

Exercices sur les fonctions continues

Exercice 1 : Calculer les limites des fonctions f définies ci-dessous aux points demandés :

a) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x - 4}$ en 0 , en 1 , en $-4/3$, en $\pm \infty$

b) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$ en $+\infty$, en $-\infty$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$ en 1 , en $+\infty$

d) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$ en 2 , en $+\infty$, en $-\infty$

e) $f(x) = \frac{|x-1|}{|x|-1}$ en 1 , en -1 , en $+\infty$, en $-\infty$

Exercice 2 : Déterminer le nombre a pour que la fonction f suivante soit continue sur \mathbf{R}

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x-a & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Exercice 3 : En quels points de \mathbf{R}^+ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \mathbf{E}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est-elle continue.

Représenter f sur l'intervalle $]1/5, +\infty[$.

Exercice 4 : Soit la fonction f définie sur \mathbf{R} par

$$f(x) = (x-1)(\mathbf{E}(x) - 2) .$$

- Déterminer les points de \mathbf{R} où la fonction f est continue.
- Tracer la courbe représentative de f dans l'intervalle $[-1, 4[$.
- Sur cet intervalle, la fonction admet-elle un maximum? un minimum?

Exercice 5 : Soit la fonction f définie sur \mathbf{R} par

$$f(x) = x(\mathbf{E}(2x) - 2\mathbf{E}(x)) .$$

- Tracer la courbe représentative de f dans l'intervalle $[-2, 2[$.
- Déterminer les points de \mathbf{R} où la fonction f est continue.

Exercice 6 : Soit la fonction f définie sur \mathbf{R} par

$$f(x) = \left| x - 2E\left(\frac{x+1}{2}\right) \right| .$$

- 1) Etudier la continuité de f .
- 2) Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-2, 2]$.
- 3) Montrer que la fonction f est paire et périodique de période 2.

Exercice 7 : Soit la fonction f définie sur $] -\pi, \pi [- \{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\sin 3x - \sin 2x}{\sin x} .$$

Par quelle valeur faut-il prolonger f en 0 pour obtenir une fonction continue sur $] -\pi, \pi [$? (On pourra exprimer f sous forme de polynôme en $\cos x$).

Déterminer de deux manières différentes les zéros de f dans cet intervalle, et en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{5}$.

Exercice 8 : Soit la fonction f définie par

$$f(x) = (\tan^2 x - 1) \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 3x - \sin x} .$$

- a) Déterminer le domaine de définition de f .
- b) Trouver le plus grand intervalle $] -a, a [$ possible, sur lequel f puisse se prolonger en une fonction continue F . (On définira $F(x)$ pour tout x de l'intervalle $] -a, a [$ trouvé).

Exercice 9 : Soit f définie sur $[0, +\infty [$ par

$$f(x) = |x - 1| - |x - 4| + |x - 5| - 1 .$$

- a) Représenter la fonction f .
- b) Quels sont les extrema relatifs de f sur $[0, +\infty [$?
- c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, f possède un maximum dans l'intervalle $[0, x]$. On note $g(x)$ ce maximum. Calculer $g(x)$ et représenter g sur le même dessin que f .

Exercice 10 : Soit f et g deux applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$, telles que $f \circ g = g \circ f$.

On veut démontrer la propriété suivante :

«il existe c dans $[0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$ ».

- a) On pose $h(x) = f(x) - x$.

Montrer que h s'annule en au moins un point s de $[0, 1]$. En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, $g^n(s) = f(g^n(s))$.

(g^n désigne, si $n \geq 1$, la composée $g \circ g \circ \dots \circ g$, où g figure n fois, et $g^0 = Id$).

b) On pose $u_n = g^n(s)$. Vérifier que $f(u_n) = u_n$ et $g(u_n) = u_{n+1}$.

c) On suppose que la suite u_n est monotone. Montrer qu'elle a alors une limite ℓ . Que peut-on dire de $f(\ell)$ et $g(\ell)$?

d) On suppose que la suite u_n n'est pas monotone. Montrer qu'il existe des nombres u et v tels que $(f - g)(u)(f - g)(v)$ soit négatif. Conclure.

Exercice 11 : Soit la fonction f définie sur \mathbf{R} par

$$f(x) = x^{n+2} - 8x^{n+1} + 7x^n + 36 .$$

a) On pose $h(x) = 2f(x) - f(x+1) - f(x-1)$. Montrer qu'il existe s dans l'intervalle $]1, 7[$, tel que $h(s) = 0$.

b) En déduire qu'il existe trois points A, B, C de la courbe représentative de f , d'abscisses respectives a, b, c , vérifiant

i) B est le milieu de AC

ii) $b - a = 1$

Exercice 12 : Soit f une application définie et continue sur un intervalle $[a, b]$, et soit (\mathcal{C}) sa courbe représentative.

On suppose que $f(a) = f(b) = m$.

Soit d un nombre réel de l'intervalle $]a, d[$, et D le point de coordonnées (d, m) .

Montrer que toute droite passant par D coupe la courbe (\mathcal{C}) en au moins un point.

Exercice 13 : Soit f une application continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$ ($a \neq b$) telle que $f([a, b]) = [a, b]$. (On pourra s'aider d'un dessin).

a) Montrer qu'il existe un point c et **un seul** de $]a, b[$ tel que $f(c) = c$.

b) Montrer qu'il existe au moins un point d de $]a, b[$ tel que

$$f(d) = f^{-1}(d) ,$$

c) Montrer que si l'ensemble des solutions de l'équation

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

est fini, le nombre de ses éléments est impair.

Exercice 14 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ où $0 < a < b$, et (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On appelle A , le point de (\mathcal{C}) d'abscisse a , et B le point de (\mathcal{C}) d'abscisse b .

On note α la pente de la droite OA , et β celle de OB .

Montrer que pour tout γ de $] \alpha, \beta [$, la droite d'équation $y = \gamma x$ coupe la courbe (\mathcal{C}) .

Faire un dessin illustrant cette situation.

Exercice 15 : Montrer que si f et g sont des fonctions croissantes sur l'intervalle I , il en est de même de $f + g$.

Montrer que si f et g sont des fonctions croissantes et positives sur l'intervalle I , il en est de même de $f \cdot g$.

Que se passe-t-il si f et g sont croissantes négatives ?

Exercice 16 : Soit a, b, c , trois nombres réels, et f l'application définie sur $[-1, 1]$ par

$$f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c .$$

a) Montrer que le maximum de $|f|$ sur $[-1, 1]$ existe et est strictement positif. On le note $M(a, b, c)$.

b) On pose $g(x) = 4x^3 - 3x$, et l'on suppose que $M(a, b, c) < 1$.

Etudier le signe de $f - g$ en $1, 1/2, -1/2, -1$. Et en déduire que $f - g$ s'annule au moins trois fois.

c) Montrer que $M(a, b, c) \geq 1$.

Corrigé des exercices sur les fonctions continues

1) a) La fonction f est continue en zéro, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -\frac{1}{2}.$$

Le numérateur et le dénominateur de f s'annulent en 1. On peut donc simplifier par $x - 1$, alors, pour $x \neq 1$, on a encore

$$f(x) = \frac{x - 2}{3x + 4},$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{3x + 4} = -\frac{1}{7}.$$

Le dénominateur de f s'annule en $-4/3$. En utilisant la forme simplifiée, de f , le numérateur est négatif en $-4/3$, et le dénominateur est du signe de $x + 4/3$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow -4/3^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -4/3^-} f(x) = +\infty.$$

A l'infini, la limite de f est celle du rapport des termes de plus haut degré, donc

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{3}.$$

b) Lorsque x tend vers $+\infty$, il n'y a pas de forme indéterminée, et l'on obtient immédiatement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Par contre, en $-\infty$, il y a une forme indéterminée, et on utilise la quantité conjuguée du numérateur :

$$f(x) = \frac{-x - 1}{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

On met alors x en facteur, en remarquant que

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x$$

puisque x est négatif. Alors

$$f(x) = \frac{-1 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

c) Lorsque x tend vers 1^+ , le numérateur est positif et le dénominateur tend vers zéro en étant positif, donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, on met \sqrt{x} en facteur, donc

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}},$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

d) Quand x tend vers 2^+ , on a une forme indéterminée, mais en simplifiant par $\sqrt{x-2}$, on obtient

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}},$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0.$$

Si x est supérieur à 2,

$$f(x) = \frac{1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}},$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Si x est inférieur à -2,

$$f(x) = \frac{1 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}},$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$$

e) Lorsque x tend vers 1,

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}.$$

Cette expression vaut 1, si $x > 1$, et -1 si $x < 1$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1.$$

Lorsque x tend vers -1,

$$f(x) = \frac{|x-1|}{-x-1}.$$

Le numérateur est positif et le dénominateur tend vers zéro, donc

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty.$$

Quand x tend vers l'infini, on écrit

$$f(x) = \frac{\left|1 - \frac{1}{x}\right|}{1 - \frac{1}{|x|}},$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1.$$

2) La fonction f est continue sur l'intervalle $[3, +\infty[$, car $x + 2$ est un polynôme. De même elle est continue sur $] -\infty, 3[$ car $2x - a$ est un polynôme. Elle sera continue en 3, donc sur \mathbf{R} si, et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3),$$

soit

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (2x - a) = f(3),$$

donc $6 - a = 5$, c'est-à-dire $a = 1$.

3) Soit n un entier strictement positif. Dire que $E(1/x) = n$, signifie que

$$n \leq \frac{1}{x} < n + 1,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}.$$

Sur l'intervalle

$$I_n = \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$$

on a alors

$$f(x) = nx$$

et f est continue sur I_n . En particulier f est continue à gauche en $1/n$ et $f(1/n) = 1$.

Dire que $E(1/x) = 0$, signifie que

$$0 \leq \frac{1}{x} < 1,$$

c'est-à-dire que x est strictement plus grand que 1.

Sur l'intervalle $I_0 =]1, +\infty[$, on a alors $f(x) = 0$, et f est continue sur I_0 .

Etudions la continuité aux points de la forme $1/n$, où n est entier.

(i) $n = 1$. Dans ce cas

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 0 = 0 \neq 1 = f(1),$$

et la fonction n'est pas continue en 1.

(ii) $n > 1$. Si x s'approche de $1/n$ par valeurs supérieures, il se trouve dans I_{n-1} , et donc

$$\lim_{x \rightarrow 1/n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1/n^+} (n-1)x = \frac{n-1}{n} \neq 1 = f\left(\frac{1}{n}\right),$$

et la fonction n'est pas continue en $1/n$.

Pour terminer il reste à étudier ce qui se passe en 0^+ . En partant de l'encadrement

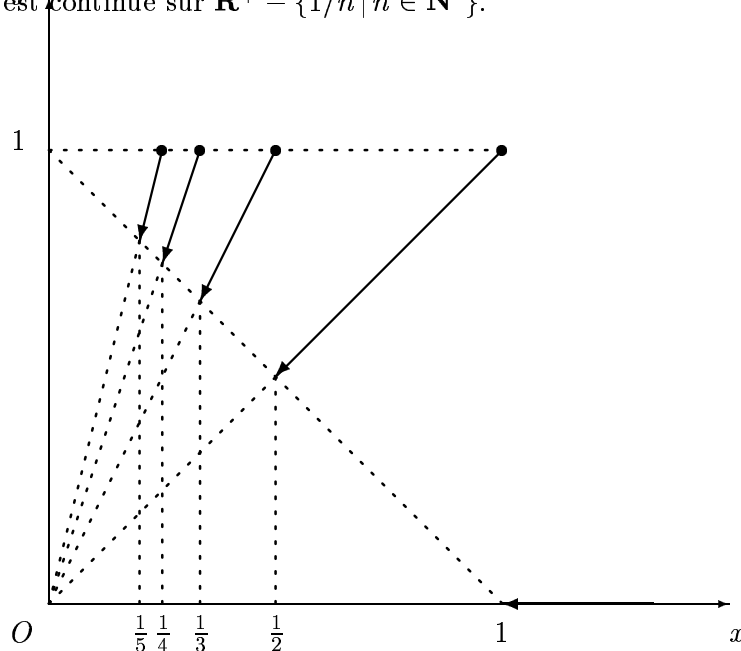
$$\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x},$$

et en multipliant par x , on obtient

$$1 - x < f(x) \leq 1,$$

et il résulte du théorème d'encadrement que $f(x)$ tend vers $1 = f(0)$ lorsque x tend vers 0 . La fonction est donc continue en zéro.

La fonction f est continue sur $\mathbf{R}^+ - \{1/n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$.



4) Lorsque x appartient à l'intervalle $[n, n+1[$, où n est entier, on a

$$f(x) = (x-1)(n-2).$$

La fonction est continue sur tout intervalle $]n, n+1[$ et est continue à droite en tout point n . Etudions la continuité à gauche aux points entiers.

Lorsque x tend vers n par valeurs inférieures, il se trouve dans l'intervalle $[n-1, n[$ et sur cet intervalle $f(x) = (n-3)(x-1)$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} (n-3)(x-1) = (n-3)(n-1).$$

Par ailleurs, puisque f est continue à droite

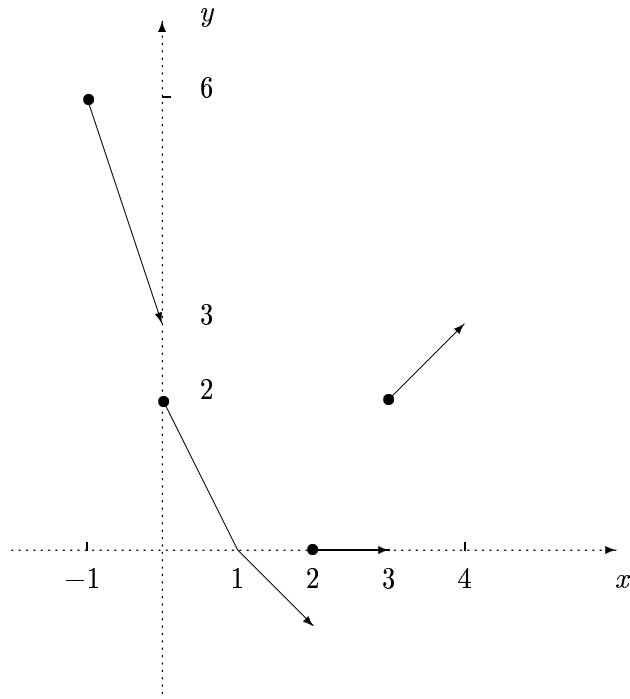
$$f(n) = (n-1)(n-2) = \lim_{x \rightarrow n^+} f(x),$$

Donc f est continue en n si et seulement si

$$(n-3)(n-1) = (n-1)(n-2),$$

soit $n-1=0$. La fonction f est continue sur $\mathbf{R} - (\mathbf{Z} - \{1\})$.

b)



c) Sur cet intervalle la fonction f admet un maximum en $x = -1$, ce maximum vaut 6. Par contre elle n'admet pas de minimum.

5) Dire que $E(2x) = n$ où n est un entier, signifie que

$$n \leq 2x < n + 1$$

c'est-à-dire que

$$\frac{n}{2} \leq x < \frac{n+1}{2} .$$

On étudie donc la fonction sur les intervalles $[p, p + 1/2[$ et $[p + 1/2, p + 1[$ où p est entier.

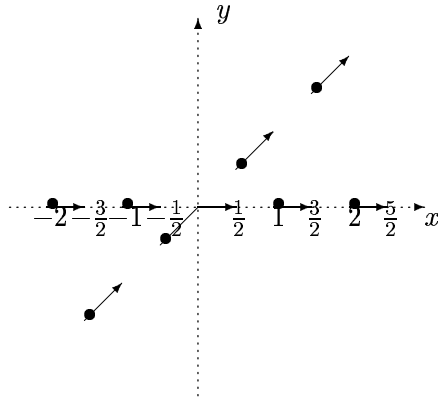
Sur ces deux intervalles qui sont inclus dans $[p, p + 1[$, la partie entière de x vaut p .

Sur $[p, p + 1/2[$, $2x$ est compris entre $2p$ et $2p + 1$ et $E(2x) = 2p$. Donc

$$f(x) = x(2p - 2p) = 0 .$$

Sur $[p + 1/2, p + 1[$, $2x$ est compris entre $2p + 1$ et $2p + 2$ et $E(2x) = 2p + 1$ Donc

$$f(x) = x(2p + 1 - 2p) = x .$$



b) La fonction f est continue sur les intervalles $]p, p + 1/2[$ et $]p + 1/2, p + 1[$, et continue à droite aux points p et $p + 1/2$ pour tout entier p . Il reste à étudier la continuité à gauche en ces points.

À gauche de $p + 1/2$, on a $f(x) = 0$, et à droite $f(x) = x$, donc

$$\lim_{x \rightarrow (p+1/2)^-} f(x) = 0 \neq p + \frac{1}{2} = f\left(p + \frac{1}{2}\right) .$$

La fonction n'est pas continue en ce point.

À gauche de p , on a $f(x) = x$, et à droite $f(x) = 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = p ,$$

et

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = f(p) = 0 ,$$

et la fonction est continue si et seulement si $p = 0$. Donc f est continue sur $\mathbf{R} - \{n/2 \mid n \in \mathbf{Z}^*\}$

6) 1) Si n est entier, on a

$$E\left(\frac{x+1}{2}\right) = n$$

si et seulement si

$$n \leq \frac{x+1}{2} < n+1 ,$$

soit

$$2n - 1 \leq x < 2n + 1 .$$

Sur l'intervalle $[2n - 1, 2n + 1[$, on aura donc

$$f(x) = |x - 2n| ,$$

La fonction est continue sur $]2n - 1, 2n + 1[$, et continue à droite en $2n - 1$. Il reste à voir la continuité à gauche aux points impairs. Sur l'intervalle $[2n + 1, 2n + 3[$, on aura

$$f(x) = |x - 2n - 2| ,$$

donc

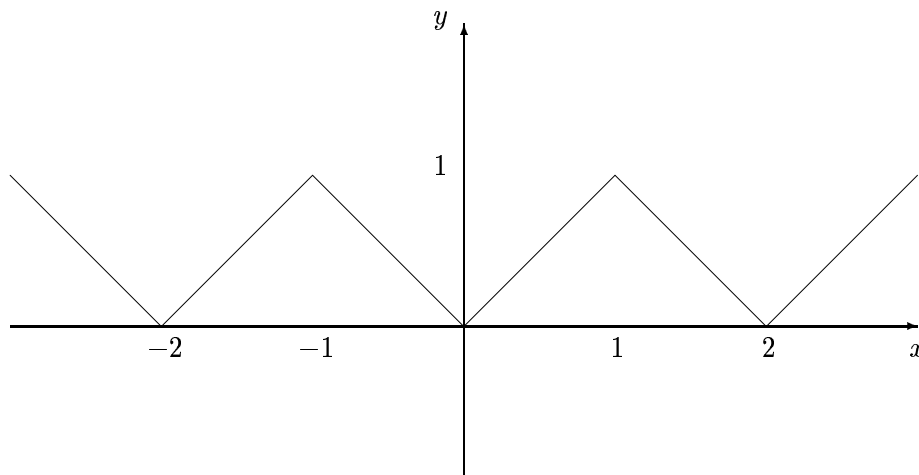
$$\lim_{x \rightarrow (2n+1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (2n+1)^+} |x - 2n - 2| = 1 .$$

Mais

$$\lim_{x \rightarrow (2n+1)^-} f(x) = f(2n+1) = 1 .$$

La fonction f est donc continue en $2n+1$. Finalement elle est continue sur \mathbf{R} .

b)



c) La fonction est 2-périodique. En effet

$$\begin{aligned} f(x+2) &= \left| x+2 - 2 \mathbf{E} \left(\frac{x+3}{2} \right) \right| \\ &= \left| x+2 - 2 \mathbf{E} \left(\frac{x+1}{2} + 1 \right) \right| . \end{aligned}$$

Mais, puisque pour tout entier n et tout réel x

$$\mathbf{E}(x+n) = \mathbf{E}(x) + n ,$$

on obtient

$$f(x+2) = \left| x+2 - 2 \left(\mathbf{E} \left(\frac{x+1}{2} \right) + 1 \right) \right| = f(x) .$$

Pour la parité, on remarque que si x appartient à $[-1, 1[$, alors $(x+1)/2$ appartient à $[0, 1[$, et donc $f(x) = |x|$. Par ailleurs à cause de la périodicité

$$f(-1) = f(-1+2) = f(1) .$$

Donc la restriction de f à l'intervalle $[-1, 1]$ est paire. Alors comme elle est 2-périodique, f est paire sur \mathbf{R} .

7) On obtient facilement

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \text{et} \quad \sin 3x = \sin x (4 \cos^2 x - 1) ,$$

donc, pour x non nul,

$$f(x) = 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 1 .$$

La limite en zéro de cette fonction vaut donc 1. Et il suffit de prolonger la fonction par la valeur 1 en zéro pour avoir une fonction continue sur $] -\pi, \pi [$.

On résout l'équation de deux manières.

(i) En cherchant les solutions de l'équation

$$\sin 3x = \sin 2x ,$$

on obtient une première famille de solutions

$$3x = \pi - 2x + 2k\pi ,$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{\pi}{5} + 2k\frac{\pi}{5} ,$$

ce qui donne dans $] -\pi, \pi [$ les quatre solutions

$$\frac{\pi}{5} , \quad -\frac{\pi}{5} , \quad \frac{3\pi}{5} , \quad -\frac{3\pi}{5} .$$

Par contre, l'équation

$$3x = 2x + 2k\pi ,$$

ne donne pas de solution non nulle dans $] -\pi, \pi [$.

(ii) En posant $\cos x = X$, et en cherchant les racines du trinôme

$$P(X) = 4X^2 - 2X - 1 .$$

On obtient

$$X_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} .$$

Mais comme X_1 est positif ainsi que $\cos(\pi/5) = \cos(-\pi/5)$, alors que X_2 et $\cos(3\pi/5) = \cos(-3\pi/5)$ sont négatifs. Il en résulte que

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} ,$$

et

$$\cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} .$$

8) Pour que la fonction soit définie, il faut que $\tan x$ existe, c'est-à-dire $x \neq \pi/2 + k\pi$, où $k \in \mathbf{Z}$, mais il faut aussi que le dénominateur ne s'annule pas. Or l'égalité

$$\sin 3x = \sin x$$

a lieu, ou bien si $3x = x + 2k\pi$, soit $x = k\pi$, ou bien si $3x = \pi - x + 2k\pi$, soit $x = \pi/4 + k\pi/2$.
Donc

$$\mathcal{D}_f = \mathbf{R} - (\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\pi/4 + k\pi/2 \mid k \in \mathbf{Z}\}) .$$

Les points les plus proches de zéro en lesquels f n'est pas définie sont donc

$$-\pi/2 , \quad -\pi/4 , \quad 0 , \quad \pi/4 , \quad \pi/2$$

On remarquera aussi que la fonction est paire.

b) Transformons $f(x)$. On a

$$\tan^2 x - 1 = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{\cos 2x}{\cos^2 x},$$

$$\sin 5x - \sin 3x = 2 \sin x \cos 4x,$$

et

$$\sin 3x - \sin x = 2 \sin x \cos 2x.$$

Finalement, si x appartient à \mathcal{D}_f

$$f(x) = -\frac{\cos 4x}{\cos^2 x}.$$

On a alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left(-\frac{\cos 4x}{\cos^2 x} \right) = -1,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/4 \\ x \neq \pi/4}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \pi/4 \\ x \neq \pi/4}} \left(-\frac{\cos 4x}{\cos^2 x} \right) = 2,$$

de même en $-\pi/4$ par parité. Enfin

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(-\frac{\cos 4x}{\cos^2 x} \right) = -\infty,$$

de même en $-\pi/2$ par parité.

La fonction se prolonge donc en une fonction continue sur $] -\pi/2, \pi/2 [$, et sur cet intervalle

$$\tilde{f}(x) = -\frac{\cos 4x}{\cos^2 x}.$$

9) a) Pour exprimer la fonction f sans utiliser les valeurs absolues, on peut former le tableau suivant :

| | 1 | 4 | 5 |
|------------|---------|---------|---------|
| $ x - 1 $ | $1 - x$ | $x - 1$ | $x - 1$ |
| $- x - 4 $ | $x - 4$ | $x - 4$ | $4 - x$ |
| $ x - 5 $ | $5 - x$ | $5 - x$ | $x - 5$ |
| -1 | -1 | -1 | -1 |
| $f(x)$ | $1 - x$ | $x - 1$ | $7 - x$ |

b) Les maxima relatifs sont $f(0) = 1$, $f(4) = 3$, et les minima relatifs sont $f(1) = 0$, et $f(5) = 2$.

c) La fonction f étant continue sur l'intervalle $[0, x]$, elle possède un maximum dans cet intervalle.

En étudiant les variations ou la courbe représentative de f , on constate facilement que

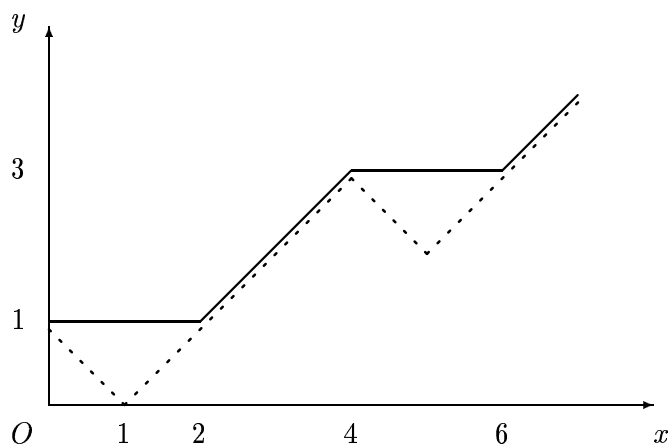
(i) Lorsque x est compris entre 0 et 2, f atteint son maximum sur l'intervalle $[0, x]$ au point 0, donc $g(x) = 1$.

(ii) Lorsque x est compris entre 2 et 4, f atteint son maximum sur l'intervalle $[0, x]$ au point x , Donc $g(x) = f(x) = x - 1$.

(iii) Lorsque x est compris entre 4 et 6, f atteint son maximum sur l'intervalle $[0, x]$ au point 4, Donc $g(x) = 4$.

(iv) Lorsque x est plus grand que 6, f atteint son maximum sur l'intervalle $[0, x]$ au point x , Donc $g(x) = f(x) = x - 3$.

On a alors les courbes suivantes :



La courbe représentative de g en trait plein a été légèrement décalée sur le dessin pour la comparer à celle de f en pointillés.

10) a) On a

$$h(0) = f(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad h(1) = f(1) - 1 \leq 0,$$

puisque $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0, 1]$ pour tout x de cet intervalle. Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que h s'annule dans cet intervalle en un point s . Donc $f(s) = s$.

Démontrons par récurrence, que pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$g^n(s) = f(g^n(s)).$$

La propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons la vraie à l'ordre n . Alors

$$g^{n+1}(s) = g(g^n(s)) = g(f(g^n(s))) = g \circ f(g^n(s)) = f \circ g(g^n(s)) = f(g^{n+1}(s)).$$

Elle est donc vraie à l'ordre $n + 1$, donc quel que soit n .

b) Si l'on définit une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ et posant

$$u_n = g^n(s).$$

On a donc, immédiatement

$$u_n = f(u_n) \quad \text{et} \quad u_{n+1} = g^{n+1}(s) = g(g^n(s)) = g(u_n).$$

c) Si la suite est monotone, elle converge dans $[0, 1]$ vers une limite ℓ , et, par passage à la limite, on obtient, puisque f et g sont continues :

$$f(\ell) = \ell \quad \text{et} \quad g(\ell) = \ell,$$

et donc

$$f(\ell) = g(\ell) .$$

d) Si la suite n'est pas monotone, elle n'est pas décroissante, et il existe un entier p tel que

$$u_p < u_{p+1} .$$

La suite n'est pas non plus croissante, donc il existe un entier q tel que

$$u_q > u_{q+1} .$$

Mais, si l'on considère la fonction ϕ définie sur $[0, 1]$ par

$$\phi = f - g ,$$

On a alors

$$\phi(u_p) = f(u_p) - g(u_p) = u_p - u_{p+1} < 0 ,$$

et

$$\phi(u_q) = f(u_q) - g(u_q) = u_q - u_{q+1} > 0 ,$$

Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe ℓ dans $[0, 1]$ tel que $\phi(\ell)$ soit nul. On obtient bien

$$f(\ell) = g(\ell) .$$

11) a) Remarquons que

$$f(x) = x^n(x-1)(x-7) + 36 .$$

On a alors

$$h(1) = 2f(1) - f(2) - f(0) = 5 \cdot 2^n > 0 ,$$

et

$$h(7) = 2f(7) - f(8) - f(6) = 5 \cdot 6^n - 7 \cdot 8^n < 0 ,$$

car $7 > 5$ et $8^n > 6^n$. On a donc $h(1)h(7) < 0$.

Comme la fonction h est un polynôme, donc est continues sur $[1, 7]$, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique: il existe s dans $]1, 7[$ tel que $h(s) = 0$.

b) Posons $a = s - 1$, $b = s$ et $c = s + 1$. On a

$$b = \frac{a + c}{2} ,$$

et, puisque $h(s)$ est nul,

$$f(b) = f(s) = \frac{f(s-1) + f(s+1)}{2} = \frac{f(a) + f(c)}{2} .$$

On a donc bien $b - a = 1$, et B est le milieu de AC .

12) Si la droite est verticale, elle coupe la courbe au point de coordonnées $(d, f(d))$. Sinon elle a pour équation

$$f(x) = \lambda(x - d) + m .$$

Alors définissons une fonction g sur $[a, b]$ en posant

$$g(x) = f(x) - [\lambda(x - d) + m] .$$

C'est une fonction continue comme somme de fonctions continues. De plus

$$g(a) = m - [\lambda(a - d) + m] = -\lambda(a - d) ,$$

et

$$g(b) = m - [\lambda(b - d) + m] = -\lambda(b - d) .$$

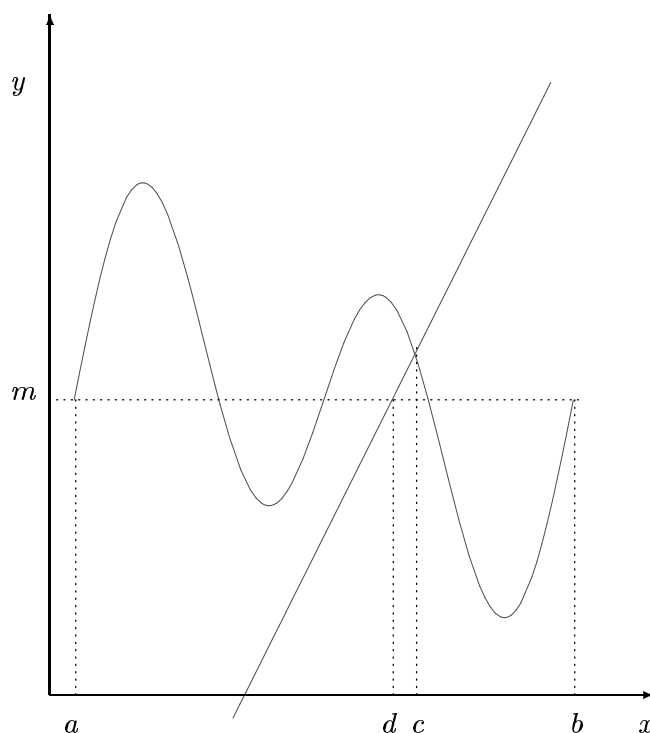
Donc, puisque d se trouve dans $]a, b[$,

$$g(a)g(b) = \lambda^2(d - a)(d - b) \leq 0 .$$

Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe c dans $[a, b]$ tel que $g(c) = 0$, soit

$$f(c) = \lambda(c - d) + m .$$

La courbe coupe la droite au point de coordonnées $(c, f(c))$.



13) a) Soit g définie sur $[a, b]$ par

$$g(x) = f(x) - x .$$

C'est une fonction continue comme somme de fonctions continues. On a alors

$$g(a) = f(a) - a = b - a \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - b = a - b .$$

Donc

$$g(a)g(b) = -(b-a)^2 < 0 .$$

Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(c) = c$.

Mais on a également

$$\tau_g(x,y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - 1 = \tau_f(x,y) - 1 .$$

Donc puisque f est décroissante, $\tau_f(x,y)$ est négatif, et par suite $\tau_g(x,y)$ est strictement négatif. Il en résulte que g est strictement décroissante et continue. Elle est donc injective et il existe au plus un point c tel que $g(c) = 0$. Il y a donc un seul point vérifiant $f(x) = x$.

b) Par définition, $f(x) = y$ si et seulement si $f^{-1}(y) = x$. En particulier, si $x = c$, on a $f(c) = c$ donc $f^{-1}(c) = c$, et finalement $f(c) = f^{-1}(c)$. Le point $d = c$ convient donc.

c) Notons \mathcal{E} l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$ situées dans $]a, b[$. Soit d_1 un élément de \mathcal{E} tel que $d_1 < f(d_1)$. On a donc

$$f(d_1) = f^{-1}(d_1) .$$

Posons $d_2 = f(d_1)$.

$$d_2 = f(d_1) = f^{-1}(d_1) ,$$

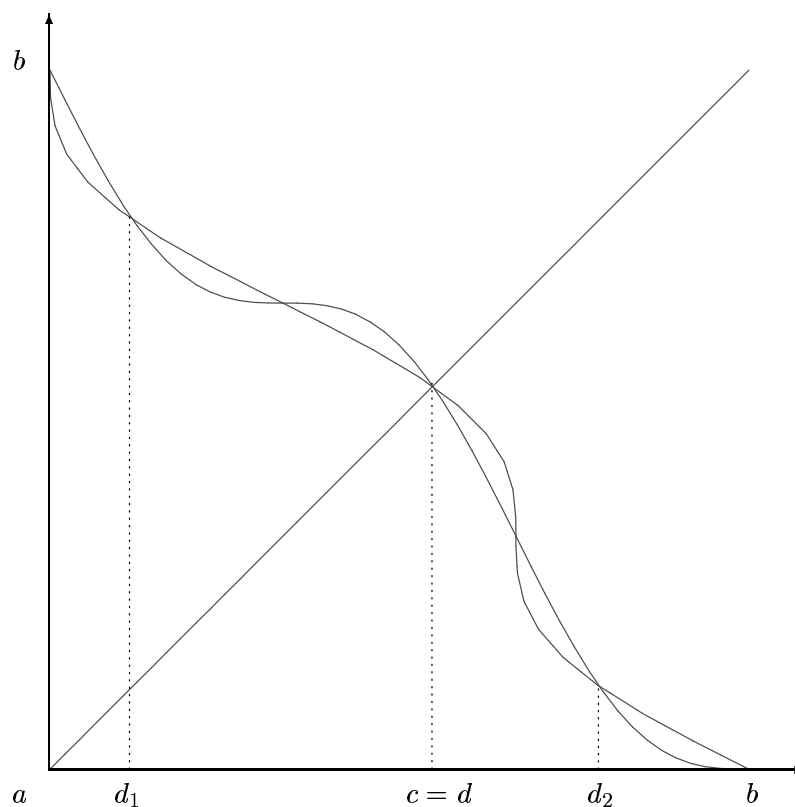
donc

$$d_1 = f(d_2) = f^{-1}(d_2) ,$$

et il en résulte que d_2 appartient aussi à \mathcal{E} . Par ailleurs, puisque $d_1 < d_2$, on en déduit que $d_2 = f(d_1) > f(d_2)$.

L'application f envoie, de manière injective, l'ensemble des points x de \mathcal{E} tels que $x < f(x)$ dans l'ensemble des points x de \mathcal{E} tels que $x > f(x)$. En inversant les inégalités dans la démonstration, elle envoie aussi l'ensemble des points x de \mathcal{E} tels que $x > f(x)$ dans l'ensemble des points x de \mathcal{E} tels que $x < f(x)$. Il y a donc autant d'éléments dans les deux ensembles. En ajoutant l'unique point c tel que $f(c) = c$, il y a donc un nombre impair de points dans \mathcal{E} .

Ce qui précède s'explique par la symétrie des graphes de f et de f^{-1} par rapport à la première bissectrice.



14) Soit $M(x)$ le point de coordonnées $(x, f(x))$. La pente de la droite $OM(x)$ vaut $f(x)/x$.
La fonction

$$g : x \mapsto \frac{f(x)}{x},$$

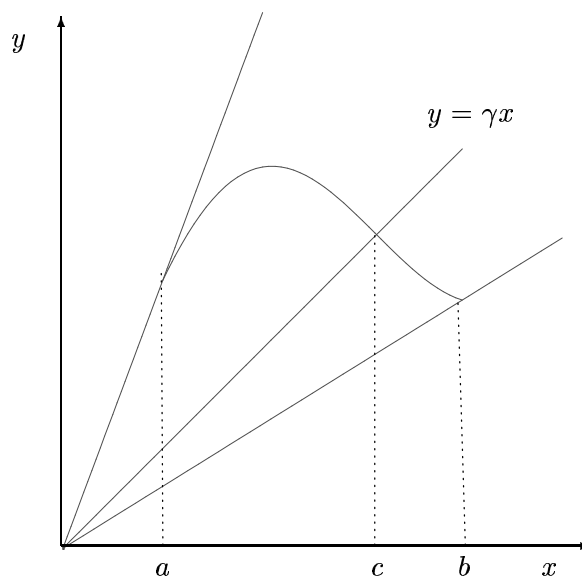
est continue sur $[a, b]$, et on a

$$g(a) = \alpha \quad \text{et} \quad g(b) = \beta.$$

Donc, si γ appartient à l'intervalle $]\alpha, \beta[$, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique, et il existe c dans $]a, b[$ tel que $g(c) = \gamma$, donc

$$f(c) = \gamma c.$$

Cela signifie que la droite d'équation $y = \gamma x$ coupe la courbe (C) au point d'abscisse c .



15) Si f et g sont croissantes sur I , on a, quels que soient x et y dans I vérifiant $x \leq y$ les inégalités

$$f(x) \leq f(y) \quad \text{et} \quad g(x) \leq g(y) .$$

En additionnant les inégalités, on obtient

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y) = (f + g)(y) ,$$

et $f + g$ est croissante.

Si f et g sont positives, on obtient en multipliant les inégalités

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \leq f(y) \cdot g(y) = (f \cdot g)(y) ,$$

et $f \cdot g$ est croissante.

Si f et g sont négatives, on a

$$-f(x) \geq -f(y) \geq 0 \quad \text{et} \quad -g(x) \geq -g(y) \geq 0 ,$$

et, en multipliant les inégalités,

$$(f \cdot g)(x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) \geq (-f(y)) \cdot (-g(y)) = (f \cdot g)(y) ,$$

donc $f \cdot g$ est décroissante.

16) a) La fonction $|f|$ est continue sur $[-1, 1]$. Elle y atteint donc son maximum. Ce maximum est positif. S'il était nul, on aurait $f(x) = 0$ pour tout x de $[-1, 1]$, et le polynôme f aurait une infinité de racines. Il serait donc nul, et tous ses coefficients seraient nuls, ce qui n'est pas le cas.

b) Si $M(a,b,c) < 1$, on a donc, pour tout x de $[-1, 1]$ l'encadrement

$$-1 < f(x) < 1 .$$

Par ailleurs

$$g(1) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad g(-1) = g\left(\frac{1}{2}\right) = -1 .$$

Il en résulte que

$$(f - g)(1) = f(1) - 1 < 0 \quad \text{et} \quad (f - g)\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 < 0 ,$$

ainsi que

$$(f - g)(-1) = f(-1) + 1 > 0 \quad \text{et} \quad (f - g)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + 1 > 0 .$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $f - g$ dans les intervalles $] -1, -1/2 [$, $] -1/2, 1/2 [$ et $] 1/2, 1 [$, on en déduit que le polynôme $f - g$ possède trois racines distinctes.

c) Mais

$$(f - g)(x) = ax^2 + (b - 3)x + c ,$$

est de degré 2 au plus, et a au plus deux racines réelles s'il est non nul. La seule possibilité est que $f = g$. Mais dans ce cas

$$M(a,b,c) = M(0, -3, 0) \geq g(1) = 1 .$$

On obtient donc une contradiction. Il en résulte que l'hypothèse $M(a,b,c) < 1$ est fausse. Donc, quels que soient a , b et c ,

$$M(a,b,c) \geq 1 .$$