

Chapitre 5

Les polynômes

Ce chapitre est consacré à l'étude des polynômes pour l'approximation de fonctions régulières, c'est-à-dire la théorie de l'interpolation. Nous proposons différents types d'interpolations afin de rendre l'erreur entre la fonction et le polynôme la plus petite possible. Cependant, l'approximation de fonctions n'est pas la seule application ; nous construisons en effet différents types de polynômes permettant d'approcher la valeur d'une intégrale ou de construire des algorithmes rapides pour la transformée de Fourier discrète.

Dans tout ce chapitre, considérons un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ et $\{x_0, \dots, x_n\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ une partition de l'intervalle $[a, b]$.

5.1 Introduction

5.1.1 Un exemple en analyse

Commençons par un exemple où l'analyse numérique vient compléter un résultat d'analyse. Le Théorème de Weierstrass permet d'approcher une fonction continue par une suite de polynômes. Plus précisément,

Théorème 5.1.1 (Théorème de Weierstrass) *Pour toute fonction f continue à support compact sur \mathbb{R} , il existe une suite de fonctions entières qui tend vers f uniformément sur \mathbb{R} , en particulier, il existe une suite de fonctions polynomiales qui tend vers f uniformément sur tout compact.*

Pour démontrer le théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass, il suffit d'approcher la fonction f par une fonction plus régulière, c'est-à-dire une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et à support compact. Cette fonction régulière est alors développée en série entière sur un compact. Enfin, en considérant tout simplement les sommes partielles de la série entière, nous obtenons une suite de polynômes. C'est la stratégie conceptuellement très simple et originelle employée par Weierstrass en 1885 pour démontrer ce théorème. Ce résultat paraît fort intéressant pour le calcul de valeurs numériques d'une fonction régulière f quelconque. Il suffit par exemple de l'approcher sur un intervalle borné par un polynôme, puis de calculer des valeurs approchées de f à partir des valeurs numériques que prend ce polynôme. C'est le concept utilisé par nos ordinateurs et calculatrices. Cependant, cette démonstration n'est en rien constructive et ne donne aucune indication sur la façon de construire cette suite de polynômes.

En considérant les polynômes de Bernstein donnés, pour tout $x \in [0, 1]$, par

$$B_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i},$$

où

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

sont les coefficients binomiaux.

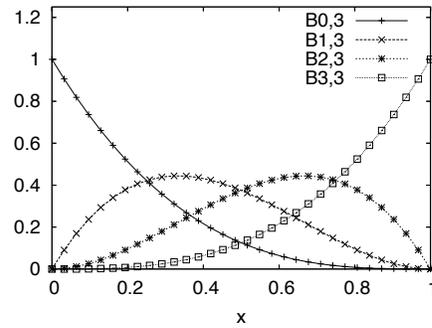


FIG. 5.1 – Les polynômes de Bernstein $B_{0,3}$, $B_{1,3}$, $B_{2,3}$ et $B_{3,3}$.

Il est possible de démontrer que ces polynômes permettent de construire une approximation de la fonction f qui va converger uniformément sur tout compact. En effet, supposons que la fonction f ait son support sur l'intervalle $[0, 1]$, notons alors P_n le polynôme tel que $P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) B_{n,k}(x)$, avec $x_k = k/n$. Nous pouvons démontrer que P_n converge uniformément vers f . Il est donc important de calculer les propriétés des polynômes $(B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$.

L'avantage d'un polynôme est que ses valeurs numériques peuvent être calculées exactement en utilisant les opérations élémentaires comme l'addition, la division et la multiplication. Ceci permet de calculer facilement des approximations précises de fonctions seulement continues en utilisant une suite de polynômes de Bernstein.

5.1.2 Rappels sur les polynômes

Soit \mathbb{K} un corps ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Notons $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions polynômes, c'est-à-dire pour tout $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des coefficients $(a_i)_{0 \leq i \leq n} \subset \mathbb{K}$ tels que $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, pour tout $x \in \mathbb{K}$, où a_i est le coefficient d'indice i . Le degré d'un polynôme non nul est l'indice maximum d'un coefficient non nul et par convention le degré d'un polynôme nul est $-\infty$. Notons que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous appelons $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n et la famille $\{1, x, \dots, x^n\}$ en est une base, appelée base canonique. La dimension de $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ est donc $(n+1)$. Nous avons alors la proposition suivante.

Proposition 5.1.1 *Toute famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre. Nous en déduisons que si $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une suite de polynômes telle que le degré de P_i soit égal à i , alors $\{P_0, \dots, P_n\}$ est une base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$.*

D'autre part, introduisons la notion de divisibilité :

Définition 5.1.1 *Soient P et $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ deux polynômes ; nous disons que P divise Q ou que P est un diviseur de Q ou encore que Q est multiple de P s'il existe un polynôme $R \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ tel que $Q(x) = P(x)R(x)$ pour tout $x \in \mathbb{K}$.*

Rappelons également la notion de racine d'un polynôme.

Définition 5.1.2 *Soient $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ et $x_0 \in \mathbb{K}$,*

- nous disons que x_0 est une racine ou un zéro de P lorsque $P(x_0) = 0$,
- nous disons que x_0 est une racine d'ordre k de P si $(x-x_0)^k$ est un diviseur de P et $(x-x_0)^{k+1}$ ne l'est pas,
- nous disons qu'un polynôme de degré n est scindé lorsqu'il est le produit de n polynômes de degré un, c'est-à-dire qu'il admet n racines distinctes.

En outre, nous avons alors les résultats suivants.

Proposition 5.1.2 Soit $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$,

- si le polynôme P est non nul, alors il a un nombre fini de racines distinctes, inférieur ou égal à son degré,
- si le polynôme P s'annule en un nombre infini de points, alors il est nul,
- si le polynôme P est de degré n et s'annule en $(n+1)$ points, alors il est nul.

Nous terminons avec la formule de Taylor.

Définition 5.1.3 Le polynôme dérivé du polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ est le polynôme $P'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$.

Proposition 5.1.3 Soit $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, alors

- nous avons

$$P(x) = \sum_{i=0}^n \frac{P^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i,$$

où $P^{(i)}$ désigne la dérivée i -ème de P . Ainsi, un polynôme de degré n est entièrement déterminé par la connaissance de $P(x_0), \dots, P^{(n)}(x_0)$.

- x_0 est une racine d'ordre k de P si $P(x_0) = \dots = P^{(k-1)}(x_0) = 0$ et $P^{(k)}(x_0) \neq 0$.

Dans ce chapitre, nous développons des algorithmes pour la construction de polynômes approchant, dans un sens à définir, une fonction régulière donnée. Dans une première partie, nous proposons des méthodes d'interpolation qui consistent simplement à construire des polynômes de degré minimal à partir des valeurs d'une fonction f connues seulement en certains points de son domaine de définition. C'est l'interpolation de Lagrange. Ensuite, nous voyons comment construire des polynômes d'interpolation à partir des valeurs de f et de sa dérivée f' connues seulement en quelques points (interpolation de type Hermite). Pour ces deux cas, nous fournirons des résultats de convergence et des algorithmes de construction.

Dans une deuxième partie, nous mettons au point une stratégie différente : nous construisons un polynôme dont la distance avec la fonction à approcher est minimale. Nous proposons aussi un algorithme de construction. C'est la méthode des moindres carrés discrète.

Dans une troisième partie, nous généralisons cette dernière notion à un nombre infini de points à l'aide d'outils d'analyse (polynômes orthogonaux, méthode des moindres carrés continue) et détaillons enfin l'algorithme des transformées de Fourier rapides (algorithme de Cooley et Tuckey).

5.2 Interpolation de Lagrange et de Hermite

Soit f une fonction définie de l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Supposons que f soit seulement connue en $n+1$ points distincts x_0, \dots, x_n de l'intervalle $[a, b]$. Il s'agit alors de construire un

polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n. \quad (5.1)$$

Appelons ce polynôme un polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$.

5.2.1 Construction et convergence de l'interpolation de Lagrange

Montrons d'abord l'existence et l'unicité d'un tel polynôme.

Théorème 5.2.1 *Il existe un unique polynôme, de degré inférieur ou égal à n , solution de (5.1). Ce polynôme s'écrit alors*

$$P_n(x) := \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x), \quad (5.2)$$

avec

$$L_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (5.3)$$

C'est le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Démonstration : Vérifions d'abord que le polynôme (5.2)-(5.3) satisfait bien la propriété (5.1). Pour $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$P_n(x_i) = \sum_{j=0}^n f(x_j) L_j(x_i).$$

Or, puisque $L_j(x_i) = \delta_{i,j}$ avec $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ainsi, $P_n(x_i) = f(x_i) \times 1 + \sum_{j \neq i} f(x_j) \times 0 = f(x_i)$. En outre, le polynôme L_i est le produit de n polynômes de degré un, donc P_n l'est également, c'est un polynôme de degré n .

Enfin, vérifions que ce polynôme est unique. Soit Q_n un autre polynôme solution de (5.1). Alors nous avons pour $i = 0, \dots, n$, $P_n(x_i) - Q_n(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$. Ainsi, $P_n - Q_n$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en $n + 1$ points. Il est donc identiquement nul. \square

L'écriture (5.2)-(5.3) est certainement intéressante d'un point de vue théorique mais peu d'un point de vue pratique. Elle a un caractère relativement peu algorithmique et son évaluation requiert trop d'opérations élémentaires. Nous préférons donc la formule de Newton qui consiste à écrire le polynôme P_n aux points x_0, \dots, x_n sous la forme

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i).$$

Observons d'abord que tout polynôme de degré inférieur ou égal à n peut s'écrire sous cette forme du moment que les points x_i sont tous distincts. Ensuite, cette formule présente un intérêt puisque

elle fournit naturellement une récurrence. En effet, la partie tronquée $a_0 + \dots + a_{n-1} \prod_{i=0}^{n-2} (x - x_i)$ n'est rien d'autre que le polynôme d'interpolation P_{n-1} écrit aux points $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$. En effet, P_{n-1} est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$ et tel que pour tout $i \in \{0, \dots, n - 1\}$, $P_{n-1}(x_i) = f(x_i)$.

Ainsi connaissant P_{n-1} , le calcul de P_n s'effectue en déterminant le coefficient a_n , assurant que $P_n(x_n) = f(x_n)$. Les coefficients $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont donnés par la formule de Newton suivante.

Théorème 5.2.2 *Le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points distincts $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est donné par*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k),$$

où $f[\]$ désigne les différences divisées de f définies par $f[x_i] = f(x_i)$, pour tout $i \in \{0 \dots n\}$ et

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}. \quad (5.4)$$

Démonstration : Raisonnons par récurrence sur le nombre de points d'interpolation. Vérifions d'abord que la formule est vraie à l'ordre $n = 1$

$$P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0] + (x - x_0) \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}.$$

Supposons ensuite que la formule est vraie à l'ordre $n - 1$, c'est-à-dire

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f[x_0, \dots, x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$$

et pour tout $0 \leq k < l \leq n - 1$

$$f[x_k, \dots, x_l] = \frac{f[x_{k+1}, \dots, x_l] - f[x_k, \dots, x_{l-1}]}{x_l - x_k}.$$

Construisons alors un polynôme de Lagrange P_n à partir de P_{n-1} et tel que $P_n(x_n) = f(x_n)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_{n-1}(x) + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k), \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f[x_0, \dots, x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k). \end{aligned}$$

Le coefficient a_n est donc tel que $P_n(x_n) = f(x_n)$ et il reste à déterminer sa valeur. Pour ce faire, considérons le polynôme $Q(x)$ écrit sous la forme

$$Q(x) = \frac{x - x_0}{x_n - x_0} Q_{n-1}(x) + \frac{x_n - x}{x_n - x_0} P_{n-1}(x),$$

où

$$Q_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^n f[x_1, \dots, x_i] \prod_{k=1}^{i-1} (x - x_k)$$

est le polynôme d'interpolation de f aux points x_1, \dots, x_n . Nous vérifions facilement que $Q(x_i) = f(x_i)$, pour tout $0 \leq i \leq n$ et puisque Q est aussi un polynôme de degré inférieur ou égal à n , il vient $P_n \equiv Q$. Ainsi, les deux expressions de P_n permettent de déterminer le coefficient a_n de P_n en écrivant simplement

$$P_{n-1}(x_n) + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x_n - x_k) = Q_{n-1}(x_n),$$

ce qui donne

$$a_n = \frac{1}{x_n - x_0} f[x_1, \dots, x_n] - \frac{1}{x_n - x_0} f[x_0, \dots, x_{n-1}] = f[x_0, \dots, x_n].$$

□

Proposons alors un algorithme simple pour le calcul du polynôme d'interpolation P_n de degré n aux points $\{x_0, \dots, x_n\}$.

Algorithme 1. Algorithme des différences divisées

Initialisation : $f[x_k] = f(x_k)$ pour $0 \leq k \leq n$.

Pour $i = 1, \dots, n$

- Calculer l'ensemble des différences divisées d'ordre $i + 1$

- Pour $k = 0, \dots, n - i$

$$f[x_k, \dots, x_{k+i}] = \frac{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+i}] - f[x_k, \dots, x_{k+i-1}]}{x_{k+i} - x_k}$$

- Fin de pour

Fin de pour

À partir de cette formulation, établissons un résultat d'erreur entre la fonction f et son polynôme d'interpolation.

Théorème 5.2.3 Soit f une fonction définie de l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Supposons que f est $(n + 1)$ fois continûment différentiable et P_n est le polynôme de Lagrange défini aux points distincts $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$. Alors

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n + 1)!} |\pi_n(x)|, \quad (5.5)$$

où $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$ et

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Avant de procéder à la preuve de ce théorème, prouvons le lemme suivant :

Lemme 5.2.1 *Soit f une fonction définie de l'intervalle $[a, b]$ à valeur dans \mathbb{R} . Supposons que f est p fois continûment différentiable. Alors il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $f[x_0, \dots, x_p] = f^{(p)}(\xi)/p!$.*

Démonstration : Introduisons la fonction $E_p(x) = f(x) - P_p(x)$, qui s'annule en $p + 1$ points distincts. D'après le théorème de Rolle, puisque E_p est continue et dérivable, sa dérivée E_p' s'annule en au moins p points...

Finalement, $E_p^{(p)}$ est continue et s'annule en un point $\xi \in [a, b]$, c'est-à-dire $f^{(p)}(\xi) = P_p^{(p)}(\xi)$. Comme P_p est de degré p , nous savons que $P_p^{(p)}(\xi) = a_p p!$, où a_p est le coefficient devant x^p , soit ici $a_p = f[x_0, \dots, x_p]$. Par transitivité, nous obtenons le résultat $f[x_0, \dots, x_p] = a_p = f^{(p)}(\xi)/p!$. \square

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le Théorème 5.2.3

Démonstration : Soit $x \in [a, b]$, introduisons Q le polynôme d'interpolation aux points x_0, \dots, x_n et x . D'après la formule de Newton, ce polynôme est donné au point x par $Q(x) = P_n(x) + f[x_0, \dots, x_n, x] \pi_n(x)$.

Or, puisque $Q(x) = f(x)$ nous avons également $f(x) = P_n(x) + f[x_0, \dots, x_n, x] \pi_n(x)$. Finalement, en appliquant le Lemme 5.2.1, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \pi_n(x),$$

ce qui démontre le théorème. \square

Notons bien que ce résultat ne signifie pas que l'interpolé de Lagrange P_n converge vers la fonction régulière $f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ lorsque le degré n tend vers l'infini. En effet, le polynôme π_n peut osciller considérablement lorsque n devient grand. L'erreur dépend donc de la taille de l'intervalle $[a, b]$ et de la répartition des points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ sur l'intervalle $[a, b]$. Illustrons ce phénomène d'oscillation lorsque les points sont équidistants. C'est le phénomène de Runge.

Exemple 5.2.1 (Phénomène de Runge) *Prenons simplement des points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ équidistants sur l'intervalle $[-1, 1]$ et la fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donnée par*

$$f(x) = \frac{1}{25x^2 + 1}, \quad x \in [-1, 1].$$

Nous observons alors le phénomène de Runge¹.

¹Carl David Tolmé Runge (1856-1927) fut un mathématicien et physicien allemand. En 1901, il découvrit que le procédé d'interpolation peut diverger pour certaines fonctions régulières. En outre, ses travaux portèrent essentiellement sur la résolution numérique d'équations différentielles (voir Chapitre 6). Nous verrons qu'il est également l'auteur de la méthode de Runge-Kutta pour la discrétisation des équations différentielles.

La Figure 5.2 représente la courbe de f et les polynômes de Lagrange correspondants de degré $n = 7, 9$ et 11 . Nous constatons graphiquement (et nous pourrions même le démontrer mais c'est un peu compliqué !) que lorsque n tend vers l'infini, le polynôme de Lagrange défini à partir d'un ensemble de points équidistants ne va pas converger vers la fonction f . C'est ce que nous appelons le phénomène de Runge.

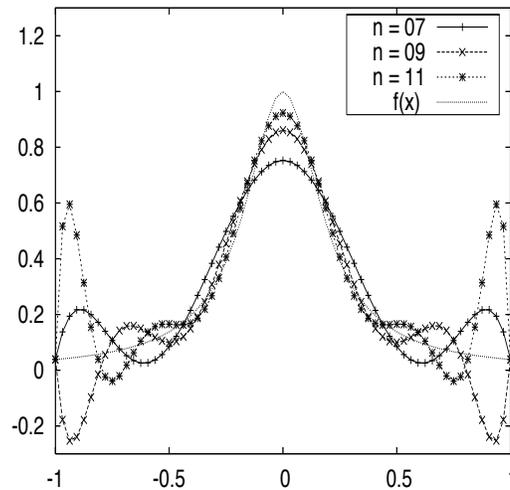


FIG. 5.2 – La fonction f et les polynômes de Lagrange de degré 7, 9 et 11 correspondants.

Cependant, nous verrons un peu plus tard qu'il est possible de calculer l'ensemble des points d'interpolation de manière à rendre l'erreur $\|\pi_n\|_\infty$ la plus petite possible (grâce aux polynômes de Tchebychev) mais ceci n'évite pas nécessairement le phénomène de Runge. En définitive, pour remédier à ce problème, nous proposons une autre stratégie qui est souvent utilisée dans la pratique : c'est l'interpolation composée.

5.2.2 Interpolation composée

Pour éviter les instabilités numériques du type « phénomène de Runge », nous préférons l'interpolation polynomiale de degré peu élevé sur des intervalles de petites tailles.

Décomposons une première fois l'intervalle $[a, b]$ en $n + 1$ points (voir Figure 5.3)

$$a = a_0 < \dots < a_n = b. \quad (5.6)$$

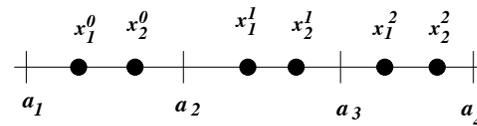


FIG. 5.3 – Exemple d'une répartition de points pour l'interpolation composée.

Puis, sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, construisons un polynôme d'interpolation de Lagrange $P_{i,m}$ de la fonction f à l'aide de $m + 1$ points, notés $(x_j^i)_{0 \leq j \leq m}$ de $[a_i, a_{i+1}]$

$$x_0^i < \dots < x_{m-1}^i < x_m^i. \quad (5.7)$$

Pour assurer que la reconstruction sur tout l'intervalle $[a, b]$ soit continue, nous prenons les extrémités des intervalles $x_0^i = a_i$ et $x_m^i = a_{i+1}$.

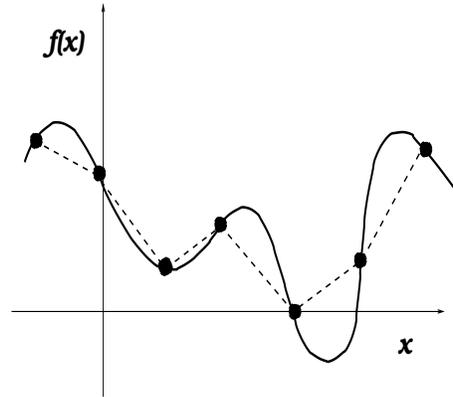


FIG. 5.4 – Illustration de l'interpolation composée pour l'approximation d'une fonction f par des polynômes de degré un.

Démontrons alors en utilisant les résultats précédents le théorème suivant.

Théorème 5.2.4 Soient n et m deux entiers positifs et un ensemble de points $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de l'intervalle $[a, b]$. Choisissons sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ un ensemble de points $(x_j^i)_{0 \leq j \leq m}$ vérifiant (5.6)-(5.7). Alors il existe une seule fonction continue $f_{m,n}$ telle que

- la fonction $f_{m,n}|_{[a_i, a_{i+1}]}$ est un polynôme de degré m ,
- sur l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ pour tout $0 \leq i \leq n$, $f_{m,n}(x_j^i) = f(x_j^i)$, pour tout $0 \leq j \leq m$.

En outre, si la fonction $f \in C^{m+1}([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\|f - f_{m,n}\|_\infty \leq \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \|f^{(m+1)}\|_\infty,$$

avec $h = \max_{0 \leq i \leq n} |a_{i+1} - a_i|$.

Dans la pratique nous constatons donc que les meilleures approximations ne sont pas forcément données par des polynômes de degré élevé mais plutôt en combinant une partition de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de taille réduite et des interpolations de degrés modérés. Dans l'Exercice 5.4.2, nous proposons un exemple d'interpolation composée et constatons que cette approximation est bien meilleure que l'interpolation par des polynômes de degré élevé.

5.2.3 Applications : formules de quadrature pour l'approximation d'intégrales

Pour une fonction continue f définie de l'intervalle $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{R} , nous approchons la valeur de son intégrale sur l'intervalle $[a, b]$

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Il existe toute une famille d'algorithmes permettant d'approcher sa valeur numérique. Tous ces algorithmes consistent à approcher l'intégrale par une formule dite de quadrature \mathcal{Q} , du type

$$I(f) = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i).$$

Le choix du nombre de points $(n + 1)$, des poids $(\omega_i)_{0 \leq i \leq n}$ et des points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ dépend de la méthode employée. Il conviendra aussi de s'intéresser à la précision des formules employées. Ces méthodes utilisent la technique de l'interpolation des fonctions à intégrer. Généralement, la fonction est d'abord interpolée par un polynôme puisqu'il est très facile d'en connaître la primitive. Il s'agit alors de fournir des valeurs pour les points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et les poids $(\omega_i)_{0 \leq i \leq n}$ et d'évaluer l'erreur entre la valeur exacte et la valeur numérique de l'intégrale I .

Dans un premier temps, donnons quelques formules de quadrature classiques et le calcul de l'erreur. Ensuite, présentons la formule de Newton-Cotes basée sur l'interpolation composée.

Formule des rectangles C'est la méthode la plus simple qui consiste à interpoler la fonction f à intégrer par une fonction constante (polynôme de degré 0).

Soit ξ le point d'interpolation ; la formule devient alors :

$$I(f) = (b - a) f(\xi). \quad (5.8)$$

Ici, nous considérons le cas $\xi = a$ ou $\xi = b$, ce qui correspond à l'aire du rectangle de largeur $(b - a)$ et de longueur $|f(a)|$ ou $|f(b)|$.

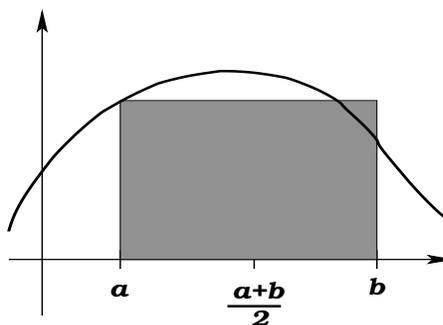


FIG. 5.5 – Formule des rectangles.

Aussi, cela revient à approcher la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ par le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré zéro construit à partir de a ou de b . Ainsi, le résultat du Théorème 5.2.3 fournit une estimation de l'erreur

$$|I(f) - I| \leq \frac{(b - a)^2}{2} \sup_{y \in [a, b]} |f'(y)|.$$

Cette formule de quadrature s'appelle la méthode des rectangles.

Formule des trapèzes Cette fois-ci, interpolons la fonction f par un polynôme de degré un. Pour cela, nous avons besoin de deux points d'interpolation, à savoir $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

L'intégrale est alors approchée par celle du polynôme correspondant, en l'occurrence celui donnant l'aire d'un trapèze

$$I(f) = \frac{(b - a)}{2} (f(a) + f(b)).$$

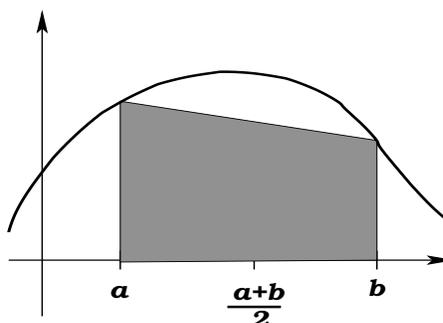


FIG. 5.6 – Formule des trapèzes.

En outre le résultat du Théorème 5.2.3 fournit une estimation de l'erreur donnée par

$$E(f) = |I(f) - I| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \sup_{y \in [a,b]} |f''(y)|.$$

Notons que l'erreur est nulle pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à un.

Formule de Simpson

En utilisant un polynôme de Lagrange de degré deux, nous obtenons la formule de Simpson suivante

$$I(f) = \frac{(b-a)}{6} (f(a) + f(b)) + 2 \frac{(b-a)}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

qui utilise trois points a , $(a+b)/2$ et b .

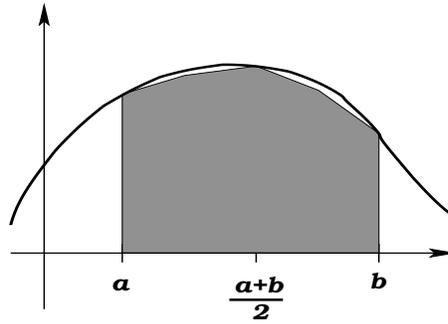


FIG. 5.7 – Formule de Simpson.

Plus généralement, nous pouvons fabriquer une formule de quadrature pour n'importe quel entier $n \geq 0$ par

$$I(f) = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i)$$

avec $x_i = a + ih$, $h = (b-a)/n$ et les poids $(\omega_i)_{0 \leq i \leq n}$ vérifient

$$\sum_{i=0}^n \omega_i = b - a.$$

Formule de Newton-Cotes Les formules de Newton-Cotes permettent de généraliser ces résultats sur des intervalles constants, où la fonction f est interpolée par des polynômes de degré élevé. Cependant, pour des questions de stabilité numérique liée au comportement oscillatoire des polynômes de degré élevé (voir phénomène de Runge), il est préférable de limiter le degré du polynôme d'interpolation en subdivisant l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles, pour lesquels une interpolation linéaire est suffisante. C'est exactement le même procédé que celui décrit pour l'interpolation composée. Comme nous l'avons montré pour chacune des méthodes précédentes, le terme d'erreur dépend de $b-a$. Ainsi, lorsque cette amplitude est trop élevée, nous réduisons simplement l'erreur en découpant l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles, sur lesquels nous calculons la valeur approchée de l'intégrale. Nous parlons alors de formule composite. La valeur sur l'intervalle $[a, b]$ sera la somme de la valeur sur chaque sous-intervalle.

Plus précisément, nous divisons l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de longueur $h = (b-a)/n$, et posons $x_k = a + kh$, pour $k \in \{0, \dots, n\}$. En appliquant par exemple la méthode des trapèzes sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, la formule devient

$$I(f) = h \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$

ou encore à l'aide d'un changement d'indice

$$I(f) = h \frac{f(a) + f(b)}{2} + h \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k).$$

En appliquant, l'erreur de quadrature de la formule des trapèzes sur chaque intervalle et en supposant que $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$, le terme d'erreur s'écrit

$$E(h) \leq h^2 \frac{(b-a)}{12} \sup_{y \in [a, b]} |f''(y)|.$$

Constatons alors que lorsque le nombre de subdivisions de l'intervalle $[a, b]$ augmente, l'erreur $E(h)$ diminue de manière quadratique : la méthode est d'ordre deux.

5.2.4 Interpolation de Hermite

L'objectif est de construire un polynôme d'interpolation d'une fonction f en utilisant des valeurs de f et de sa dérivée f' aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'un intervalle $[a, b]$. C'est l'interpolation de Hermite².

Exemple 5.2.2 (Spline cubique de Hermite) *Pour construire un polynôme d'interpolation sur l'intervalle $[0, 1]$, introduisons une fonction j_i spline cubique i , c'est-à-dire un polynôme P de degré trois tel que $P \in \text{Vect}\{h_{00}, h_{10}, h_{01}, h_{11}\}$ avec pour tout $x \in [0, 1]$*

$$\begin{cases} h_{00}(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, \\ h_{10}(x) = -2x^3 + 3x^2, \\ h_{01}(x) = x^3 - 2x^2 + x, \\ h_{11}(x) = x^3 - x^2, \end{cases}$$

ce qui permet de construire un polynôme P comme

$$P(x) = \alpha h_{00}(x) + \beta h_{10}(x) + \gamma h_{01}(x) + \delta h_{11}(x),$$

lequel vérifie $P(0) = \alpha$, $P(1) = \beta$ et $P'(0) = \gamma$, $P'(1) = \delta$. Observons ainsi que la connaissance des valeurs d'une fonction f et de sa dérivée aux points $x = 0$ et $x = 1$ suffit à construire la spline cubique.

Étudions maintenant comment généraliser cette procédure à un nombre quelconque de points. Soient $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ un ensemble de $(n+1)$ points distincts de l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ une fonction donnée. Supposons que les valeurs de la fonction f et de sa dérivées soient connues aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et souhaitons construire un polynôme d'interpolation P_n de degré minimal qui vérifie

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad P_n'(x_i) = f'(x_i), \quad 0 \leq i \leq n. \quad (5.9)$$

²En référence à Charles Hermite, mathématicien français (1822-1901) dont les travaux portèrent surtout sur la théorie des nombres, l'étude des polynômes orthogonaux et les équations différentielles.

Notons toujours que :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Démontrons le résultat suivant

Théorème 5.2.5 *Le polynôme P_n s'écrit*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) H_i(x) + \sum_{i=0}^n f'(x_i) \tilde{H}_i(x)$$

avec $H_i(x) = (1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i))L_i^2(x)$ et $\tilde{H}_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x)$. En outre, lorsque $f \in \mathcal{C}^{2(n+1)}([a, b], \mathbb{R})$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\|f^{(2(n+1))}\|_\infty}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2. \quad (5.10)$$

Le polynôme P_n s'appelle le polynôme d'interpolation de Hermite de la fonction f .

Démonstration : Procédons en plusieurs étapes et vérifions d'abord que $H_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $H'_i(x_j) = 0$ et $\tilde{H}_i(x_j) = 0$, $\tilde{H}'_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

Ainsi en prenant P_n donné par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) H_i(x) + \sum_{i=0}^n f'(x_i) \tilde{H}_i(x)$$

nous prouvons qu'il existe bien un polynôme de degré $2n + 1$ vérifiant les conditions requises (5.9). Nous vérifions que ce polynôme est forcément unique.

Pour démontrer l'estimation de l'erreur, nous la vérifions d'abord en chaque point x_i , pour $0 \leq i \leq n$. Puis, prenons $x \in [a, b]$ où x est différent des points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et posons

$$\pi_n^2(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2$$

et pour $y \in [a, b]$

$$F(y) = f(y) - P_n(y) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n^2(x)} \pi_n^2(y).$$

Nous vérifions aisément que x est une racine de F , et x_i est racine double de F .

Ainsi, en appliquant le théorème de Rolle à la fonction F , nous montrons qu'il existe $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n}$, distincts des points x_i , pour tout $0 \leq i \leq n$, et de x vérifiant $F'(\xi_i) = 0$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

Or, nous avons aussi $F'(x_i) = 0$ pour tout $0 \leq i \leq n$, ce qui signifie que F' admet $2(n+1)$ racines distinctes. En appliquant de manière successive le Théorème de Rolle, nous prouvons qu'il existe $\eta_x \in [a, b]$ tel que $F^{(2n+2)}(\eta_x) = 0$.

En dérivant $2(n+1)$ fois la fonction $F(y)$ et en nous plaçant au point $\eta_x \in [a, b]$, nous obtenons directement

$$(2n+2)! \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n^2(x)} = f^{(2(n+1))}(\eta_x),$$

ce qui conduit facilement au résultat final. \square

5.3 Méthode des moindres carrés

Jusqu'ici nous avons toujours considéré l'approximation d'une fonction par un procédé d'interpolation à l'aide des valeurs de la fonction f en des points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, ce qui suppose que ces valeurs soient connues exactement. Or, dans la plupart des situations, ce n'est pas le cas. En particulier lorsque les valeurs f proviennent de mesures expérimentales.

Le résultat de mesures physiques tel que celui présenté sur la Figure 5.8 conduit à penser que $f(x)$ doit être une fonction affine $f(x) = a_1 x + a_0$. Il ne semble pas très raisonnable de remplacer $f(x)$ par un polynôme d'interpolation aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ dont le calcul dépendrait des valeurs manifestement erronées $(f(x_i))_{0 \leq i \leq n}$.

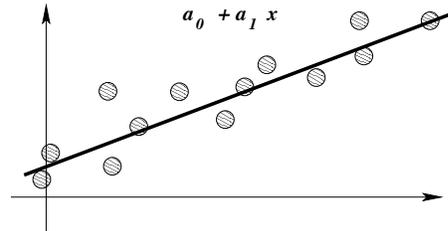


FIG. 5.8 – Approximation linéaire (trait continu) au sens des moindres carrés à partir de données physiques (points).

En effet, une analyse statistique succincte du phénomène ci-dessus indique que ces valeurs $(f(x_i))_{0 \leq i \leq n}$ contiennent une information juste (variant lentement) mais aussi un certain bruit (c'est un signal parasite variant rapidement mais de faible amplitude). L'ajustement de données consiste à éliminer ce bruit. Dans cet exemple, le principe de la méthode va consister à chercher la fonction f , non plus sous la forme d'un polynôme de degré n mais plutôt sous la forme $f(x) = a_1 x + a_0$ où a_0 et a_1 sont calculées de manière à rendre le bruit le plus faible possible. Il reste à définir correctement la notion de plus faible possible, nous pourrions par exemple rechercher les valeurs a_0 et $a_1 \in \mathbb{R}$ solution du problème de minimisation suivant,

$$\max_{0 \leq i \leq n} |f(x_i) - (a_0 + a_1 x_i)| \quad (5.11)$$

Cependant, le plus souvent nous préférons minimiser la quantité suivante,

$$\sum_{i=0}^n |f(x_i) - (a_0 + a_1 x_i)|^2, \quad (5.12)$$

car ce problème peut être résolu plus facilement. C'est la méthode des moindres carrés.

5.3.1 Rappel du théorème d'approximation

Avant de passer à la description de la méthode des moindres carrés, démontrons un résultat d'existence de solutions qui s'applique à la fois aux problèmes (5.11) et (5.12) mais ne donne pas l'unicité de la solution, ce qui est un inconvénient d'un point de vue de la mise en œuvre de l'algorithme.

Théorème 5.3.1 (Théorème d'approximation) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et \mathcal{P}_n un sous-espace vectoriel de E de dimension $n \geq 1$. Alors pour tout élément $f \in E$, il existe au moins un élément $P^* \in \mathcal{P}_n$, définie comme étant la meilleure approximation de f dans \mathcal{P}_n , c'est-à-dire

$$\|f - P^*\|_E = \min_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_E.$$

Démonstration : Notons d la distance induite par la norme $\|\cdot\|_E$ de l'espace vectoriel E : pour tout f et $g \in E$, $d(f, g) = \|f - g\|_E$.

Soient $f \in E$ et \mathcal{P}_n un sous-espace vectoriel de E de dimension $n \geq 1$. Définissons alors

$$d(f, \mathcal{P}_n) = \inf_{Q \in \mathcal{P}_n} \|f - Q\|_E.$$

Par définition de l'infimum, il existe une suite $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_n$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - Q_k\|_E = d(f, \mathcal{P}_n).$$

Montrons que la suite $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée. D'une part, par définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_\varepsilon$

$$|\|f - Q_k\|_E - d(f, \mathcal{P}_n)| \leq \varepsilon$$

et donc pour $\varepsilon = d(f, \mathcal{P}_n)$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k > k_0$,

$$\begin{aligned} \|Q_k\|_E &\leq \|Q_k - f\|_E + \|f\|_E \\ &\leq 3\|f\|_E. \end{aligned}$$

Ainsi, $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée, et puisque \mathcal{P}_n est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, il existe donc $P^* \in \mathcal{P}_n$ et une sous-suite extraite de $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$, toujours notée de la même manière, tels que $Q_k \rightarrow P^*$ et donc

$$\|f - P^*\|_E = d(f, \mathcal{P}_n) = \inf_{Q \in \mathcal{P}_n} \|f - Q\|_E.$$

□

Exemple 5.3.1 Prenons par exemple $E = \mathcal{R}^{n+1}$ avec $n \geq 1$, ce qui correspond au nombre de points dont nous connaissons les valeurs approchées. Munissons E de la norme du max $\|\cdot\|_\infty$ et prenons \mathcal{P}_2 un sous-espace vectoriel de E de dimension 2. En appliquant le Théorème 5.3.1, nous démontrons alors qu'il existe au moins une solution de (5.11), c'est-à-dire un polynôme de degré un qui minimise la norme du max de \mathcal{R}^{n+1}

$$\max_{0 \leq i \leq n} |f(x_i) - (a_0 + a_1 x_i)|$$

Notons que ce théorème est en réalité beaucoup plus général puisque l'espace E n'est pas forcément de dimension finie :

Exemple 5.3.2 Pour un intervalle $[a, b]$ de \mathcal{R} , prenons $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathcal{R})$ muni de la norme du max $\|\cdot\|_\infty$ et prenons $\mathcal{P}_2 \subset E$ l'espace vectoriel des polynôme de degré inférieur ou égal à un, qui est de dimension 2. En appliquant le Théorème 5.3.1, nous démontrons alors qu'il existe au moins une solution du problème de minimisation

$$\|f - p^*\|_\infty = \inf_{p \in \mathcal{P}_2} \|f - p\|_\infty,$$

c'est-à-dire un polynôme de degré un qui minimise la norme sup $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathcal{R})$.

En définitive, ce théorème assure l'existence d'au moins une solution au problème (5.11) ou (5.12) mais il n'est en aucun cas constructif. C'est une méthode de compacité : l'existence d'une suite convergant vers la solution est démontrée mais la suite n'est pas construite explicitement.

Pour remédier à cet inconvénient, nous ajoutons une hypothèse supplémentaire en requérant que l'espace E soit un espace de Hilbert. Nous appliquons alors le Théorème de la projection vu au chapitre précédent (Théorème 4.4.6) sur un sous-espace vectoriel \mathcal{P}_n de dimension fini (c'est bien un sous-ensemble fermé, convexe de E). Nous pouvons alors caractériser la solution P^* de (5.12) comme l'unique solution vérifiant

$$\langle f - P^*, Q \rangle_E = 0, \forall Q \in \mathcal{P}_n. \quad (5.13)$$

En effet, il suffit de vérifier que lorsque \mathcal{P}_n est un sous-espace vectoriel de E , pour tout $Q \in \mathcal{P}_n$, nous avons aussi $-Q \in \mathcal{P}_n$, ce qui signifie que (4.29) est dans ce cas une égalité.

5.3.2 Résolution du problème des moindres carrés discrets

Reprenons le problème des moindres carrés (5.12) et considérons $n + 1$ points $(x_i)_{0 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R}^d$ et $n + 1$ réels $(y_i)_{0 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R}$. En outre, pour tout $0 \leq j \leq m$, notons $\phi_j : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ avec $m \leq n$ et \mathcal{U} l'espace vectoriel engendré par ces fonctions $\mathcal{U} = \text{Vect} \{ \phi_0, \dots, \phi_m \}$.

La méthode des moindres carrés consiste à rechercher une fonction $\phi^* \in \mathcal{U}$ dont les valeurs $\phi^*(x_i)$ sont les plus proches possible de y_i pour tout $0 \leq i \leq n$. Autrement dit, nous souhaitons résoudre le problème de minimisation suivant : trouver $\phi^* \in \mathcal{U}$ telle que

$$\sum_{i=0}^n |y_i - \phi^*(x_i)|^2 = \min_{\phi \in \mathcal{U}} \sum_{i=0}^n |\phi(x_i) - y_i|^2. \quad (5.14)$$

Démontrons alors un résultat d'existence et d'unicité de la solution et proposons par la même occasion un algorithme de construction.

Théorème 5.3.2 *Soit $(\phi_j)_{0 \leq j \leq m}$ une famille libre de l'espace des fonctions de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . Alors il existe une unique fonction $\phi^* \in \mathcal{U}$ solution de (5.14). En outre, $\phi^*(x) = \sum_{j=0}^m u_j \phi_j(x)$ où le vecteur $u = (u_0, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ est l'unique solution du système linéaire $B^T B u = B^T y$, avec $B \in \mathcal{M}_{n+1, m+1}(\mathbb{R})$ donnée par*

$$B = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \dots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix}.$$

En définitive l'idée de la méthode des moindres carrés repose sur la recherche d'un vecteur u^* minimisant la norme euclidienne de \mathbb{R}^{n+1}

$$\|B u^* - y\|_2, \quad (5.15)$$

pour une matrice $B \in \mathcal{M}_{n+1, m+1}$ (avec $m \leq n$) et un vecteur $y \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Démonstration : Nous allons démontrer que la solution du problème de minimisation peut être caractérisée comme étant la solution d'un système linéaire et que ce système linéaire admet une unique solution.

Dans une première étape, mettons le problème sous forme matricielle. Posons $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $y = (y_0, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ et remarquons ensuite que l'application $z \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \|z\| = (\sum_{i=0}^n |z_i|^2)^{1/2} \in \mathbb{R}^+$ correspond à la norme euclidienne de \mathbb{R}^{n+1} . Ensuite, pour une fonction $\phi \in \mathcal{U}$, il vient $\phi(x_i) = \sum_{j=0}^m u_j \phi_j(x_i) \equiv (B u)_i$, avec $B \in \mathcal{M}_{n+1, m+1}(\mathbb{R})$ donnée par

$$B = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \dots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix}$$

et $u = (u_0, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$. Par conséquent, nous avons

$$\sum_{i=0}^n |\phi(x_i) - y_i|^2 = \|B u - y\|^2.$$

En notant $v = B u \in \mathbb{R}^{n+1}$, le problème revient alors à trouver $v^* \in F := \{v \in \mathbb{R}^{n+1}, \exists u \in \mathbb{R}^{m+1}, v = B u\}$ réalisant le minimum de $\|v - y\|$ pour tout $v \in F$, c'est-à-dire $v^* \in F$ tel que

$$\|v^* - y\| = \min_{v \in F} \|v - y\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne cette fois-ci la norme euclidienne de \mathbb{R}^{n+1} .

Ainsi, en appliquant le Théorème 4.4.6, nous démontrons qu'il existe un unique $v^* \in F$ réalisant le minimum de $\|y - v\|$. Cette solution est caractérisée par $v^* \in F$, vérifiant $\langle y - v^*, v \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0$, pour tout $v \in F$.

Puisque $v^* \in F$, il existe $u^* \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que $v^* = B u^*$, nous avons donc $\langle B u^* - y, B u \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0$, pour tout $u \in \mathbb{R}^{m+1}$ ou de manière équivalente

$$\langle B^T B u^* - B^T y, u \rangle_{\mathbb{R}^{m+1}} = 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^{m+1}$$

et donc $B^T B u^* = B^T y$.

Pour autant, ceci n'assure pas l'unicité. En effet, nous savons que v^* est unique d'après le théorème de la projection mais il peut exister plusieurs u^* tel que $B u^* = v^*$. L'unicité est liée au caractère injectif de B . En effet, puisque la famille $\{\phi_0, \dots, \phi_m\}$ est libre, la matrice B est bien de rang $m + 1$, c'est-à-dire $\dim(\text{Im}(B)) = \dim F = m + 1$. Or, pour $B \in \mathcal{M}_{n+1, m+1}(\mathbb{R})$, nous avons $\dim(\text{Im}(B)) + \dim(\text{Ker}(B)) = \dim(\mathbb{R}^{m+1}) = m + 1$, ce qui signifie que $\text{Ker}(B) = \{0\}$ et donc B est injective. Nous en déduisons que $B^T B$ est symétrique et définie positive, elle est inversible. Il existe donc une unique solution $u^* \in \mathbb{R}^{m+1}$ de (5.14). \square

Par la suite, généralisons la méthode des moindres carrés à des problèmes continus, ce qui permettra de construire des polynômes particuliers : les polynômes orthogonaux.

5.4 Polynômes orthogonaux

Nous avons déjà utilisé les espaces des Hilbert lors du chapitre précédent (voir le Paragraphe 4.3.2). Introduisons maintenant une notion supplémentaire : l'orthogonalité.

Définition 5.4.1 Soit E un \mathbb{K} -espace de Hilbert. La famille $(e_n)_{n \in I} \subset E$ avec $I \subset \mathbb{N}$ est orthogonale par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ lorsque $\langle e_n, e_p \rangle = 0$, pour tout $p \neq n$.

En outre, la famille $(e_n)_{n \in I} \subset E$ est orthonormale par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ lorsque $\langle e_n, e_n \rangle = 0$, pour tout $p \neq n$ et $\langle e_n, e_n \rangle = 1$, pour $n \in I$.

Toute famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre, il suffit d'effectuer le produit scalaire pour le vérifier. Nous avons alors les propriétés suivantes [18].

Proposition 5.4.1 Soit $(e_n)_{n \in I}$ une famille orthogonale de E muni d'un produit scalaire (E est appelé espace pré-hilbertien). Alors pour tout élément $x \in E$, nous avons l'inégalité de Bessel $\sum_{n \in I} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

En outre, si $(e_n)_{n \in I}$ forme une base de E , nous avons l'égalité $\sum_{n \in I} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2$, connue sous le nom d'égalité de Parseval, de plus la série $\sum_{n \in I} \langle x, e_n \rangle e_n$ converge vers x .

5.4.1 Construction de polynômes orthogonaux

Soit ω une fonction strictement positive sur $[a, b]$, appelée poids. Notons

$$L_\omega^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}, \int_a^b |f(x)|^2 \omega(x) dx < \infty \right\}$$

où l'intégrale est à prendre au sens de Lebesgue [18]. Par la suite, utilisons les notations suivantes :

- pour $\omega(x)$ une fonction strictement positive sur $[a, b]$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ désigne le produit scalaire pondéré par le poids ω : pour toute fonction f, g régulières

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_a^b f(x) g(x) \omega(x) dx ;$$

- l'espace $L_\omega^2([a, b])$ est l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur $[a, b]$ par rapport au poids ω . C'est un espace vectoriel normé (dont chaque élément est une fonction) complet, muni d'un produit scalaire ;
- la norme associée au produit scalaire est donnée par l'application $f \in L_\omega^2([a, b]) \mapsto \|f\|_\omega \in \mathbb{R}^+$ telle que

$$\|f\|_\omega^2 = \langle f, f \rangle_\omega = \int_a^b |f(x)|^2 \omega(x) dx.$$

Introduisons également la norme de la convergence uniforme sur $[a, b]$ définie par

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

celle-ci est correctement définie si f est par exemple continue.

Appliquons alors le produit scalaire à poids à des polynômes.

Définition 5.4.2 Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. La suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes orthogonaux par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$, si les polynômes P_n sont orthogonaux dans $L_\omega^2([a, b])$.

Par la suite, supposons que

$$\int_a^b |x|^n \omega(x) dx < \infty, \quad \forall n \geq 0,$$

ce qui assure que tous les polynômes sont contenus dans l'espace $L_\omega^2([a, b])$.

Théorème 5.4.1 Soit ω une fonction strictement positive sur l'intervalle $[a, b]$. Alors il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ orthogonaux par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ et tel que P_n est de degré n et dont le coefficient devant le terme x^n vaut un. Plus précisément, l'ensemble $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x - \alpha_0, \\ P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \end{array} \right. \quad (5.16)$$

avec pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n = \frac{1}{\|P_n\|_{L_\omega^2}^2} \int_a^b x P_n(x) P_n \omega(x) dx, \quad \lambda_n = \frac{\|P_n\|_{L_\omega^2}^2}{\|P_{n-1}\|_{L_\omega^2}^2}. \quad (5.17)$$

Démonstration : Construisons les polynômes orthogonaux P_n par le procédé de Gram-Schmidt. Pour ce faire, posons d'abord $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = (x - \alpha_0) P_0(x)$ où α_0 est calculée de sorte que la condition d'orthogonalité entre P_0 et P_1 soit vérifiée, c'est-à-dire

$$\alpha_0 = \frac{\int_a^b x \omega(x) dx}{\int_a^b \omega(x) dx} = \frac{1}{\|P_0\|_{L_\omega^2}^2} \int_a^b x P_0(x) P_0(x) \omega(x) dx.$$

Observons également en utilisant la condition d'orthogonalité que

$$\begin{aligned} \int_a^b P_1^2(x) \omega(x) dx &= \int_a^b P_1(x) (x - \alpha_0) P_0(x) \omega(x) dx \\ &= \int_a^b x P_1(x) P_0(x) \omega(x) dx. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Posons ensuite $P_2(x) = (x - \alpha_1) P_1(x) - \lambda_1 P_0(x)$. Puis, des conditions $\langle P_2, P_1 \rangle_\omega = \langle P_2, P_0 \rangle_\omega = 0$, nous déduisons simplement que

$$\alpha_1 = \frac{1}{\|P_1\|_{L_\omega^2}^2} \int_a^b x P_1(x) P_1(x) \omega(x) dx,$$

et en utilisant (5.18), il vient

$$\lambda_1 = \frac{1}{\|P_0\|_{L_\omega^2}^2} \int_a^b x P_1(x) P_0(x) \omega(x) dx,$$

ce qui démontre le résultat pour $n = 1$.

Procédons ensuite par récurrence et supposons que (5.17) est vraie au rang n , c'est-à-dire qu'il existe une famille de polynômes orthogonaux $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$.

Posons alors $P_{n+2}(x) = (x - \alpha_{n+1}) P_{n+1}(x) - \lambda_{n+1} P_n(x)$.

D'une part, démontrons que pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, le polynôme P_{n+2} est orthogonal au polynôme P_i construit précédemment. Pour cela, rappelons que $x P_i(x)$ est un polynôme de degré $i+1$ et d'après la Proposition 5.1.1, $(P_k)_{0 \leq k \leq i+1}$ forme une base de l'ensemble des polynômes de degré $i+1$ et donc $x P_i(x) = \sum_{k=0}^{i+1} c_k P_k(x)$. Il vient alors d'après l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} \langle P_{n+2}, P_i \rangle_\omega &= \sum_{k=0}^{i+1} c_k \langle P_{n+1}, P_k \rangle_\omega - \alpha_{n+1} \langle P_{n+1}, P_i \rangle_\omega - \lambda_{n+1} \langle P_n, P_i \rangle_\omega \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part, en imposant les conditions $\langle P_{n+2}, P_{n+1} \rangle_\omega = \langle P_{n+2}, P_n \rangle_\omega = 0$, nous en déduisons les valeurs de α_{n+1} et λ_{n+1}

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\|P_{n+1}\|_{L_\omega^2}^2} \int_a^b x |P_{n+1}(x)|^2 \omega(x) dx$$

et

$$\lambda_{n+1} = \frac{1}{\|P_n\|_{L_\omega^2}^2} \int_a^b x P_n(x) P_{n+1}(x) \omega(x) dx.$$

La valeur de λ_{n+1} n'est pas exactement celle proposée. Montrons alors que

$$\int_a^b x P_n(x) P_{n+1}(x) \omega(x) dx = \|P_{n+1}\|_{L_\omega^2}^2.$$

En effet, puisque l'ensemble $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ constitue une famille orthogonale dans $L_\omega^2(a, b)$; il forme une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré $n+1$. En écrivant $x P_n(x)$ dans cette base et en utilisant le fait que le coefficient devant le terme de degré $n+1$ du polynôme $x P_n$ vaut 1, nous avons $x P_n(x) = P_{n+1}(x) + \sum_{i=0}^n c_i P_i(x)$ et déduisons que

$$\int_a^b x P_n(x) P_{n+1}(x) \omega(x) dx = \|P_{n+1}\|_{L_\omega^2}^2,$$

ce qui donne le résultat. □

Énonçons ici deux résultats classiques sur les racines des polynômes orthogonaux.

Proposition 5.4.2 Pour tout $n \geq 1$, nous avons

- le polynôme P_n possède exactement n racines simples contenues dans l'intervalle $]a, b[$,
- les racines $(x_i^n)_{1 \leq i \leq n}$ de P_n séparent les racines $(x_i^{n+1})_{1 \leq i \leq n+1}$ de P_{n+1} , c'est-à-dire

$$a < x_1^{n+1} < x_1^n < x_2^{n+1} < \dots < x_n^{n+1} < x_n^n < x_{n+1}^{n+1} < b.$$

Avant de poursuivre, donnons deux exemples de polynômes orthogonaux :

Exemple 5.4.1 (Polynôme de Hermite) Les polynômes de Hermite H_n définis par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2/2} \right)$$

sont orthogonaux dans $L_\omega^2(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire associé au poids $\omega(x) = e^{-x^2/2}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Nous pouvons démontrer que les polynômes de Hermite sont donnés par la relation de récurrence suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = x$ et $H_{n+1}(x) = x H_n(x) - n H_{n-1}(x)$.

Exemple 5.4.2 (Polynôme de Legendre) Les polynômes de Legendre P_n sont définis pour $x \in [-1, 1]$ par la récurrence suivante $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ et $(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1)x P_n(x) - n P_{n-1}(x)$.

Cette suite de polynômes forme une famille orthogonale dans $L_\omega^2([-1, 1])$ pour le produit scalaire associé au poids $\omega \equiv 1$.

Un autre exemple important est l'ensemble des polynômes de Tchebychev que nous étudierons précisément dans l'Exercice 5.4.4.

5.4.2 Méthode des moindres carrés continue

Nous avons présenté la méthode des moindres carrés discrète consistant à trouver par exemple un polynôme P^* qui approche une fonction connue seulement en certains points $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$. La méthode des moindres carrés continue consiste à approcher une fonction f par un polynôme $P^* \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ qui minimise la norme $\|f - P\|_{L_\omega^2}$ sur l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n , noté $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Pour la construction d'une telle approximation, nous utilisons des polynômes orthogonaux par rapport au produit scalaire associé à l'espace L_ω^2 .

Pour tout $n \geq 1$, choisissons $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite de polynômes orthogonaux par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$, où ω représente la fonction poids et notons $\mathcal{P}_n(a, b)$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n restreints à l'intervalle $[a, b]$. Observons que puisque la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre, nous avons

$$\mathcal{P}_n(a, b) = \text{Vect}\{P_0, \dots, P_n\}.$$

Pour une fonction f définie de l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} telle que $f \in L_\omega^2([a, b])$. Recherchons un polynôme $P^* \in \mathcal{P}_n(a, b)$ solution du problème

$$\|f - P^*\|_{L_\omega^2}^2 = \inf_{P \in \mathcal{P}_n(a, b)} \|f - P\|_{L_\omega^2}^2. \quad (5.19)$$

Démontrons alors le résultat suivant :

Théorème 5.4.2 Soient $n \geq 1$ et $f \in L_\omega^2([a, b])$. Il existe un unique polynôme $P^* \in \mathcal{P}_n(a, b)$ solution de (5.19) qui s'écrit sous la forme $P^*(x) = \sum_{i=0}^n c_i P_i(x)$, où les coefficients $(c_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont donnés par

$$c_i = \frac{\langle P_i, f \rangle_\omega}{\langle P_i, P_i \rangle_\omega}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Démonstration : La démonstration de l'existence et de l'unicité de $P^* \in \mathcal{P}_n(a, b)$ découle directement de l'application du Théorème 4.4.6. En outre, en écrivant P^* sous la forme $P^*(x) = \sum_{i=0}^n c_i P_i(x)$, les coefficients $(c_i)_{0 \leq i \leq n}$ vérifient d'après le Théorème 4.4.6,

$$\sum_{j=0}^n c_j \langle P_j, P \rangle_\omega = \langle f, P \rangle_\omega, \quad \forall P \in \mathcal{P}_n(a, b).$$

En choisissant $P = P_i$, pour $i = 0, \dots, n$ et en utilisant l'orthogonalité des polynômes, nous obtenons le résultat

$$c_i \langle P_i, P_i \rangle_\omega = \langle f, P_i \rangle_\omega, \quad i = 0, \dots, n,$$

ce qui correspond à l'expression souhaitée de c_i . \square

Ce dernier théorème permet de comprendre pourquoi dans la pratique nous utilisons un espace fonctionnel muni d'un produit scalaire ; ce cadre permet en effet de donner une expression simple de la solution du problème de minimisation.

Exemple 5.4.3 Recherchons le polynôme P de degré inférieur ou égal à trois qui minimise

$$\int_{-1}^1 |e^x - P(x)|^2 dx.$$

Utilisons pour cela la base de polynômes de Legendre $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x$ et

$$L_2(x) = \frac{3}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right), \quad L_3(x) = \frac{5}{2} \left(x^3 - \frac{3}{5}x \right).$$

Calculons alors

$$\langle f, P_0 \rangle_1 = \int_{-1}^1 e^x dx = e - 1/e,$$

$$\langle f, P_1 \rangle_1 = \int_{-1}^1 x e^x dx = 2/e,$$

$$\langle f, P_2 \rangle_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) e^x dx = e - 7/e,$$

$$\langle f, P_3 \rangle_1 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 \left(x^3 - \frac{3}{5}x \right) e^x dx = -5e + 37/e.$$

Par ailleurs, nous montrons que $\langle P_n, P_n \rangle_1 = 2/(2n+1)$ et déduisons alors l'expression du polynôme de degré inférieur ou égal à trois qui est la meilleure approximation au sens des moindres carrés de e^x

$$P^*(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{\langle f, P_k \rangle_1}{\langle P_k, P_k \rangle_1} P_k(x), \quad x \in [-1, 1].$$

5.4.3 Application : formules de quadrature pour l'approximation d'intégrales

Nous allons voir dans cette partie que les polynômes orthogonaux permettent de construire de nouvelles formules de quadrature pour l'approximation d'intégrales. Ces formules vont s'avérer être

beaucoup plus précises que les formules de quadrature basées sur l'interpolation de Lagrange. Pour une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, nous souhaitons approcher la quantité

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

par la formule de quadrature à $n + 1$ points $I(f) = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i)$.

Il s'agit donc de trouver des poids $(\omega_i)_{0 \leq i \leq n}$ et des points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ pour que l'erreur $E(f) = |I(f) - I|$ soit minimale. Montrons alors un résultat qui permet de construire ces formules de quadrature exactes pour des polynômes de degré inférieur ou égal à $2n + 1$ pour la calcul d'intégrales avec poids.

Théorème 5.4.3 Soient P_{n+1} le polynôme orthogonal à la famille de polynômes orthogonaux $\{P_0, \dots, P_n\}$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ et $(x_i)_{0 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des racines distinctes du polynôme P_{n+1} . Les coefficients $(\omega_i)_{0 \leq i \leq n}$ forment l'unique solution du système

$$\sum_{i=0}^n P_k(x_i) \omega_i = \begin{cases} \langle P_0, P_0 \rangle_\omega & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (5.20)$$

si et seulement si pour tout $0 \leq i \leq n$, $\omega_i > 0$ et

$$\int_a^b P(x) \omega(x) dx = \sum_{i=0}^n \omega_i P(x_i), \quad \forall P \in \mathcal{P}_{2n+1}(a, b). \quad (5.21)$$

En outre, il est impossible de trouver des nombres $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et des poids $(\omega_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que (5.21) soit aussi vérifiée pour tout polynôme $P \in \mathcal{P}_{2n+2}(a, b)$.

Démonstration : Supposons d'abord que $w = (\omega_0, \dots, \omega_n)^T$ est solution du système (5.20) qui s'écrit aussi $A^T w = f$ avec

$$A = \begin{pmatrix} P_0(x_0) & \dots & P_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ P_0(x_n) & \dots & P_n(x_n) \end{pmatrix},$$

et f est donné par le second membre de (5.20). Observons que puisque les polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont orthogonaux, ils forment une famille libre et d'après la Proposition 5.4.2, les points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont distincts, ce qui signifie que la matrice A est inversible et ce système admet bien une unique solution. Ensuite considérons $P \in \mathcal{P}_{2n+1}(a, b)$ que nous décomposons $P(x) = Q(x) P_{n+1}(x) + R(x)$, pour $x \in [a, b]$ avec Q et $R \in \mathcal{P}_n(a, b)$. En exprimant Q et R dans la base orthogonale $\{P_0, \dots, P_n\}$. Il vient alors $Q(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k(x)$ et $R(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k P_k(x)$. D'une part, étant donné que $P_0 \equiv 1$ et que la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est orthogonale, nous obtenons

$$\int_a^b P(x) \omega(x) dx = \langle P_{n+1}, Q \rangle_\omega + \langle Q, P_0 \rangle_\omega = \beta_0 \langle P_0, P_0 \rangle_\omega.$$

D'autre part, comme $(x_i)_{0 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R}$ constitue l'ensemble des racines distinctes de P_{n+1} , nous avons $P_{n+1}(x_i) = 0$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ et donc

$$\sum_{i=0}^n P(x_i) \omega_i = \sum_{i=0}^n R(x_i) \omega_i = \sum_{k=0}^n \beta_k \left(\sum_{i=0}^n P_k(x_i) \omega_i \right).$$

Au final, puisque w est solution de (5.20), nous obtenons $\sum_{i=0}^n P(x_i) \omega_i = \beta_0 \langle P_0, P_0 \rangle_\omega$, ce qui montre le résultat

$$\sum_{i=0}^n P(x_i) \omega_i = \beta_0 \langle P_0, P_0 \rangle_\omega = \int_a^b P(x) \omega(x) dx.$$

Pour montrer que $\omega_j > 0$ pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, il suffit de choisir le polynôme de $P \in \mathcal{P}_{2n}(a, b)$

$$P(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x - x_k)^2,$$

lequel vérifie

$$0 < \int_a^b P(x) \omega(x) dx = \sum_{i=0}^n P(x_i) \omega_i = \omega_j \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x_j - x_k)^2,$$

ce qui prouve bien que $\omega_j > 0$.

Il reste à démontrer que l'égalité (5.21) ne peut pas être vérifiée pour tout polynôme $P \in \mathcal{P}_{2n+2}(a, b)$. Pour cela choisissons simplement $P(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)^2 \in \mathcal{P}_{2n+2}(a, b)$. Il vérifie

$$\int_a^b P(x) \omega(x) dx > 0$$

et $\sum_{i=0}^n P(x_i) \omega_i = 0$. Il ne peut donc pas y avoir égalité, ce qui prouve le résultat.

Examinons maintenant la réciproque. Supposons que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, les poids $\omega_i > 0$ et les points x_i , deux à deux distincts, satisfont (5.21). Pour démontrer que $(\omega_i)_{0 \leq i \leq n}$ est solution de (5.20), il suffit de rappeler que $P_0 \equiv 1$ et que les polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$, ce qui donne pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$

$$\sum_{i=0}^n P_k(x_i) \omega_i = \int_a^b P_k(x) P_0(x) \omega(x) dx = \langle P_0, P_0 \rangle_\omega \delta_{k,0}.$$

Enfin, il reste à démontrer que $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ constitue l'ensemble des racines de P_{n+1} . En effet, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, nous prenons dans (5.21) le polynôme $P(x) = P_{n+1}(x) P_k(x)$, nous obtenons alors par orthogonalité des polynômes,

$$0 = \langle P_n, P_k \rangle_\omega = \sum_{i=0}^n P_n(x_i) P_k(x_i) \omega_i, \quad 0 \leq k \leq n$$

autrement dit le vecteur $c = (P_n(x_0)\omega_0, \dots, P_n(x_n)\omega_n)^T$ est solution de $A^T c = 0$ avec A inversible, ce qui signifie que $c = 0$ et comme les poids sont strictement positifs, cela impose nécessairement que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $P_{n+1}(x_i) = 0$. \square

Ce théorème va permettre de construire des formules de quadrature plus précises que celles présentées au paragraphe 5.2.3. En effet, en choisissant pour les points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ les racines de P_{n+1} et pour les poids $(\omega_i)_{0 \leq i \leq n}$ la solution de (5.20), la formule à l'ordre n donnée par (5.21) est exacte pour l'ensemble des polynômes de degré $2n + 1$. Cette méthode d'intégration numérique désormais classique est due à Gauss et Legendre.

Exemple 5.4.4 *Considérons le cas le plus simple où $\omega \equiv 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, les polynômes orthogonaux correspondants sont les polynômes de Legendre : pour $x \in [-1, 1]$, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ et*

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{n+1}.$$

Prenons alors $n = 0$, ce qui donne $x_0 = 0$ et ω_0 est solution du système (5.20) que nous obtenons en prenant successivement $P(x) = 1$, ce qui donne $\omega_0 = 2$. La formule de quadrature est la formule du point milieu que nous obtenons sur un intervalle $[a, b]$ quelconque

$$I(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

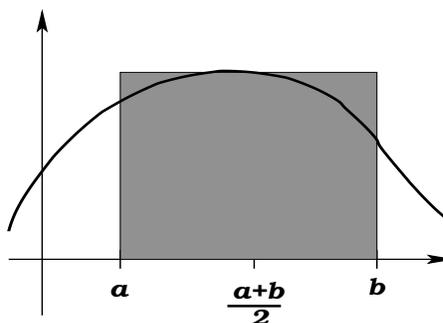


FIG. 5.9 – Formule du point milieu.

Cette formule de quadrature nécessite seulement une seule évaluation de la fonction f comme pour la formule des rectangles mais nous verrons que l'approximation est pourtant bien meilleure, ce qui montre tout l'avantage des formules de quadrature construites à partir des polynômes orthogonaux.

Exemple 5.4.5 *Lorsque $n = 1$ nous avons $P_2(x) = 3x^2/2 - 1/2$, d'où $x_0 = -x_1 = \sqrt{3}/3$ et (ω_0, ω_1) est solution du système*

$$\begin{cases} \omega_0 + \omega_1 = 2, \\ \frac{\sqrt{3}}{3}(\omega_0 - \omega_1) = 0, \end{cases}$$

d'où $\omega_0 = \omega_1 = 1$ et la formule de quadrature devient

$$I(f) = \frac{(b-a)}{2} \left[f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{3}(b-a)}{6}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{\sqrt{3}(b-a)}{6}\right) \right].$$

Pour conclure, il reste à évaluer l'erreur que l'on commet en appliquant cette formule de quadrature à des fonctions quelconques.

Théorème 5.4.4 *Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b], \mathbb{R})$ alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que*

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx - \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \langle \pi_{n+1}, \pi_{n+1} \rangle_{\omega}. \quad (5.22)$$

Démonstration : Considérons le polynôme d'interpolation de Hermite H_n construit à partir des points d'interpolations $H_n(x_i) = f(x_i)$ et $H'_n(x_i) = f'(x_i)$, pour tout $i = 0, \dots, n$.

Puisque le degré de H_n est strictement inférieur à $2(n+1)$, nous avons

$$\int_a^b f(x) \omega(x) dx = \sum_{i=0}^n \omega_i H_n(x_i) = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i).$$

Nous avons alors

$$\int_a^b f(x) \omega(x) dx - \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) = \int_a^b [f(x) - H_n(x)] \omega(x) dx.$$

Or d'après l'erreur d'interpolation de Hermite démontrée au Théorème 5.2.5, il vient puisque $f \in \mathcal{C}^{2(n+1)}([a, b], \mathbb{R})$

$$f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2,$$

avec ξ_x différent de x_i pour tout $i = 0, \dots, n$ et puisque la fonction

$$\frac{f^{(2(n+1))}(\xi_x)}{(2n+2)!} = \frac{f(x) - H_n(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}$$

est continue sur $[a, b]$, d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f(x) - H_n(x)] \omega(x) dx \\ &= \frac{1}{(2n+2)!} \int_a^b f^{(2(n+1))}(\xi_x) \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \omega(x) dx \\ &= \frac{f^{(2(n+1))}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \omega(x) dx \\ &= \frac{f^{(2(n+1))}(\xi)}{(2n+2)!} \langle \pi_n, \pi_n \rangle_{\omega}. \end{aligned}$$

□

En définitive la méthode de Gauss est très efficace en termes de coût de calcul et de précision mais il n'est pas toujours facile de l'appliquer à l'ordre élevé car le terme d'erreur à droite de (5.22) n'est pas toujours contrôlable lorsque la fonction f est peu régulière. Néanmoins les méthodes du point milieu et à deux points sont souvent utilisées dans la pratique ; d'autres comme l'extrapolation peuvent être envisagées [27].

5.4.4 Transformée de Fourier rapide

Dans cette partie, nous souhaitons approcher des fonctions périodiques par des sommes partielles de séries de Fourier.

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application périodique de période T . Supposons que $\int_I |f(x)| dx$ converge sur un intervalle $I = [\tau, \tau + T]$ de longueur T , pour tout $\tau \in \mathbb{R}$. Notons alors \mathbb{T} un intervalle quelconque de longueur T .

Rappels et définitions des séries de Fourier Étudions alors l'ensemble discret de fréquences T/n où n est un entier relatif et associons à f un coefficient c_n pour chacune de ces fréquences. Définissons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = 2\pi/T$ et

$$c_k := \frac{1}{T} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-i\omega k x} dx. \quad (5.23)$$

Le nombre complexe c_k est appelé coefficient de Fourier³ de f .

Exemple 5.4.6 Lorsque f est une fonction sinusoïdale $f_k(x) = e^{2i\pi k x}$, nous constatons immédiatement que $c_k = 1$, et pour tout $n \neq k$, $c_n = 0$.

Plus généralement, lorsque f est une superposition de fonctions sinusoïdales, nous disons que f est un polynôme trigonométrique

$$f(x) = \sum_{k=k_1}^{k_2} a_k e^{2i\pi k x},$$

de degré $\max(|k_1|, |k_2|)$, ses coefficients de Fourier sont nuls pour $n \notin \{k_1, \dots, k_2\}$, et $c_n = a_n$ pour $n \in \{k_1, \dots, k_2\}$.

À partir des coefficients de Fourier d'une fonction T -périodique, nous définissons la série de Fourier.

Définition 5.4.3 Nous appelons série de Fourier associée à f , la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\omega n x}$, où $\omega = 2\pi/T$ et c_n est le coefficient de Fourier (5.23).

Bien entendu, cette série n'est pas nécessairement convergente. Il faut faire quelques hypothèses supplémentaires sur la fonction f (voir le Théorème 5.4.6). C'est pourquoi il est plus prudent de considérer dans un premier temps les sommes partielles de la série de Fourier de f : $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega k x}$.

Remarque 5.4.1 D'après l'exemple vu ci-dessus, lorsque f est un polynôme trigonométrique, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $S_n(f) = f$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, non nul, notons $L^p(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions T -périodiques et de puissance p -ième intégrable sur $[0, T]$, que nous munissons de la norme naturelle

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Par ailleurs, vérifions que $L^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire hermitien

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

naturellement associé à la norme $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \langle f, f \rangle^{1/2}$.

³Joseph Fourier (1768-1830), mathématicien français.

Observons alors que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où $f_n : x \mapsto e^{i\omega n x}$ est une base orthonormale dans $L^2(\mathbb{T})$, ce qui signifie $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{T})} = 1$ et $\langle f_n, f_k \rangle = 0$ quels que soient n et k avec $n \neq k$.

En appliquant alors la Proposition 5.4.1, pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, nous avons l'inégalité de Bessel $\|S_n(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le résultat de convergence dans $L^2(\mathbb{T})$ de la somme partielle

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f) - f\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0$$

et l'identité de Parseval donne enfin $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$.

Inversement, toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de carré sommable est la suite des coefficients de Fourier d'une application $f \in L^2(\mathbb{T})$. En effet, montrons que les sommes partielles $\sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega k x}$ forment une suite convergente dans $L^2(\mathbb{T})$ dont la limite est f .

La théorie précédente peut être raffinée en montrant que, sous certaines conditions, la série de Fourier d'une fonction converge point par point vers cette fonction.

Théorème 5.4.5 *Si la série $\sum_n c_n$ des coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ est absolument convergente, alors sa série de Fourier est uniformément convergente et*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[0,1]} |S_n(f) - f| = 0.$$

En particulier, la fonction f est nécessairement continue, comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

Cependant, lorsque la fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ est discontinue, nous avons le résultat suivant.

Théorème 5.4.6 (Dirichlet) *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en tout point, alors pour tout x*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(x) = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)),$$

où

$$f(x+0) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} f(x+\varepsilon), \quad f(x-0) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} f(x-\varepsilon).$$

Ainsi aux points de discontinuité, l'approximation d'une fonction par les sommes partielles de sa série de Fourier n'est pas très bonne : c'est ce que nous appelons le phénomène de Gibbs.

Théorème 5.4.7 (Phénomène de Gibbs) *Soit*

$$C := \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} dx \approx 0,59.$$

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en tout point, alors pour tout x

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n(f) - f \right) \Big|_{x+\frac{1}{2n+1}} &= \left(C - \frac{1}{2} \right) (f(x+0) - f(x-0)), \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n(f) - f \right) \Big|_{x-\frac{1}{2n+1}} &= -\left(C - \frac{1}{2} \right) (f(x+0) - f(x-0)). \end{aligned}$$

Ce résultat montre que si une fonction f est discontinue en un point x , la série de Fourier ne converge pas ponctuellement vers f au point de discontinuité.

Approximation de la série de Fourier Nous voulons approcher une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ par sa somme partielle $S_n(f)$ où n est un entier positif non nul

$$S_n(f)(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{i\omega k x}, \quad (5.24)$$

avec $\omega = 2\pi/T$ et les nombres complexes c_k représentant les inconnues du problème sont les coefficients de Fourier (5.23). En appliquant le Théorème 5.4.2, nous savons que $S_n(f)$ est la meilleure approximation au sens des moindres carrés dans l'espace des polynômes trigonométriques de degré n de la fonction f . En outre les coefficients $(c_k)_{|k| \leq n}$ sont donnés par le Théorème 5.4.2

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-i\omega k x} dx, \quad |k| \leq n.$$

Par la suite, nous proposons une procédure permettant un calcul précis et rapide des valeurs approchées de $(c_k)_{|k| \leq n}$. Cet algorithme s'appelle la transformée de Fourier rapide (*Fast Fourier Transform*). C'est en 1965 que James Cooley et John Tukey publient cette méthode [8] mais il semblerait que l'algorithme avait déjà été proposé par Carl Friedrich Gauss [19] en 1805 et adapté à plusieurs reprises sous des formes différentes. Notre objectif est de fournir des algorithmes efficaces pour le calcul d'un polynôme trigonométrique ou pour une série de Fourier.

Tout d'abord pour $m \geq 1$, nous introduisons des points équidistants $x_l = lT/m$ pour $l = 0, \dots, m-1$ et supposons que seules les valeurs $(f_l)_{0 \leq l < m}$, désignant la valeur de $f(x_l)$ pour $0 \leq l \leq m-1$, soient connues. Approchons alors les coefficients de Fourier $(c_k)_{|k| \leq n}$ à l'aide de la formule des rectangles (5.8) aux points x_0, \dots, x_{m-1} . Une approximation c_k^m du coefficient de Fourier c_k s'écrit alors pour $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k^m = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} f_l e^{-i\omega k x_l} = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} f_l e^{-i \frac{2\pi}{m} k l}. \quad (5.25)$$

Remarquons d'abord que cette formule produit au plus m nombres complexes distincts. En effet,

$$\begin{aligned} c_{k+m}^m &= \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} f_l e^{-\frac{2\pi}{m} i (k+m) l} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f_l e^{-\frac{2\pi}{m} i k l} = c_k^m. \end{aligned}$$

Ceci signifie que si nous connaissons seulement m valeurs distinctes de f aux points $(x_l)_{0 \leq l \leq m-1}$, nous obtenons seulement m valeurs distinctes pour les coefficients de Fourier. Or, le calcul de $S_n(f)$ nécessite le calcul de $2n + 1$ coefficients de Fourier, le meilleur choix consiste donc à prendre $m = 2n + 1$.

Nous proposons un algorithme simple et rapide permettant d'effectuer le calcul des coefficients de Fourier approchés $(c_k^m)_{0 \leq k \leq m-1}$. Pour cela, définissons la transformation de Fourier discrète \mathcal{F}_m comme l'opérateur linéaire qui associe à $f := (f_0, \dots, f_{m-1})^T \in \mathbb{C}^m$, le vecteur $c := (c_0, \dots, c_{m-1})^T \in \mathbb{C}^m$ donné par (5.25), nous avons donc $c = \mathcal{F}_m f$.

Notons ensuite $\overline{\mathcal{F}}_m$ l'opérateur approchant la transformée de Fourier inverse $f = \overline{\mathcal{F}}_m c$ obtenu en appliquant la formule de quadrature des rectangles à (5.24)

$$f_k = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} c_l e^{i\omega k x_l} = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} c_l e^{i \frac{2\pi}{m} k l}, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Démontrons alors un résultat liant \mathcal{F}_m et $\overline{\mathcal{F}}_m$:

Lemme 5.4.1 *Nous avons pour tout m les identités suivantes $\mathcal{F}_m \circ \overline{\mathcal{F}}_m = m I_m = \overline{\mathcal{F}}_m \circ \mathcal{F}_m$, où I_m représente la matrice identité.*

Démonstration : Montrons que $\mathcal{F}_m \circ \overline{\mathcal{F}}_m = m I_m$. Pour cela, considérons un ensemble $(c_k^m)_{0 \leq k \leq m-1}$ et formons l'ensemble $(f_l)_{0 \leq l \leq m-1}$ donné par

$$f_l = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} c_k^m e^{\frac{2\pi}{m} i k l}, \quad 0 \leq l \leq m-1.$$

Calculons alors le terme suivant pour $k \in \{0, \dots, m-1\}$,

$$\frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} f_l e^{-\frac{2\pi}{m} i k l}$$

et allons montrer qu'il vaut $m c_k^m$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} f_l e^{-\frac{2\pi}{m} i k l} &= \sum_{l=0}^{m-1} e^{-\frac{2\pi}{m} i k l} \sum_{p=0}^{m-1} c_p^m e^{\frac{2\pi}{m} i p l}, \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} \left(\sum_{l=0}^{m-1} e^{-\frac{2\pi}{m} i l (k-p)} \right) c_p^m. \end{aligned}$$

Or, nous savons que

$$\sum_{l=0}^{m-1} e^{-\frac{2\pi}{m} i l (k-p)} = \begin{cases} m & \text{si } m \text{ divise } k-p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme k et p varient entre 0 et $m-1$, m ne peut diviser $(k-p)$ que lorsque $k=p$. Par conséquent, il vient

$$\frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} f_l e^{-\frac{2\pi}{m} i k l} = m c_k^m,$$

ce qui montre bien que $\mathcal{F}_m \circ \overline{\mathcal{F}}_m = m I_m$.

La seconde égalité se déduit immédiatement de la première par conjugaison. \square

Décrivons maintenant le principe de la transformée de Fourier Rapide. Elle est basée sur une factorisation d'un entier en produit de facteurs premiers. Supposons que $m = pq$, où p et q sont deux entiers supérieurs à 2 et notons $\omega_m = e^{-2\pi i/m}$. Il s'agit de calculer le vecteur $c^m = (c_0^m, \dots, c_{m-1}^m) \in \mathbb{C}^m$ dont les composantes sont données par

$$c_k^m = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} f_l \omega_m^{kl}.$$

D'abord, un réarrangement du vecteur $(f_l)_{0 \leq l \leq m-1}$ en une matrice à p lignes et q colonnes donne pour $0 \leq r < p$ et $0 \leq s < q$, $f_{r,s} = f_l$, avec $0 \leq l = sp + r < m$. Puis en écrivant c_k^m selon cette formulation, il vient

$$\begin{aligned} c_k^m &= \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{s=0}^{q-1} f_{r,s} \omega_m^{(sp+r)k} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{p-1} \left(\sum_{s=0}^{q-1} f_{r,s} \omega_q^{sk} \right) \omega_m^{rk}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

où nous avons utilisé l'égalité suivante $\omega_m^{spk} = e^{-\frac{2\pi}{m}ispk} = e^{-\frac{2\pi}{q}isk} = \omega_q^{sk}$.

Maintenant, il suffit d'observer que la somme entre parenthèses est une fonction périodique en la variable k de période q puisqu'elle vérifie $\omega_q^{s(k+q)} = \omega_q^{sk} \omega_q^{sq} = \omega_q^{sk}$.

Ainsi, en décomposant k comme $k = uq + v$ avec $0 \leq u < p$ et $0 \leq v < q$, il suffit de calculer la somme entre parenthèses seulement pour $0 \leq v < q$. En effet, $\omega_q^{sk} = \omega_q^{s(uq+v)} = \omega_q^{sv}$. Nous en déduisons pour $k = uq + v$

$$c_k^m = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{p-1} \left(\sum_{s=0}^{q-1} f_{r,s} \omega_q^{sv} \right) \omega_m^{r(uq+v)}.$$

L'algorithme pour calculer une transformée de Fourier discrète devient donc le suivant : soit f une fonction connue en $m = pq$ points.

Algorithme 2. La transformation de Fourier discrète

- Calculer la somme entre parenthèses de (5.26)

$$k = uq + v \text{ et } l = rp + s :$$

- Pour $v = 0, \dots, q - 1$ et $r = 0, \dots, p - 1$

$$S_{r,v} = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{q-1} f_{r,s} \omega_q^{sv}.$$

Fin de pour v et r .

- Calculer chaque composante c_k^m :

Pour $u = 0, \dots, p - 1$ et $v = 0, \dots, q - 1$

$$k = uq + v,$$

$$c_k^m = \sum_{r=0}^{p-1} S_{r,v} \omega_m^{r(uq+v)}.$$

Fin de pour u et v .

La première étape nécessite $m q$ opérations tandis que la seconde nécessite $m p$ opérations, ce qui représente un coût global de $m(p + q)$ opérations ce qui est déjà bien moindre que le coût initial de m^2 opérations.

En effet, prenons $m = 1\,000$, le coût initial représente alors environ $m^2 = 1\,000\,000$ opérations. Alors que lorsque nous décomposons $m = 10 \times 100$, le coût devient $m(p + q) = 1\,000 \times 110 = 110\,000$ ou alors $m = 25 \times 40$, et le coût est alors de $m(p + q) = 1\,000 \times 65 = 65\,000$!

Nous pouvons encore diminuer le nombre d'opérations en décomposant m sous la forme $m = p_1 \dots p_d$ en répétant l'idée ci-dessus. Un cas fréquent utilisé est celui où $m = 2^k$.

Application à la compression de données Étant donnée une suite n périodique $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et sa transformée de Fourier discrète $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$, l'idée est de supprimer dans la représentation (5.23) pour c_k tous les termes dont la valeur absolue de c_k est inférieure à un certain seuil donné par exemple par 5 % du coefficient maximal.

L'image de gauche de la Figure 5.10 montre la digitalisation d'un tremblement de terre qui a eu lieu en 1989 aux États-Unis dans les montagnes de Santa Cruz. Plusieurs centaines d'impulsions par seconde (200 Hz). Parmi ces données, prenons 8 192 nombres $(f_j)_j$ et calculons la transformée de Fourier discrète $(c_k)_k$. La suite de leurs modules $(|c_k|)_k$ est représentée sur l'image de droite de la

Figure 5.10 pour $-4096 \leq k < 4096$. Observons que dans l'espace de Fourier, certains coefficients sont très petits par rapport au $\max_k |c_k|$. Il s'agit donc d'éliminer ces coefficients qui correspondent à des fréquences d'oscillations peu importantes dans ce tremblement de terre. Par exemple ici, les hautes fréquences qui correspondent aux modes de Fourier c_k pour $|k| \geq 1000$ sont largement inférieures aux autres modes. Ainsi, il n'est pas nécessaire de stocker ces valeurs. Retirons alors les coefficients c_k qui sont inférieurs à 5% de $\max_k |c_k|$. Observons alors que les coefficients c_k pour $|k| \geq 1000$ peuvent être négligés sans trop affecter le signal d'origine, ce qui représente environ une division par quatre du coût de stockage. Nous représentons dans les Figures 5.11 et 5.12 les coefficients de Fourier tronqués et le signal reconstruit à partir de ces troncatures à 5% et 10%. Observons que même si la représentation dans l'espace de Fourier est différente, dans l'espace physique les signaux reconstruits et d'origine sont très proches.

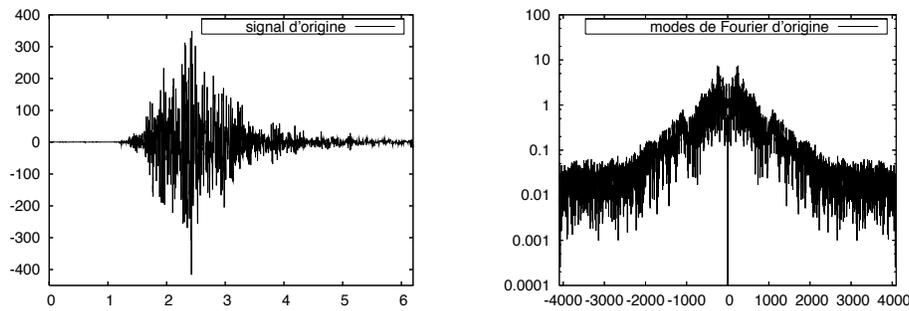


FIG. 5.10 – Les deux figures représentent les données d'un signal $(f_j)_j$ et sa transformée de Fourier discrète $(c_k)_k$.

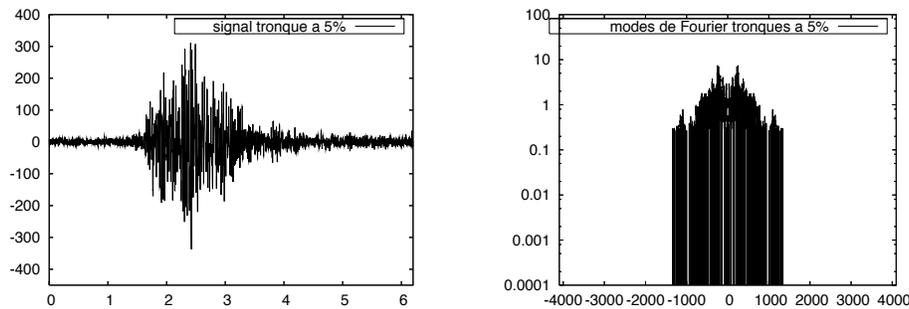


FIG. 5.11 – Les deux figures représentent ce même signal où nous avons tronqué les coefficients de Fourier à 5% de la valeur maximale.