TD 1

1. Le 14 Juillet, à Saint Troupaize, il fait beau huit fois sur 10. Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévisions météorologiques indépendantes: la météo nationale dirigé par le frére de B Calcagno qui se trompe une fois sur 20 et la grenouille verte Audrey qui se trompe deux fois sur cent. La météo annonce la pluie alors que le comportement d'Audrey laisse prévoir du beau temps. Déterminer la probabilité pour qu'il fasse beau. En déduire le temps le plus probable. La fiabilité des prévisions ne dépend pas du temps qu'il fera effectivement.
2. Jojo posséde une commode Louis XV en noyer à trois tiroirs. Dans le premier tiroir, il y 30 chaussettes roses et 20 chaussettes vertes. Les deux autres tiroirs contiennent, l'un quatre chaussettes roses, l'autre quatre chaussettes vertes mais Jojo trés distrait ne sait pas lesquels. A 5 heures du mat Jojo s'en va à l'ISEM, mais ce matin là panne d'électricité. Il prend au hasard une chaussette du tiroir 1 et la place dans un des deux autres tiroirs. Il prend ensuite dans celui ci une chaussette au hasard et utilise un lampe torche. Elle est rose (la chaussette) comme son pantalon et ses bretelles. Calculer la probabilité que le dernier tiroir ouvert contienne plusieurs chaussettes roses.
3. On fait rouler quatre dés. Quelle est la probabilité de $A =$"obtenir au moins un 6"
4. On fait rouler deux dés 24 fois. Quelle est la probabilité de $B =$"obtenir au moins une fois deux 5".
5. n personnes sont réunies dans une piéce.
   (a) Calculer la probabilité pour que deux d'entre elles au moins aient la même date d'anniversaire.
   (b) Trouver un minorant de cette probabilité.
   (c) En utilisant la minoration précédente, trouver un nombre de personnes en dessus duquel la probabilité sera supérieure à $0,95$.
6. On suppose que dans une course, il y a n chevaux au départ.
   (a) Calculer le nombre de tiercés possibles.
   (b) Calculer la probabilité de gagner, avec un ticket le tiercé dans l'ordre, dans l'ordre ou le désordre, dans le désordre. AN: $n = 14$.
7. Dans les p boîtes à lettres d'un immeuble, un facteur est chargé de distribuer n lettres dont r_1 sont pour la boîte 1, ..., r_p pour la boîte p. Peu consciencieux, il les distribue au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité pour que la distribution soit correcte?
   (b) Quelle est la probabilité pour que la boîte 1 soit correctement remplie?
   (c) Quelle est la probabilité pour que dans la boîte 1 il n'y ait aucune lettre destinée à un voisin?
   (d) Quelle est la probabilité pour qu'il y ait dans chaque boîte exactement le nombre de lettres qui lui était destiné?
8. On lance deux dés au hasard et on considére les événements suivants: $A =$"le premier dé tombe sur une face impaire, $B =$"le deuxiéme dé tombe sur une face impaire" et $C =$ "la somme des valeurs des faces des deux dés est impaire. Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

9. Soient n événements mutuellement indépendants $A_1, ..., A_n$; montrer que
$$1 - P(A_1 \cup .... \cup A_n) \leq \exp(-(P(A_1) + ... + P(A_n))).$$

10. Une population comporte 60% de femmes. On sait par ailleurs que 10% des hommes ont les cheveux longs et que 40% les femmes ont les cheveux courts. Une personne se présente avec les cheveux longs. Quelle est la probabilité pour que ce soit une femme?

11. Quelle est la probabilité pour qu'en mettant r boules dans n cellules, toutes les cellules soient occupées.

12. Soit $A_1, ..., A_n$ des événements; montrer que
$$P(A_1 \cup .... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} S_i \text{ où } S_i = \sum_{1 \leq j_1 < ..... < j_i \leq n} P(A_{j_1} ..... A_{j_i}).$$
On cherche un parapluie qui, avec la probabilité $\frac{p}{7}$ se trouve dans l'un quelconque des 7 étages d'un immeuble ($p \in [0, 1]$ fixé). On a exploré en vain les 6 premiers étages. Quelle est la probabilité qu'il soit au $7^{éme}$ étage?

13. Une maladie M affecte un français sur 1000. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de $99 \mid 100$ lorsque cette maladie est présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour $0,2 \mid 100$ des personnes saines testées. Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif? Conclure?

14. On dispose de N urnes numérotées de 0 à N. L'urne numérotée k contient k boules rouges et $N - k$ boules blanches. On choisit une urne au hasard. Sans connaitre son numéro on tire n fois de suite une boule avec remise aprés chaque tirage. Quelle est la probabilité que le $n + 1$ iéme tirage donne encore une boule rouge sachant que, au cours des n premiers tirages, seules des boules rouges ont été tirées? Calculer la limite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini.

15. Mon voisin a 2 enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon? Un autre voisin a deux enfants; le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon?

16. Castor et Pollux projettent de se rencontrer entre $17h$ et $18h$. Chacun d'eux a promis à l'autre de ne pas l'attendre plus de 10 minutes. On suppose qu'ils arrivent indépendamment à des instants uniformément distribués entre $17h$ et $18h$. Quelle est la probabilité d'une rencontre? Maintenant Castor fixe son heure d'arrivée à x; quelle probabilité a-t-il de rencontrer Pollux? Arrivant à l'heure x, Castor ne trouve personne; quelle probabilité a-t-il de rencontrer Pollux?

17. On dispose de 3 cartes; la premiére a ses deux faces rouges, la deuxiéme ses deux faces blanches, la troisiéme une face blanche et une face rouge. Un distributeur tire au hasard une carte, puis choisit au hasard d'exposer une face au parieur qui doit parier sur la couleur de la face cachée. Quelle est la meilleure stratégie du parieur?

TD2

1. Construire une variable aléatoire non constante de variance nulle.

2. Soit A un événement et 1_A la fonction indicatrice de A considérée comme variable aléatoire. Montrer que $E(1_A) = p(A)$. Réponse: On a:
$$E(1_A) = \int 1_A dp = \int_A dp = p(A).$$

3. Soit (A_n) une suite d'événements et $N = \sum\limits_{k=1}^{n} 1_{A_k}$; on pose:
$$\alpha_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(A_k), \quad \beta_n = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\leq i<j\leq n} p(A_i \cap A_j).$$
   (a) Montrer que: $E\left(\frac{N}{n}\right) = \alpha_n$, $V\left(\frac{N}{n}\right) = \beta_n - \alpha_n^2 + \frac{\alpha_n - \beta_n}{n}$. Réponse: On a:
$$E\left(\frac{N}{n}\right) = \frac{1}{n}E(N) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(1_{A_k}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(A_k) = \alpha_n.$$
   De même
$$\begin{aligned} V\left(\frac{N}{n}\right) &= \frac{1}{n^2}\left(E\left(N^2\right) - (E(N))^2\right) = \frac{1}{n^2}E\left(N^2\right) - \alpha_n^2 \\ &= \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{k=1}^{n}(1_{A_k})^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq n} 1_{A_i}1_{A_j}\right) - \alpha_n^2 \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} E(1_{A_k}) - 2\sum_{1\leq i<j\leq n} E\left(1_{A_iA_j}\right)\right) - \alpha_n^2 \\ &= \frac{1}{n^2}\left(n\alpha_n - 2\sum_{1\leq i<j\leq n} p(A_i\cap A_j)\right) - \alpha_n^2 \\ &= \frac{1}{n}\left(\alpha_n - (n-1)\beta_n\right) - \alpha_n^2 = \beta_n - \alpha_n^2 + \frac{\alpha_n - \beta_n}{n}. \end{aligned}$$
   (b) En dduire que: $V\left(\frac{N}{n}\right) \to 0 \Leftrightarrow \beta_n - \alpha_n^2 \to 0$. Réponse: On a: α_n et β_n compris entre 0 et 1. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n-\beta_n}{n} = 0$. Donc
$$V\left(\frac{N}{n}\right) \to 0 \Leftrightarrow \beta_n - \alpha_n^2 \to 0.$$

4. Soit X une v.a.r et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $p(|X| > k) < \varepsilon$. Réponse: Posons $A_k = (|X| > k)$. Cette suite d'événements est décroissante pour l'inclusion et leur intersection esdt l'ensemble vide. Donc
$$\lim_{n\to+\infty} p(|X| > n) = \lim_{n\to+\infty} p(A_n) = 0.$$
   Comme la suite $(p(A_n))$ est décroissante, il existe $k > 0$ tel que $p(|X| > k) < \varepsilon$.

5. **Calcul de la fonction indicatrice d'EULER.** On considére une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. Une expérience consiste à tirer une boule au hasard et à noter son

numéro.

i. Pour chaque diviseur a de N, on désigne par E_a l'événement "la boule tirée porte un numéro divisible par a"; calculer $p\left(E_a\right)$. Réponse: Si on adopte comme univers $\Omega = \{1, 2, ..., N\}$, l'événement $E_a = \{a, 2a, \quad , pa\}$ où $p = E\left(\frac{N}{a}\right) = \frac{N}{a}$. Si non adopte l'équiprobabilité

$$p\left(E_a\right) = \frac{\frac{N}{a}}{a} = \frac{1}{a}.$$

ii. Soit a et b deux diviseurs de N; déterminer $E_a \cap E_b$ et calculer $p\left(E_a \cap E_b\right)$. Réponse: On a:

$$E_a \cap E_b = E_{a \vee b}.$$

Donc, comme a et b divise N, $a \vee b$ divise N et

$$p\left(E_a \cap E_b\right) = \frac{1}{a \vee b}.$$

iii. A quelle condition les événements E_a et E_b sont-ils indépendants? Réponse: Les événements E_a et E_b sont indépendants, ssi, $a \vee b = ab$,ssi a et b sont premiers entre eux.

iv. Soit $n \geq 2$ et $a_1, ..., a_n$ des diviseurs de N; déterminer $E_{a_1} \cap ... \cap E_{a_n}$ set calculer $p\left(E_{a_1} \cap ... \cap E_{a_n}\right)$. Réponse: Comme précédemment

$$p\left(E_{a_1} \cap ... \cap E_{a_n}\right) = \frac{1}{a_1 \vee .... \vee a_n}.$$

v. A quelle condition les événements $E_{a_1}, ..., E_{a_n}$ sont-ils indépendants? Réponse: Si les événements $E_{a_1}, ..., E_{a_n}$ sont indépendants, Ils sont deux à deux indépendants. Cela signifie que les $a_1, ..., a_n$ sont premiers entre eux deux à deux. Si tel est le cas, toute partie finie de $(a_1, ..., a_n)$ est constitué d'entiers premiers dans leur ensemble et les événements associés sont donc indépendants. Donc

$E_{a_1}, ..., E_{a_n}$ sont indépendants, ssi, $a_1, ..., a_n$ sont deux à deux indépendants.

vi. En prenant un exemple montrer que la relation d'indépendance n'est pas transitive. Réponse: On prend E_2, E_3 et E_4.

vii. En notant $\varphi(N)$ le nombre d'entiers inférieurs ou égal à N et premiers avec N, montrer que

$$\frac{\varphi(N)}{N} = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Réponse: On note A l'événement $\{p \in \Omega;\ \ p \wedge N = 1\}$. On observe que, si $N = p_1^{\alpha_1} .....p_k^{\alpha_k}$, alors

$$A = E_{p_1}^c .....E_{p_k}^c.$$

D'aprés ce qui précéde les événements E_{p_1},.....,E_{p_k} sont indépendants et donc $E_{p_1}^c$,.....,$E_{p_k}^c$ sont indépendants. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(N)}{N} &= p(A) = p\left(E_{p_1}^c .....E_{p_k}^c\right) = p\left(E_{p_1}^c\right) .....p\left(E_{p_k}^c\right) \\
&= \left(1 - p\left(E_{p_1}\right)\right) ..... \left(1 - p\left(E_{p_k}\right)\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) ...... \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).
\end{aligned}$$

6. Un joueur va au casino avec une fortune $a \in N$. A chaque partie, il peut gagner 1 franc avec une probabilité p et perdre 1 franc avec une probabilité $q = 1 - p$. Son but est de jouer jusqu'à obtenir la fortune $c \geq a$, $c \in N$ mais il doit s'arréter s'il est ruiné. On note $s_c(a)$ la probabilité de succés (atteindre c avant la ruine).

   (a) Calculer $s_c(0)$ et $s_c(c)$.

   (b) Montrer que
   $$s_c(a) = ps_c(a+1) + qs_c(a-1)$$
   et en déduire la valeur de $s_c(a)$.AN: $a = 100$, $c = 200$ et $a = 100$, $c = 20000$.

7. On s'intéresse à l'effet biologique produit par des électrons à l'issue d'une cathode. Précisément, on suppose que chaque électron émis a une probabilité p d'être actif. On suppose que tous les électrons ont un comportement indépendant les uns des autres. On note Z le nombre d'électrons émis et Y le nombre d'entre eux qui sont actifs. On suppose que Z suit une loi de Poisson de paramétre λ. Déterminer la loi de Y. Réponse:On numérote les électrons par émission. L'électron $n$est celui qui sera émis le n-iéme si $Z \geq n$.Al'électron n qu'il soit émis ou pas est associée une marque $X_n$qui vaut 1si l'électron est actif et 0 sinon. Alors
   $$Y = \sum_{n=1}^{Z} X_n.$$
   On doit trouver la loi de Y. Il est clair que
   $$p(Y = m) = \sum_{k=m}^{+\infty} p(Y = k, Z = k) = \sum_{k=m}^{+\infty} p\left(\sum_{n=1}^{Z} X_n = k, Z = k.\right)$$
   Sans hypothése, on peut supposer que Z et les X_i sont indépendants et donc
   $$p(Y = m) = \sum_{k=m}^{+\infty} p\left(\sum_{n=1}^{k} X_n = k\right) p(Z = k).$$
   D'une part les X_n suivent une loi de Bernouilli de paramétre p, donc $\sum_{n=1}^{k} X_n$ suit une loi binomiale de paramétre k et p. Donc
   $$\begin{aligned} p(Y = m) &= \sum_{k=m}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} C_k^m p^m (1-p)^{k-m} = \sum_{k=m}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{m!(k-m)!} p^m (1-p)^{k-m} \\ &= \frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda}}{m!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} = \frac{(\lambda p)^m}{m!} \exp(-\lambda + \lambda - \lambda p) = \frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda p}}{m!}. \end{aligned}$$

TD 3

1. Dans le problème du jeu de casino où le joueur est autorisé à faire des dettes, on s'interesse au temps d'attente du premier gain.

2. Posons $\varphi_n = p\,(\text{"au nieme coup, pour la premiére fois, le joueur réalise un gain"})$. Par convention $\varphi_0 = 0$.Calculer φ_1. Réponse: On a:

$$\varphi_1 = p\,(X_1 = 1) = p.$$

   (a) On pose

$$\Phi(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n s^n$$

   Montrer que $\varphi_n = q\left(\varphi_1\varphi_{n-2} + ... + \varphi_{n-2}\varphi_1\right)$pour $n \geq 2$. Réponse: On observe que $X_1 = -1$ sinon le n-iémme coup ne serait pas celui du premeir gain pour le joueur lors que $n \geq 2$.Donc aprés le premier coup le joueur est à la fortune $a-1$.Donc pour passer en $a+1$une prmiére fois au n-iéme coup, il devra d'abord revenir en $k$coups une premiére fois au niveau a,puis en k'coup de a en $a+1$ avec $k+k'+1 = n$.Alors on observe deux choses: ce qui se passe lors des k'coups évoqués est indépendant de ce qui se passe lors de $k$coups précédents et la probabilité pour passer une premiére fois en k coups de $a-1$ à a est la même que celle de passer une premiére fois en k coups de a à $a+1$. Donc en faisant varier k de 1 à $n-2$, on a:

$$\forall n \geq 2 \quad \varphi_n = q\left(\varphi_1\varphi_{n-2} + ... + \varphi_{n-2}\varphi_1\right).$$

   (b) En déduire que $\Phi(s) - ps = qs\Phi^2(s)$. En déduire Φ et calculer $\sum_{n\geq 0} \varphi_n$. Réponse: On a:

$$\begin{aligned}
\Phi^2(s) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\varphi_k\varphi_{n-k}\right)s^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\varphi_k\varphi_{n-k}\right)s^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\varphi_k\varphi_{n-k}\right)s^n = \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_{n+1}s^n \\
&= \frac{1}{qs}\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_{n+1}s^{n+1} = \frac{1}{qs}\left(\Phi(s) - ps\right).
\end{aligned}$$

   Alors

$$\Phi(s) = \frac{1 \pm \sqrt{(1-4pqs^2)}}{2qs}.$$

   Le" signe + fournit une application qui tend vers 0 si $s \to 0$ et on l'élimine. Donc

$$\Phi(s) = \frac{1 - \sqrt{(1-4pqs^2)}}{2qs}.$$

   Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\varphi_n &= \Phi(1) = \frac{1-\sqrt{(1-4pq)}}{2q} = \frac{1-\sqrt{(1-4p(1-p))}}{2q} \\
&= \frac{1-|(1-2p)|}{2q} = \begin{cases} \frac{p}{q} & \text{si } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } p > \frac{1}{2} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Dans le premier cas il est possible que le joueur ne réalise jamais de gain avec une probabilité de $1-\frac{p}{q}>0$alors bien même qu'on l'autorise à avoir des dettes. C'est le cas dans un jeu de casino. Dans le dexiéme cas, il est sur de réaliser un gain en un tems fini.

(c) Soit N le numéro du coup où le joueur réalise un gain pour la premiére fois. Calculer $E(N)$. Réponse: Si $p<\frac{1}{2}$, $E(N)=+\infty$. Si $p>\frac{1}{2}$;alors

$$E(N)=\Phi'(1)=\frac{1}{2p-1}.$$

3. Soient X et Y deux v.a de lois de Poisson de paramétres α et β. Montrer que, pour tout i suffisamment grand, $|p(X=i)-p(Y=i)|\leq|\alpha-\beta|$. Réponse: On a:

$$|p(X=i)-p(Y=i)|=\left|e^{-\alpha}\frac{\alpha^i}{i!}-e^{-\beta}\frac{\beta^i}{i!}\right|=\left|e^{-\gamma}\frac{\gamma^i}{i!}\right||\alpha-\beta|\leq\left|e^{-\alpha}\frac{\beta^i}{i!}\right||\alpha-\beta|.$$

On a:

$$\frac{\beta^i}{i!}\sim\frac{\beta^i}{\sqrt{2\pi i}\left(\frac{i}{e}\right)^i}=\frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\left(\frac{e\beta}{i}\right)^i.$$

Il en résulte que $e^{-\alpha}\frac{\beta^i}{i!}$ tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini et donc pour i grand $\left|e^{-\alpha}\frac{\beta^i}{i!}\right|\leq 1$.

4. Soit X une v.a à valeurs entiéres de fonction génératrice $G(s)$. On suppose qu'il existe $s_0>1$ tel que $G(s_0)<\infty$. On pose

$$F(s)=\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{m_r}{r!}s^r \text{ où } m_r=E(X^r).$$

(a) Montrer que $m_r<\infty$ pour tout $r\geq 0$. Réponse: Il en résulte que G est définie pour $|s|\in[1,s_0[$ et donc

$$E(X(X-1)....(X-r+1))=\frac{1}{r!}G^{(r)}(1)<+\infty.$$

Par récurrence, on a la réponse.

(b) Montrer que F converge pour $|s|<\ln s_0$. Réponse: On a:

$$m_r=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n n^r.$$

On choisit $s>0$ et on a

$$F(s)=\sum_{r=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{p_n}{r!}(ns)^r=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n e^{ns}=G(e^s).$$

Donc si $e^s<s_0$, on a: F définie. Donc, pour tout $s<\ln s_0$, F est définie. La théorie du rayon de convergence donne la réponse.

5. Peut-on piper deux dés à six faces de sorte que la somme des points soit équirépartie sur $\{2,...,12\}$? Solution: La formulation du problème est: comme il y a 11 sommes possibles, est-il possible de truquer une paire de dé pour que la probabilité d'obtenir chacun des résultats 2, 3, ..., 12 soit égal à $\frac{1}{11}$? La réponse est NON: un tel trucage est impossible. La preuve se fait en utilisant les fonctions génératrices. On note X (resp Y) la variable aléatoire donnant le résultat du premier (resp du second dé) et $(p_1,.....,p_6)$ (resp $(q_1,....,q_6)$) la loi de X (resp de Y). Il est naturel sans autre précision dans l'énoncé de supposer X et Y indépendantes. Les

fonctions génératrices s'écrivent alors

$$\begin{array}{rcl} G_X(z) & = & p_1 + ... + p_6 z^5 \\ G_Y(z) & = & q_1 + ... + q_6 z^5 \\ G_{X+Y} & = & \frac{1}{11}\left(1 + ... + z^{10}\right). \end{array}$$

L'indépendance se traduit par

$$G_{X+Y} = G_X G_Y.$$

Or G_X et G_Y sont des polynômes de degré impaire et ont donc une racine réelle, alors que G_{X+Y} a pour racine les racines $11^{iéme}$ de l'unité sauf 1 qui sont non réelle car 11 est impair. C'est beau.

Il est clair qu'une méthode plus élémentaire mais moins naturelle est possible. On a:

$$p(Z=2) = p_1 q_1 = \frac{1}{11},\quad p(Z=12) = p_6 q_6 = \frac{1}{11} \quad \text{et } p(Z=7) = \sum_{i=1}^{6} p_i q_{7-i} = \frac{1}{11}.$$

On obtient alors

$$\frac{1}{11} = p(Z=7) \geq \frac{1}{11}\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{q_1}{p_1}\right) = \frac{1}{11}\left(\frac{p_1^2 + q_1^2}{p_1 q_1}\right) \geq \frac{2}{11}.$$

On retrouve que c'est absurde.

1. Soit X une v.a.r telle que $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$. On se donne $\alpha \geq 0$.

   (a) Soit $\lambda \geq 0$; montrer que

   $$p(X - m \geq \alpha) = p(X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda).$$

   Réponse: On a: $(X - m \geq \alpha) = (X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda)$.

   (b) Calculer $E\left((X - m + \lambda)^2\right)$. Réponse: On a:

   $$E\left((X - m + \lambda)^2\right) = E\left((X - m)^2\right) + 2\lambda E((X - m)) + \lambda^2 = \sigma^2 + \lambda^2.$$

2. Montrer que

   $$\forall \lambda \geq 0 \; p(|X - m| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2 + 2\lambda\alpha}.$$

   En déduire l'inégalité de Cantelli $p(|X - m| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \lambda^2}$. Réponse: On a:

$$(X - m \geq \alpha) = (X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda) \subset \left((X - m + \lambda)^2 \geq (\alpha + \lambda)^2\right) = (|X - m + \lambda| \geq \alpha + \lambda).$$

On a:

$$\begin{array}{rcl} (\alpha + \lambda)^2 p((|X - m| \geq \alpha)) & = & (\alpha + \lambda)^2 \int_{(|X - m| \geq \alpha)} dp_X(x) \leq \int_{(|X - m| \geq \alpha)} (x - m + \lambda)^2 dp_X(x) \\ & \leq & \int (x - m + \lambda)^2 dp_X(x) \leq E\left((X - m + \lambda)^2\right). \end{array}$$

Donc

$$p(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2 + 2\lambda\alpha}.$$

Le premier membre ne dépend pas de λ.On va donc minimiser $\varphi(\lambda) = \frac{\sigma^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2+2\lambda\alpha}$.L'examen de la dérivée et du tableau de variation nous donne un minimum pour $\lambda = \frac{\sigma^2}{\alpha}$ et donc

$$p(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \lambda^2} = \varphi\left(\frac{\sigma^2}{\alpha}\right).$$

(a) Montrer que $p(|X - m| \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\alpha^2+\lambda^2}$. Cette inégalité est-elle meilleure que celle de Bienaymé-Tchebitcheff. Réponse: En changeant X en $-X$, on a:

$$p(-X + m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \lambda^2}$$

et donc

$$p(|X - m| \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\alpha^2 + \lambda^2}.$$

Cette inégalité est meilleur que Bienaymé-Tchebitcheff si $\frac{2\sigma^2}{\alpha^2+\lambda^2} < \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$, soit, si $\alpha^2 < \sigma^2$.

3. Démontrer l'inégalité de Hölder: si X et Y sont des v.a.r telles que $E(|X|^p) < \infty$ et $E(|Y|^q) < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $E(|XY|) \leq E(|X|^p)^{\frac{1}{p}} E(|Y|^q)^{\frac{1}{q}}$.

4. Soit Z une v.a.r telle que $0 < E\left(Z^4\right) < +\infty$ et $E(Z) = 0$; montrer que

$$p(Z \geq 0) \geq \frac{E\left(Z^2\right)^2}{4E(Z^4)}$$

5. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires prenant leurs valeurs dans $\{-1, 1\}$ indépendantes et de même loi donnée par $p(X = -1) = p(X = 1) = \frac{1}{2}$. Soit $S_n = X_1 + ... + X_n$. On appelle temps d'arrêt de la suite (X_n) une v.a T à valeurs dans $N \cup \{\infty\}$ qui vérifie

$$\forall n \in N,\ \exists A_n \in \{-1, 1\}^n,\ (T \leq n) = ((X_1, ..., X_n) \in A_n).$$

(a) Calculer $E(S_n)$.
(b) Montrer que toute variable aléatoire constante $n_0 \in N$ est un temps d'arrêt.
(c) Montrer, que, si T et N sont deux temps d'arrêt, $R = Max(T, N)$ est un temps d'arrêt.
(d) Montrer que, si T est un temps d'arrêt, alors pour tout n, il existe $A_n \in \{-1, 1\}^n$ tel que $(T = n) = ((X_1, ..., X_n) \in A_n)$.
(e) Soit $T = \inf(n \geq, X_n = 1)$; montrer que T est un temps d'arrêt. Calculer $E(S_T)$.

TD4

1. Soit X une v.a à valeurs dans R_+ de densité f et de fonction de répartition F. Montrer que
$$E(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))\, dt.$$
Réponse: On a:
$$(1 - F(t)) = \int_t^{+\infty} f(x)\, dx.$$
C'est à dire
$$\int_0^{+\infty} (1 - F(t))\, dt = \int_0^{+\infty} \int_t^{+\infty} f(x)\, dx dt = \int_0^{+\infty} \int_0^{x} f(x)\, dt dx = \int_0^{+\infty} x f(x)\, dx = EX.$$

2. Si X est une v.a à valeurs dans R_+ de densité f; déterminer la densité de $\frac{1}{X}$. Réponse: Soit φ une fonction borélienne. On a:
$$E(\varphi(X)) = \int \varphi(x) f(x)\, dx = \int \varphi\left(\frac{1}{y}\right) f\left(\frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y^2} = \int \psi(y)\, g(y)\, dy$$
où $g(x) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$ .Le pasage de f à g est biunivoque car $x \to \frac{1}{x}$ est presque partout dérivable et égal à sa réciproque. Donc $\frac{1}{X}$ est à densité et sa densité est $x \to \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. Soient X et Y deux v.a indépendantes et de loi normale centrée réduite. Déterminer la loi de $X^2 + Y^2$. Réponse: Les deux lois ont pour densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.Posons $Z = X^2 + Y^2$ et la loi du couple (X, Y) a pour densité $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. On utilise encore la méthode de la fonction test et on obtient, si φ est une fonction borélienne:
$$\begin{aligned} E(\varphi(Z)) &= \iint \varphi\left(x^2 + y^2\right) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy \\ &= \iint_{[0,2\pi]\times R_+} \varphi\left(r^2\right) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta \quad \text{(passage en polaire)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} \varphi\left(r^2\right) dr\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u e^{-\frac{u}{2}} \varphi(u)\, du = \frac{1}{2} \int u e^{-\frac{u}{2}} \chi_{R_+} \varphi(u)\, du. \end{aligned}$$
Donc Z suit une loi exponentielle de paramétre $\frac{1}{2}$.

4. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes de densités g et h et $\varphi(x, y)$ une fonction positive. On pose $\psi(x) = E(\varphi(x, Y))$. Montrer que $E(\psi(X)) = E(\varphi(X, Y))$ .Réponse:

5. Soient trois nombres X, Y, Z choisis indépendamment et avec la loi uniforme dans $[0, 1]$. Quelle est la probabilité que l'on puisse former un triangle avec des segments de longueurs X, Y, Z.

6. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans R^2 de densité $f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-y} 1_D(x, y)$ avec $D = \left\{x > 0, y > 0, y^2 > x\right\}$.

   (a) Déterminer les lois de X et Y. Réponse: On a:
$$E(\varphi(X)) = \iint \varphi(x) \frac{e^{-y}}{2\sqrt{x}} \chi_D dxdy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x}} \left(\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-y} dy \right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx.
\end{aligned}$$

Donc X admet pour densité $x \to \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \chi_{R_+}$. De même

$$\begin{aligned}
E(\varphi(Y)) &= \iint \varphi(y) \frac{e^{-y}}{2\sqrt{x}} \chi_D dx dy \\
&= \int_0^{+\infty} \varphi(y) e^{-y} \left(\int_0^{y^2} \frac{dx}{2\sqrt{x}} \right) dy \\
&= \int_0^{+\infty} \varphi(y) y e^{-y} dy.
\end{aligned}$$

Donc Y admet pour densité $y \to y e^{-y} \chi_{R_+}$.

(b) Les v.a X et Y sont-elles indépendantes? Réponse: Si X et Y étaient indépendantes, on aurait

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-y} 1_D(x, y) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} y e^{-y} \chi_{(R_+)^2}.$$

Ce qui n'est pas vrai. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

(c) Les v.a X et $Y - \sqrt{X}$ sont-elles indépendantes? Réponse: On utilise toujours la méthode de la fonction test. Posons $Z = Y - \sqrt{X}$.On a:

$$E(\varphi(Z)) = \iint \varphi\left(y - \sqrt{x}\right) \frac{e^{-y}}{2\sqrt{x}} \chi_D dx dy.$$

On fait le changement de variable:

$$\begin{matrix} x = u \\ y - \sqrt{x} = v \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v + \sqrt{u} \end{cases}$$

$$\text{et} \quad (x, y) \in D \Longleftrightarrow (u, v) \in (R_+)^2.$$

Donc

$$\begin{aligned}
E(\varphi(Z)) &= \iint \varphi(v) \frac{e^{-(v+\sqrt{u})}}{2\sqrt{u}} \chi_{(R_+)^2} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv \\
&= \int_0^{+\infty} \varphi(v) e^{-v} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}} du \right) dv \quad \text{car} \quad \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = 1. \\
&= \int_0^{+\infty} \varphi(v) e^{-v} dv\,.
\end{aligned}$$

Donc $Y - \sqrt{X}$ suit une loi à densité $v \to e^{-v} \chi_{R_+}$. De la même maniére, on calcule la loi du couple $\left(X, Y - \sqrt{X}\right)$ et on a:

$$\begin{aligned}
E(\varphi(Z)) &= \iint \varphi\left(x, y - \sqrt{x}\right) \frac{e^{-y}}{2\sqrt{x}} \chi_D dx dy \\
&= \iint \varphi(u, v) \frac{e^{-(v+\sqrt{u})}}{2\sqrt{u}} \chi_{(R_+)^2} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv \\
&= \iint \varphi(u, v) \frac{e^{-(v+\sqrt{u})}}{2\sqrt{u}} \chi_{(R_+)^2} du dv.
\end{aligned}$$

Donc le couple suit la loi à densité

$$\frac{e^{-(v+\sqrt{u})}}{2\sqrt{u}}\chi_{(R_+)^2} = \left(\frac{e^{-\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}}\chi_{R_+}\right)\left(e^{-v}\chi_{R_+}\right)$$

qui est le produit tensoriel des densités de X et $Y - \sqrt{X}$.

(d) Les v.a $\frac{X}{Y^2}$ et Y sont-elles indépendantes? Réponse: On pose $U = \frac{X}{Y^2}$ et toujours la méthode de la fonction test donne/

$$E(\varphi(U)) = \iint \varphi\left(\frac{x}{y^2}\right)\frac{e^{-y}}{2\sqrt{x}}\chi_D(x,y)\,dxdy.$$

Alors le changement de variable

$$\begin{array}{l} \frac{y}{x^2} = u \\ y = v \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = uv^2 \\ y = v \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \left| \begin{array}{cc} v^2 & 2uv \\ 0 & 1 \end{array} \right| = v^2$$

et

$$(x,y) \in D \Longleftrightarrow u > 0 \text{ et } 0 < u \leq 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} E(\varphi(U)) &= \iint \varphi(u)\frac{e^{-v}}{2\sqrt{uv^2}}\chi_{]0,1]\times R_+^*}(u,v)\,v^2dudv \\ &= \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{2\sqrt{u}}\left(\int_0^{+\infty} ve^{-v}dv\right)du \\ &= \Gamma(2)\int_0^1 \frac{\varphi(u)}{2\sqrt{u}}du = \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\sqrt{u}}du. \end{aligned}$$

Donc $\frac{X}{Y^2}$ suit la loi de densité $\frac{1}{2\sqrt{u}}\chi_{]0,1]}$. La loi du couple $\left(\frac{X}{Y^2}, Y\right)$ se calcule de la même maniére

$$\begin{aligned} E\left(\varphi\left(\frac{X}{Y^2}, Y\right)\right) &= \iint \varphi\left(\frac{x}{y^2}, y\right)\frac{e^{-y}}{2\sqrt{x}}\chi_D(x,y)\,dxdy \\ &= \iint \varphi(u,v)\frac{e^{-v}}{2\sqrt{uv^2}}\chi_{]0,1]\times R_+^*}(u,v)\,v^2dudv \\ &= \iint v\varphi(u,v)\frac{e^{-v}}{2\sqrt{u}}\chi_{]0,1]\times R_+^*}(u,v)\,dudv. \end{aligned}$$

Donc la densité de la loi du couple $\left(\frac{X}{Y^2}, Y\right)$ est $(u,v) \to v\frac{e^{-v}}{2\sqrt{u}}\chi_{]0,1]\times R_+^*}(u,v) = \left(\frac{e^{-v}}{2\sqrt{u}}\chi_{]0,1]}(v)\right)\left(ve^{-v}\chi_{R_+^*}(v)\right)$ et c'est le produit tensoriel des lois de $\frac{X}{Y^2}$ et de Y. Donc $\frac{X}{Y^2}$ et Y sont indépendantes.

7. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes ayant la même densité $f(x) = 2x1_{]0,1[}$.déterminer la loi de $\frac{X}{Y}$.

8. Soit X une v.a positive telle que pour tout $x > 0$, p$(X > 0) > 0$ et qui vérifie

$$\forall x, y > 0\; p(X > x + y\,|X > x) = p(X > y).$$

Déterminer la loi de X et interpréter. Réponse: On travaille avec les fonctions de répartition. Alors

$$\begin{aligned} p(X > x + y\,|X > x) &= \frac{p(X > x + y)}{p(X > x)} = \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)} \\ p(X > y) &= 1 - F(y). \end{aligned}$$

Si on pose $G = 1 - F$, on a:

$$G(x+y) = G(x)\,G(y)$$

équation fonctionnelle vérifiée par les fonctions $x \to e^{ax}$.Donc

$$F(x) = (1 - e^{ax})\,\chi_{R_+}.$$

Comme de plus $F(+\infty) = 1$, a est négatif. Alors la densité est $-ae^{ax} = |a|\,e^{-|a|x}\chi_{R_+}(x)$. X suit une loi exponentielle de paramétre $|a|$.

9. Le plan est strié de droites paralléles équidistantes de $2a$. Une aiguille de longueur $2l$, $l < a$ est jeté au hasard sur le plan au sens où la distance du milieu de l'aiguille à la droite la plus proche est une v.a. X uniforme sur $[0,a]$ et où l'aiguille avec cette droite est une v.a Φ indépendante de X uniforme sur $[0,\pi]$. Quelle est la probabilité que l'aiguille coupe l'une des paralléles? Réponse: On cherche

$$\begin{aligned} p(l\sin\Phi \geq X) &= \int_{(l\sin\varphi\geq x)} \frac{1}{a\pi}\chi_{[0,a]}(x)\,\chi_{[0,\pi]}(l)\,dxd\varphi \\ &= \frac{1}{a\pi}\int_{\{(x,\varphi);\ 0\leq x\leq a,\ 0\leq\varphi\leq\pi,\ l\sin\varphi\geq x\}} dxd\varphi \\ &= \frac{1}{a\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{l\sin\varphi} dx\right)d\varphi \\ &= \frac{1}{a\pi}\int_0^{\pi} l\sin\varphi d\varphi = \frac{2l}{a\pi}. \end{aligned}$$

10. Soit $f(x) = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+x}1_{]0,1]}(x)$.

    (a) Montrer que f est une densité de probabilités.

    (b) Soit X une v.a de densité f; déterminer la loi de $\frac{1}{X} - \left[\frac{1}{X}\right]$.

11. A tout $\theta \in [0, 2\pi[$, on associe le point du plan euclidien R^2 $M(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Soient Θ et Φ deux v.a indépendantes de loi uniforme sur $[0, 2\pi[$. Déterminer la loi de $\sqrt{\Theta^2 + \Phi^2}$.

12. Soit X une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.Montrer que la variable aléatoire $Y = \frac{1}{\pi}\tan X$ suit la loi de Cauchy $C(0,1)$. Réponse: On applique la méthode de la fonction test.

$$E(\varphi(Y)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\tan x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int \frac{\varphi(u)}{1+u^2}du.$$

Donc Y suit une loi de densité $u \to \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+u^2}$.

13. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires indépendantes dont chacune suit la loi $Exp(\alpha)$. Déterminer la densité de la loi de la variable aléatoire $U = \frac{X}{Y}$, a pour densité $f(u) = \frac{1}{1+u^2}1_{R_+}$.Réponse: On applique la méthode de la fonction test.

$$\begin{aligned} E(\varphi(U)) &= \alpha^2\iint \varphi\left(\frac{x}{y}\right)e^{-\alpha(x+y)}\chi_{R_+^2}\,dxdy = \alpha^2\int_0^{+\infty}\varphi(u)\,e^{-\alpha u}\left(\int_0^{+\infty} ve^{-\alpha uv}dv\right)du \\ &= \alpha\int_0^{+\infty}\varphi(u)\left[v\frac{e^{-\alpha uv}}{u} + \frac{e^{-\alpha uv}}{\alpha u^2}\right]_0^{+\infty} du = \int_0^{+\infty}\varphi(u)\,\frac{du}{u^2}. \end{aligned}$$

Donc U a pour densité $f(u) = \frac{1}{u^2}1_{R_+^*}$.

14. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires indépendantes dont chacune suit respectivement les lois $G(r,\lambda)$ et $G(s,\lambda)$ $(r,s,\lambda > 0)$. Posons $U = X+Y$ et $V = \frac{X}{X+Y}$.

(a) Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes. Réponse: On applique la méthode de la fonction test.

$$\begin{aligned}
E(\varphi(U,V)) &= \iint \varphi\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) \frac{\lambda^{r+s}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} e^{-\lambda(x+y)} x^{r-1} y^{s-1} \chi_{\left(R_+^*\right)^2} dxdy \\
&= \frac{\lambda^{r+s}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \iint \varphi(u,v)(uv)^{r-1}(u(1-v))^{s-1} e^{-\lambda(uv+u(1-v))} u \chi_{R_+^* \times]0,1[} dxdy.
\end{aligned}$$

On a fait le changement de variable

$$\left.\begin{array}{l} u = x+y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = uv \\ y = u(1-v) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \left|\begin{array}{cc} v & u \\ 1-v & -u \end{array}\right| = -u$$

$$(x,y) \in \left(R_+^*\right)^2 \Longleftrightarrow (u,v) \in R_+^* \times]0,1[.$$

Donc la densité de (U,V) est:

$$\begin{aligned}
(u,v) &\rightarrow \left(\left(\frac{\lambda^{r+s}}{\Gamma(r+s)}\right) u^{r+s-1} e^{-\lambda u} \chi_{R_+^*}(u)\right) \left(\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} v^{r-1}(1-v)^{s-1} \chi_{]0,1[}(v)\right) \\
&= \left(\left(\frac{\lambda^{r+s}}{\Gamma(r+s)}\right) u^{r+s-1} e^{-\lambda u} \chi_{R_+^*}(u)\right) \left(B(r,s) v^{r-1}(1-v)^{s-1} \chi_{]0,1[}(v)\right).
\end{aligned}$$

Les variables sont séparées et U et V sont indépendantes

(b) Déterminer les lois de U et V. Réponse: les lois de U et V sont respectivement

$$\begin{aligned}
u &\rightarrow \left(\frac{\lambda^{r+s}}{\Gamma(r+s)}\right) u^{r+s-1} e^{-\lambda u} \chi_{R_+^*}(u) \quad \text{soit} \quad \text{la loi } \Gamma(r+s,\lambda) \\
v &\rightarrow \left(\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} v^{r-1}(1-v)^{s-1} \chi_{]0,1[}(v)\right) \quad \text{soit} \quad \text{la loi } Beta(r,s).
\end{aligned}$$

15. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires indépendantes dont chacune suit la loi $N(0,1)$. Soit $A = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right]$ une matrice orthogonale. On pose: $\left[\begin{array}{c} U \\ V \end{array}\right] = A \left[\begin{array}{c} X \\ Y \end{array}\right]$

(a) Montrer que le couple (U,V) est formé de variables aléatoires indépendantes dont chacune suit la loi $N(0,1)$. Réponse: On a: ${}^tA = A^{-1}$.On utilise encore la fonction test

$$\begin{aligned}
E(\varphi(U,V)) &= \iint \varphi(ax+by, cx+dy) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy \\
&= \iint \varphi(u,v) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} dudv.
\end{aligned}$$

Donc (U,V) suit la loi à densité $(u,v) \rightarrow \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}\right)$.Donc U et V sont indépendantes et suivent chacune la loi $N(0,1)$.

(b) Montrer que, si T suit la loi de Cauchy, il en est de même de $Z = \frac{a+bT}{c+dT}$. Réponse: D'aprés ce qui précéde, $Z = \frac{aX+bY}{cX+dY}$. C'est donc le rapport de deux v.a.r suivant la loi $N(0,1)$. Il suffit donc de montrer que le rapport de deux v.a.r suivant la loi $N(0,1)$ suit une loi $C(0,1)$. On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent la loi $N(0,1)$ toutes les deux et on cherche la loi de $\frac{X}{Y}$. On a:

$$\begin{aligned}
E\left(\varphi\left(\frac{X}{Y}\right)\right) &= \iint \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy \\
&= \iint \varphi(u) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2v^2+v^2}{2}} |v| dudv
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int \varphi(u)\left(\int e^{-\frac{(u^2+1)v^2}{2}}|v|\,dv\right)du \\
&= \frac{1}{\pi}\int \varphi(u)\left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(u^2+1)v^2}{2}}vdv\right)du \\
&= \frac{1}{\pi}\int \frac{\varphi(u)}{(u^2+1)}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}dt\right)du \\
&= \frac{1}{\pi}\int \frac{\varphi(u)}{(u^2+1)}du.
\end{aligned}
$$

Donc $\frac{X}{Y}$ suit la loi à densité $u \to \frac{1}{\pi}\frac{1}{(u^2+1)}$ qui est la loi $C(0,1)$. Donc $Z = \frac{aX+bY}{cX+dY}$ suit la loi $C(0,1)$.

16. Soit (U,Y) un couple de variables aléatoires indépendantes. U suit la loi uniforme sur $[0,1]$ et V est de densité g. On considére la variable aléatoire $X = UY$ et on désigne par f sa densité.

    (a) Calculer f en fonction de g.

    (b) On suppose que le support de Y est R_+. Montrer que f est dérivable et que $xf' + g = 0$. En déduire que f admet un et un seul mode situé en $x = 0$.

    (c) On suppose que le support de Y est R. Montrer que f admet encore un et un seul mode situé en $x = 0$.

    (d) On prend $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.Montrer que f est la densité de la loi $N(0,1)$.

17. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires indépendantes dont chacune suit la loi $N(0,1)$.On pose $U = 2X$ et $V = X - Y$.

    (a) Déterminer la densité du couple (U,V) et les densités de U et V. Réponse: La méthode de la fonction test donne

$$
\begin{aligned}
E(\varphi(U,V)) &= \frac{1}{2\pi}\iint \varphi(2x, x-y)\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi}\iint \varphi(u,v)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}-uv+v^2\right)}\frac{1}{2}dudv.
\end{aligned}
$$

On a fait le changement de variable $u = 2x$ et $v = x - y$ dont le jacobien est $-\frac{1}{2}$. La loi du couple (U,V) est donc.

$$
(u,v) \to \frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{2}(u^2-uv+v^2)}.
$$

Cherchons la loi de U :

$$
\begin{aligned}
E(\varphi(U)) &= \frac{1}{4\pi}\iint \varphi(u)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}-uv+v^2\right)}dudv \\
&= \frac{1}{4\pi}\int \varphi(u)\, e^{-\frac{1}{4}u^2}\left(\int e^{-\frac{1}{2}\left(v-\frac{u}{2}\right)^2+\frac{u^2}{8}}dv\right)du \\
&= \frac{1}{4\pi}\int \varphi(u)\, e^{-\frac{u^2}{8}}\left(\int e^{-\left(v-\frac{u}{2}\right)^2}dv\right)du \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{4\pi}\int \varphi(u)\, e^{-\frac{u^2}{8}}du.
\end{aligned}
$$

U suit une loi à densité

$$
u \to \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{8}} \quad \text{soit une loi } N(0, 2\sqrt{2}).
$$

De même V suit une loi à densité

$$\begin{aligned}
E(\varphi(V)) &= \frac{1}{4\pi}\iint \varphi(v)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}-uv+v^2\right)} du dv \\
&= \frac{1}{4\pi}\int \varphi(v)\, e^{-\frac{1}{2}v^2}\left(\int e^{-\frac{1}{4}(u-v)^2+\frac{v^2}{4}} du\right) dv \\
&= \frac{1}{4\pi}\int \varphi(v)\, e^{-\frac{v^2}{4}}\left(\int e^{-\frac{1}{4}(u-v)^2} du\right) dv \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\int \varphi(v)\, e^{-\frac{v^2}{4}} dv.
\end{aligned}$$

V suit une loi à densité

$$v \to \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v^2}{4}}.$$

(b) Déterminer la densité conditionnelle de $X+Y$ relativement à $\{V=0\}$.

(c) Pouvait-on prévoir le résultat curieux établi à la question précédente.

18. Soit $(U_1, ..., U_n)$ un systéme de n variables aléatoires indépendantes admettant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

(a) Montrer que la loi de $X = \prod_{i=1}^{n} U_i$ a pour densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!}\left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{n-1}, & \text{si } 0 \le x \le 1; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Réponse:

19. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes dont chacune suit la loi $N(0,1)$.On pose $U = XY$ et $V = \frac{X}{Y}$.

(a) Déterminer la densité de (U, V).

(b) En déduire les densités de U et de V.

TD 5

(a) Soit $X=(X_1,X_2)$ un vecteur aléatoire de dimension 2 suivant la loi

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+l}}\delta_{(k,l)}$$

i. Calculer l'espérance de X et la matrice de dispersion de X. Réponse: On a: $EX=(EX_1,EX_2)=(EX_1,EX_1)$ .De plus

$$EX_1=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{k}{2^{k+l}}=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{2^k}\right)\left(\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{2^l}\right)=u\left(\frac{1}{2}\right)v\left(\frac{1}{2}\right)$$

où

$$u(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}x^k=\frac{x}{1-x}\quad\text{et}\quad v(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}kx^k=xu'(x)=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Donc

$$EX=(2,2).$$

Pour la suite il faut calculer

$$\begin{aligned}
E\left(X_1^2\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^2}{2^k}=2u''\left(\frac{1}{2}\right)+v\left(\frac{1}{2}\right)=2\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^3}}+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^2}}=6\\
VX_1 &= 6-4=2\\
E\left(X_1X_2\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{kl}{2^{k+l}}=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{2^k}\right)\left(\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{l}{2^l}\right)=v\left(\frac{1}{2}\right)v\left(\frac{1}{2}\right)=4\\
cov\left(X_1X_2\right) &= 4-4=0.\\
D_X &= \begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=2I_2.
\end{aligned}$$

ii. Déterminer la loi de $Y=Max(X_1,X_2)$. Réponse: On cherche $p(Y=q)=p(Y\le q)-p(Y\le q-1)$ .Or

$$\begin{aligned}
p(Y\le q) &= p(X_1\le q,X_2\le q)=\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{q}\frac{1}{2^{k+l}}=\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2^k}\right)\left(\sum_{l=1}^{q}\frac{1}{2^l}\right)=\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2^k}\right)^2\\
&= \left(1-\frac{1}{2^q}\right)^2=1-\frac{1}{2^{q-1}}+\frac{1}{2^{2q}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$p(Y=q)=1-\frac{1}{2^{q-1}}+\frac{1}{2^{2q}}-1+\frac{1}{2^{q-2}}-\frac{1}{2^{2q-2}}=\frac{2^{q+1}-3}{2^{2q}}.$$

iii. Déterminer la loi de $Z=X_1+X_2$. Réponse: On a:

$$p(Z=q)=\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2^q}=\frac{q}{2^q}.$$

(b) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}_1(0,1)$. Le vecteur aléatoire (X,X) de dimension 2 est-il à densité? Réponse: On note: $Y=(X,X)$. Alors, si

$A = \{(x,x) ;\ x \in R\}$,on a:

$$E\left(\chi_A\left(X,X^2\right)\right) = \int_A h\left(x\right)dx = 0.$$

si h est la densite. D'autre part

$$E\left(\chi_A\left(X,X^2\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \chi_A\left(x,x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1.$$

C'est absurde.

(c) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé et (X,Y) un vecteur aléatoire de taille 2 et de loi à densité

$$f(x,y) = \alpha(1-x^2)1_{[0,1]}(x)ye^{-3y}1_{]0,+\infty[}(y)$$

où α est un réel.

i. Calculer α. Réponse: On écrit que la masse de la mesure est 1 et on a: $\alpha = \frac{27}{2}$.

ii. Déterminer les lois de X et Y. Réponse: La méthode de la fonction test donne

$$E\left(\varphi\left(X\right)\right) = \alpha\left(\int_0^1\left(1-x^2\right)\varphi\left(x\right)dx\right)\left(\int_0^{+\infty}ye^{-3y}dy\right) = \frac{\alpha}{9}\Gamma\left(1\right)\int_0^1\left(1-x^2\right)\varphi\left(x\right)dx$$

et X suit la loi à densité

$$f_X\left(x\right) = \frac{3}{2}\left(1-x^2\right)\chi_{[0,1]}\left(x\right).$$

De même

$$E\left(\varphi\left(X\right)\right) = \alpha\left(\int_0^1\left(1-x^2\right)dx\right)\left(\int_0^{+\infty}ye^{-3y}\varphi\left(y\right)dy\right) = \frac{2\alpha}{3}\left(\int_0^{+\infty}ye^{-3y}\varphi\left(y\right)dy\right)$$

et Y suit la loi à densité

$$f_Y\left(y\right) = 9ye^{-3y}\chi_{R_+}\left(y\right).$$

iii. Calculer $p\left(0 < X \leq 2, Y \geq 1\right)$ .Réponse: On a:

$$p\left(0 < X \leq 2, Y \geq 1\right) = \alpha\left(\int_0^1\left(1-x^2\right)dx\right)\left(\int_1^{+\infty}ye^{-3y}dy\right) = \frac{2}{e^3}.$$

iv. Calculer la matrice de dispersion de (X,Y) . Réponse: On a:

$$\begin{aligned}
EX &= \alpha\left(\int_0^1 x\left(1-x^2\right)dx\right)\left(\int_0^{+\infty}ye^{-3y}dy\right) = \frac{3}{8}\\
EX^2 &= \alpha\left(\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)dx\right)\left(\int_0^{+\infty}ye^{-3y}dy\right) = \frac{1}{5}\\
EY &= \alpha\left(\int_0^1\left(1-x^2\right)dx\right)\left(\int_0^{+\infty}y^2e^{-3y}dy\right) = \frac{2}{3}\\
EY^2 &= \alpha\left(\int_0^1\left(1-x^2\right)dx\right)\left(\int_0^{+\infty}y^3e^{-3y}dy\right) = \frac{2}{3}.\\
VX &= \frac{1}{5} - \frac{9}{64} = \frac{19}{320} \quad VY = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}\\
cov\left(X,Y\right) &= 0.\\
D_{(X,Y)} &= \begin{bmatrix} \frac{19}{320} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(d) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle à densité f ; déterminer les moments et la variance de X dans les cas suivants

i. $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} 1_{R_+}$. Réponse:

ii. $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Réponse: On calcule la fonction caractéristique

$$\Phi_X(t) = \mathcal{F}(f)(t) = \frac{1}{1+4\pi^2 t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-4\pi^2\right)^n t^{2n}.$$

Donc

$$m_n = \frac{\Phi_X^{(n)}(0)}{(-2i\pi)^n}$$

donne

$$\begin{aligned} m_{2n} &= \frac{\left(-4\pi^2\right)^n ((2n)!)}{\left(-4\pi^2\right)^n} = (2n)! \quad \text{et} \quad m_{2n+1} = 0 \\ VX &= m_2 - m_1^2 = 2. \end{aligned}$$

(e) Chercher les fonctions caractéristiques des lois de Bernouilli $B(p)$, binomiale $B(n, p)$, de Poisson $P(\alpha)$, géométrique $G(p)$, uniforme $U([a, b])$, exponentielle $E(\alpha)$ et de Laplace.

TD 6

1. Dans une administration comprenant un trés grand nombre d'employés, la durée d'utilisation moyenne d'un stylo à bille est de 60 jours avec un écart type de 10 jours. En modélisant la durée d'utilisation de chacun des stylos par une loi $\mathcal{N}(60, 100)$ et en sachant qu'au premier janvier tous les anciens stylos sont remplaçés par des neufs, déterminer

   (a) l'espérance de la proportion des stylos devant être remplaçés aprés le 49^e jours, aprés le 65^e jour sachant qu'il a fonctionné au moins 53 jours. Réponse: Si i désigne le i-éme stylo, la durée d'utilisation X_i du stylo i suit une loi $\mathcal{N}(60, 100)$ .La probabilité que le stylo ait une durée de vie inférieur à t est:

$$p_t = p(0 \leq X_i \leq t) = p\left(\frac{0-60}{10} \leq \frac{X_t - 60}{100} \leq \frac{t-60}{10}\right) = F\left(\frac{t-60}{10}\right) - F(-6)$$

   où F est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ .Si N est le nombre de stymos mis en circulation le Premier Janvier, il est logique d'associer à la proportion des stylos devenus inutlisables avant l'instant t la v.a.r $\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} \chi_{[0,t]} \circ X_i$. La loj de $\chi_{[0,t]} \circ X_i$ est une loi de Bernouilli de paramétre p_t. L'espérance de $\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} \chi_{[0,t]} \circ X_i$ est p_t.Or $F(-6) = 1,0126.10^{-9} \approx 0$,donc $e_t = F\left(\frac{t-60}{10}\right)$. Pour $t = 49$, ona:

$$e_t = F\left(\frac{49-60}{10}\right) = F(-1,1) = 0,1357.$$

   et pour $t = 65$,on a:

$$e_t = F\left(\frac{65-60}{10}\right) = F(0,5) = 0,6915.$$

   (b) la probabilité qu'un stylo cesse de fonctionner entre le 58^e et le 62^e jour (bornes incluses). Réponse: La probabilité cherchée est $p(58 \leq X_i \leq 62 \,|X_i > 53)$. On a:

$$\begin{aligned}
p(58 \leq X_i \leq 62 \,|X_i > 53) &= \frac{p((58 \leq X_i \leq 62) \cap (X_i > 53))}{p(X_i > 53)} \\
&= \frac{p(58 \leq X_i \leq 62)}{1 - p(53 \leq X_i)} \\
&= \frac{p\left(\frac{58-60}{10} \leq \frac{X_i-60}{10} \leq \frac{62-60}{10}\right)}{1 - p(\frac{53-60}{10} \leq \frac{X_i-60}{10})} \\
&= \frac{p\left(-0,2 \leq \frac{X_i-60}{10} \leq 0,2\right)}{1 - p(-0,7 \leq \frac{X_i-60}{10})} \\
&= \frac{F(0,2) - F(-0,2)}{1 - F(-0,7)} = \frac{2F(0,2) - 1}{F(0,7)} \\
&= \frac{2(0,57926) - 1}{0,75804} = \frac{0,15852}{0,75804} = 0,20912.
\end{aligned}$$

2. Soit (X, Y, Z) un vecteur aléatoire gaussien de dimension 3 d'espérance 0 et de matrice de

dispersion

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculer la fonction caractéristique et la densité. Réponse: Soit $U = (X, Y, Z)$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi_U(t) &= \exp\left(-2\pi^2 \langle t, D_U t\rangle\right) \\ &= \exp\left(-2\pi^2 \left(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_3 t_2\right)\right). \end{aligned}$$

La densité est donc

$$\begin{aligned} f_U(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\det D_U}} \exp\left(-\frac{1}{2}^t x D_U^{-1} x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}^t x D_U^{-1} x\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} x &= \frac{u}{2} + \frac{u+v+w}{2} \\ y &= \frac{v}{2} + \frac{u+v+w}{2} \\ z &= \frac{w}{2} + \frac{u+v+w}{2} \end{aligned}$$

donne $x + y + z = \frac{3}{2}u + v + w$ et donc

$$D_U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Donc

$$f_U(x, y, z) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{3}{4}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \frac{1}{2}(xy + yz + zx)\right).$$

3. Soit (U_n) une suite indépendante de v.a.r de loi $\mathcal{N}_1\left(0, \sigma^2\right)$ où σ est non nul. Pour tout $\theta \in R$, on définit la suite (X_n) par $X_n = \theta U_{n-1} + U_n$ et $X_1 = U_1$. Montrer que pour tout entier n non nul le vecteur aléatoire $(X_1, ..., X_n.)$ est un vecteur aléatoire gaussien dont on précisera la densité, l'espérance et la matrice de dispersion. Réponse: On linéarise le problème et on a:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \theta & 1 & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = AU$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \theta & 1 & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \theta & 1 \end{bmatrix} = I_n + \theta J_n.$$

Par hypothése et théorème U est un vecteur normal centré et sa matrice de dispersion est $\sigma^2 I_n$.Donc

$$EX = AEU = 0 \text{ et } D_X = AD^tA = \sigma^2 A^tA = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \theta & 0 & \cdots & 0 \\ \theta & 1+\theta^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \theta & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \theta \\ 0 & \cdots & 0 & \theta & 1+\theta^2 \end{bmatrix}.$$

Le calcul de la densité via la formule est compliqué car il faut inverser D_X. Il est préférable d'utiliser la méthode de la fonction test. On a:

$$\begin{aligned} E(\varphi(X)) &= E(\varphi(AU)) = \int \cdots \int \varphi(Au) \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right)\right) du_1....du_n \\ &= \int \cdots \int \varphi(x) \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n (A^{-1}u)_i^2\right)\right) \left|\frac{D(u_1,....,u_n)}{D(x_1,....,x_n)}\right| dx_1....dx_n. \end{aligned}$$

Il faut inverser A.On a:

$$I_n + \theta^n J_n^n = A\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-\theta)^{n-k-1} J_n^k\right).$$

=1Donc

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\theta & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ (-\theta)^{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ (-\theta)^{n-1} & (-\theta)^{n-2} & 0 & -\theta & 1 \end{bmatrix}.$$

On en tire que

$$(A^{-1}u)_i = \sum_{k=1}^{i} (-\theta)^{i-k} x_k \quad \text{et} \quad \left|\frac{D(u_1,....,u_n)}{D(x_1,....,x_n)}\right| = \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1.$$

Donc

$$f_X(x_1,....,x_n) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^i (-\theta)^{i-k} x_k\right)^2\right)\right).$$

4. Soit X une v.a.r suivant la loi $\mathcal{N}_1(0,1)$, ε une v.a.r indépendante de X et de loi $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$. Montrer que la variable aléatoire $Y = \varepsilon Y$ est gaussienne et que les v.a.r X et Y sont non corrélées; sont-elles indépendantes? Le couple (X,Y) est-il gaussien? Réponse: En utlisant l'indépendance X et ε, on a:

$$\begin{aligned} \Phi_Y(t) &= E(\exp(-2i\pi t\varepsilon X)) = E\left(\exp(-2i\pi tX)\chi_{(\varepsilon=1)} + \exp(2i\pi tX)\chi_{(\varepsilon=-1)}\right) \\ &= E\left(\exp(-2i\pi tX)\chi_{(\varepsilon=1)}\right) + E\left(\exp(2i\pi tX)\chi_{(\varepsilon=-1)}\right) \\ &= E(\exp(-2i\pi tX))E\left(\chi_{(\varepsilon=1)}\right) + E(\exp(2i\pi tX))E\left(\chi_{(\varepsilon=-1)}\right) \\ &= E(\exp(-2i\pi tX))p(\varepsilon=1) + E(\exp(2i\pi tX))p((\varepsilon=-1)) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Phi_X(t) + \Phi_X(-t)\right) = \Phi_X(t) \quad \text{car } \Phi_X \text{ est paire.}$$

Alors Y suit la loi $\mathcal{N}_1(0,1)$. Caluculons

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E((X-EX)(Y-EY)) = E\left(\varepsilon X^2\right) \\ &= E(\varepsilon) E\left(X^2\right) = 0E\left(X^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Si X et Y étaient indépendants, alors X^2 et Y^2 le seraient aussi et on aurait

$$E\left(X^2Y^2\right) = E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right).$$

Or

$$\begin{aligned} \Phi_{Y^2}(t) &= E\left(\exp\left(-2i\pi t\varepsilon^2X^2\right)\right) = E\left(\exp\left(-2i\pi tX^2\right)\chi_{(\varepsilon^2=1)} + \exp\left(2i\pi tX^2\right)\chi_{(\varepsilon^2=-1)}\right) \\ &= E\left(\exp\left(-2i\pi tX^2\right)\right) = \Phi_{X^2}(t). \end{aligned}$$

Donc

$$E\left(X^2Y^2\right) = E\left(X^2\right)^2 = (VX)^2 = 1.$$

D'autre part

$$E\left(X^2Y^2\right) = E\left(X^4\right) = m_4(X) = 3.$$

Donc X et Y ne sont pas indépendants. Il en résulte que le vecteur (X,Y) n'est pas normal.

5. Soit X une v.a.r suivant la loi $\mathcal{N}_1(0,1)$. Pour tout $a > 0$, on pose: $X_a = X1_{\{|X|\leq a\}} - X1_{\{|X|>a\}}$.

   (a) Montrer que X_a suit la loi $\mathcal{N}_1(0,1)$. Réponse: On a:

   $$h(X_a) = h(X)\chi_{[0,a]}(|X|) + h(-X)\chi_{]a,+\infty[}(|X|).$$

   Par la fonction caractéristique, on voit que X et $-X$ suivent la même loi. Donc , d'abord

   $$E(h(X_a)) = E\left(h(X)\chi_{[0,a]}\right) + E\left(h(-X)\chi_{]a,+\infty[}(|X|)\right)$$

   ensuite

   $$E\left(h(-X)\chi_{]a,+\infty[}(|X|)\right) = E\left(h(X)\chi_{]a,+\infty[}(|X|)\right)$$

   enfin

   $$E(h(X_a)) = E\left(h(X)\chi_{[0,a]}(|X|)\right) + E\left(h(X)\chi_{]a,+\infty[}(|X|)\right) = E(h(X)).$$

   Donc Xet X_a suivent la même loi.

   (b) Existe-t-il un réel positif a tel que X et X_a soient non corrélées? Réponse: On a:

   $$\begin{aligned} E(XX_a) &= E\left(X^2\chi_{(|X|\leq a)}\right) - E\left(X^2\chi_{(|X|>a)}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^a x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx - \int_a^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right) \\ &= U(a) - V(a). \end{aligned}$$

   Or U est croissante de 0 a $E\left(X^2\right) = 1$ et V décroissante de 1 à $E\left(X^2\right) = 1$. Comme elles sont continues, le théorème des VI dit qu'il existe a tel que $E(XX_a) = 0$.

   (c) Existe-t-il un réel positif a tel que (X, X_a) soit un vecteur gaussien? Réponse: On observe que $X + X_a = 2X\chi_{(|X|\leq a)}$ est borné et ne peut être normal. Donc (X, X_a) n'est pas un vecteur normal.

6. Existe-t-il un réel positif a tel que X et X_a soient indépendantes? Si les va X et X_a étaient indpendantes, (X, X_a) serait un vecteur normal.

7. Soit n un entier non nul et $X_1, ..., X_n$ une suite indépendante de v.a.r suivant toutes la loi $\mathcal{N}_1(0,1)$. On désigne respectivement les v.a.r empirique et variance empirique par

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \quad \text{et } S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X_n}\right)^2.$$

(a) Montrer que la v.a.r X_1^2 suit la loi du chi-deux à un degré de liberté ou encore la loi $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Réponse: On utilise encore et toujours la méthoe de la fonction test:

$$\begin{aligned} E\left(\varphi\left(X_1^2\right)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \varphi\left(x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\varphi\left(x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\varphi(u)\,e^{-\frac{u}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}. \end{aligned}$$

Donc la densité de X_1 est donné par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}\chi_{R_+} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\chi_{R_+}$$

qui est la loi du chi-deux à un degré de liberté.

(b) En déduire que la loi de $X_1^2 + ... + X_n^2$ suit la loi du chi-deux à n degrés de liberté ou encore la loi $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$. Réponse: On démontre le résultat suivant: Si Xet Y sont deux variables iid suivant respectivement la loi du chi-deux à d degrés de liberté et la loi du chi-deux à un degré de liberté, alors $X + Y$ suit la loi du chi-deux à d+1 degrés de liberté. Alors on sait que la densité de la somme est

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= f_X * f_Y(u) = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\sqrt{2\pi}}\int_0^u v^{\frac{d-2}{2}}e^{-\frac{v}{2}}(u-v)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u-v}{2}}dv \\ &= \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\sqrt{2\pi}}\int_0^u v^{\frac{d-2}{2}}(u-v)^{-\frac{1}{2}}dv \\ &\underbrace{=}_{tu=v} \frac{u^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\sqrt{2\pi}}\int_0^1 (tu)^{\frac{d-2}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}udt \\ &= \frac{u^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\sqrt{2\pi}}\int_0^1 (tu)^{\frac{d-2}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}udt \\ &= \frac{u^{\frac{d-1}{2}}e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\sqrt{2\pi}}\int_0^1 t^{\frac{d-2}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{u^{\frac{d-1}{2}}e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\sqrt{2\pi}}B\left(\frac{d}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{u^{\frac{d-1}{2}}e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} = \frac{u^{\frac{d-1}{2}}e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Donc $X + Y$ suit la loi du chi-deux à d+1 degrés de liberté. Cela nous méne pa r récurrence à voir que si Y_1,......., Y_n forment une suite iid de loi la loi du chi-deux à un degré de liberté, alors Y_1+.......+Y_n suit la loi du chi-deux à d+1 degrés de liberté. En utlisant la question précédente, il est clair que la loi de $X_1^2 + ... + X_n^2$ suit la loi du chi-deux à n degrés de liberté .

(c) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale C de la forme

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & .... & c_{1,n} \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & .... & c_{n-1,n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & .... & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{bmatrix}.$$

Réponse: Si R^n est minui de sa structure euclidienne canonnique, le vecteur u de R^n donné par $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est unitaire. Il existe une base orthonormale de R^n dont le dernier vecteur est u. La matrice de passage de la base canonnique à cette base est une matrice orthogonale dont la transposée qui est aussi une matrice orthogonale a la forme indiquée.

(d) Déterminer la loi du vecteur aléatoire $Y = CX$ où $X = (X_1, ..., X_n)$. Réponse: Par théorème, on a:

$$\begin{aligned} EY &= CEX = 0 \\ D_Y &= CD_X\,{}^tC = C^tC = I. \end{aligned}$$

Donc Y suit la loi $\mathcal{N}_n(0, I)$.

(e) Calculer Y_n et $Y_1^2 + ... + Y_n^2$. En déduire que $\overline{X_n} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_n$ et $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\left(Y_1^2 + ... + Y_{n-1}^2\right)$. Réponse: On a:

$$\begin{aligned} Y_n &= \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + ... + X_n) = \sqrt{n}\overline{X_n}. \text{ donc } \overline{X_n} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_n \\ Y_1^2 + ... + Y_n^2 &= {}^tYY = {}^T(CX)(CX) = {}^tX\,{}^tCCX = {}^tXX = X_1^2 + ... + X_n^2. \\ \sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X_n}\right)^2 &= S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - 2\overline{X_n}\sum_{k=1}^{n} X_k + n\overline{X_n}^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - 2n\overline{X_n}^2 + n\overline{X_n}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\overline{X_n}^2 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2 - Y_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} Y_k^2. \end{aligned}$$

Donc

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X_n}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(Y_1^2 + ... + Y_{n-1}^2\right).$$

(f) Montrer que les v.a.r $\overline{X_n}$ et S_n^2 sont indépendantes, que $\overline{X_n}$ suit la loi $\mathcal{N}_1\left(0, \frac{1}{n}\right)$ et que $(n-1)S_n^2$ suit la loi du chi-deux à $n-1$ degrés de liberté. Réponse: Les v.a $X_1, ..., X_n$ sont iid à loi normales $\mathcal{N}(0,1)$, donc $(X_1, ..., X_n)$ est un vecteur normal. Donc $\overline{X_n}$ est normale et suit la loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{n^2}{n} = n\right)$. D'aprés ce qui précéde $(n-1)\,S_n^2$ suit la loi du chi deux à $n-1$degrés de liberté. Enfin $\overline{X_n}$ et S_n^2 sont indépendantes car les fonctions $f(x_1, ..., x_n) = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$ et $g(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - f(x_1, ..., x_n))^2$ sont mesurables, que $\overline{X_n} = f(X_1, ..., X_n)$, $S_n^2 = g(X_1, ..., X_n)$ et que les v.a $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes.

TD7

1. Soit (X_n) une suite de v.a.r; on pose:

$$\forall \varepsilon > 0 \ E_n(\varepsilon) = \{|X_n| \geq \varepsilon\}, \ E(\varepsilon) = \overline{\lim} E_n(\varepsilon), \ D = \bigcup_{\varepsilon > 0} E(\varepsilon), \ C = D^c.$$

   (a) Vérifier que:

$$X_n \xrightarrow{ps} 0 \Longleftrightarrow P(D) = 0 \Longleftrightarrow p(C) = 1 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ p(E_\varepsilon) = 0.$$

   (b) Montrer que,si, pour tout $\varepsilon > 0$, la série $[p(\{|X_n| \geq \varepsilon\})]$ est convergente, alors $X_n \xrightarrow{ps} 0$.

   (c) Montrer que,si, il existe $r > 0$ tel que la série $[E(|X_n|^r)]$ est convergente, alors $X_n \xrightarrow{p} 0$.

2. Soit (X_n) une suite de v.a.r et $Y_n = \sup\limits_{k \geq n} |X_k|$. Montrer que:

   (a) $X_n \xrightarrow{ps} 0 \Longleftrightarrow Y_n \xrightarrow{p} 0$.

   (b) $X_n \xrightarrow{ps} 0 \Longrightarrow X_n \xrightarrow{p} 0$

   (c) Montrer que, si, $X_n \xrightarrow{p} 0$, il existe une sous suite de X_n qui converge presque surement vers 0.

   (d) Montrer que: $X_n \xrightarrow{p} 0$, ssi, de toute sous suite de X_n on peut extraire une sous suite qui converge presque sûrement vers 0.

3. Soit (X_n) une suite de v.a à valeurs dans N.

   (a) Montrer que $X_n \xrightarrow{p} 0$, ssi, $p(X_n > 0)$ tend vers 0.

   (b) Montrer que $X_n \xrightarrow{ps} 0$, ssi,la série $[p(X_n > 0)]$ est convergente.

   (c) On suppose que X_n suit une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(p_n)$. Préciser si la suite (X_n) tend vers 0 dans L^1, en probabilité, presque surement dans le cas où $p_n = \frac{1}{n^2}$, puis dans le casoù $p_n = \frac{1}{n^8}$.

   (d) On suppose que X_n suit une loi de Poisson $P(\alpha_n)$. Etudier si la suite (X_n) tend vers 0 dans L^1, en probabilité, presque surement dans le cas où $\alpha_n = \frac{1}{n}$, puis dans le cas où $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$.

   (e) On suppose que la loi de X_n est donné par $p(X_n = n^2) = \beta_n$ et $p(X_n = 0) = 1 - \beta_n$. Etudier si la suite (X_n) tend vers 0 dans L^1, en probabilité, presque surement dans le cas où $\beta_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n^2}$ puis dans le casoù $\beta_n = \frac{1}{n^3}$.

4. Soit X_n une suite de variables aléatoires de carré intégrable non corrélées. On suppose qu'il existe un réel μ et un réel positif C tels que, pour tout $n \geq 1$, $E(X_n) = \mu$ et $VX_n \leq C$. Montrer que $X_n \xrightarrow{L^2} \mu$ et $X_n \xrightarrow{p} \mu$.

5. Calculer à l'aide de la loi forte des grands nombres

   (a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) dx_1 \ldots . dx_n$.

   (b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$ où $\alpha > 0$ et f est une application continue bornée de R dans R.

6. Soit (X_n) une suite de var qui converge en loi vers une variable aléatoire de loi δ_a. Montrer que X_n tend vers cette variable aléatoire en probabilité.

7. Soit (X_n) une suite iid de var de même loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$. Etudier les convergences en

probabilité des suites $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\overline{X}_n\right)$ et $\left(\frac{S_n}{n^2}\right)$.

TD 8

1. Soit X une var et (X_n) une suite de var suivant la loi δ_{x_n}. Si X suit la loi δ_x, montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, ssi, $x_n \to x$. Montrer que, si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, alors il existe x tel que X suit la loi δ_x.
2. Soit (X_n) une suite iid de var d'espérance m.

   (a) Calculer la fonction caractéristique de $\frac{S_n}{n}$ en fonction de celle de X_1. Réponse: On a:

$$\begin{aligned}\Phi_{\frac{S_n}{n}}(t) &= E\left(\exp\left(-2i\pi t\frac{S_n}{n}\right)\right) \underbrace{=}_{\text{indépendance}} \prod_{k=1}^{n} E\left(\exp\left(-2i\pi t\frac{X_k}{n}\right)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\Phi_{X_k}\left(\frac{t}{n}\right) \underbrace{=}_{\text{id distribué}} \Phi\left(\frac{t}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

   (b) Calculer la limite de cette fonction caractéristique. Réponse: On sait que

$$\ln\Phi(t) = -2i\pi mt + \circ(t).$$

   Donc

$$\ln\Phi_{\frac{S_n}{n}}(t) = n\ln\Phi\left(\frac{t}{n}\right) = -2i\pi mt + \circ(t).$$

   Donc

$$\Phi_{\frac{S_n}{n}}(t) \to \exp(-2i\pi mt).$$

   (c) En déduire que la suite $(\overline{X}_n)$ converge en loi vers la variable constante m. Réponse: $\exp(-2i\pi mt)$ est la fc d'une loi $\mathcal{N}(m, 0)$. Donc

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(m, 0).$$

   Mais $\exp(-2i\pi mt) = \int \exp(-2i\pi xt)\, d\delta_m = E(\exp(-2i\pi tX))$ où X suit la loi δ_m. Donc

$$\frac{S_n}{n} = \overline{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} m.$$

3. Soit (X_n) une suite iid de var de même loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. Préciser la loi de S_n et calculer la limite de la suite $\left(e^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\right)$. Réponse: On a:

$$G_{S_n}(z) = (G_{X_1})^n(z) = e^{n(z-1)}.$$

   Donc $S_n$suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$. Alors

$$\left(e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n} p(S_n = k) = p(S_n \le n).$$

   Le théorème central limite donne

$$p\left(\overline{X}_n - 1 \le \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

   Donc

$$p\left(S_n - n \le \sqrt{n}x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Donc

$$p\left(S_n \le n\right) = p\left(S_n - n \le 0\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2} \int e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2}.$$

4. Soit p_n une suite de réels de $]0,1[$ telle que $lim(np_n) = \alpha > 0$. Montrer que la suite de variables aléatoires (X_n) suivant la loi $\mathcal{B}(n, p_n)$ converge en loi vers une va X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$.

5. Le standard téléphonique d'une entreprise desservant 1000 postes téléphoniques comprend 50 lignes. Aux heures de pointe, chacun de ces postes peut être occupé en moyenne pendant $2,5$ minutes. Déterminer la probabilité de saturation de l'ensemble des lignes à un instant quelconque de l'heure chargée. Réponse: On a $N = 1000$ et $p = \frac{2,5}{60} = \frac{1}{24} \simeq 0,04166$.On suppose que l'on est dans une heure chargée et que X_k soit la v.a prenant la valeur 1 avec la probabilité p et la valeur 0 avec la probabilité $1-p$. X_k suit une loi de Bernouilli de paramètre p et les X_n forment une suite iid.Posons $S = X_1 + ... + X_{1000}$. On cherche $p\left(S > 50\right)$ .On a:

$$p\left(S > 50\right) = \sum_{k=0}^{50} C_{1000}^{k} p^k \left(1-p\right)^{1000-k}$$

car S suit une loi $B\left(1000, p\right)$. On peut le calculer mais c'est assez long. Le théorème de Moivre-Laplace dit que

$$p\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np\left(1-p\right)}} \le x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Donc

$$p\left(S_n \le np + x\sqrt{np\left(1-p\right)}\right) = p\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np\left(1-p\right)}} \le x\right).$$

Alors

$$1000p + x\sqrt{1000p\left(1-p\right)} \simeq 41,66 + 6,319x.$$

En choisissant $x = 1,32$, on a:

$$p\left(S > 50\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1,32} e^{-\frac{u^2}{2}} du = Er\left(1,32\right) = 0,093.$$

Il y a entre 9 et 10 chances sur 100qu'il y ait saturation.

6. Dans un programme de calcul l'opérateur décide d'utiliser j chiffres significatifs aprés la virgule et d'arrondir tous les résultats d'opérations à cette configuration donc à $\frac{10^{-j}}{2}$ prés. On suppose qu'il effectue 10^6 opérations élémentaires successives, que les erreurs commises pour chacune sont indépendantes et de loi uniforme sur $[-\frac{10^{-j}}{2}, \frac{10^{-j}}{2}]$ et que l'erreur sur le résultat final est la somme des erreurs commises sur chaque opération. Calculer la probabilité pour que l'erreur finale soit supérieure ou égale à $\frac{10^{-j+3}}{2}$. Réponse: On utilise le théorème central limite. Soit X_n une suite iid suivant la loi $\mathcal{U}\left([-\frac{10^{-j}}{2}, \frac{10^{-j}}{2}]\right)$ et $S_n = X_1 + ... + X_n$ représente l'erreur cumulée et on cherche

$$p\left(S_n \ge \frac{10^{-j+3}}{2}\right) = 1 - p\left(|S_n| < \frac{10^{-j+3}}{2}\right).$$

On a $m = 0 = EX_n = EX_1$ et $\sigma^2 VX_n = \frac{(10^{-j})^2}{12}$. Donc

$$p\left(\frac{|S_n|}{n} < x\frac{10^{-j}}{2\sqrt{3n}}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Donc

$$p\left(|S_n| < x\frac{10^{-j}}{2}\sqrt{\frac{n}{3}}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

On prend $n = 10^6$,alors $x = 2.10^j F\frac{\sqrt{3}}{10^3}.\frac{10^{-j+3}}{2} = \sqrt{3} = 1,73$. Donc

$$p\left(|S_n| < \frac{10^{-j+3}}{2}\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{1,73} e^{-\frac{u^2}{2}}du = Er\left(1,73\right).$$

Donc

$$p\left(S_n \geq \frac{10^{-j+3}}{2}\right) \simeq 92\%.$$

7. On considére la var X_n, de loi de probabilité unifome sur $\left\{0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}$. Montrer que la suite X_n converge en loi vers la var X de loi uniforme sur $[0,1]$ .Réponse: La fonction de répartition de X_n est

$$F_n\left(x\right) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad x \geq 1 \\ \frac{k}{n+1} \quad \text{si} \quad \frac{k-1}{n} < x \leq \frac{k}{n} \quad k = 1, ..., n \\ 0 \quad \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Cette fonction est continue sur $R - \left\{0, \frac{1}{2}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}$. La fonction de répartition de X est

$$F\left(x\right) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad x \geq 1 \\ x \quad \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Donc $F_n\left(x\right) \to F\left(x\right)$ pour $x \notin \left]0,1\right[$ et pour $x \in \left]0,1\right[$, il existe $k \in \{1, ..., n\}$ tel que $\frac{k-1}{n} < x \leq \frac{k}{n}$ et on a:

$$F\left(x\right) - F_n\left(x\right) = x - \frac{k}{n+1}$$

et donc

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{k-n-1}{n(n+1)} = \frac{k-1}{n} - \frac{k}{n+1} \leq F\left(x\right) - F_n\left(x\right) \leq \frac{k}{n} - \frac{k}{n+1} = \frac{k}{n\left(n+1\right)} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$\left|F\left(x\right) - F_n\left(x\right)\right| \leq \frac{1}{n}$$

et $F_n\left(x\right) \to F\left(x\right)$ pour $x \in \left]0,1\right[$. Donc $F_n \to F$ partout où F est continue. Cela signifie que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

8. Soit une suite X_n de va discrétes définies sur un espace probabilisé où la loi de X_n est donnée par

$$p(X_n = 1 - \frac{1}{n}) = p(X_n = 1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}.$$

(a) Montrer que la suite X_n converge en loi vers la var $X = 1$.Réponse: On a:

$$F_n\left(x\right) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad x \geq 1 + \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad 1 - \frac{1}{n} \leq x < 1 + \frac{1}{n} \\ 0 \quad \text{si} \quad x < 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$$

et

$$F\left(x\right) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x < 1 \\ 1 \quad \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

Donc, si $x \neq 1$, à partir d'un certain rang, x est en dehors de $\left[1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$ et donc suivant les cas $F_n(x) = 0$ ou 1 en même temps que $F(x)$. Donc pour tout x où F est continue, $F_n(x) \to F(x)$ et donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

(b) Est ce que, pour tout x $\lim\limits_{n\to+\infty} p(X_n = x) = p(X = x)$. Réponse: Si $x \neq 1$,il est facile de voir que $\lim\limits_{n\to+\infty} p(X_n = x) = p(X = x)$.Si $x = 1$,pour tout n $p(X_n = x) = 0$ et $p(X = x) = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p(X_n = x) = 0$ ne tend pas vers $1 = p(X = x)$.

(c) Montrer que X_n converge en probabilité vers 1. Réponse: La convergence en loi impliquant la convergence en probabilité, d'aprés a X_n converge en probabilité vers 1.

(d) X_n converge-t-elle en moyenne quadratique vers 1? Réponse: On a:

$$E\left(|X_n - 1|^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{n^2} \to 0.$$

(e) X_n converge-t-elle presque sûrement vers 1? Réponse: Soit

$$A = \{\omega; \lim X_n(\omega) = 1\} \quad \text{et} \quad B = \left\{\omega; |X_n - 1| = \frac{1}{n}\right\}.$$

On a:

$$p(B) = 1 \quad \text{et} \quad B \subset A.$$

Donc

$$1 = p(B) \leq p(A) \leq 1.$$

Donc

$$p(A) = 1.$$

9. Deux joueurs Vincent et Didier jouent l'un contre l'autre des duels successifs dont les résultats sont indépendants mutuellement. Pour Vincent chaque duel conduit soit au gain de $1F$ avec la probabilité p, soit à la perte de $1F$ avec la probabilité $1-p$ où $p \neq \frac{1}{2}$. Soit G_n la va associé au gain au cours du $n-iéme$ duel avec la valeur 1 et -1 avec la probabilité p et $1-p$. Soit S_n le gain cumulé de Vincent à l'issue du $n-éme$ duel. Déterminer la probabilité de l'événement il y a une infinité de duels pour lesquels les gains cumulés de chacun des joueurs sont égaux. Réponse:

10. La probabilité de gagner une partie au jeu de la roulette est de $\frac{19}{37}$ (on se place du point de vue du casino) et la mise d'un joueur à une partie est d'un euro. Quel est le nombre minimum n_0 de parites qui doivent être jouées journellement pour que le casino gagne, avec une probabilité de $0,5$, au moins mille euros par jour? Quelle est la probabilité d'une perte globale pour le casino durant ces n_0 parties. (On pourra appliquer le théorème limite central à une suite X_n de variables aléatoires indépendantes de même loi $p(X_1 = 1) = \frac{18}{37}$ et $p(X_1 = -1) = \frac{19}{37}$.) Réponse: La variable aléatoire X_n représente le gain algébrique du casino à la niéme partie et $G_n = X_1 + ... + X_n$ le gain algébrique du casino au cours des n premiéres parties. On a:

$$EX_1 = -\frac{1}{37} \quad EX_1^2 = 1 \quad \sigma^2(X_1) = 1 - \left(\frac{1}{37}\right)^2.$$

Pour n grand la variable aléatoire $\frac{G_n - \frac{n}{37}}{\sqrt{n}\sigma(X_1)}$ suit approximativement une loi de Gauss centrée réduite et comme, on a:

$$(G_n \geq 1000) = \left(\frac{G_n - \frac{n}{37}}{\sqrt{n}\sigma(X_1)} \geq \frac{1000 - \frac{n}{37}}{\sqrt{n}\sigma(X_1)}\right).$$

Le nombre n_0 cherché est le plus petit nombre n de parties qui doivent être jouées journellement pour que l'on ait

$$p\left(G_n \geq 1000\right) = p\left(\frac{G_n - \frac{n}{37}}{\sqrt{n}\sigma(X_1)} \geq \frac{1000 - \frac{n}{37}}{\sqrt{n}\sigma(X_1)}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

C'est à dire le plus petit entier n tel que $1000 - \frac{n}{37} \leq 0$; soit $n_0 = 37000$. La probabilité d'une perte globale pour le casino durant ces n_0 parties est alors

$$p\left(G_{n_0} < 0\right) \approx p\left(\frac{G_n - \frac{n}{37}}{\sqrt{n}\sigma(X_1)} < -5,19\right).$$

Cela donne en utilisant la loi de Gauss centrée réduite $p\left(G_{n_0} < 0\right) \approx 0$.

11. Un biologiste étudie la probabilité qu'une primipare d'une certaine espéce animale donne naissance à des jumeaux. On admet que cette probabilité est la même pour chaque femelle et que les résultats (jumeaux, non jumeaux) des femelles différentes sont mutuellement indépendants.

   (a) Soit K_n la v.a.r associée au nombre de naissances gemellaires parmi les n premiéres naissances observées. Calculer $E\left(\frac{K_n}{n}\right)$ et $V\left(\frac{K_n}{n}\right)$. Réponse: Soit X_i la v.a associée à la $i-éme$ naissance ($X_i = 1$ s'il nait des jumeaux, $X_i = 0$ sinon). Les n v.a forment une suite i.i.d suivant une loi de Bernouilli de paramétre p. Donc K_n suit une loi binomiâle de paramétre n et p. On a donc:

   $$E\left(\frac{K_n}{n}\right) = p \text{ et } V\left(\frac{K_n}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

   (b) Montrer que la suite $\left(\frac{K_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers p. Réponse: La loi forte des grands nombres applicable ici dit que $\left(\frac{K_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers p.

   (c) En sachant que des études préalables ont permis de savoir que $0,05 \leq p < 0,15$, déterminer le nombre minimum de naissances que le biologiste doit observer pour que, avec une probabilité supérieure à $0,95$, $\frac{K_n}{n}$ s'écarte de p de moins de $0,0005$ en utilisant

      i. l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev. Réponse: L'inégalité de Bienaymé-Tchebichev donne

      $$p\left(\left|\frac{K_n}{n} - p\right| > 5.10^{-3}\right) < \frac{V\left(\frac{K_n}{n}\right)}{(5.10^{-3})^2} = \frac{p(1-p)}{n.25.10^{-6}} < \frac{5100}{n}.$$

      En effet l'application $p \rightarrow p(1-p)$ est croissante sur $[0,05, 0,15]$. Donc il suffit de prendre $n > 102000$, pour avoir le résultat demandé.

      ii. en utilisant le théorème limite central. Réponse: D'aprés le théorème central limite, $\frac{\frac{K_n}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ converge en loi vers un v.a Z suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$. On a donc

$$p\left(\left|\frac{K_n}{n} - p\right| > 5.10^{-3}\right) = p\left(\frac{\left|\frac{K_n}{n} - p\right|}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} > \frac{5.10^{-3}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) \approx p\left(|Z| > \frac{5.10^{-3}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right).$$

      On a:

      $$p\left(|Z| > \frac{5.10^{-3}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) \leq p\left(|Z| > \frac{5.10^{-3}\sqrt{n}}{\sqrt{0,1275}}\right).$$

Alors, si Φ est la fonction de répartition de Z, on a:

$$p\left(|Z| > \frac{5.10^{-3}\sqrt{n}}{\sqrt{0,1275}}\right) < 0,05 \Longleftrightarrow 2 - 2\Phi\left(\frac{5.10^{-3}\sqrt{n}}{\sqrt{0,1275}}\right) < 0,05.$$

La lecture de la table montre que la dernière inégalité est équivalente à $\frac{5.10^{-3}\sqrt{n}}{\sqrt{0,1275}} < 1,96$. C'est à dire de prendre $n = 19593$.

TD11

1. On considére le processus aléatoire $X = (X_t)_{t\in R_+}$ où pour tout $t \in R_+$ la v.a ne prend que les valeurs 0 ou 1 et qu'elles changent de valeurs à des instants aléatoires; la probabilité d'avoir k changements pendant une durée T est

$$p(k,T) = \frac{(aT)^k}{k!}\exp(-aT).$$

(a) Déterminer les statistiques d'ordre 1 et 2 de X. Le processus est-il stationnaire? Réponse: En fait X_t suit une loi de Bernouilli de paramétre $p(X_t = 1)$ et donc

$$EX_t = p(X_t = 1).$$

Alors, si $X_0 = 0$, il faut un nombre impair de changement d'états pour avoir 1 à l'intant t comme état, alors que, si $X_0 = 1$,il faut un nombre pair de changement d'états pour avoir 1 à l'intant t et donc

$$\begin{aligned} EX_t &= \underbrace{p(X_0 = 0)}_{=p}\sum_{n=0}^{+\infty} p(2n+1,t) + \underbrace{p(X_0 = 1)}_{=q}\sum_{n=0}^{+\infty} p(2n,t) \\ &= p\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(at)^{2n+1}}{(2n+1)!}\exp(-at) + q\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(at)^{2n}}{(2n)!}\exp(-at) \\ &= \exp(-at)(p\sinh(at) + q\cosh(at)) \\ &= \frac{1}{2}((p+q) + (p-q)\exp(-2at)) \\ &= \frac{1}{2}(1 + (p-q)\exp(-2at)). \end{aligned}$$

Ce processus n'est pas stationnaire à l'ordre 1. Pour l'ordre 2,

$$EX_t^2 = EX_t = \frac{1}{2}(1 + (p-q)\exp(-2at))$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma_X(t_1,t_2) &= E(X_{t_1}X_{t_2}) = p(X_{t_1} = 1, X_{t_2} = 1) \\ &= p(X_{t_1} = 1)\, p(X_{t_1} = 1|X_{t_2} = 1). \end{aligned}$$

Or $(X_{t_1} = 1|X_{t_2} = 1)$ correspond à l'événement nombre pair de changement d'états entre t_1 et t_2. Donc

$$\begin{aligned} p(X_{t_1} = 1|X_{t_2} = 1) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a(t_2-t_1))^{2n}}{(2n)!}\exp(-a(t_2-t_1)) = \exp(-a(t_2-t_1))\cosh(t_2-t_1). \\ &= \frac{1}{2}(1 + \exp(-2a(t_2-t_1))). \end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma_X(t_1,t_2) = \frac{1}{4}(1 + (p-q)\exp(-2at_1))((1 + \exp(-2a(t_2-t_1)))).$$

(b) Comment rendre ce processus stationnaire? Calculer alors la fonction de corrélation et la densité spectrale de puissance. Réponse: Il suffit de prendre $p = q = \frac{1}{2}$ et alors

$$EX_t = \frac{1}{2} = EX_t^2 \quad \text{et} \quad \Gamma_X(\tau) = \frac{1}{4}((1 + \exp(-2a\tau))).$$

Enfin

$$\gamma_X(\nu) = \mathcal{F}(\Gamma_X)(\nu) = \frac{1}{4}\left(\mathcal{F}(1) + \frac{a}{a^2+\pi^2\nu^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\delta_0 + \frac{a}{a^2+\pi^2\nu^2}\right).$$

2. On considére le processus aléatoire $X = (X_t)_{t\in R}$ où $X_t(\omega) = A\cos(\omega t + \Phi)$ où A et Φ sont deux variables indépendantes, A suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et Φ la loi $\frac{1}{2}\left(\delta_{\frac{\pi}{2}} + \delta_{-\frac{\pi}{2}}\right)$.

   (a) Déterminer les statistiques d'ordre 1 et 2 de X. Réponse: La fonction $\cos$ étant mesurable les v.a A et Φ sont indépendantes et donc

   $$EX_t = (EA)(E(\cos(\omega t + \Phi))) = 0$$

   car $EA = 0$. De même les v.a A^2 et $\cos^2(\omega t + \Phi)$ sont indépendantes et $EA^2 = 1$ donnent

   $$\begin{aligned} EX_t^2 &= \left(EA^2\right)\left(E\left(\cos^2(\omega t + \Phi)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 + E(\cos(2\omega t + 2\Phi))). \end{aligned}$$

   Or

   $$\begin{aligned} E(\cos(2\omega t + 2\Phi)) &= \int \cos(2\omega t + 2\varphi)\, d\left(\frac{1}{2}\left(\delta_{\frac{\pi}{2}} + \delta_{-\frac{\pi}{2}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(2\omega t + 2\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2\omega t - 2\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \cos(2\omega t). \end{aligned}$$

   Donc

   $$EX_t^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t)) = \sin^2(\omega t).$$

   De la même maniére

   $$\begin{aligned} \Gamma_X(t_1,t_2) &= \left(EA^2\right)(E(\cos(\omega t_1 + \Phi))(\cos(\omega t_2 + \Phi))) \\ &= \frac{1}{2}(E(\cos(\omega(t_1+t_2) + 2\Phi)) + E(\cos(\omega(t_1 - t_2)))) \\ &= \cos(\omega(t_2 - t_1)) - \cos(\omega(t_2 + t_1)). \end{aligned}$$

   (b) Le processus est-il stationnaire? Réponse: La réponse est non car Γ_X ne dépend pas uniquement de $\tau = t_2 - t_1$.

3. On considére le processus aléatoire $X = (X_t)_{t\in R}$ ne prenant que les valeurs équiprobables A et $-A$ dans $[nT, (n+1)T]$ et pouvant changer de valeurs toutes les T secondes.

   (a) Représenter quelqus échantillons et calculer les statistiques d'ordre 1 et 2. Le processus est-il stationnaire? Réponse: Par hypothése, on a:

   $$p(X_t = A) = p(X_t = -A) = \frac{1}{2}.$$

   Donc

   $$EX_t = \frac{1}{2}(A - A) = 0 \quad \text{et} \quad EX_t^2 = \frac{1}{2}\left(A^2 + A^2\right) = A^2$$

   et

   $$\begin{aligned} &\Gamma_X(t_1,t_2) \\ = \;& A^2\begin{pmatrix} p(X_{t_1} = A, X_{t_2} = A) - p(X_{t_1} = A, X_{t_2} = -A) \\ -p(X_{t_1} = -A, X_{t_2} = A) + p(X_{t_1} = -A, X_{t_2} = -A) \end{pmatrix} \quad (1) \end{aligned}$$

$$= \frac{A^2}{2}\left(\begin{array}{c} p\left(X_{t_1}=A|X_{t_2}=A\right)-p\left(X_{t_1}=A|X_{t_2}=-A\right) \\ -p\left(X_{t_1}=-A|X_{t_2}=A\right)+p\left(X_{t_1}=-A|X_{t_2}=-A\right)\end{array}\right).$$

Or, si t_1 et t_2 sont sur la même période

$$\begin{aligned} p\left(X_{t_1}=A|X_{t_2}=A\right) &= 1 \\ p\left(X_{t_1}=A|X_{t_2}=-A\right) &= 0 \\ p\left(X_{t_1}=-A|X_{t_2}=A\right) &= 0 \\ p\left(X_{t_1}=-A|X_{t_2}=-A\right) &= 1. \end{aligned}$$

et si t_1 et t_2 ne sont pas sur la même période

$$\begin{aligned} p\left(X_{t_1}=A|X_{t_2}=A\right) &= \frac{1}{2} \\ p\left(X_{t_1}=A|X_{t_2}=-A\right) &= \frac{1}{2} \\ p\left(X_{t_1}=-A|X_{t_2}=A\right) &= \frac{1}{2} \\ p\left(X_{t_1}=-A|X_{t_2}=-A\right) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma_X\left(t_1,t_2\right)=\begin{cases} A^2 & \text{si} \quad t_1 \text{ et } t_2 \text{ sont sur la même période} \\ 0 & \text{si} \quad t_1 \text{ et } t_2 \text{ ne sont pas sur la même période} \end{cases}.$$

i. On suppose que X peut changer de valeurs toutes les T secondes avec l'instant τ du changement dans $[0,T]$ uniformément réparti dans $[0,T]$. Reprendre la question précédente sous ces hypothéses. Réponse: L'enoncé n'influe pas sur les statistique du premier ordre, en revanche il peut y avoir un impact sur les statistiques du second ordre. En effet, si $|t_1-t_2|\geq T$, il y a au moins une transition et donc

$$\begin{aligned} p\left(X_{t_1}=A|X_{t_2}=A\right) &= \frac{1}{2} \\ p\left(X_{t_1}=A|X_{t_2}=-A\right) &= \frac{1}{2} \\ p\left(X_{t_1}=-A|X_{t_2}=A\right) &= \frac{1}{2} \\ p\left(X_{t_1}=-A|X_{t_2}=-A\right) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

et

$$\Gamma_X\left(t_1,t_2\right)=0.$$

Si $|t_1-t_2|<T$, il y aura une transition ssi $t_1<nT+\tau<t_2$, c'est à dire, ssi, $t_1-nT<\tau<t_2-nT$. D'aprés l'énoncé, si T_r désigne l'événement il y a au moins une transition entre t_1 et t_2, on a:

$$p\left(T_r\right)=\frac{1}{T}\int_{t_1-nT}^{t_2-nT}dt=\frac{t_2-t_1}{T} \quad \text{si } t_1\leq t_2.$$

Donc

$$p\left(T_r\right)=\frac{|t_2-t_1|}{T}.$$

Venons en aux calculs des probabilités condtionnelles suivant qu'il y a ou il n'y a pas de transition. Tout d'abord

$$p_B\left(C|A\right)=\frac{p_B\left(AC\right)}{p_B\left(A\right)}=\frac{p\left(ABC\right)}{p\left(AB\right)}=p_{AB}\left(C\right).$$

C'est à dire

$$p(C|B|A) = p(C|AB).$$

Il y a une transition est un événement noté Tr. Alors

$$\begin{aligned}
p(X_{t_1} = A|X_{t_2} = A) &= p(Tr)\, p(X_{t_1} = A|X_{t_2} = A|Tr) + p(Tr^c)\, p(X_{t_1} = A|X_{t_2} = A|Tr^c) \\
p(X_{t_1} = A|X_{t_2} = -A) &= p(Tr)\, p(X_{t_1} = A|X_{t_2} = -A|Tr) + p(Tr^c)\, p(X_{t_1} = A|X_{t_2} = -A|Tr^c) \\
p(X_{t_1} = -A|X_{t_2} = A) &= p(Tr)\, p(X_{t_1} = -A|X_{t_2} = A|Tr) + p(Tr^c)\, p(X_{t_1} = -A|X_{t_2} = A|Tr^c) \\
p(X_{t_1} = -A|X_{t_2} = -A) &= p(Tr)\, p(X_{t_1} = -A|X_{t_2} = -A|Tr) + p(Tr^c)\, p(X_{t_1} = -A|X_{t_2} = -A|Tr^c).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
p(X_{t_1} = A|X_{t_2} = A|Tr) &= p(X_{t_2} = A|Tr(X_{t_1} = A)) = p(X_{t_2} = A) = \frac{1}{2} \\
p(X_{t_1} = A|X_{t_2} = -A|Tr) &= p(X_{t_2} = -A|Tr(X_{t_1} = A)) = p(X_{t_2} = -A) = \frac{1}{2} \\
p(X_{t_1} = -A|X_{t_2} = A|Tr) &= p(X_{t_2} = A|Tr(X_{t_1} = -A)) = p(X_{t_2} = A) = \frac{1}{2} \\
p(X_{t_1} = -A|X_{t_2} = -A|Tr) &= p(X_{t_2} = -A|Tr(X_{t_1} = -A)) = p(X_{t_2} = -A) = \frac{1}{2} \\
p(X_{t_1} = A|X_{t_2} = A|Tr^c) &= p(X_{t_2} = A|Tr^c(X_{t_1} = A)) = 1 \\
p(X_{t_1} = -A|X_{t_2} = A|Tr^c) &= p(X_{t_2} = A|Tr^c(X_{t_1} = -A)) = 0 \\
p(X_{t_1} = A|X_{t_2} = -A|Tr^c) &= p(X_{t_2} = -A|Tr^c(X_{t_1} = A)) = 0 \\
p(X_{t_1} = -A|X_{t_2} = -A|Tr^c) &= p(X_{t_2} = -A|Tr^c(X_{t_1} = -A)) = 1.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
p(X_{t_1} = A|X_{t_2} = A) &= \frac{1}{2}\left(\frac{|t_2 - t_1|}{T}\right) + 1 - \frac{|t_2 - t_1|}{T} = 1 - \frac{|t_2 - t_1|}{2T} \\
p(X_{t_1} = -A|X_{t_2} = A) &= \frac{1}{2}\left(\frac{|t_2 - t_1|}{T}\right) \\
p(X_{t_1} = A|X_{t_2} = -A) &= \frac{1}{2}\left(\frac{|t_2 - t_1|}{T}\right) \\
p(X_{t_1} = -A|X_{t_2} = -A) &= \frac{1}{2}\left(\frac{|t_2 - t_1|}{T}\right) + 1 - \frac{|t_2 - t_1|}{T} = 1 - \frac{|t_2 - t_1|}{2T}.
\end{aligned}$$

On applique la formule (1) et cela donne

$$\begin{aligned}
\Gamma_X(t_1, t_2) &= \begin{cases} A^2 p(X_{t_1} = A)\left(1 - \frac{|t_2-t_1|}{2T} - \frac{|t_2-t_1|}{2T} - \frac{|t_2-t_1|}{2T} + 1 - \frac{|t_2-t_1|}{2T}\right) \\ 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} A^2\left(1 - \frac{|t_2-t_1|}{T}\right) & \text{si } |t_2 - t_1| \geq T \\ 0 & \text{si } |t_2 - t_1| < T \end{cases}.
\end{aligned}$$

(b) Que deviennent ces résultats lorsque les valeurs A et $-A$ ne sont plus équiprobables.
Réponse: On a:

$$\begin{aligned}
EX_t &= p - q \quad EX_t^2 = p + q = 1 \\
\Gamma_X(t_1, t_2) &= \begin{cases} A^2\left(p^2\left(1 - \frac{|t_2-t_1|}{2T}\right) - pq\frac{|t_2-t_1|}{2T} - pq\frac{|t_2-t_1|}{2T} + q^2\left(1 - \frac{|t_2-t_1|}{2T}\right)\right) \\ A^2(p-q)^2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} A^2\left(p^2 + q^2 - (p+q)^2\left(\frac{|t_2-t_1|}{2T}\right)\right) \\ A^2(p-q)^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} A^2\left(1 - \frac{|t_2-t_1|}{T}\right) & \text{si } \ |t_2 - t_1| \geq T \\ A^2\,(p-q)^2 & \text{si } \quad |t_2 - t_1| < T \end{cases}.$$

où $p = p\,(X_t = A)$ et $q = p\,(X_t = -A)$.

(c) Soit X un processus aléatoire gaussien centré. Ce processus passe dans un circuit limiteur dont la sortie $Y\,(t)$ a pour expression

$$Y\,(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } \ X\,(t) > 0 \\ -1 & \text{si } \ X\,(t) < 0 \end{cases}.$$

Montrer que la fonction d'autocorrélation de $Y\,(t)$ est donnée par:

$$\Gamma_Y\,(\tau) = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{\Gamma_X\,(\tau)}{\Gamma_X\,(0)}\right).$$

Réponse: On a:

$$\begin{aligned} E\,(Y_tY_{t+\tau}) &= 1.1p\,(X_t > 0, X_{t+\tau} > 0) + -1.1p\,(X_t < 0, X_{t+\tau} > 0) \\ &\quad +1. - 1p\,(X_t > 0, X_{t+\tau} < 0) + -1. - 1p\,(X_t < 0, X_{t+\tau} < 0). \end{aligned}$$

On a pour des raisons de symétrie

$$p\,(X_t < 0, X_{t+\tau} > 0) = p\,(X_t > 0, X_{t+\tau} < 0).$$

De plus

$$p\,(X_t > 0, X_{t+\tau} > 0) + p\,(X_t > 0, X_{t+\tau} < 0) = p\,(X_t > 0) = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$E\,(Y_tY_{t+\tau}) = 4p\,(X_t > 0, X_{t+\tau} > 0) - 1.$$

Il nous reste à calculer

$$p\,(X_t > 0, X_{t+\tau} > 0) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} p\,(u, v; t, t+\tau)\,dudv.$$

Or X_t et $X_{t+\tau}$ sont des v.a normales centrée de variance σ^2 et de coefficients de corrélation $\rho = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$. Donc

$$p\,(u, v; t, t+\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{u^2+v^2-2uv\rho}{1-\rho^2}\right)..$$

Posons

$$\begin{cases} r = \frac{u-\rho v}{\sigma\sqrt{2}\sqrt{1-\rho^2}} \\ s = \frac{v}{\sigma\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Alors

$$p\,(X_t > 0, X_{t+\tau} > 0) = \iint_\Delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-r^2 - s^2\right)drds.$$

Alors r et s sont deux v;a normales centrées indépendantes. L'argument suit une loi uniforme sur $(0, 2\pi)$ et donc

$$p\,(X_t > 0, X_{t+\tau} > 0) = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}Arc\cos\,(\rho\,(\tau)).$$

Alors

$$\begin{aligned} \Gamma_Y\,(\tau) &= 4p\,(X_t > 0, X_{t+\tau} > 0) - 1 = 2 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - Arc\sin\,(\rho\,(\tau))\right) \\ &= \frac{2}{\pi}Arc\sin\left(\frac{\Gamma_X\,(\tau)}{\Gamma_X\,(0)}\right) \end{aligned}$$