pleuve aussi le 16. Par conséquent même si on connait par hypothèse

$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, on ne peut pas en déduire $P(A \cap B)$ du fait de cette non-indépendance. Il faudrait disposer d'autres informations pour répondre à la question.

exemple 3 : *On lance un dé. Quelle est la probabilité que le résultat soit un nombre pair supérieur ou égal à trois ?*

Il s'agit ici du premier exemple du chapitre 1. On avait noté B="le résultat est un nombre pair", C="le résultat est ≥ 3", et la probabilité cherchée est $P(A)$ avec $A = B \cap C$. En principe B et C n'ont aucune raison d'être indépendants puisqu'ils concernent le même lancer de dé. Pourtant on a $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{2}{3}$, et on avait trouvé $P(A) = P(B \cap C) = \frac{1}{3}$. On a donc $P(B \cap C) = P(B)P(C)$, et donc B et C sont mathématiquement indépendants. C'est une sorte d'indépendance fortuite, qui va contre l'intuition.

Modifions à présent légèrement l'énoncé : *On lance un dé. Quelle est la probabilité que le résultat soit un nombre pair supérieur ou égal à quatre ?*
Ici l'analyse est la même, à savoir que les événements B et D="le résultat est ≥ 4" n'ont pas de raison d'être indépendants ; et le calcul montre en effet que $P(B)P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \neq P(B \cap D) = \frac{1}{3}$; c'est-à-dire que B et D ne sont pas indépendants.

Pour résumer, l'intuition peut nous dire si des événements sont indépendants, mais à l'inverse on ne peut jamais être certain que des événements ne sont pas indépendants sans faire le calcul.

2.4.2 Indépendance et événements complémentaires

Il est facile de montrer que

$$\begin{aligned} E \text{ et } F \text{ indépendants} \quad &\Leftrightarrow \quad E \text{ et } F^c \text{ indépendants,} \\ &\Leftrightarrow \quad E^c \text{ et } F \text{ indépendants,} \\ &\Leftrightarrow \quad E^c \text{ et } F^c \text{ indépendant.} \end{aligned}$$

Intuitivement, on est simplement en train de dire que le fait que E se réalise/ne se réalise pas est indépendant du fait que F se réalise/ne se réalise pas.

2.4.3 Indépendance de n événements

On généralise la notion d'indépendance pour plus de 2 événements. Voici d'abord la version à 3 événements :

Définition. *Trois événements E, F, G sont dits* **indépendants** *(on dit aussi* **mutuellement indépendants***) lorsque les quatre relations suivantes sont vérifiées :*

$$P(E \cap F) = P(E)P(F),$$

$$P(E \cap G) = P(E)P(G),$$

$$P(F \cap G) = P(F)P(G),$$

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)P(F)P(G).$$

Pourquoi a-t-on besoin de toutes ces relations ? On pourrait penser que les deux premières ou les trois premières suffisent et entraînent les autres. Mais ceci est faux, comme le montre le contre-exemple suivant :

Exemple : *On tire deux fois un dé à six faces. Les événements suivants sont-ils indépendants ?*
$A =$ *"le premier dé tombe sur un nombre pair",*
$B =$ *"le deuxième dé tombe sur un nombre impair",*
$C =$ *"les deux dés ont même parité".*

Il est clair que A et B sont indépendants. A et C sont aussi indépendants : en effet, d'une part la probabilité de C vaut $P(C) = \frac{1}{2}$; d'autre part si l'on suppose que A est réalisé (le premier dé est pair), alors les deux dés auront même parité si le deuxième est aussi pair, donc avec probabilité $\frac{1}{2}$. Ainsi $P(C|A) = P(C) = \frac{1}{2}$ et donc A et C sont indépendants. Par le même raisonnement on peut voir que B et C sont aussi indépendants. Pour résumer on a les trois relations (indépendances deux-à-deux)

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C),$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C).$$

Cependant il est facile de voir que $P(A \cap B \cap C) = 0$ (les trois événements ne peuvent se réaliser ensemble) ; et donc que $P(A \cap B \cap C)$ est différent de $P(A)P(B)P(C)$. Ainsi les trois événements ne sont pas indépendants puisqu'il manque la dernière relation, alors qu'ils sont indépendants deux-à-deux.

Passons à présent à l'indépendance d'un nombre quelconque d'événements :

Définition. *Des événements* $E_1, E_2, E_3, \ldots$ *sont dits* **indépendants**, *ou* **mutuellement indépendants**, *si la réalisation d'un certain nombre d'entre-eux n'influence pas la réalisation des autres. Ceci équivaut à ce que toutes les relations suivantes soient vérifiées :*

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_p}) = P(E_{i_1}) \times P(E_{i_2}) \times \cdots \times P(E_{i_p}),$$

pour tous indices tels que $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p$.

2.4.4 Expériences aléatoires indépendantes

Des expériences aléatoires $\mathcal{E}_1 \dots, \mathcal{E}_n$ sont indépendantes lorsque le résultat de l'une d'entre-elles n'influe pas sur le résultat des autres. Ceci signifie qu'en choisissant pour chacune de ces expériences $\mathcal{E}_i$ n'importe quel événement E_i qui lui est relatif, on obtient des événements $E_1, \dots, E_n$ indépendants.

En pratique c'est directement l'intuition (ou une hypothèse explicite) qui permet de décider si des expériences aléatoires sont indépendantes. On peut alors en déduire l'indépendance d'événements qui en découlent.

exemple *: On lance trois dés, et on note $A =$"le 1er dé tombe sur 3", $B =$"le deuxième dé tombe sur un nombre pair", et $C =$"le 3e dé tombe sur un nombre impair". Calculer $P(A \cap B \cap C)$.*

Les trois lancers de dé sont ici clairement des expériences aléatoires indépendantes. On en déduit que A, B et C sont indépendants, puisque chacun de ces événements se réfère à un lancer différent. Ainsi $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.

2.5 Double conditionnement, indépendance conditionnelle

Comme on l'a vu dès le début de ce chapitre, conditionner par rapport à un événement G signifie se placer dans une nouvelle situation probabiliste dans laquelle G est réalisé. Cette nouvelle situation change les probabilités des événements... Les probabilités calculées conditionnellement à G obéissent aux même règles que les probabilités calculées dans la configuration initiale. Pour cette raison on note parfois $P(E|G) = P_G(E)$ la probabilité d'un événement E sachant G. En termes mathématiques, on dit que P_G est une **probabilité**, au même titre que la probabilité de référence P, et obéit aux même règles.

Voici quelques exemples de notions et formules découlant de ce principe :

Probabilité conditionnelle d'une union *Soient E, F, G trois événements, avec $P(G) \neq 0$. Alors*

$$P(E \cup F|G) = P(E|G) + P(F|G) - P(E \cap F|G).$$

Double conditionnement *Soient E, F, G trois événements, avec $P(F \cap G) \neq 0$. Alors*

$$P(E|F \cap G) = \frac{P(E \cap F|G)}{P(F|G)}.$$

Cette formule devient claire si on la comprend comme la définition, sous l'hypothèse que G est réalisé, de la probabilité conditionnelle de E sachant F. Autrement, elle se démontre très facilement à partir des définitions :

Preuve.

$$P(E|F \cap G) = \frac{P(E \cap F \cap G)}{P(F \cap G)} = \frac{P(E \cap F|G)P(G)}{P(F|G)P(G)} = \frac{P(E \cap F|G)}{P(F|G)}.$$

□

Formule des probabilités totales conditionnelle : *Soient E, F, G trois événements avec $P(F \cap G) \neq 0$. Alors*

$$P(E|G) = P(E|F \cap G)P(F|G) + P(E|F^c \cap G))P(F^c|G).$$

La notion d'indépendance conditionnelle est souvent utile :

Indépendance conditionnelle : *Soient E, F, G trois événements, avec $P(G) \neq 0$. On dit que E et F sont* **indépendants conditionnellement** *à G lorsque, sous l'hypothèse que G est réalisé, E et F sont indépendants. Autrement dit,*

$$P(E \cap F|G) = P(E|G)P(F|G).$$

Des événements conditionnellement indépendants n'ont aucune raison d'être indépendants. Voici un exemple de cette situation.

Exemple : *Un tribunal doit traiter d'affaires de meurtres. A la fin du procès deux jurés doivent se prononcer et l'accusé sera condamné si les deux jurés se prononcent pour la condamnation. On suppose que lorsque l'accusé a réellement commis un meurtre, le procès lui est logiquement défavorable, si bien que chaque juré le déclarera coupable avec une probabilité de 0.7 et leurs deux avis sont alors indépendants. Lorsqu'il n'est pas coupable, leurs deux avis sont aussi indépendants et la probabilité qu'il soit déclaré coupable est alors de 0.2 pour chacun des deux jurés. On suppose que 60% des accusés sont effectivement coupables.*

Un accusé est jugé. On note les événements $A =$"le premier juré le déclare coupable" et $B =$"le deuxième juré le déclare coupable".

1. *Calculer la probabilité qu'il soit condamné.*
2. *Les événements A et B sont-ils indépendants ?*

1. On doit calculer $P(A\cap B)$. Traduisons d'abord les hypothèses. Notons M ="l'accusé est un meurtrier". On a :

$$P(A|M) = P(B|M) = 0.7, \text{ et } P(A|M^c) = P(B|M^c) = 0.2.$$

Les hypothèses d'indépendance de l'énoncé sont ici des indépendances conditionnelles : conditionnellement au fait que l'accusé est un meurtrier (c'est-à-dire que M est réalisé), les deux avis sont indépendants, et donc A et B sont indépendants. On a donc

$$P(A\cap B|M) = P(A|M)P(B|M).$$

De même A et B sont indépendants conditionnellement à M^c :

$$P(A\cap B|M^c) = P(A|M^c)P(B|M^c).$$

Enfin on a $P(M) = 0.6$. A présent on peut calculer :

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P(A\cap B|M)P(M) + P(A\cap B|M^c)P(M^c) \quad \text{(formule des probabilités totales)}, \\ &= P(A|M)P(B|M)P(M) + P(A|M^c)P(B|M^c)P(M^c), \\ &= 0.7\times 0.7\times 0.6 + 0.2\times 0.2\times 0.4 = \frac{31}{100}. \end{aligned}$$

2. On doit comparer $P(A\cap B)$ à $P(A)P(B)$. On a :

$$P(A) = P(A|M)P(M) + P(A|M^c)P(M^c) = 0.7\times 0.6 + 0.2\times 0.4 = \frac{1}{2},$$

et de même $P(B) = \frac{1}{2}$. Ainsi $P(A)P(B) = \frac{1}{4} \neq P(A\cap B)$. A et B ne sont donc pas indépendants.