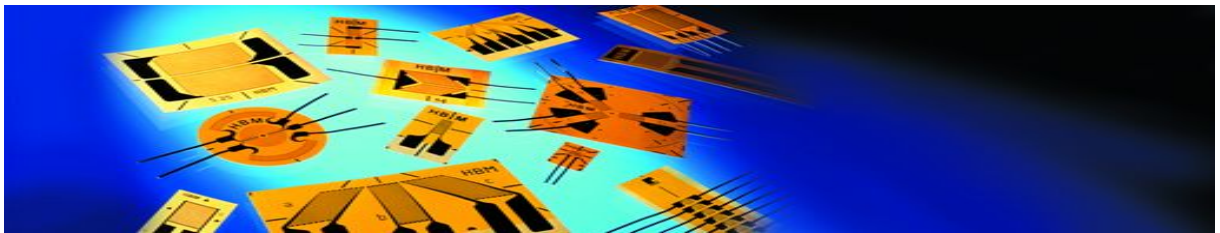


Université Paul Sabatier Toulouse 3



Université
de Toulouse

POLYCOPIE DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS ELASTICITE LINEAIRE



ERICK RINGOT



UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, TOULOUSE 3
Mention SCIENCES POUR L'INGENIEUR
Département d'Ingénierie
Licences de mécanique, de génie de l'habitat, de génie civil (L3)
Université Paul Sabatier Toulouse III - Université de Toulouse
118, route de Narbonne - FR 31062 Toulouse France

e-mail : erick.ringot@univ-tlse3.fr

Avant-Propos

révision

<i>n°</i>	<i>date</i>	<i>auteur - correcteur</i>	<i>nature de la modification</i>
1.0	avril 2010	E.Ringot	-
1.1	septembre 2010	E.Ringot	corrections coquilles

acquisition de compétences

La mécanique des milieux continus, l'élasticité linéaire en particulier, est à l'origine de bon nombre de théories mathématiques venant en support à la construction (génie mécanique ou génie civil). Le but de ce cours est de permettre l'acquisition de nouvelles compétences par l'étudiant qui sera à même de comprendre le vocabulaire, les concepts et les méthodes mis en oeuvre dans les codes de calcul ou les règles de calcul internationales. Les premiers outils maîtrisés par tout bon ingénieur sont ainsi mis à la portée des étudiants de licence L3.

contenu

L'objet de la mécanique des milieux continus (*mmc*) est l'étude du comportement de milieux continus qui respectent l'hypothèse de continuité. Ce cours de 3ème année de licence de mécanique est volontairement restreint à l'étude des solides élastiques, dans l'hypothèse des petites perturbations.

Globalement, le cours aborde les notions suivantes :

1. La cinématique explique ce qu'est l'hypothèse de continuité et traite des déplacements et des déformations des solides ;
2. La statique aborde les questions de forces internes et introduit le concept de contraintes et leurs propriétés ;
3. Les lois de comportement des matériaux établissent des ponts entre les contraintes et les déformations. La loi élastique des milieux homogènes isotropes est détaillée ;
4. Ce qu'est un problème de mécanique des milieux continus et les méthodes de résolution en élasticité.

Les deux derniers chapitres présentent des éléments de calcul vectoriel et les principales formules d'élasticité dans différents systèmes de projection. Un recueil d'exercices faisant l'objet d'un autre document est associé à ce cours ; il contient les sujets abordés au cours des travaux dirigés.

prérequis

mathématiques

Espaces vectoriels et affines. Calcul matriciel : matrice, polynôme caractéristique, valeurs et vecteurs propres. Géométrie Euclidienne élémentaire : triangle rectangle, cercle, trigonométrie. Produit vectoriel, produit scalaire. Equation et représentation paramétrique d'une courbe et d'une surface. Coordonnées cartésiennes et cylindriques. Fonction, dérivée. Fonctions de plusieurs variables, dérivée partielle, différentielle. Fonctions vectorielles, analyse vectorielle.

mécanique

Force, moment d'une force, torseur. Mécanique du solide indéformable : torseur cinématique, torseur dynamique. Principe fondamental de la dynamique. Statique.



Table des matières

1	Description cinématique d'un milieu continu	11
1.1	hypothèse de continuité	11
1.1.1	notion de solide	11
1.1.2	continuité	11
1.2	modèles de description cinématique	12
1.2.1	référentiel et repères	12
1.2.2	description lagrangienne	12
1.2.3	description eulérienne - dérivée particulière	13
1.3	Champ de déformation	14
1.3.1	tenseur gradient du champ de déplacement	14
1.3.2	transformation de GREEN-LAGRANGE	15
1.3.3	Linéarisation du tenseur des déformations	16
1.3.4	Interprétation - composantes	16
1.3.4.1	interprétation du tenseur $\bar{\epsilon}$	16
1.3.4.2	composantes de $\bar{\epsilon}$ en coordonnées cartésiennes	17
1.3.5	analyse des composantes : élongation & distorsion	17
1.3.5.1	élongation	17
1.3.5.2	distorsion (glissement)	17
1.3.5.3	dilatation volumique	18
1.4	Déformations & directions principales	18
1.4.1	déformations principales	19
1.4.2	directions principales de déformation	19
1.4.3	invariants du tenseur des déformations	20
1.5	Représentation graphique d'un état de déformation	20
1.5.1	cercle de Mohr des déformations	20
1.5.2	autres représentations	21
1.6	Métrologie des déformations	21
1.6.1	jauges de déformation	21
1.6.1.1	résistor	21
1.6.1.2	jauge	21
1.6.1.3	mesure de la variation de résistance	22

1.6.1.4	conditionneur de jauges	23
1.6.2	rosettes	23
1.6.2.1	matériel	23
1.6.2.2	dépouillement	23
1.7	Problème inverse - compatibilité	24
1.7.1	compatibilité d'un tenseur avec un champ de déplacement	24
1.7.2	intégration	25
1.7.3	conditions aux limites du solide exprimées en déplacement	25
2	Contraintes	27
2.1	objectif	27
2.2	interactions - cadre Newtonien	27
2.2.1	espace	27
2.2.2	temps	27
2.2.3	origine des forces	28
2.2.4	principe fondamental	28
2.2.4.1	dynamique	28
2.2.4.2	statique	29
2.2.5	action-réaction	29
2.3	champ de contrainte	30
2.3.1	partitionnement d'un solide	30
2.3.2	hypothèse sur la nature des forces internes	30
2.3.3	contrainte normale et contrainte de cisaillement	31
2.4	propriétés des contraintes	31
2.4.1	tenseur des contraintes	31
2.4.2	équilibre dynamique d'un domaine solide	32
2.4.2.1	résultante dynamique : équation de l'équilibre local	32
2.4.2.2	moment dynamique : symétrie du tenseur des contraintes	33
2.5	Diagonalisation du tenseur des contraintes	34
2.5.1	contraintes principales	35
2.5.2	directions principales de contrainte	35
2.5.3	invariants du tenseur des contraintes	35
2.5.4	composantes sphérique et déviatorique d'un tenseur contrainte	36
2.5.4.1	définition	36
2.5.4.2	invariants du tenseur déviateur	36
2.6	représentation graphique d'un état de contrainte	37
2.6.1	tricerle de MOHR	37
2.6.2	cercle de MOHR	37
2.6.2.1	un cas particulier de l'état de contrainte	37
2.6.2.2	construction	38

2.6.2.3	généralisation (problème inverse)	39
2.7	conditions aux limites du solide exprimées en contraintes	40
2.8	métrologie des contraintes	40
2.8.1	photoélasticité par transmission	41
2.8.2	photoélasticité par réflexion	42
2.8.3	autres méthodes	42
3	Loi de comportement élastique linéaire	43
3.1	introduction	43
3.2	hypothèses	44
3.2.1	expérimentation	44
3.2.1.1	comportement de l'acier (test de traction)	44
3.2.1.2	comportement du béton (test de compression)	45
3.2.2	conséquences sur les déformations d'origine mécanique	46
3.2.3	déformations thermiques	47
3.3	formulations de la loi élastique linéaire	47
3.3.1	loi de HOOKE-DUHAMEL	47
3.3.2	loi de GABRIEL LAMÉ	48
3.3.3	notation de VOIGT	48
3.3.4	relations entre coefficients	49
3.3.5	formulations croisées	49
3.4	puissance, travail, énergie	50
3.4.1	principe des puissances virtuelles PPV^*	50
3.4.1.1	théorème général	50
3.4.1.2	cas du champ de vitesse virtuelle cinématiquement admissible	51
3.4.1.3	cas où $\{\vec{u}^*\}$ est le champ de vitesse réel : théorème de l'énergie cinétique	51
3.4.2	énergie élastique volumique	51
3.4.3	théorème de l'énergie mécanique	52
3.5	critères de limite élastique	52
3.5.1	critère de RANKINE	52
3.5.2	critère de TRESCA	53
3.5.3	critère de VON MISES	53
4	Méthodes de résolution des problèmes d'élasticité	55
4.1	problème d'élasticité	55
4.1.1	position du problème	55
4.1.2	objectif	55
4.1.3	récapitulation des équations disponibles	56
4.1.3.1	équations concernant le champ de contrainte	56
4.1.3.2	équations concernant le champ de déformation et le champ de déplacement	56
4.1.3.3	loi de comportement	56

4.1.3.4	bilan	56
4.1.3.5	méthodologie	57
4.2	Méthode de NAVIER	57
4.2.1	principe	57
4.2.2	équations	58
4.2.3	champ de déplacement cinématiquement admissible	59
4.3	Méthode de BELTRAMI-MITCHEL	59
4.3.1	principe	59
4.3.2	équations	59
4.3.3	cas des forces de volume uniformes	60
4.3.4	champ de contrainte statiquement admissible	61
4.4	unicité de la solution d'un problème d'élasticité	61
4.4.1	principe de superposition	61
4.4.2	unicité de la solution	61
4.4.3	champ $\{\vec{u}^*\}$ CA et champ $\{\vec{\sigma}^*\}$ SA associés	61
4.5	Méthode de RITZ	61
4.5.1	théorème	62
4.5.2	application	64
4.5.3	méthode des éléments finis	64
4.6	Elasticité bidimensionnelle	65
4.6.1	forme des tenseurs - tenseurs réduits	65
4.6.2	équation de compatibilité	66
4.6.3	trace des tenseurs	67
4.6.4	équilibre	67
4.6.5	relation contraintes - déformations	67
4.6.6	énergie volumique	68
4.6.7	équations de BELTRAMI	68
4.6.8	fonction de AIRY	69
4.6.8.1	Les contraintes dérivent d'une fonction unique	69
4.6.8.2	propriété de la fonction d'AIRY	70
4.6.8.3	formulation d'un problème d'élasticité plane	71
4.7	Élasticité axisymétrique	71
5	Définitions & théorèmes de l'analyse vectorielle	72
5.1	notations	72
5.2	Systèmes de projection	72
5.3	Opérateurs vectoriels	73
5.3.1	gradient <i>grad</i>	73
5.3.1.1	vecteur gradient d'un champ scalaire $\overrightarrow{\text{grad}}$	74
5.3.1.2	opérateur symbolique $\vec{\nabla}$	74

5.3.1.3	tenseur gradient d'un champ vectoriel $\overline{\overline{grad}}$	74
5.3.2	divergence div	74
5.3.2.1	divergence scalaire d'un champ vectoriel div	75
5.3.2.2	divergence vectorielle d'un tenseur \overrightarrow{div}	75
5.3.3	vecteur rotationnel \overrightarrow{rot}	75
5.3.4	laplacien Δ	75
5.3.4.1	laplacien d'un champ scalaire Δ	75
5.3.4.2	laplacien d'un champ vectoriel $\overrightarrow{\Delta}$	75
5.3.4.3	laplacien d'un champ tensoriel $\overline{\overline{\Delta}}$	76
5.4	formules d'analyse vectorielle	76
5.4.1	identités remarquables	76
5.4.2	opérateurs appliqués à des produits de fonctions	76
5.4.3	formes intégrales d'analyse vectorielle : $\int_{\mathcal{D}} \partial g = \oint_{\partial \mathcal{D}} g$	76
5.4.3.1	notations	76
5.4.3.2	théorème d'Ostrogradsky (dit de « flux-divergence »)	77
5.4.3.3	théorème de Stokes	77
6	Formulaire d'élasticité linéaire	78
6.1	hypothèses	78
6.2	équilibre local	78
6.2.1	tenseur contrainte	78
6.2.2	vecteur contrainte	78
6.2.3	équilibre	78
6.3	conditions limites	79
6.3.1	CL en contraintes	79
6.3.2	CL en déplacements	79
6.4	relation déplacements - déformations	79
6.4.1	tenseur déformation	79
6.4.2	équations de compatibilité	80
6.5	critères d'élasticité	80
6.6	loi de comportement	80
6.7	équations de NAVIER	81
6.8	équations de BELTRAMI	81
6.9	élasticité plane	81
6.9.1	forces de volume	81
6.9.2	contraintes	82
6.9.3	équilibre local	82
6.9.4	déplacements & déformations	82
6.9.5	loi de Hooke	83
6.9.6	fonction d'AIRY	83
6.9.7	Propriété	84

Table des figures

1.1.1	discontinuité de la matière - macrovue d'un béton : interface granulat-mortier	11
1.1.2	discontinuité de la matière - microvue électronique d'une pâte de ciment : cristal de Portlandite (chaux) et gel de silicate de calcium hydraté (C-S-H).	11
1.1.3	modes de ruptures selon le mouvement relatif des lèvres de la fissure	12
1.2.1	configurations initiale et postérieure (instant t) d'un solide : vecteur déplacement	12
1.3.1	transformation d'un vecteur infiniment petit	14
1.3.2	transformation d'un dièdre infinitésimal	15
1.3.3	translation puis rotation puis déformation.	16
1.3.4	élongation : variation locale de longueur	17
1.3.5	distorsion : variation locale d'angle	18
1.3.6	variation locale de volume	18
1.4.1	déformation sans distorsion d'un parallélépipède bâti sur les axes principaux	19
1.5.1	dièdre $\{n,t\}$	20
1.5.2	cercle de MOHR des déformations (plan direct)	21
1.5.3	cercle de MOHR des déformations (plan indirect)	21
1.6.1	principe & photo d'une jauge de déformation.	21
1.6.2	jauges collées sur une éprouvette de bois	22
1.6.3	schéma du pont de Wheatstone	22
1.6.4	Conditionneur pont de Wheatstone (doc. VISHAY)	23
1.6.5	rosettes : à 45°, à 120° (doc HBM).	23
1.6.6	cercle de Mohr de la rosette	24
1.7.1	partition de l'enveloppe : $\partial S = \partial S_f \cup \partial S_u$	26
2.2.1	théorème fondamental	28
2.2.2	solide considéré comme l'union de ses deux parties	29
2.2.3	solide décomposé en deux parties	29
2.3.1	solide soumis à des forces	30
2.3.2	section du solide	30
2.4.1	élément de volume tétraédrique	32
2.4.2	sous-domaine extrait d'un solide	33
2.4.3	réciprocité des contraintes de cisaillement	34
2.5.1	contrainte principale et direction principale de contrainte.	35

2.6.1 contrainte normale et contrainte de cisaillement	37
2.6.2 tricerle de MOHR (pour les contraintes)	38
2.6.3 état plan de contrainte (cas du plan perpendiculaire à l'axe III)	38
2.6.4 cercle de MOHR des contraintes	39
2.6.5 vecteurs normaux et tangents.	40
2.6.6 construction du cercle de MOHR lorsque les contraintes principales sont inconnues.	40
2.7.1 partition de l'enveloppe : $\partial S = \partial S_f \cup \partial S_u$	41
2.8.1 polariscopes employé en photoélasticimétrie	41
2.8.2 différentes étapes de l'état de contrainte d'un modèle en araldite.	41
2.8.3 image en photoélasticimétrie par réflexion.	42
3.1.1 courbe déformation - nombre de cycles.	44
3.2.1 éprouvette de traction en acier.	45
3.2.2 éprouvettes de béton après essai de compression	46
3.2.3 loi type déformation-contrainte pour le béton en compression ($\sigma, \epsilon < 0$)	46
3.2.4 torsion d'un barreau cylindrique	47
3.5.1 représentation des contraintes de VON MISES dans un code de calcul bidimensionnel.	54
4.1.1 Données d'un problème d'élasticité	55
4.1.2 découpage d'un solide 2D en éléments finis	57
4.1.3 méthodologie de résolution d'un problème d'élasticité	57
4.5.1 travail versus potentiel d'une force - cas du ressort	63
4.5.2 maillage d'une coque.	65
4.6.1 états plans de déformation & de contrainte	65
4.7.1 Exemple de problème axisymétrique	71
5.4.1 domaines et leur contour	76

Chapitre 1

Description cinématique d'un milieu continu

1.1 hypothèse de continuité

1.1.1 notion de solide

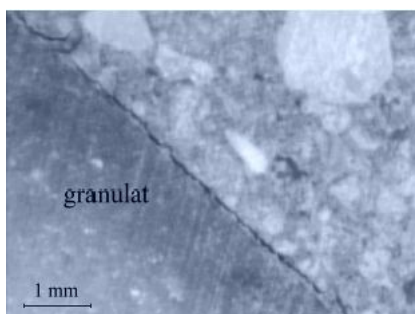


FIGURE 1.1.1 – discontinuité de la matière - macrovue d'un béton : interface granulat-mortier

Cette hypothèse s'applique quand bien même des hétérogénéités apparaissent à des échelles macroscopiques. Il en va ainsi du béton bien que les granulats enchassés dans la pâte de mortier sont bien visibles.

Naturellement, il existe aussi des situations où cette hypothèse de continuité ne permet plus de rendre compte de la réalité physique :

- il s'agit par exemple des solides possédant une frontière délimitant deux matériaux distincts ; dans ce cas les deux domaines sont traités séparément comme étant homogènes et des équations de continuité décrivent la solidarité des deux phases ;
- ou bien qu'une discontinuité apparaisse du fait de la propagation d'une fissure. A ce propos, les mécaniciens de la rupture distinguent trois modes de propagation (Fig.1.1.3).

L'hypothèse de continuité nous permettra de définir des densités volumiques de certaines grandeurs physiques, parmi lesquelles la masse volumique par exemple.

L'exposé porte sur l'étude des mouvements et des déformations des solides. Pour simplifier, on conviendra qu'un solide possède une forme propre, c'est-à-dire qu'il faut lui appliquer des efforts importants pour lui imposer un changement de forme, ce en quoi il se distingue des liquides et des gaz.

1.1.2 continuité

Bien que la matière soit discontinue, ce que peut mettre en évidence n'importe quelle observation microscopique voire macroscopique, les mécaniciens ont besoin d'une hypothèse de continuité permettant de décrire les grandeurs physiques par des champs de fonctions mathématiques ayant les 'bonnes' propriétés de continuité et de dérivabilité.

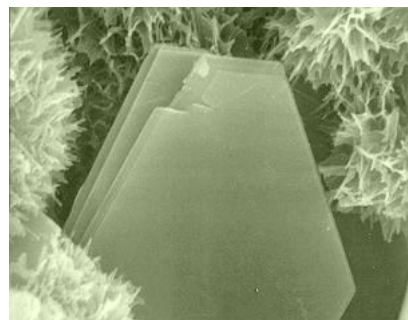


FIGURE 1.1.2 – discontinuité de la matière - microvue électronique d'une pâte de ciment : cristal de Portlandite (chaux) et gel de silicate de calcium hydraté (C-S-H).

1.2 modèles de description cinématique

1.2.1 référentiel et repères

L'observateur, le mécanicien, appartient à un référentiel d'observation. Les vitesses et accélérations sont établies dans ce référentiel. Naturellement, on cherchera à privilégier les référentiels Galiléens dans lesquels les lois Newtonniennes sont applicables (cf. § 2.2.1).

Dans ce référentiel, la position des points de l'espace peuvent être décrits par leurs coordonnées dans un repère formé par une origine et un jeu de trois axes indépendants (en 3D). Plusieurs repères peuvent être associés à un même référentiel.

Les repères peuvent être de nature cartésienne, cylindrique, sphérique ou attaché à une surface selon ce que le mécanicien juge le plus pertinent.

C'est à l'intérieur de ce repère que s'effectue la description d'un solide. Deux point de vue peuvent être adoptés à cet égard.

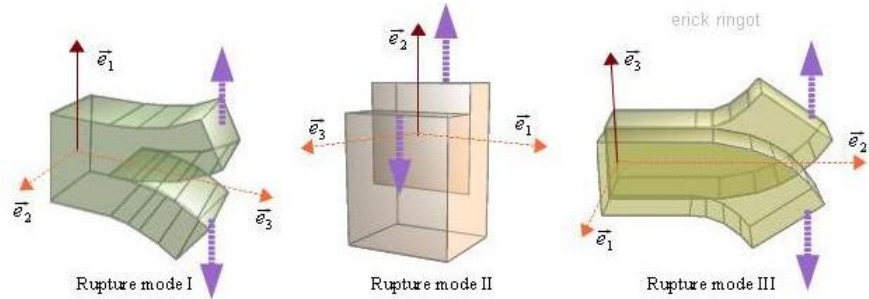


FIGURE 1.1.3 – modes de ruptures selon le mouvement relatif des lèvres de la fissure

1.2.2 description lagrangienne

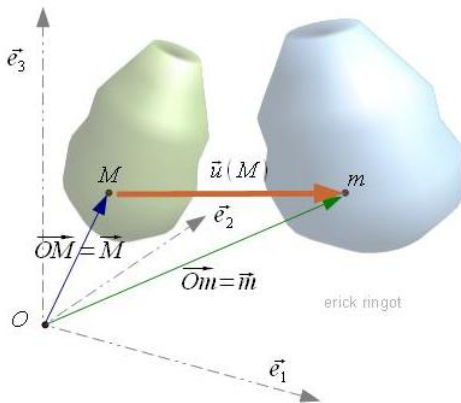


FIGURE 1.2.1 – configurations initiale et postérieure (instant t) d'un solide : vecteur déplacement

Soit le repère orthonormé $\{R\} = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, à l'instant $t_0 = 0$ chaque point M appartenant au solide possède des coordonnées initiales X_1, X_2, X_3 . Le vecteur position initiale est ainsi :

$$\vec{M} = \vec{OM} = X_1 \vec{e}_1 + X_2 \vec{e}_2 + X_3 \vec{e}_3$$

soit, de façon abrégée et en utilisant la convention de sommation implicite :

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^3 X_i \vec{e}_i = X_i \vec{e}_i$$

Une description possible des transformations subies par le solide consiste à considérer la loi d'évolution des positions de chaque particule dudit solide. On introduit ainsi les coordonnées x_1, x_2, x_3 du point m , résultant du déplacement de M entre les instants t_0 et t . Par conséquent le vecteur "position instantanée" s'écrit de la façon suivante :

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = x_i \vec{e}_i$$

Les coordonnées x_i dépendent à la fois des coordonnées X_j (position initiale) et de t (temps). De sorte que :

$$\vec{m} = \vec{m}(\vec{M}, t)$$

ou bien :

$$\begin{cases} x_1 = x_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 = x_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 = x_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Remark 1. On désignera par une lettre majuscule la position initiale d'un point (temps t_0) et par une lettre minuscule sa position instantanée au temps t .

La vitesse peut alors être calculée par :

$$\vec{V}(\vec{m}, t) = \frac{\overrightarrow{dm}}{dt} \quad (1.2.2)$$

De composantes cartésiennes (par exemple) : $V_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}(X_k, t)$ $k = 1..3$ (la dérivée partielle ne concerne donc que la variable de temps, les positions initiales en étant indépendantes quant à elles).

Et de même pour l'accélération :

$$\vec{\Gamma}(\vec{m}, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{m}}{dt^2} \quad (1.2.3)$$

Qui aura pour composantes :

$$\Gamma_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}(X_k, t) \quad k = 1..3 \quad (1.2.4)$$

L'introduction du vecteur déplacement $\vec{u} = \overrightarrow{Mm}$ ne change pas grand chose à la formulation, en effet ¹ :

$$\vec{V}(\vec{m}, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{M}, t) = \frac{d\vec{u}}{dt}(\vec{M}, t) \quad (1.2.5)$$

1.2.3 description eulérienne - dérivée particulaire

Au lieu de suivre chaque particule dans son mouvement, on peut aussi "se poster" en un point M donné de l'espace et observer les particules qui y passent (et avec quelle vitesse elles y passent) ainsi que la variation des grandeurs physiques locales qu'elles transportent (température, pression le cas échéant).

Selon ce point de vue, dit eulérien, les variables descriptives sont donc $\{\vec{x}, t\}$ ou $\{x_1, x_2, x_3, t\}$.

Ainsi une grandeur physique (par exemple scalaire) \mathcal{G} peut être décrite de deux façons :

– selon un point de vue de Lagrange, \mathcal{G} dépend de la particule initiale et du temps et donc :

$$\mathcal{G} = G(X_k, t) \quad (1.2.6)$$

– selon un point de vue d'Euler, \mathcal{G} dépend de la position d'observation et du temps et donc :

$$\mathcal{G} = g(x_k, t) \quad (1.2.7)$$

Si l'on s'intéresse à la variation de la grandeur \mathcal{G} au cours du temps, on obtient également deux formulations :

– selon Lagrange, puisque les coordonnées initiales sont indépendantes du temps :

$$\dot{\mathcal{G}} = \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{dG}{dt}(X_k, t) = \frac{\partial G}{\partial t}(X_k, t) \quad (1.2.8)$$

– selon Euler, par contre, en introduisant la différentielle totale exacte de g :

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{d\mathcal{G}}{dt}(x_k, t) = \frac{1}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_3} dx_3 \right)$$

ce qui devient :

$$\dot{\mathcal{G}} = \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt}$$

On reconnaît les termes suivants :

1. En effet, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = 0$.

- la dérivée partielle de la “mesure” locale \mathcal{G} par rapport au temps : $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}$
 - le vecteur vitesse local : $\vec{V} = \left\{ \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right\}$
 - le vecteur gradient de la mesure \mathcal{G} : $\mathbf{grad} \mathcal{G} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_3} \right\}$ (cf. §5.3.1).
- Par conséquent, on retiendra que :

$$\dot{\mathcal{G}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(x_k, t) + \overrightarrow{\mathbf{grad} \mathcal{G}}(x_k, t) \cdot \vec{V}(x_k, t) \quad (1.2.9)$$

Cette relation s'applique également aux grandeurs vectorielles ou tensorielles.

Par exemple, s'agissant de l'accélération :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathbf{grad} V} \cdot \vec{V} \quad (1.2.10)$$

En composantes cartésiennes :

$$\Gamma_i = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 V_k \cdot \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \quad (1.2.11)$$

1.3 Champ de déformation

1.3.1 tenseur gradient du champ de déplacement

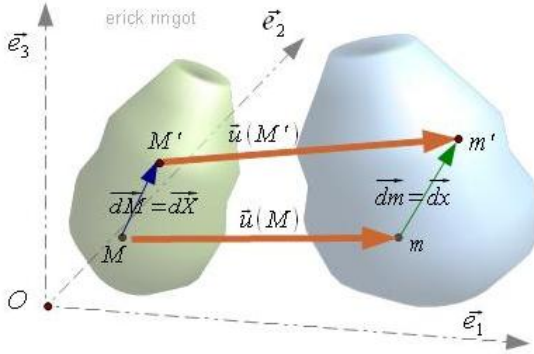


FIGURE 1.3.1 – transformation d'un vecteur infinitésimal petit

Pour caractériser une déformation éventuellement subie par un solide au cours de sa transformation, il convient de “surveiller” s'il est affecté par des changements de longueur (élongations, raccourcissements) ou des distorsions d'angle.

Dans un premier temps, intéressons nous au sort subi par un vecteur infinitésimal de la configuration initiale $d\vec{M} \rightarrow d\vec{m}$ (que l'on note aussi $d\vec{X} \rightarrow d\vec{x}$). Puisque $x_i = x_i(X_k)$, il vient $dx_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial X_k} dX_k$. Soit, en composantes cartésiennes :

$$\begin{cases} dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} dX_3 \\ dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} dX_3 \\ dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} dX_3 \end{cases}$$

On introduit ainsi le tenseur gradient $\overline{\overline{F}}$ qui est un opérateur 3×3 dont les composantes sont ² :

$$\overline{\overline{F}} = \overrightarrow{\mathbf{grad} \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}} \quad (1.3.1)$$

Et donc :

$$d\vec{x} = \overline{\overline{F}} \cdot d\vec{X} \quad (1.3.2)$$

2. On peut noter que $\overrightarrow{\mathbf{grad} \vec{x}} = \vec{x} \otimes \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial X_3} \end{pmatrix}$ (voir § 5.3.1.3).

Si l'on introduit maintenant le champ de déplacement par $\vec{u} = \overline{M_0 M}$, il apparaît clairement que : $\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}$ et donc $\overline{\text{grad}} \vec{x} = \overline{\text{grad}} \vec{X} + \overline{\text{grad}} \vec{u}$ avec $\overline{\text{grad}} \vec{x} = \overline{F}$ et $\overline{\text{grad}} \vec{X} = \overline{I}$ (identité). C'est-à-dire³ :

$$\overline{F} = \overline{I} + \overline{\text{grad}} \vec{u} \quad (1.3.3)$$

1.3.2 transformation de GREEN-LAGRANGE

La transformation d'un vecteur à elle seule ne peut pas décrire une déformation; par exemple, \vec{dx} peut différer de \vec{dX} sous l'effet d'une rotation sans que cela ne soit le signe d'une déformation. D'autre part la transformation d'un vecteur pris séparément ne peut en aucun cas rendre compte d'une quelconque variation angulaire. Ainsi le tenseur gradient n'est pas adéquat pour caractériser, seul, un état de déformation.

Examinons plutôt la transformation du couple formé par deux vecteurs infinitésimaux \vec{dX} et \vec{dX}' . D'un point de vue mathématique, il est avantageux de porter son attention sur l'évolution du produit scalaire $\vec{dX} \cdot \vec{dX}'$ car l'invariance du produit scalaire dans une transformation géométrique garantit que le milieu, ne subissant ni variation de longueur ni variation d'angle, n'est pas déformé (localement).

Les vecteurs \vec{dX} et \vec{dX}' deviennent respectivement $\vec{dx} = \overline{F} \vec{X}$ et $\vec{dx}' = \overline{F} \vec{X}'$

Ainsi la variation de produit scalaire est égale, matriciellement, à⁴ :

$$\vec{dx} \cdot \vec{dx}' - \vec{dX} \cdot \vec{dX}' = [dx]^t \cdot [dx'] - [dX]^t \cdot [dX']$$

Autrement dit⁵ :

$$\vec{dx} \cdot \vec{dx}' - \vec{dX} \cdot \vec{dX}' = ([F] [dX])^t \cdot ([F] [dX']) - [dX]^t [I] [dX']$$

Et encore, par associativité :

$$\vec{dx} \cdot \vec{dx}' - \vec{dX} \cdot \vec{dX}' = [dX]^t \left([F]^t \cdot [F] - [I] \right) [dX']$$

Que l'on pose égal à :

$$\vec{dx} \cdot \vec{dx}' - \vec{dX} \cdot \vec{dX}' = 2 [dX]^t [E] [dX'] \quad (1.3.4)$$

où :

$$[E] = \frac{1}{2} \left([F]^t \cdot [F] - [I] \right) \quad (1.3.5)$$

En prenant en compte l'équation 1.3.3, et en revenant en notation tensorielle, il vient :

$$\overline{E} = \frac{1}{2} \left(\left(\overline{I} + \overline{\text{grad}} \vec{u} \right)^t \cdot \left(\overline{I} + \overline{\text{grad}} \vec{u} \right) - \overline{I} \right)$$

Soit :

$$\overline{E} = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad}} \vec{u} + \overline{\text{grad}}^t \vec{u} + \overline{\text{grad}}^t \vec{u} \overline{\text{grad}} \vec{u} \right) \quad (1.3.6)$$

\overline{E} est le tenseur de déformation de GREEN-LAGRANGE; il est symétrique.

3. Parce que $\overline{\text{grad}} X = \vec{X} \otimes \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} X_{1,X_1} & X_{1,X_2} & X_{1,X_3} \\ X_{2,X_1} & X_{2,X_2} & X_{2,X_3} \\ X_{3,X_1} & X_{3,X_2} & X_{3,X_3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \overline{I}$

4. $[dx]$ est le vecteur colonne $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ et $[dx]^t$, sa transposée, le vecteur ligne $[x_1, x_2, x_3]$

5. On notera au passage que $[X]^t [I] [X] = [X]^t [X]$; ce qui permet d'introduire l'opérateur « Identité » $[I]$ au besoin.

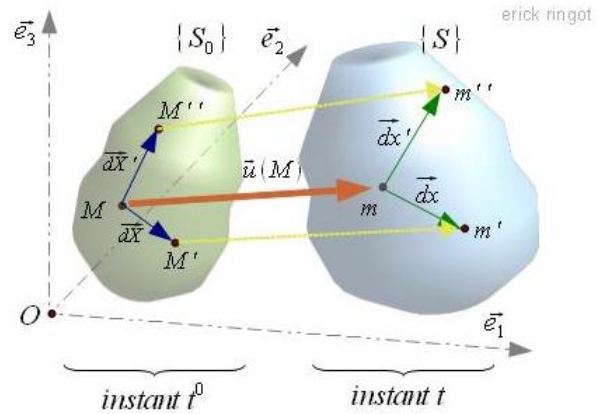


FIGURE 1.3.2 – transformation d'un dièdre infinitésimal

1.3.3 Linéarisation du tenseur des déformations

Dans la suite de l'exposé, l'hypothèse des petites perturbations (HPP) va permettre une simplification de l'expression du tenseur des déformations.

Cette hypothèse est double :

1. Petits déplacements : le déplacement de chacun des points du solide est petit de sorte que l'état actuel (déformé) est confondu avec l'état initial dans le calcul des forces internes⁶.
2. Petites déformations : les termes du tenseur de déformation sont petits devant l'unité⁷.

Les termes de déformation du second ordre deviennent négligeables devant les termes du premier ordre de sorte que le tenseur des déformations, que l'on note désormais $\bar{\bar{\epsilon}}$, se réduise à :

$$\bar{\bar{E}} \simeq \bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\mathbf{grad} \vec{u}}} + \overline{\overline{\mathbf{grad}^t \vec{u}}} \right) \quad (1.3.7)$$

1.3.4 Interprétation - composantes

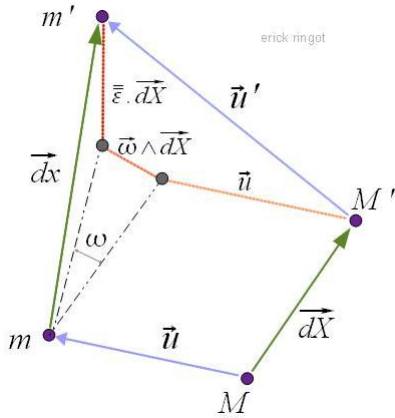
1.3.4.1 interprétation du tenseur $\bar{\bar{\epsilon}}$

Repasant des équations 1.3.2 et 1.3.3, on peut écrire :

$$\vec{dx} = d\vec{X} + \overline{\overline{\mathbf{grad} \vec{u}}} \cdot d\vec{X}$$

On introduit les parties anti-symétriques $\bar{\bar{\omega}}$ et symétriques $\bar{\bar{\epsilon}}$ du tenseur gradient :

$$\vec{dx} = d\vec{X} + \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\mathbf{grad} \vec{u}}} - \overline{\overline{\mathbf{grad}^t \vec{u}}} \right) \cdot d\vec{X} + \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\mathbf{grad} \vec{u}}} + \overline{\overline{\mathbf{grad}^t \vec{u}}} \right) \cdot d\vec{X} = d\vec{X} + \bar{\bar{\omega}} \cdot d\vec{X} + \bar{\bar{\epsilon}} \cdot d\vec{X} \quad (1.3.8)$$



Or, on montre aisément qu'un tenseur anti-symétrique⁸ est équivalent à un produit vectoriel, ainsi :

$$\vec{dx} = d\vec{X} + \vec{\omega} \wedge d\vec{X} + \bar{\bar{\epsilon}} \cdot d\vec{X}$$

ou encore (compte tenu de la définition des vecteurs \vec{X} et \vec{x} , voir figure 1.3.1) :

$$\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{MM'} + \vec{\omega} \wedge d\vec{X} + \bar{\bar{\epsilon}} \cdot d\vec{X}$$

et, puisque $\vec{u}(M) = \overrightarrow{Mm}$ et $\vec{u}(M') = \overrightarrow{M'm'}$ alors :

$$\overrightarrow{u(M')} = \underbrace{\overrightarrow{u(M)}}_{\text{solide indéformable}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge d\vec{X}}_{\text{rotation}} + \underbrace{\bar{\bar{\epsilon}} \cdot d\vec{X}}_{\text{déformation}}$$

FIGURE 1.3.3 – translation puis rotation puis déformation.

Dans un solide déformable, dans l'hypothèse HPP, le champ de déplacement résulte ainsi de la combinaison (par sommation) de :

- une translation d'ensemble ;
- une rotation d'ensemble ;
- un champ de déplacement générant la déformation pure.

6. Attention : cette première hypothèse ne permet pas de rendre compte de certains phénomènes importants en mécanique du solide, notamment les phénomènes d'instabilité.

7. Cette seconde hypothèse peut légitimement être faite dans le cadre d'une théorie du solide élastique ; ce peut ne plus être le cas lorsque les déformations plastiques deviennent importantes (par exemple dans un processus d'extrusion).

8. $\bar{\bar{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \end{pmatrix}$. On notera

que les composantes diagonales du tenseur $\bar{\bar{\omega}}$ sont nulles alors que les composantes extradiagonales sont opposées deux à deux : $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. On dit que $\bar{\bar{\omega}}$ est anti-symétrique.

1.3.4.2 composantes de $\bar{\epsilon}$ en coordonnées cartésiennes

De par sa définition (équation 4.1.6), la matrice des déformations s'établit comme suit (voir § 6.4.1 pour les coordonnées cylindriques).

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_2} + \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_3} + \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_2} + \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \right) & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_3} + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial X_3} + \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_3} + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \quad (1.3.9)$$

Elle est symétrique : $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$.

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^t$$

On se reportera au §.6.4.1 pour l'expression du tenseur en coordonnées cylindriques.

1.3.5 analyse des composantes : élongation & distorsion

1.3.5.1 élongation

Considérons un vecteur matériel de la configuration initiale de longueur dX orienté par un vecteur directeur unitaire \vec{e} , alors $d\vec{X} = dX \cdot \vec{e}$, au cours de la transformation géométrique, ce vecteur devient $d\vec{x}$ et, selon l'équation 1.3.4 dans le cas particulier où $\vec{X} = \vec{X}'$:

$$dx^2 - dX^2 = (dx - dX)(dx + dX) = 2d\vec{X} \cdot \bar{\epsilon} d\vec{X}$$

Dans l'hypothèse des petites perturbations, on approxime la somme $dx + dX$ par $2dX$ et on introduit la notation $\epsilon_e = \frac{dx - dX}{dX}$ ("allongement" relatif dans la direction \vec{e}), alors :

$$(dx - dX)(dx + dX) \simeq \epsilon_e \cdot dX \cdot 2dX = 2dX^2 \vec{e} \cdot \bar{\epsilon} \vec{e}$$

Et donc :

$$\epsilon_e = \vec{e} \cdot \bar{\epsilon} \cdot \vec{e} \quad (1.3.10)$$

ϵ_e est adimensionnel⁹, il est positif si le segment dX s'allonge et est négatif dans le cas d'un raccourcissement.

Ainsi :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \text{ est élongation selon } \vec{x}_1 \\ \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \text{ est élongation selon } \vec{x}_2 \\ \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \text{ est élongation selon } \vec{x}_3 \end{cases}$$

Et, de façon générale :

$$\epsilon_e = [e_1 \quad e_2 \quad e_3] \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (1.3.11)$$

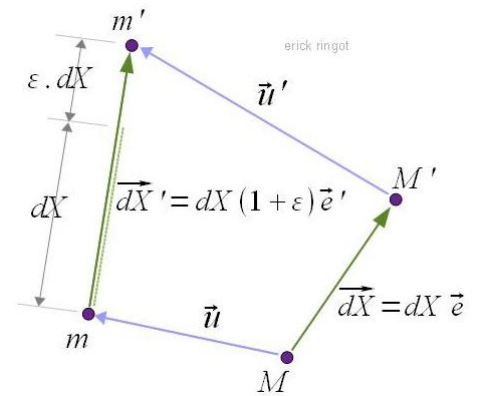


FIGURE 1.3.4 – élongation : variation locale de longueur

9. Les petites déformations ont un ordre de grandeur allant jusqu'à 10^{-3} ; on prend l'habitude de les exprimer en multiple de 10^{-6} (résolution des appareils de mesure). On définit ainsi une "microdéformation" et on note $\mu\epsilon$ ou μdef la valeur 10^{-6} . Par exemple $250\mu def = 250 \times 10^{-6} = 2.5 \times 10^{-4}$.

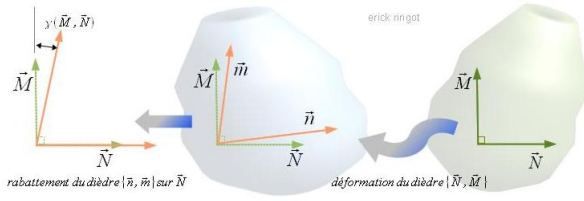


FIGURE 1.3.5 – distorsion : variation locale d'angle

Considérons, cette fois, l'angle droit construit sur deux vecteurs unitaires \vec{N} et \vec{M} , ceux-ci se transformant respectivement en \vec{n} et \vec{m} . Encore en vertu de l'équation 1.3.4, on a :

$$\vec{n} \vec{m} - \vec{N} \vec{M} = 2\vec{N} \cdot \vec{E} \vec{M}$$

or, selon la figure 1.3.5, on voit que

$$\vec{n} \vec{m} = \frac{\sin \gamma_{NM}}{|n| |m|} = \frac{\sin \gamma_{NM}}{(1 + \epsilon_N)(1 + \epsilon_M)}$$

Si l'on considère de nouveau l'hypothèse des petites perturbations, on approxime l'angle et son sinus et on néglige les déformations devant l'unité et donc : $\vec{n} \vec{m} \simeq \gamma_{NM}$.

Par conséquent on obtient la distorsion (on dit aussi le "glissement") de l'angle droit bâti sur \vec{N} et \vec{M} par :

$$\gamma_{NM} = 2\vec{N} \cdot \vec{E} \vec{M} \quad (1.3.12)$$

On voit ainsi qu'à une distorsion positive correspond une réduction d'angle droit. Les distorsions, tout comme les elongations, sont adimensionnelles et s'expriment également en μdef ¹⁰.

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \text{ est la demi - distorsion de l'angle } \widehat{x_1, x_2} \\ \epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \text{ est la demi - distorsion de l'angle } \widehat{x_1, x_3} \\ \epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \text{ est la demi - distorsion de l'angle } \widehat{x_2, x_3} \end{array} \right.$$

1.3.5.3 dilatation volumique

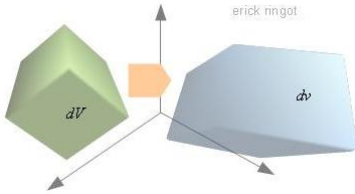


FIGURE 1.3.6 – variation locale de volume

Soit un petit parallélépipède rectangle bâti sur les vecteurs de la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$: $d\vec{X}_1, d\vec{X}_2, d\vec{X}_3$, alors son volume est $dV = dX_1 dX_2 dX_3$; après transformation géométrique le volume devient $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ (hypothèse des petites perturbations prise en compte). Par conséquent la variation relative de volume est :

$$\theta = \frac{v - V}{V} = \frac{(1 + \epsilon_{11}) dX_1 \cdot (1 + \epsilon_{22}) dX_2 \cdot (1 + \epsilon_{33}) dX_3}{dX_1 dX_2 dX_3}$$

$$\theta = \frac{\delta V}{V} \simeq \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Soit, en introduisant les opérateurs « trace » et « divergence »¹¹ :

$$\theta = \text{tr}(\vec{\epsilon}) = \text{div} \vec{u} \quad (1.3.13)$$

On peut donc indifféremment exprimer la variation volumique unitaire soit par la trace du tenseur des déformations, soit par la divergence du champ de déplacement.

1.4 Déformations & directions principales

On considère un état de déformation local au point matériel M_0 du solide $\{S\}$ étudié.

On voit que, parlant de déformation, il convient de préciser soit la direction d'intérêt, soit l'angle (et donc le plan) concerné. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle il faut un opérateur d'ordre 2 (un tenseur 3×3) pour totalement caractériser un état de déformation locale.

10. Ce sont donc les demi-distorsions qui apparaissent dans la matrice des déformations.

11. La trace d'une matrice A, notée $tr(A)$ est égale à la somme des termes de sa diagonale. Voir aussi le §.5.3.2 pour la définition de la divergence.

Dès lors, il devient légitime de s'interroger sur l'existence d'axes, centrés sur un point matériel donné dans le solide étudié, selon lesquels les distorsions seraient nulles. Si de telles directions existent c'est qu'elles restent perpendiculaires entre elles alors même que le solide se déforme. Autrement dit, ces directions très particulières sont invariantes (à la rotation près) par la transformation imposée par l'opérateur $\bar{\epsilon}$.

On aurait donc, pour ces directions privilégiées : $\bar{\epsilon} \cdot \vec{n}$ proportionnel à \vec{n}

D'un point de vue mathématique, ces directions sont dirigées par les vecteurs propres de la matrice $\bar{\epsilon}$.

Comme la matrice $\bar{\epsilon}$ est symétrique et que ses termes sont des nombres réels, ses valeurs propres sont donc également réelles et les vecteurs propres associés (si les valeurs propres sont différentes entre elles) forment un trièdre (orthogonalité des vecteurs propres deux à deux).

Définition 1. On appelle déformation principale toute valeur propre du tenseur des déformations.

Définition 2. On appelle direction principale de déformation toute direction orientée par un vecteur propre du tenseur des déformations.

Remarque : Un petit élément de volume parallélépipédique dont les arêtes sont orientées par les directions principales reste parallélépipédique après transformation géométrique (voir la figure 1.4.1).

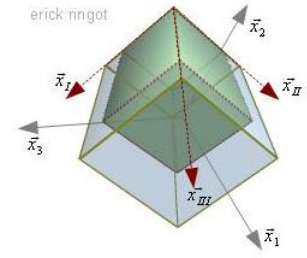


FIGURE 1.4.1 – déformation sans distorsion d'un parallélépipède bâti sur les axes principaux

1.4.1 déformations principales

Les déformations principales sont solutions de l'équation : $\det \left[\bar{\epsilon} - \lambda \bar{I} \right] = 0$. C'est une équation du troisième degré en λ appelée « équation caractéristiques » de la matrice $\bar{\epsilon}$. Les solutions en sont réelles et trois situations peuvent survenir :

1. les trois valeurs propres sont égales : c'est que toute direction de l'espace autour de M_0 est direction principale et les dilatations sont les mêmes dans toutes les directions. Il n'y a aucune distorsion dans quelque plan que ce soit.
2. deux valeurs propres sont égales : il y a une troisième valeur propre associée à une direction propre. Toute direction appartenant au plan perpendiculaire à cette direction propre est également propre.
3. les trois valeurs propres (principales) sont différentes alors les trois directions propres (principales) sont différentes et orthogonales entre elles du fait de la symétrie du tenseur des déformations.

Dans la base des vecteurs propres (des directions principales), le tenseur des déformations s'écrit ainsi :

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{III} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}\}} \quad (1.4.1)$$

1.4.2 directions principales de déformation

Les vecteurs propres orientent les directions principales de déformation. Ils sont solutions vectorielles de l'équation :

$$\left(\bar{\epsilon} - \epsilon_K \bar{I} \right) \cdot \vec{e}_K = \vec{0} \quad (1.4.2)$$

où ϵ_K est déformation principale. Naturellement la solution n'est pas unique mais il faut ajouter les conditions suivantes :

1. $\|\vec{e}_K\| = 1$
2. classement conventionnel des solutions : $\epsilon_I \geq \epsilon_{II} \geq \epsilon_{III}$
3. $\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}\}$ forme un trièdre direct.

1.4.3 invariants du tenseur des déformations

Les invariants du tenseur des déformations sont les coefficients de l'équation caractéristique $\det \left| \bar{\bar{\epsilon}} - \lambda \bar{I} \right| = 0$:

$$-\lambda^3 + K_1\lambda^2 + K_2\lambda + K_3 = 0 \quad (1.4.3)$$

Comme le nom l'indique, ils sont indépendants du choix de la base de projection du tenseur $\bar{\bar{\epsilon}}$, ce sont :

$$\begin{cases} K_1 = \text{tr}(\bar{\bar{\epsilon}}) \\ K_2 = \frac{1}{2} \left(\text{tr}^2(\bar{\bar{\epsilon}}) - \text{tr}(\bar{\bar{\epsilon}}^2) \right) \\ K_3 = \det |\bar{\bar{\epsilon}}| \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Ces invariants sont utilisés pour la définition de certains « critères » (plasticité, endommagement) exprimés en terme de déformation (voir §.3.5).

1.5 Représentation graphique d'un état de déformation

Nous allons considérer un état local de déformation, initialement caractérisé par le tenseur $\bar{\bar{\epsilon}}$ exprimé dans son repère principal par :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{III} \end{pmatrix} \{ \vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III} \}$$

1.5.1 cercle de Mohr des déformations

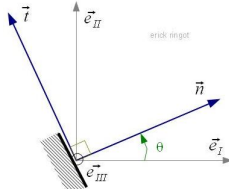


FIGURE 1.5.1 – dièdre $\{n,t\}$

On considère, d'autre part, le dièdre formé par les vecteurs unitaires $\vec{n} = c\vec{e}_I + s\vec{e}_{II}$ et $\vec{t} = -s\vec{e}_I + c\vec{e}_{II}$ orthogonaux entre eux et appartenant au plan $\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}\}$, avec les notations $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$, où θ est l'angle d'inclinaison du vecteur \vec{n} avec le vecteur \vec{e}_I . Il est alors possible de calculer le « vecteur déformation » dans la direction en appliquant le tenseur $\bar{\bar{\epsilon}}$ au vecteur \vec{n} , ainsi :

$$\overrightarrow{\epsilon(\vec{n})} = \bar{\bar{\epsilon}} \vec{n} = \begin{pmatrix} \epsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_I c \\ \epsilon_{II} s \\ 0 \end{pmatrix} = \epsilon_I c \vec{e}_I + \epsilon_{II} s \vec{e}_{II}$$

En projetant le vecteur $\overrightarrow{\epsilon(\vec{n})}$ selon \vec{n} puis selon \vec{t} , on obtient respectivement l'élongation dans la direction \vec{n} (équation 1.3.10) et la demi-distorion de l'angle $\widehat{\vec{n}, \vec{t}}$ (équation 1.3.12) :

$$\overrightarrow{\epsilon(\vec{n})} = \begin{cases} \epsilon = \epsilon_I c^2 + \epsilon_{II} s^2 \\ \frac{\gamma}{2} = -(\epsilon_I - \epsilon_{II}) cs \end{cases}$$

Introduisons l'angle double à θ , il vient :

$$\overrightarrow{\epsilon(\vec{n})} = \begin{cases} \epsilon = \frac{\epsilon_I + \epsilon_{II}}{2} + \frac{\epsilon_I - \epsilon_{II}}{2} \cos(-2\theta) \\ \frac{\gamma}{2} = \frac{\epsilon_I - \epsilon_{II}}{2} \sin(-2\theta) \end{cases} \quad (1.5.1)$$

Dans le plan $\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}\}$ l'état de déformation autour du point M est donc caractérisé par un vecteur déformation $\overrightarrow{\epsilon(\vec{n})}$ dont les composantes $\{\epsilon, \frac{1}{2}\gamma\}$ dépendent de l'orientation θ .

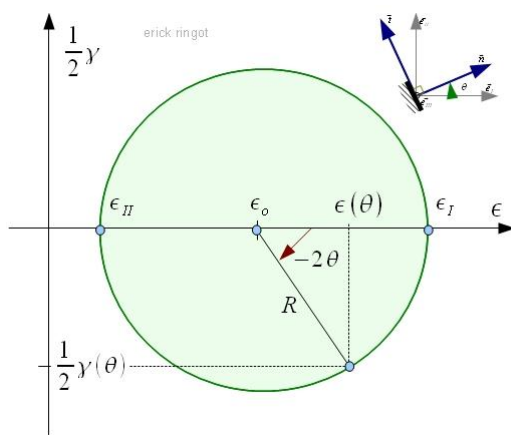


FIGURE 1.5.2 – cercle de MOHR des déformations (plan direct)

Ces composantes peuvent être reportées dans un plan (le plan de MOHR), auquel cas le point figuratif du vecteur déformation décrit un cercle lorsque θ varie de 0 à π .

Le cercle de Mohr des déformations présente de l'intérêt pour le dépouillement des mesures de déformation par exemple. Le rayon est égale à la demi-différence des déformations principales et son centre, toujours situé sur l'axe σ est situé au milieu du segment $[\sigma_{II}, \sigma_I]$: $R = \frac{1}{2} (\epsilon_I - \epsilon_{II})$; $\epsilon_0 = \frac{1}{2} (\epsilon_I + \epsilon_{II})$.

A noter que, dans un repère direct¹² $\{\epsilon, \frac{\gamma}{2}\}$, si le vecteur \vec{n} tourne d'une rotation $+\theta$ alors le point figuratif du vecteur déformation tourne d'un angle -2θ sur le cercle de MOHR.

Certains mécaniciens préfèrent employer un repère de MOHR indirect¹³ auquel cas la rotation d'amplitude $+\theta$ dans le plan réel se traduit par une rotation du point figuratif associé de $+2\theta$ dans le plan de MOHR (fig.1.5.3).

1.5.2 autres représentations

pour mémoire seulement : ellipsoïde de Lamé, tricercler de MOHR des déformations¹⁴.

1.6 Métrologie des déformations

1.6.1 jauges de déformation

1.6.1.1 résistor

La résistance électrique d'un fil résistif cylindrique est donnée par : $R = \rho \frac{L}{A}$ ou $R = \rho \frac{4L}{\pi D^2}$ où ρ est la résistivité du conducteur, L la longueur du fil, A sa section et D son diamètre. Après déformation du fil, par exemple obtenue par traction, la résistance change en $R + \Delta R = (\rho + \Delta \rho) \frac{4(L + \Delta L)}{\pi(D - \Delta D)^2}$ du fait de l'effet piézorésistif doublé de l'effet de variation de volume. Il existe un domaine de relation linéaire entre $\frac{\Delta R}{R}$ et $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$ de sorte que $\frac{\Delta R}{R} = J\epsilon$.

On voit ainsi que la mesure de la variation de résistance du résistor permet d'en évaluer la déformation.

1.6.1.2 jauge

La jauge de déformation¹⁵ repose sur le principe d'un fil résistif déformable. Le fil (constantan=nickel-cuivre, karma=fer-nickel-chrome, nichrome=nickel-chrome, platine-tungstène), très fin ($\sim 20\mu m$), est collé sur le corps d'épreuve par l'intermédiaire d'un film plastique, parallèlement à la direction dans laquelle la déformation doit être estimée. Une traction ou une compression exercée sur le fil modifie sa

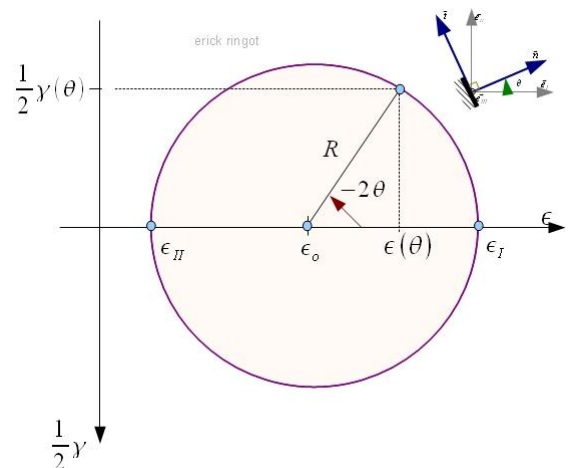


FIGURE 1.5.3 – cercle de MOHR des déformations (plan indirect)

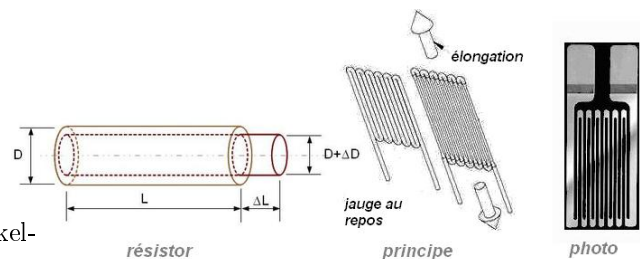


FIGURE 1.6.1 – principe & photo d'une jauge de déformation.

12. repère de MOHR direct : σ croissant vers la droite et $\frac{\gamma}{2}$ croissant vers le haut.

13. repère de MOHR indirect : σ croissant vers la droite et $\frac{\gamma}{2}$ croissant vers le bas.

14. Le tricercler de MOHR est abordé au §2.6.1 pour ce qui concerne les contraintes.

15. L'expression « jauge de contrainte », parfois employé, est impropre car une contrainte n'est pas une grandeur mesurable.

longueur et sa section. Ces variations, à leur tour, induisent une modification de la résistance électrique du fil. On mesure alors cette variation de résistance entre l'état repos et l'état déformé.

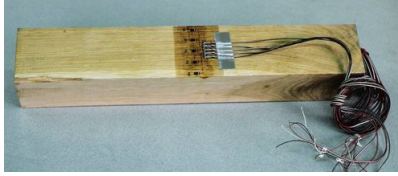


FIGURE 1.6.2 – jauges collées sur une éprouvette de bois

Comme la variation de résistance électrique due à la déformation d'un fil seul est très faible, celui-ci est replié sur lui-même (sur une longueur allant de 2mm à plus de 60mm pour les collages sur béton) de sorte que la déformation amplifie la variation de résistance tout en conservant le caractère « local » de la mesure.

Le fil est encapsulé dans un support plastique (polyamide ou époxy) de faible épaisseur (30 à $100\mu\text{m}$) lui-même collé sur le solide étudié par une colle cyanolitique. Les déformations du solide sont ainsi communiquées à la jauge.

Les résistances électriques au repos des jauges sont standardisées. Deux valeurs sont disponibles sur le marché : 120Ω et 350Ω . Le coefficient de proportionnalité entre la déformation axiale et la variation relative de résistance est le « facteur de jauge » sa valeur est voisine de $J = 2,0$ ($\Delta R/R = J.\epsilon$).

Les caractéristiques physiques des jauges sont consignées par le fabricant sur une feuille de données techniques (data sheet).

1.6.1.3 mesure de la variation de résistance

Les petites variations de résistance sont mesurées dans un montage électrique dû à SAMUEL HUNTER CHRISTIE et CHARLES WHEATSTONE (figure 1.6.3).

Le pont de WHEATSTONE est constitué de quatre résistances disposées en quadrilatère et constitue un moyen particulièrement précis de mesurer des résistances. Un ampèremètre formant le pont entre les points C et D, détecte le courant lorsque A et B sont reliés à une source de tension ou de courant.

On montre que :

$$V_{out} = V_{in} \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (1.6.1)$$

Le pont est équilibré lorsque le signal de sortie V_{out} est nul quelque soit la tension d'alimentation V_{in} .

Dans l'application particulière de mesure de déformation, les branches du montage peuvent être occupées par des jauges ; plusieurs configurations de montage sont ainsi possibles :

1) Dans le montage « quart de pont », une jauge occupe l'emplacement de l'une des quatre résistances du pont (par exemple $R_3 = R$, valeur au repos), les autres branches ayant la même résistance R . Supposons une variation dR de la jauge, alors l'équation 1.6.1 donne :

$$V_{out} = V_{in} \frac{1}{4} \frac{dR}{R}$$

2) Dans le montage « demi-pont », une jauge dite « active » occupe la résistance R_3 tandis qu'une autre dite « passive » occupe la branche R_4 . Les jauges au repos ont une résistance R qui est aussi celle des autres branches. La jauge active est collée sur le solide et la jauge passive sur une petite plaquette du même matériau, placée dans la même ambiance thermique mais soumise à aucune charge mécanique. Lorsque le solide est sollicité, la déformation de la jauge active est égale à $\epsilon_3 = \epsilon_{meca} + \epsilon_{therm}$ et cumule les effets dus au chargement mécanique et la température ; cependant la jauge passive ne subit que la déformation thermique $\epsilon_4 = \epsilon_{therm}$. L'équation 1.6.1 selon les développements qui suivent, montre que la déformation d'origine thermique est éliminée de la mesure :

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R(R + dR_{meca} + dR_{therm}) - R(R + dR_{therm})}{4R^2}$$

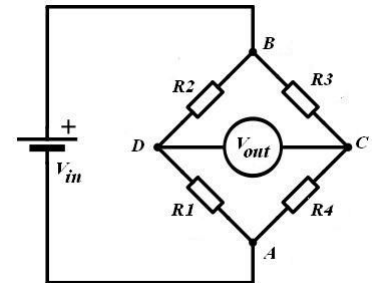


FIGURE 1.6.3 – schéma du pont de Wheatstone

$$\Rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{4} \frac{dR_{meca}}{R}$$

3) Le montage « pont-complet » est employé pour augmenter le gain dans des applications spéciales, en particulier pour le développement de capteurs de force.

1.6.1.4 conditionneur de jauges



FIGURE 1.6.4 – Conditionneur pont de Wheatstone (doc. VISHAY)

En pratique, le pont de WHEATSTONE (ou pont de jauges) est un conditionneur disposant d'un bornier sur lequel l'opérateur effectue les raccordements à la ou aux jauges.

Les ponts actuels (années 2010+) sont multi-voies, permettent de configurer la résistance de jauge et son facteur, disposent de potentiomètres pour l'équilibrage au repos, sont compatibles avec les différents montages évoqués plus-haut ; ils affichent directement les mesures en μdef pourvu que le facteur de jauge soit correctement configuré.

1.6.2 rosettes

1.6.2.1 matériel

Les jauges, telles qu'elles ont été abordées précédemment, ne permettent que la détermination de l'élongation dans une direction donnée (donnée par l'axe de la jauge). Qu'en est-il des mesures de distorsion ?

En fait, il n'existe pas de micro-dispositif permettant de mesurer directement une variation d'angle, aussi la « mesure » des glissements se fait-elle indirectement par la détermination de l'état local de déformation à la surface du solide. Comme cet état de déformation est totalement défini par le cercle de MOHR¹⁶ et que celui-ci dépend de trois paramètres : la position du centre σ_o , le rayon R , une direction principale θ , on voit qu'il est nécessaire de collecter trois informations (ici, trois déformations) pour caractériser ce cercle.

Plutôt que de coller 3 jauges séparément selon trois directions différentes, ce qui pourrait poser des problèmes de précision de collage et d'encombrement, on emploie des « rosettes » combinant sur un même support plastique trois jauges. Les fabricants de jauges (VISHAY-MICROMESURES, HBM) proposent ainsi des rosettes symétriques par rapport à la jauge centrale et orientées à 45°, 60°, 120° (rosettes en 'Y' à 3 « grilles »).

Si les directions principales sont connues, deux déformations dans les directions orthogonales suffisent à établir le cercle de MOHR, aussi existe-t-il également des rosettes à deux jauges (rosette en 'T' à 2 grilles).

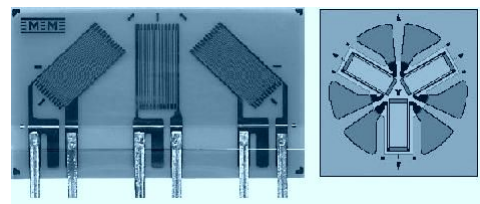


FIGURE 1.6.5 – rosettes : à 45°, à 120° (doc HBM).

1.6.2.2 dépouillement

Envisageons le dépouillement d'une rosette composée de trois grilles notées 1, 2 et 3. La grille 1, centrale, forme un axe de symétrie (fig.1.6.6) ; les grilles 2 et 3 sont situées de part et d'autres de 1 en faisant un angle ϕ avec la première.

L'orientation de l'axe principal de déformation I n'est pas connue a priori. L'angle que fait la grille 1 avec cette direction principale est noté θ .

Dans le plan de MOHR, si on note $C(\epsilon_o, 0)$ le centre du cercle, alors :

- le segment $[C, 1]$ forme un angle -2θ avec l'axe ϵ .
- le segment $[C, 2]$ forme un angle $+2\phi$ avec l'axe $[\sigma_o, 1]$.
- le segment $[C, 3]$ forme un angle -2ϕ avec l'axe $[\sigma_o, 1]$.

16. En l'absence de forces de frottement sur la surface, la normale à cette dernière est direction principale.

Seules les élongations ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_3 obtenues par mesures extensométriques sont connues, mais non pas les distorsions associées.

Le cercle de MOHR est totalement défini par les paramètres ϵ_o , θ et R qui sont les inconnues. On les détermine en écrivant des relations dans les triangles rectangles remarquables inscrits dans le cercle de MOHR. Ainsi :

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \epsilon_o + R \cos(-2\theta) \\ \epsilon_2 = \epsilon_o + R \cos(-2(\theta - \phi)) \\ \epsilon_3 = \epsilon_o + R \cos(-2(\phi + \theta)) \end{cases}$$

D'où on peut extraire les relations :

$$\begin{cases} \epsilon_1 - \epsilon_o = R \cos 2\theta \\ \frac{1}{2}(\epsilon_2 + \epsilon_3) - \epsilon_o = R \cos 2\theta \cos 2\phi \end{cases}$$

Ce qui conduit à : $\frac{1}{2}(\epsilon_2 + \epsilon_3) - \epsilon_o = (\epsilon_1 - \epsilon_o) \cos 2\phi$

D'où la valeur de ϵ_o :

$$\begin{cases} \text{si } \phi \neq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \epsilon_o = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_3 - 2\epsilon_1 \cos 2\phi}{2(1 - \cos 2\phi)} \\ \text{si } \phi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \epsilon_o = \frac{1}{2}(\epsilon_2 + \epsilon_3) \end{cases}$$

De là on tire la valeur de θ :

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{\sin 2\phi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{\epsilon_1 - \epsilon_o} \right)$$

Puis celle de R :

$$R = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_o}{\cos 2\theta}$$

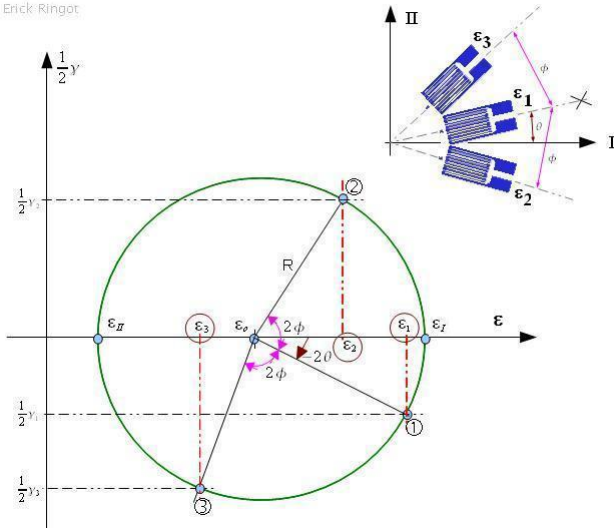


FIGURE 1.6.6 – cercle de Mohr de la rosette

Les distorsions s'en déduisent aisément :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\gamma_1 = -R \sin 2\theta \\ \frac{1}{2}\gamma_2 = R \sin 2(\phi - \theta) \\ \frac{1}{2}\gamma_3 = -R \sin 2(\phi + \theta) \end{cases} \quad (1.6.2)$$

Cette démonstration ne présente que le principe de dépouillement qu'il convient d'adapter aux géométries particulières de rosettes. La géométrie 45° est particulièrement simple à résoudre.

1.7 Problème inverse - compatibilité

L'équation 4.1.6 montre qu'il est possible d'établir le champ de déformation à partir de n'importe quel champ de déplacement (si celui-ci est dérivable). Or il est utile, dans la résolution d'un problème de mécanique, de pouvoir « intégrer » un champ de déformation pour obtenir le champ de déplacement associé (3 composantes). Dès lors, il devient légitime de se pencher sur les conditions que doivent satisfaire les 6 composantes d'un tenseur symétrique pour que ce dernier puisse constituer véritablement un champ de déformation.

1.7.1 compatibilité d'un tenseur avec un champ de déplacement

Revenons pour cela un instant sur la définition des composantes symétriques et antisymétriques du tenseur « gradient » des déplacements (équation 1.3.8) :

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} + \overleftarrow{\text{grad}} \vec{u} \right) \text{ et } \bar{\omega} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} - \overleftarrow{\text{grad}} \vec{u} \right)$$

Soit en coordonnées cartésiennes : $2\epsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$ et $2\omega_{ij} = u_{i,j} - u_{j,i}$ en adoptant la notation contractée : $\frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k}$.

Calculons les composantes du vecteur $\overrightarrow{2grad\omega_{ij}}$. Il suffit pour cela de dériver partiellement par rapport aux composantes x_k :

$$2\omega_{ij,k} = u_{i,jk} - u_{j,ik}$$

Ajoutant et retranchant le même terme $u_{k,ij}$ on obtient :

$$2\omega_{ij,k} = (u_{i,jk} + u_{k,ij}) - (u_{j,ik} + u_{k,ij}) = (u_{i,k} + u_{k,i})_{,j} - (u_{j,k} + u_{k,j})_{,i}$$

On reconnaît, au facteur 2 près, les termes de déformation en petites perturbations :

$$\omega_{ij,k} = \epsilon_{ik,j} - \epsilon_{jk,i} \quad (a)$$

Ou, en changeant d'indice :

$$\omega_{ij,l} = \epsilon_{il,j} - \epsilon_{jl,i} \quad (b)$$

Effectuons la combinaison $\frac{\partial}{\partial x_l}(a) - \frac{\partial}{\partial x_k}(b)$, alors :

$$\omega_{ij,kl} - \omega_{ij,lk} = (\epsilon_{ik,j} - \epsilon_{jk,i})_{,l} - (\epsilon_{il,j} - \epsilon_{jl,i})_{,k} = 0$$

Ainsi, on obtient 6 équations indépendantes :

$$\frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_l} - \frac{\partial \epsilon_{il}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial \epsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (1.7.1)$$

Qui se développent en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (1.7.2)$$

Que l'on peut écrire sous forme intrinsèque (indépendante du système de projection) :

$$\overline{\overline{grad}} \left(\overline{\overline{div}}(\bar{\epsilon}) \right) + \overline{\overline{grad}}^t \left(\overline{\overline{div}}(\bar{\epsilon}) \right) - \overline{\overline{grad}} \left(\overline{\overline{grad}}(tr\bar{\epsilon}) \right) - \overline{\overline{\Delta}}(\bar{\epsilon}) = \bar{0} \quad (1.7.3)$$

Ces équations sont notamment utilisées en élasticité sous une autre forme (voir §.4.3).

1.7.2 intégration

Ayant vérifié qu'un tenseur $\bar{\epsilon}$ satisfait bien les équations de compatibilité, on peut ensuite procéder à la recherche du champ de déplacement correspondant. Formellement, on procède en deux étapes :

1) détermination des composantes du tenseur antisymétrique à l'aide des différentielles : $d\omega_{ij} = \sum \omega_{ij,k}.dx_k$, c'est-à-dire $d\omega_{ij} = \sum (\epsilon_{ik,j} - \epsilon_{kj,i}).dx_k$

2) détermination des composantes du champ de déplacement par les différentielles : $du_i = \sum u_{i,j}.dx_j = \sum (\epsilon_{ij} - \omega_{ij}).dx_j$

3) prise en compte des conditions aux limites du solide pour la détermination des constantes d'intégration.

1.7.3 conditions aux limites du solide exprimées en déplacement

Les conditions aux limites en déplacement décrivent les liaisons du solide étudié avec l'extérieur. Ces liaisons s'effectuent au travers d'une surface ∂S_u (dite surface d'appui) où une ou plusieurs composantes de déplacement sont connues, voire nulles.

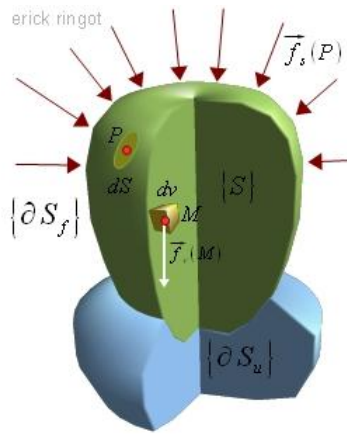


FIGURE 1.7.1 – partition de l'enveloppe :
 $\partial S = \partial S_f \cup \partial S_u$

Des conditions plus complexes peuvent exister par exemple à l'interface de deux solides déformables. Elles peuvent encore se compliquer avec la géométrie de la surface.

Pour simplifier, on considérera que la surface $\{\partial S\}$ enveloppant le solide étudié $\{S\}$ est partitionnée en deux surfaces (voir fig.1.7.1) :

1. $\{\partial S_f\}$ où les forces surfaciques $\overrightarrow{f_s(P)}$ sont connues et peuvent être éventuellement nulles ;
2. $\{\partial S_u\}$ où les déplacements sont –complètement ou partiellement– connus.

Sur $\{\partial S_u\}$, les conditions limites s'expriment par :

$$\vec{u} = \vec{u}^0 \quad \text{sur } \{\partial S_u\} \quad (1.7.4)$$

ou, de façon moins restrictive :

$$u_i = u_i^0 \quad \text{sur } \{\partial S_u\} \quad \text{avec } i \in [1, 2, 3] \quad (1.7.5)$$

Chapitre 2

Contraintes

2.1 objectif

Dans ce chapitre on s'intéresse aux « forces internes » qui se développent dans un solide soumis à des actions extérieures. On évoquera comment ces forces se déclinent en « contraintes », comment les contraintes sont décrites par un tenseur, comment l'équilibre local est régi.

En fait la notion de force, même si elle semble intuitive de prime abord, pose un problème de définition. En effet une force n'est rien moins qu'un concept¹ ayant un caractère vectoriel ; elle est souvent définie en référence à sa capacité d'accélérer une masse, concept newtonien s'il en est.

2.2 interactions - cadre Newtonien

Bien que la théorie de la relativité (EINSTEIN 1905) dénie l'unicité du temps en remettant en question la notion de simultanéité, le cours de *mmc* reprendra les hypothèses formulées par ISAAC NEWTON (1642-1727) sur l'espace et le temps et qui prévalent en mécanique classique.

2.2.1 espace

NEWTON fait l'hypothèse d'un espace dont la structure euclidienne est indépendante de la présence des corps matériels : "L'espace absolu, sans relation aux choses extérieures, demeure toujours similaire et immobile"²

Les référentiels en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres sont dits galiléens. En pratique, on considère qu'un repère calé sur des étoiles "fixes" (lointaines) de la Galaxie constitue un repère galiléen.

Pour la plupart des applications, notamment en génie civil, on considérera qu'un référentiel lié à la Terre constitue une bonne approximation d'un système galiléen.

2.2.2 temps

NEWTON fait l'hypothèse d'une chronologie absolue, commune à tous les sites de l'espace : "*le temps absolu vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément et s'appelle durée*".

Pour lui toutes les horloges sont synchronisables quelque soit leur distance réciproque ou leur vitesse relative. De ce fait la simultanéité de deux événements peut toujours être établie³.

1. Une force n'est pas une grandeur directement « mesurable » car son évaluation résulte de l'observation des déformations (ou des déplacements différentiels) qu'elle crée sur un solide déformable. Il en est par exemple ainsi de la mesure d'une force par un anneau dynamométrique ou par un peson à ressort.

2. citation extraite de l'ouvrage "La relativité" de Stamatia Mavridès, collection Que sais-je, presse universitaire de France isbn 2 13 042839 8. Voir aussi la biographie de Newton dans les Cahiers de Sciences & Vie "les pères fondateurs de la science" numéro hors série n°13 de février 1993.

3. Cela revient à supposer qu'un signal (de synchronisation) peut se propager de façon instantanée (avec une vitesse infinie). En fait Einstein, en 1905, suite aux expériences de Morlay et Michelson, a montré qu'aucun signal ne pouvait se propager à une vitesse supérieure à celle de la lumière dans le vide. C'est la base de la théorie de la relativité restreinte.

interaction	boson (vecteur de l'interaction)	constante de couplage (caractérise l'intensité de l'interaction)	commentaire
interaction forte	gluons	1	portée très courte, à l'intérieur du noyau atomique
interaction électromagnétique	photons	$1/137$	forces de Van der Waals, liaisons chimiques, forces de contact. Peut être répulsive ou attractive
interaction faible	bosons W^+, W^-, Z^0	10^{-6}	interaction de contact entre les quarks du noyau; à l'origine de la radioactivité
interaction gravitationnelle	graviton (pas encore détecté ce jour)	10^{-38}	toujours attractive, portée très longue; structure l'Univers

TABLE 2.1 – interactions quantiques

2.2.3 origine des forces

Les forces entre solides (ou entre les différentes parties d'un même solide), résultent principalement de deux interactions entre les particules constitutives de ces solides parmi quatre types d'interactions connues (table 2.1). Ces interactions sont véhiculées au niveau quantique par des particules appelées bosons d'interaction⁴.

En mécanique classique, on ne considère que deux types d'interactions⁵ :

1. les forces de contact : répulsives et d'origine électromagnétiques ;
2. les forces à distance : uniquement attractives et d'origine gravitationnelle⁶.

Les forces ont un caractère vectoriel. Plus précisément, un ensemble de forces peut être réduit, du point de vue mathématique, à un torseur⁷.

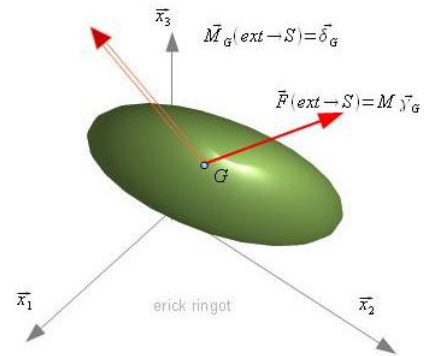


FIGURE 2.2.1 – théorème fondamental

2.2.4 principe fondamental

2.2.4.1 dynamique

Le principe fondamental de la dynamique (ou de la statique en l'absence d'accélération) peut s'énoncer comme suit :

Dans tout repère galiléen, le torseur des actions extérieures $\{F_{ext \rightarrow S}\}$ agissant sur un solide (ou une portion de solide) est égal au torseur dynamique $\{\mathcal{D}_{S/R_0}\}$ dudit solide (de ladite portion de solide). Par exemple, en réduisant les torseurs au centre de gravité :

$$\{F_{ext \rightarrow S}\}_G = \{\mathcal{D}_{S/R_0}\}_G \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}(ext \rightarrow S) = \int_S \rho \vec{\gamma} dv = M \vec{\gamma}_G \\ \vec{M}_G(ext \rightarrow S) = \int_S \vec{GM} \wedge \rho \vec{\gamma} dv = \delta_G \end{cases} \quad (2.2.1)$$

4. Voir "Sous l'atome les particules", Etienne Klein, collection Domino, Edition Flammarion, isbn 2 08 035187 7.

5. *NDLA* : Les forces dites « centrifuges » ou encore les forces de CORRIOLIS n'apparaissent que si l'on écrit les équations de la dynamique dans des repères non-galiléens (ce que l'auteur du présent document ne recommande pas).

6. Bien que la constante de couplage de l'interaction gravitationnelle soit 10^{40} fois plus petite que la constante de couplage électromagnétique, les forces gravitationnelles (poids) doivent souvent être prises en compte du fait que cette interaction est uniquement attractive et possède une longue portée.

7. Attention, deux systèmes de forces ayant les mêmes torseurs sont équivalents du point de vue statique et donc du point de vue du solide indéformable mais n'ont pas forcément les mêmes effets sur un milieu déformable. La répartition des efforts constituant un torseur importe donc en mécanique des milieux continus.

Équations dans lesquelles ρ désigne la masse volumique, $\vec{\gamma}$ le champ d'accélération galiléenne⁸, dv un élément de volume, M la masse totale du solide, $\vec{\delta}_G$ le moment dynamique calculé au centre de gravité G .

2.2.4.2 statique

En l'absence d'accélération (repos) les équations se simplifient car le torseur des forces extérieures agissant sur un solide (une portion de solide) est égal au torseur nul :

$$\{F_{ext \rightarrow S}\}_G = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}(ext \rightarrow S) = \vec{0} \\ \vec{M}_G(ext \rightarrow S) = \vec{0} \end{cases} \quad (2.2.2)$$

2.2.5 action-réaction

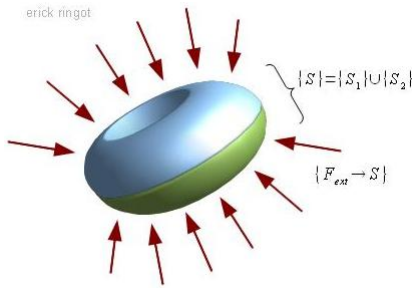


FIGURE 2.2.2 – solide considéré comme l'union de ses deux parties

Il sera utile de s'intéresser à l'action d'un solide S_1 sur un autre solide S_2 et, réciproquement, à l'action du solide S_2 sur le premier solide S_1 .

- On note $\{F_{ext} \rightarrow S\}$ le torseur des forces agissant sur le solide (S) formé par l'union des parties (S_1) et (S_2). Ces forces agissent de façon volumique (par exemple le poids) ou au contact de (S) à travers sa surface. D'après le théorème fondamental de la dynamique :

$$\{F_{ext} \rightarrow S\} = \{\mathcal{D}_{S/R_0}\} \quad (2.2.3)$$

- Après séparation des deux parties, on s'intéresse à la partie (S_1) et on observe l'action qu'exerce la partie (S_2) sur (S_1) réduite à son torseur $\{S_2 \rightarrow S_1\}$, alors :

$$\{F_{ext} \rightarrow S_1\} + \{S_2 \rightarrow S_1\} = \{\mathcal{D}_{S_1/R_0}\} \quad (2.2.4)$$

- On s'intéresse aussi à la partie (S_2) et on observe l'action qu'exerce la partie (S_1) sur (S_2) réduite à son torseur $\{S_1 \rightarrow S_2\}$, alors :

$$\{F_{ext} \rightarrow S_2\} + \{S_1 \rightarrow S_2\} = \{\mathcal{D}_{S_2/R_0}\} \quad (2.2.5)$$

Sommons (2.2.4) et (2.2.5), il vient :

$$\begin{aligned} & [\{F_{ext} \rightarrow S_1\} + \{F_{ext} \rightarrow S_2\}] + \\ & \{S_2 \rightarrow S_1\} + \{S_1 \rightarrow S_2\} = \\ & [\{\mathcal{D}_{S_1/R_0}\} + \{\mathcal{D}_{S_2/R_0}\}] \end{aligned}$$

En regroupant les termes situés dans les crochets :

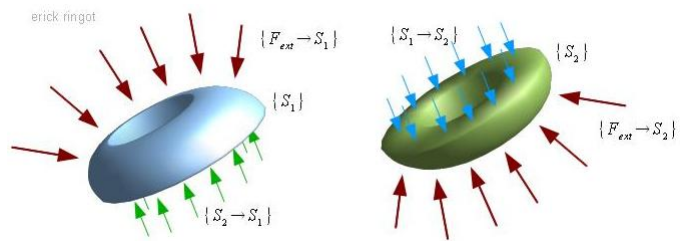


FIGURE 2.2.3 – solide décomposé en deux parties

$$\{F_{ext} \rightarrow S\} + \{S_2 \rightarrow S_1\} + \{S_1 \rightarrow S_2\} = \{\mathcal{D}_{S/R_0}\}$$

Et compte tenu de (2.2.3) :

$$\{S_2 \rightarrow S_1\} = -\{S_1 \rightarrow S_2\}$$

Le principe d'action-réaction s'énonce ainsi : Le torseur des actions qu'exerce le solide (S_2) sur le solide (S_1) est égal à l'opposé du torseur des actions qu'exerce le solide (S_1) sur le solide (S_2).

Ce principe s'étend au niveau local : en tout point situé à l'interface des deux parties, la force surfacique qu'exerce le solide S_1 sur le solide S_2 est opposée à la force surfacique qu'exerce le solide S_2 sur le solide S_1 .

8. En règle général le champ de vitesse (et par voie de conséquence le champ d'accélération) n'est pas le champ de vitesse d'un solide indéformable, le but de la mmc étant justement de mettre en évidence les déformations. Le champ de vitesse n'est donc pas réductible à un torseur cinématique.

2.3 champ de contrainte

2.3.1 partitionnement d'un solide

Soit un solide (S) (figure 2.3.1) soumis à des efforts extérieurs (en régime dynamique ou statique, peu importe).

Le solide (S) est partitionné par un plan arbitraire⁹ (figure 2.3.2). Faisant abstraction de la partie (S_2), la portion (S_1) est soumise à :

- une partie des efforts extérieurs (poids volumique + forces appliquées sur la frontière de (S) commune à (S_1))
- l'ensemble des efforts qu'exerce (S_2) (la partie « manquante ») sur (S_1) à travers la surface de contact (Ω) et qui traduisent la cohésion des deux portions de solide dans la configuration où (S) est entier .

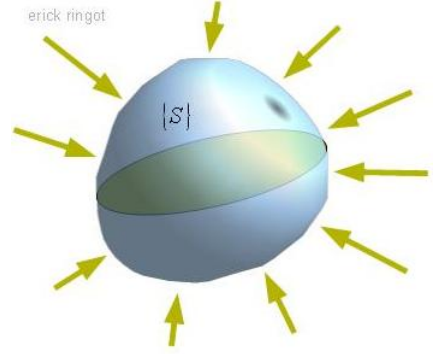


FIGURE 2.3.1 – solide soumis à des forces

2.3.2 hypothèse sur la nature des forces internes

L'action de (S_2) sur (S_1) est modélisée par une distribution de torseurs agissant en chaque point de la surface de scission :

- Ces torseurs ont une résultante homogène à une force par unité de surface et un moment homogène à un couple par unité de surface. La répartition de moments est uniquement prise en compte dans la théorie de la magnétodynamique décrivant les effets à distance provoqués par un champ magnétique (ce qui ne sera pas abordé ici).
- Ces torseurs (réduits à des glisseurs donc) dépendent du point M auxquels ils sont appliqués ;
- Ces torseurs dépendent également de l'orientation locale de la surface (caractérisée par le vecteur normal unitaire extérieur à (S_1) et noté \vec{n} comme le montre la figure 2.3.2) ;
- **Postulat de CAUCHY** : ces torseurs ont un caractère local (ils ne dépendent que de M et de \vec{n} et non pas de la forme ou du volume de (S_1)).

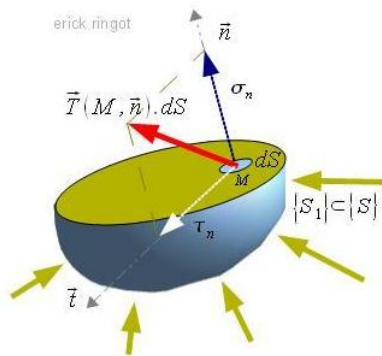


FIGURE 2.3.2 – section du solide

Pour les situations courantes, la distribution de moments surfaciques est ignorée. Nous ferons donc l'hypothèse suivante :

- Les forces internes de contact qu'exerce (S_2) sur (S_1) à travers la surface commune sont modélisées uniquement par une distribution de forces surfaciques (ou force par unité de surface) dépendant du point M de ladite surface et de l'orientation \vec{n} locale¹⁰. Dimension des forces surfaciques de contact $[F.L^{-2}]$, unité SI : Pascal ($1Pa = 1N/m^2$), unité courante : le Méga-Pascal ($1MPa = 10^6Pa$).

- Ces forces surfaciques sont appelées « vecteur contrainte » et sont notées $\vec{T}(M, \vec{n})$.

- Sur un plan formel, mathématique, il existe donc une transformation, notée provisoirement $\vec{\sigma}$, qui à chaque paire formée d'un point et d'un vecteur unitaire associe un vecteur

$$\vec{\sigma} : (M, \vec{n}) \longrightarrow \vec{T}(M, \vec{n})$$

contrainte :

9. Le raisonnement est valable avec tout autre type de surface de partitionnement.

10. Cela signifie bien que si l'on change l'orientation de la facette (ou du plan) passant par le même point M , le vecteur contrainte change également.

2.3.3 contrainte normale et contrainte de cisaillement

Comme le montre la figure 2.3.2, le vecteur contrainte $\overrightarrow{T(M, \vec{n})}$ peut être projeté sur le vecteur directeur orientant la facette elle-même ainsi que sur le plan tangent à la facette. On peut ainsi poser :

$$\overrightarrow{T(M, \vec{n})} = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t}$$

- Le vecteur \vec{n} est parfaitement défini et la composante σ_n est appelée « composante normale de contrainte » ou, plus simplement « contrainte normale » ; il s'agit d'une composante scalaire algébrique. Si elle est positive c'est qu'elle exerce un effet de traction localement à la surface du solide ; si, au contraire, elle est négative, c'est qu'elle traduit une compression locale.
- Le vecteur $\tau_n \vec{t}$ est défini par différence $\tau_n \vec{t} = \overrightarrow{T(M, \vec{n})} - \sigma_n \vec{n}$. Le vecteur \vec{t} est ainsi défini au sens près selon le signe qui est attribué par la composante τ_n . La composante τ_n a de multiples dénominations équivalentes ; elle est ainsi appelée « contrainte tangente » ou « contrainte de cisaillement » ou « contrainte de cission ».

2.4 propriétés des contraintes

Dans ce paragraphe, le caractère tensoriel du champ de contrainte est démontré ; l'équilibre local est énoncé.

2.4.1 tenseur des contraintes

On considère un petit tétraèdre inscrit dans un solide (S) et centré sur un point M . Trois des facettes parmi quatre sont construites parallèlement aux plans du repère orthogonal $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (fig.2.4.1).

La facette 1, par exemple, possède une surface dS_1 et est orientée par le vecteur $-\vec{e}_1$. Si on nomme $\vec{\Phi}_1 = \overrightarrow{T(M, \vec{e}_1)}$ le vecteur contrainte agissant sur la facette orientée par le vecteur $+\vec{e}_1$, du fait du principe d'action et réaction, le vecteur contrainte qui agit sur la facette 1 lui est opposé et vaut donc $-\vec{\Phi}_1$. Il en va de même des autres faces orthogonales (notées 2 et 3).

La projection du vecteur $\vec{\Phi}_k$ $k = 1..3$ sur les vecteurs unitaires du repère permet d'en introduire les composantes : $\vec{\Phi}_k = \sigma_{k1}\vec{e}_1 + \sigma_{k2}\vec{e}_2 + \sigma_{k3}\vec{e}_3$. Les composantes σ_{kj} se voient ainsi attribuer un double indice : le 1er indice k faisant référence à celui du vecteur unitaire directeur de la facette et le second indice j à l'axe de projection, $k, j = 1..3$.

L'équilibre (statique ou dynamique) du domaine tétraédrique est simplement établi grâce à un bilan de forces résumé dans le tableau ci-dessous.

face	vecteur directeur	aire	vecteur contrainte
1	$-\vec{e}_1$	$dS_1 = \frac{1}{2}dx_2dx_3$	$-\vec{\Phi}_1 = -(\sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3)$
2	$-\vec{e}_2$	$dS_2 = \frac{1}{2}dx_3dx_1$	$-\vec{\Phi}_2 = -(\sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3)$
3	$-\vec{e}_3$	$dS_3 = \frac{1}{2}dx_1dx_2$	$-\vec{\Phi}_3 = -(\sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3)$
4	$\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$	dS	$\overrightarrow{T(M, \vec{n})} = T_1\vec{e}_1 + T_2\vec{e}_2 + T_3\vec{e}_3$
		volume	vecteur volumique
poids volumique	-	dV	$\rho \vec{g}$
force d'inertie		dV	$\rho \vec{\gamma}$

Avec $dS_1 = dS.n_1, dS_2 = dS.n_2, dS_3 = dS.n_3$ (par projection) et $dV = \frac{1}{6}dx_1dx_2dx_3$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au tétraèdre permet ainsi d'écrire :

$$\vec{T}dS - \vec{\Phi}_1dS_1 - \vec{\Phi}_2dS_2 - \vec{\Phi}_3dS_3 + \rho \vec{g}dV = \rho \vec{\gamma}dV$$

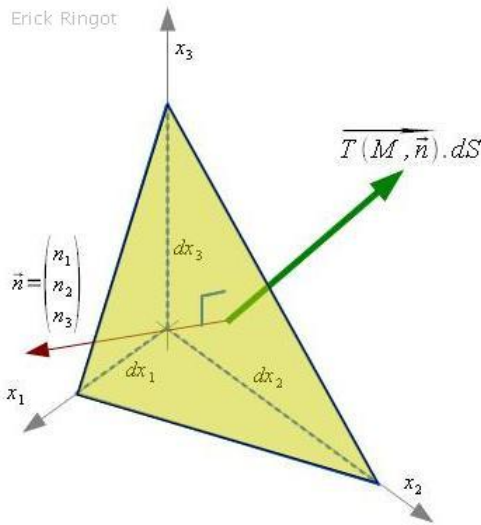


FIGURE 2.4.1 – élément de volume tétraédrique

Soit :

$$\left(\vec{T} - \vec{\Phi}_1 n_1 - \vec{\Phi}_2 n_2 - \vec{\Phi}_3 n_3 \right) dS + \rho \vec{g} dV = \rho \vec{\gamma} dV$$

Lorsque les cotés du tétraèdre tendent vers zéro, les termes de volume, d'ordre supérieur, deviennent négligeables devant le terme de surface¹¹, de sorte que :

$$\vec{T} - \vec{\Phi}_1 n_1 - \vec{\Phi}_2 n_2 - \vec{\Phi}_3 n_3 \simeq \vec{0}$$

Et ainsi :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

On vient donc de démontrer que l'opérateur $\tilde{\sigma} : (M, \vec{n}) \rightarrow \overrightarrow{T(M, \vec{n})}$ est linéaire¹², d'ordre 2. C'est un tenseur¹³ dont les composantes viennent d'être déterminées. On note :

$$\overrightarrow{T(M, \vec{n})} = \overline{\overline{\sigma(M)}} \cdot \vec{n} \quad (2.4.1)$$

Le champ tensorielle $\overline{\overline{\sigma(M)}}$, fonction du point M , est appelé champ de contrainte.

2.4.2 équilibre dynamique d'un domaine solide

La répartition des contraintes au sein du solide (S) dépend des efforts qui s'exercent à sa surface (∂S)¹⁴ et des efforts volumiques agissant sur chacune de ses parties.

La démonstration qui suit vise à établir les conditions de l'**équilibre local**.

Remark 2. Dans la littérature, on trouve souvent une méthode consistant à isoler un petit parallélépipède rectangle et conduisant à la même solution bien qu'en particulierisant le développement des calculs aux coordonnées cartésiennes.

Considérons un sous-domaine \mathcal{D} quelconque extrait du solide (S) et suivons-le dans son mouvement (description de LAGRANGE)

Le solide, globalement, est soumis à des actions extérieures appliquées à sa surface (∂S) et des actions volumiques dans le volume $\{S\}$; sous ces actions, il est le siège de déplacements, de déformations et de contraintes éventuellement variables dans le temps.

Tout volume $\{\mathcal{D}\}$ extrait de $\{S\}$ est soumis aux forces volumiques ainsi qu'aux forces de surface qui s'exercent à sa surface ($\partial \mathcal{D}$); ces dernières forces surfaciques ne sont autres que les vecteurs contrainte agissant en chaque point P de l'enveloppe localement orientée par le vecteur \vec{n} normal extérieur à $\{\mathcal{D}\}$.

2.4.2.1 résultante dynamique : équation de l'équilibre local

11. C'est la forme tétraédrique du volume isolé qui conduit à l'élimination des termes d'ordre 3 devant ceux d'ordre 2. Si l'on avait pris un volume parallélépipédique, non seulement la nature tensorielle du champ de contraintes n'aurait pas pu être montrée, mais encore les termes d'ordre 2 ne seraient apparus que par différence de sorte que ne subsisteraient que des termes d'ordre 3. Voir la remarque 2 du §2.4.2.

12. Cette « linéarité » concerne l'orientation du vecteur \vec{n} et non pas la position du point M .

13. Tenseur de contraintes de Cauchy.

14. On notera $\partial \Omega$ le « bord » (l'enveloppe) d'un domaine Ω .

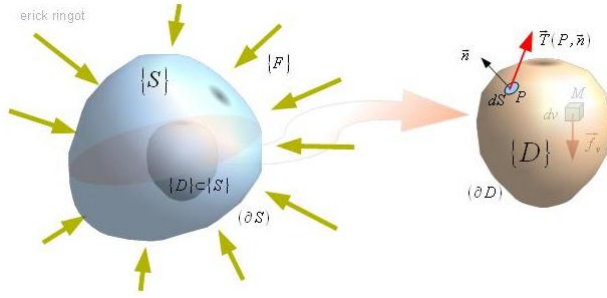


FIGURE 2.4.2 – sous-domaine extrait d'un solide

L'équation fondamentale de la dynamique (2.2.1) dans un repère galiléen R_0 , en résultante, s'écrit :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \vec{f}_v(M) dv + \iint_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{T(P, \vec{n})} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{D}} \rho \vec{\gamma}(M) dv$$

ou, compte tenu de la relation 2.4.1 et en adoptant une notation simplifiée pour les intégrales :

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{f}_v(M) dv + \oint_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{\sigma(P)} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{\gamma}(M) dv$$

Le théorème de la divergence¹⁵ (ou théorème du flux-divergence voir eq.5.4.6) permet de transformer l'intégrale de surface (sur l'enveloppe fermée) en intégrale de volume :

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{f}_v(M) \cdot dv + \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\text{div}}(\overrightarrow{\sigma}) \cdot dv = \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{\gamma}(M) \cdot dv$$

et ce, quelque soit $\{\mathcal{D}\} \subset \{\mathcal{S}\}$, c'est donc que¹⁶ :

$$\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\sigma} + \vec{f}_v = \rho \vec{\gamma} \quad (2.4.2)$$

Cette équation exprime l'équilibre local (au sens dynamique du terme) de toute particule incluse dans le solide.

En statique, et si l'on convient que la force de volume n'est autre que le poids volumique, il vient :

$$\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\sigma} + \rho \vec{g} = \vec{0} \quad (2.4.3)$$

2.4.2.2 moment dynamique : symétrie du tenseur des contraintes

L'équation fondamentale de la dynamique (2.2.1) dans un repère galiléen R_0 , en moment par rapport au centre O du repère, s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_v(M) dv + \oint_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{T(P, \vec{n})} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{OM} \wedge \rho \vec{\gamma}(M) dv$$

Prenant en compte l'équation 2.4.2, on transforme le second membre :

$$\int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_v(M) dv + \oint_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{\sigma} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{OM} \wedge (\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\sigma} + \vec{f}_v) dv$$

Il reste :

$$\oint_{\partial \mathcal{D}} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{\sigma} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{D}} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\sigma} dv$$

15. En analyse vectorielle, le théorème de flux-divergence, aussi appelé le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI, relie la divergence d'un champ vectoriel à la valeur de l'intégrale de surface du flux défini par ce champ. Il présente plusieurs formes parmi lesquelles la plus connue est : $\oint_{\partial \Omega} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \text{div} \vec{f} \cdot dv$. Ici on utilise la forme $\oint_{\partial \Omega} \overrightarrow{\sigma} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\sigma} \cdot dv$.

L'opérateur divergence est défini par la relation $\text{div} \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = f_{k,k}$ (pour un scalaire) et $\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{\sigma} \cdot \vec{\nabla}$ (pour un tenseur). La divergence d'un tenseur est un vecteur donc les coordonnées cartésiennes sont données par : $\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\sigma} = \sigma_{ik,k} \cdot \vec{e}_i$. Noter que k est ici l'indice muet de sommation.

16. Lemme fondamental : si une intégrale est nulle quelque soit le domaine d'intégration, c'est que « l'intégrande » est nul : $\int_{\Omega} f dv = 0 \forall \Omega \Rightarrow f \equiv 0$.

Intéressons nous à la composante selon le vecteur unitaire \vec{e}_1 :

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} (\overrightarrow{OP} \wedge (\overline{\sigma} \vec{n})) \cdot \vec{e}_1 dS = \int_{\mathcal{D}} (\overrightarrow{OM} \wedge \text{div} \overline{\sigma}) \cdot \vec{e}_1 dv$$

Se réduit¹⁷ à :

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} (x_2\sigma_{3j} - x_3\sigma_{2j}) \cdot n_j dS = \int_{\mathcal{D}} (x_2\sigma_{3,j} - x_3\sigma_{2,j}) dv$$

Appliquons le théorème de flux-divergence¹⁸ sur le premier membre, alors :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_2\sigma_{3j} - x_3\sigma_{2j}) dv = \int_{\mathcal{D}} \left(x_2 \frac{\partial\sigma_{3j}}{\partial x_j} - x_3 \frac{\partial\sigma_{2j}}{\partial x_j} \right) dv \quad \forall \mathcal{D}$$

En développant le premier terme¹⁹ :

$$\begin{aligned} \delta_{2j}\sigma_{3j} + x_2 \frac{\partial\sigma_{3j}}{\partial x_j} - \delta_{3j}\sigma_{2j} - x_3 \frac{\partial\sigma_{2j}}{\partial x_j} &= x_2 \frac{\partial\sigma_{3j}}{\partial x_j} - x_3 \frac{\partial\sigma_{2j}}{\partial x_j} \\ \Rightarrow \delta_{2j}\sigma_{3j} - \delta_{3j}\sigma_{2j} &= 0 \end{aligned}$$

Et, puisque $\delta_{aj}F_{bj} = F_{ab}$, il vient :

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} = 0$$

Et, de façon générale :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Le tenseur des contraintes est donc symétrique.

$$\overline{\sigma} = \overline{\sigma}^t \quad (2.4.4)$$

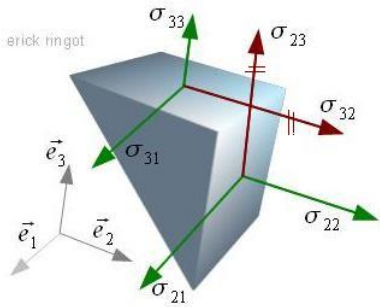


FIGURE 2.4.3 – réciprocity des contraintes de cisaillement

interprétation Si on considère un dièdre droit et en particulier un dièdre dont les faces orientées par les vecteurs \vec{e}_i et \vec{e}_j , la composante de contrainte σ_{ij} agit sur la facette orientée par \vec{e}_i dans la direction \vec{e}_j alors que σ_{ji} agit sur la facette orientée par \vec{e}_j dans la direction \vec{e}_i . Ces deux composantes sont égales (par exemple les composantes σ_{23} et σ_{32} de la figure 2.4.3), ce qui traduit la réciprocité des contraintes. Cette réciprocité garantit l'équilibre, en moment, de toutes les particules du solide.

2.5 Diagonalisation du tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes est symétrique. Il existe une base orthonormée dans laquelle sa matrice est diagonale et les valeurs propres qui composent sa diagonale sont réelles.

$$17. \overline{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = \sigma_{1i}n_i \\ \sigma_{2i}n_i \\ \sigma_{3i}n_i \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OP} \wedge \overline{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x_2\sigma_{3i}n_i - x_3\sigma_{2i}n_i \\ x_3\sigma_{1i}n_i - x_1\sigma_{3i}n_i \\ x_1\sigma_{23i}n_i - x_2\sigma_{1i}n_i \end{pmatrix}$$

18. La forme employée ici est la suivante : $\oint_{\partial\Omega} f \cdot n_i dS = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dv$

19. On introduit le tenseur de KRONEKER δ_{ij} tel que $\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ en ayant remarqué que $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$.

2.5.1 contraintes principales

Les contraintes principales sont les valeurs propres du tenseur des contraintes (fig. 2.5.1). Elles sont donc solutions de l'équation caractéristique : $\det|\bar{\sigma} - \lambda\bar{I}| = 0$. On note $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$, les contraintes principales traditionnellement ainsi classées de la plus grande à la plus petite.

2.5.2 directions principales de contrainte

Les directions principales de contraintes sont les vecteurs propres formant la base $\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}$ orthonormée²⁰ et respectivement associées aux contraintes principales $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$. Ainsi \vec{e}_J est solution de l'équation $(\bar{\sigma} - \sigma_J\bar{I}) \cdot \vec{e}_J = \vec{0}$ ($J = I, II, III$). Cette équation linéaire homogène admet une famille vectorielle comme solution. On choisit de retenir des vecteurs unitaires formant une base orthonormée directe.

Le tenseur des contraintes, dans la base des directions principales s'écrit donc :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} \{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}\} \quad (2.5.1)$$

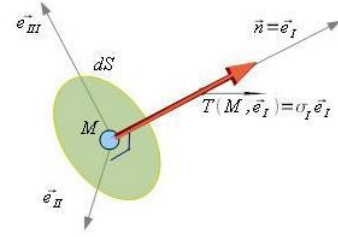


FIGURE 2.5.1 – contrainte principale et direction principale de contrainte.

Propriété : Sur une facette orientée par un vecteur directeur principal, il n'y a pas de cisaillement.

2.5.3 invariants du tenseur des contraintes

L'équation caractéristique se développe en :

$$\det|\bar{\sigma} - \lambda\bar{I}| = \lambda^3 + L_1\lambda^2 + L_2\lambda + L_3$$

Equation dans laquelle les coefficients sont indépendants de la base de projection de la matrice $\bar{\sigma}$: ce sont les invariants du tenseur des contraintes. Leur valeur est donnée ci-dessous :

$$\begin{cases} L_1 = \text{tr}(\bar{\sigma}) \\ L_2 = \frac{1}{2}(\text{tr}^2(\bar{\sigma}) - \text{tr}(\bar{\sigma}^2)) \\ L_3 = \det|\bar{\sigma}| \end{cases} \quad (2.5.2)$$

Valeurs que l'on peut déterminer soit dans une base quelconque $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ²¹ :

$$\begin{cases} L_1 = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ L_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}) \\ L_3 = \det|\bar{\sigma}| \end{cases}$$

Soit dans la base des directions principales $\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}$:

$$\begin{cases} L_1 = \sigma_{KK} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ L_2 = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I \\ L_3 = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III} \end{cases}$$

20. Si les trois contraintes principales sont égales, toute direction de l'espace est direction principale. Le tenseur est alors sphérique car, dans toute base il s'écrit $\bar{\sigma} = \sigma_I\bar{I}$. On trouve ce genre d'état de contrainte dans un liquide en équilibre hydrostatique, la contrainte principale est alors égale à $\sigma_I = -p$ où p désigne la « pression ».

21. On notera Σ la trace du tenseur des contraintes $\Sigma = \det\bar{\sigma}$.

2.5.4 composantes sphérique et déviatorique d'un tenseur contrainte

2.5.4.1 définition

Il est probable que l'immersion d'un lopin métallique dans des profondeurs abyssales ne modifie pas considérablement sa microstructure, cette dernière étant déjà compacte à l'état naturel. De ce fait le métal en question est peu sensible à la pression²². Si l'on cherche à établir les conditions dans lesquelles le lopin métallique sera affecté de manière irréversible par un état de contrainte, il convient alors de ne pas tenir compte de la part de contrainte assimilable à une pression.

C'est la raison pour laquelle les mécaniciens décomposent le tenseur des contraintes en deux termes :

1. un terme tensoriel sphérique $\overline{\overline{\sigma_S}}$ apportant la totalité de la pression hydrostatique ;
2. un terme tensoriel déviatorique $\overline{\overline{\sigma_D}}$ apportant le complément de contrainte. Comme la pression est toute entière contenue dans la trace du tenseur contrainte. Le tenseur déviateur a une trace nulle.

Ainsi on établit les relations suivantes :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma_S}} + \overline{\overline{\sigma_D}} \quad \text{tr}(\overline{\overline{\sigma_D}}) = 0 \quad \text{tr}(\overline{\overline{\sigma_S}}) = \text{tr}(\overline{\overline{\sigma}}) = \frac{1}{3}\sigma_{kk} \quad \overline{\overline{\sigma_S}} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\overline{\overline{I}} \quad \overline{\overline{\sigma_D}} = \overline{\overline{\sigma}} - \frac{1}{3}\text{tr}(\overline{\overline{\sigma}})\overline{\overline{I}}$$

$$\overline{\overline{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \frac{1}{3}(2\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{11}) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \frac{1}{3}(2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}) \end{pmatrix}}_{\overline{\overline{\sigma_D}}} + \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\overline{\overline{\sigma_S}}}$$

Le déviateur a les mêmes directions principales que le tenseur des contraintes.

2.5.4.2 invariants du tenseur déviateur

Les mécaniciens établissent des critères, portant par exemple sur le tenseur des contraintes mais pas seulement, qui établissent les conditions de l'apparition de déformations irréversibles dans les matériaux (par plasticité ou endommagement). Naturellement ces critères s'expriment indépendamment du choix de la base de projection des grandeurs tensorielles et s'appuient donc sur leurs invariants.

On est donc amené à considérer les invariants du tenseur déviateur :

$$\begin{cases} J_1 = \text{tr}(\overline{\overline{\sigma_D}}) = 0 \text{ par définition} \\ J_2 = -\frac{1}{2}\text{tr}(\overline{\overline{\sigma_D}}^2) \\ J_3 = \det|\overline{\overline{\sigma_D}}| \end{cases}$$

Pour expliciter davantage ces termes, on peut diagonaliser le déviateur, et ce dans la même base de directions principales que le tenseur des contraintes, en :

$$\overline{\overline{\sigma_D}} = \begin{pmatrix} s_I & 0 & 0 \\ 0 & s_{II} & 0 \\ 0 & 0 & s_{III} \end{pmatrix} \{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}\}$$

Alors :

$$\begin{cases} J_1 = 0 \\ J_2 = s_I s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I = \frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2] \\ J_3 = s_I s_{II} s_{III} \end{cases} \quad (2.5.3)$$

²². Ce ne serait pas le cas d'un matériau poreux, par exemple le béton, qui s'effondre sur lui-même par réduction des vides internes sous l'action d'une pression hydrostatique importante.

2.6 représentation graphique d'un état de contrainte

2.6.1 tricercler de MOHR

Dans la base des directions principales de contraintes, la matrice représentative du tenseur des contraintes en un point M du solide (S) est donnée par l'équation 2.5.1. Considérons la facette centrée en M et orientée par le vecteur \vec{n} de composantes n_1, n_2, n_3 dans la base des vecteurs propres $\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}\}$, alors (équation 2.4.1), le vecteur contrainte agissant en M sur ladite facette vaut :

$$\overrightarrow{T(M, \vec{n})} = \overline{\overline{\sigma(M)}} \cdot \vec{n} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_I n_1 \\ \sigma_{II} n_2 \\ \sigma_{III} n_3 \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$$

On peut calculer les composantes normale et tangentielle (§ 2.3.3) de ce vecteur projetées respectivement sur la normale à la facette et dans son plan.

$$\vec{T} = \overrightarrow{T(M, \vec{n})} = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t}$$

De plus, puisque nous avons le choix, convenons de prendre τ_n positif, le sens de \vec{t} découlant de ce choix. Alors :

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{T} \cdot \vec{n} = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \\ \tau_n = \|\vec{T} - \sigma_n \vec{n}\| = \sqrt{T^2 - \sigma_n^2} \end{cases}$$

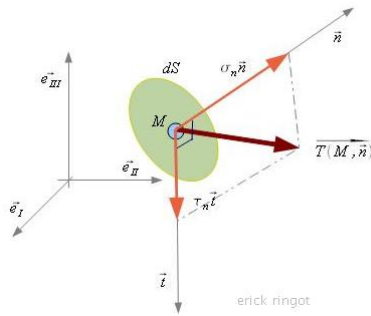


FIGURE 2.6.1 – contrainte normale et contrainte de cisaillement

En fin de compte, on réunit le jeu d'équations et d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 \\ \sigma_n = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \\ \sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \end{cases}$$

Les équations permettent de générer les relations suivantes :

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III})}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})} \\ n_2^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_{III})(\sigma_n - \sigma_I)}{(\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_I)} \\ n_3^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II})}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})} \\ \text{et } \sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \end{cases} \quad (2.6.1)$$

Compte tenu des inéquations, d'une part, du fait que $n_j^2 \geq 0$ d'autre part, on déduit les inéquations :

$$\begin{cases} \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III}) \geq 0 \\ \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_{III})(\sigma_n - \sigma_I) \leq 0 \\ \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II}) \geq 0 \end{cases} \quad (2.6.2)$$

Si, à tout vecteur contrainte \vec{T} on fait correspondre un point image Φ dans le plan $\{\sigma, \tau\}$ (plan de MOHR), les inéquations précédentes montrent que le point $\Phi(\sigma_n, \tau_n)$ est inclus dans l'espace géométrique délimité par trois cercles : c'est le « tricercler de MOHR ».

2.6.2 cercle de MOHR

2.6.2.1 un cas particulier de l'état de contrainte

Si, localement, la facette (dS) est tangente à l'un des trois plans principaux (contenant deux axes principaux), par exemple (dS_{III}) tangente au plan $\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}\}$ alors le vecteur contrainte agissant sur cette facette est réduite à la composante σ_{III} . C'est le cas, notamment, lorsque la facette considérée est prise à la surface d'un solide²³.

Considérons maintenant une facette quelconque (dS) perpendiculaire à (dS_{III}), donc contenant \vec{e}_{III} (c'est donc que $\vec{n} \perp \vec{e}_{III}$ et donc $n_3 = 0$).

A noter que, du fait de la réciprocité des cisaillements, la composante de cission $\vec{\tau}_n$ est contenue dans le plan $\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}\}$.

Compte tenu de ce que $n_3 = 0$, la troisième équation de la liste (2.6.1) se réduit ainsi à :

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II}) = 0$$

Que l'on transforme en :

$$\left(\sigma_n - \left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)^2$$

⇒ Dans le plan de MOHR le point figuratif Φ du vecteur contrainte se situe sur le cercle de coordonnées $\{\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II}); 0\}$ et de rayon $R = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$. On dit que l'état de contrainte est localement plan; ce cercle est le cercle de MOHR des contraintes (planes); le paragraphe suivant en précise les modalités de construction.

2.6.2.2 construction

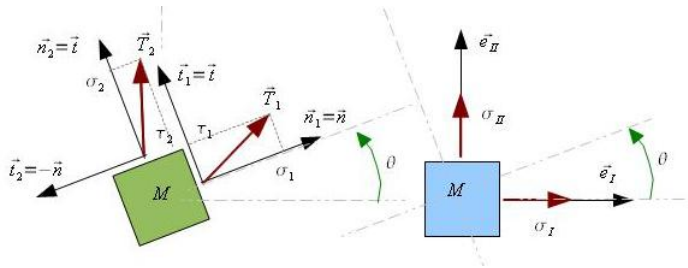


FIGURE 2.6.3 – état plan de contrainte (cas du plan perpendiculaire à l'axe III)

La construction du cercle de MOHR des contraintes concerne un état de contrainte localement plan²⁴. L'état de contrainte est ainsi caractérisé par un tenseur des contraintes réduit²⁵ à :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}\}} \quad (2.6.3)$$

Conventionnellement, on le réduit en 2D à la forme :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 \\ 0 & \sigma_{II} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}\}} \quad (2.6.4)$$

L'objet du cercle de MOHR (fig.2.6.4) est de permettre la détermination graphique (quantitative et rapide²⁶.) des vecteurs contraintes agissant sur des facettes contenant le vecteur \vec{e}_{III} ; le vecteur directeur d'une telle facette exclut donc \vec{e}_{III} et, par conséquent, $\vec{n} = n_1\vec{e}_I + n_2\vec{e}_{II}$.

23. Si cette surface est libre de toute force surfacique, on a, en plus, $\sigma_{III} = 0$.

24. Le raisonnement vaut aussi pour les états de déformations planes si on fait abstraction de la composante de contrainte σ_3 .

25. si σ_{II} est nul, σ_{III} est négatif ou nul.

26. La technique du cercle de MOHR évite de déterminer les contraintes principales par résolution de l'équation $\det|\bar{\bar{\sigma}} - \lambda\bar{I}| = 0$

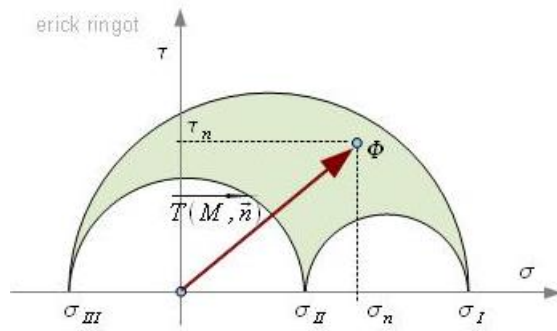


FIGURE 2.6.2 – tricerle de MOHR (pour les contraintes)

n_1, n_2 sont les cosinus directeurs du vecteur \vec{n} dans la base \vec{e}_I, \vec{e}_{II} . On introduit ainsi : $\vec{n} = \cos\theta\vec{e}_I + \sin\theta\vec{e}_{II}$ où θ est l'angle que fait le vecteur \vec{n} avec l'axe \vec{e}_I : $\theta = \widehat{\vec{e}_I, \vec{n}}$. Pour alléger encore l'écriture on pose $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$.

Le vecteur contrainte agissant sur ladite facette est donc : $\vec{T}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_I c \\ \sigma_{II} s \end{pmatrix}$ dans la base $\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}\}$.

On décompose ce vecteur selon la normale $\vec{n} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ et le vecteur tangent $\vec{t} = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$ ²⁷ obtenu par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ de \vec{n} autour de \vec{e}_{III} . Alors :

$$\vec{T}_1 = \sigma_1 \vec{n} + \tau_1 \vec{t} \text{ avec } \sigma_1 = \sigma_I c^2 + \sigma_{II} s^2 \text{ et } \tau_1 = -cs(\sigma_I - \sigma_{II})$$

Par commodité, on introduit l'angle double 2θ de sorte que²⁸ :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right) \cos 2\theta \\ \tau_1 &= -\left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right) \sin 2\theta \end{aligned}$$

ou :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \underbrace{\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)}_{\sigma_o} + \underbrace{\left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)}_R \cos(-2\theta) \\ \tau_1 &= \underbrace{\left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)}_R \sin(-2\theta) \end{aligned}$$

NOTE 1 : Dans le plan $\{\sigma, \tau\}$, le point figuratif Φ_1 du vecteur contrainte \vec{T}_1 est situé sur un cercle centré en $\Phi_0(\sigma_o, 0)$, de rayon R , avec $\sigma_o = \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II})$ et $R = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$.

NOTE 2 : Si la normale à la facette fait un angle θ avec la direction principale \vec{e}_I , alors le rayon $[\Phi_o\Phi]$ fait un angle -2θ avec l'axe $O\sigma$ (prendre attention au changement de sens de rotation).

2.6.2.3 généralisation (problème inverse)

Au cas où le tenseur des contraintes est connu dans une base quelconque :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \quad (2.6.5)$$

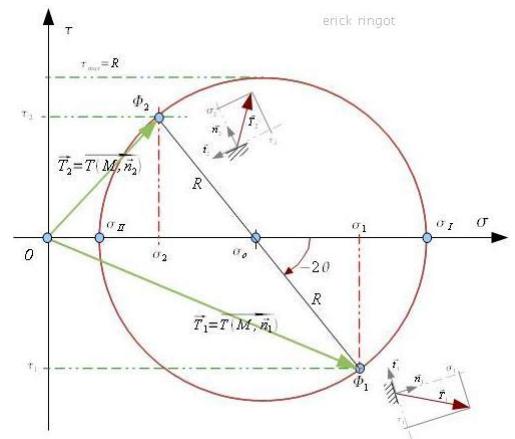


FIGURE 2.6.4 - cercle de MOHR des contraintes

Deux vecteurs contraintes peuvent être facilement établis : \vec{T}_1 est celui qui agit sur la facette orientée par $\vec{n}_1 = \vec{e}_1$ et \vec{T}_2 celui qui agit sur la facette orientée par $\vec{n}_2 = \vec{e}_2$. Alors :

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{T}_1 &= \sigma_{11} \vec{e}_1 + \tau_{12} \vec{e}_2 = \sigma_{11} \vec{n}_1 + \tau_{12} \vec{t}_1 \end{aligned}$$

27. Contrairement au cas du tricerclé, ici on fixe le sens du vecteur tangent \implies la composante de cisaillement est donc algébrique et peut être négative.

28. Rappelons que $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = c^2 - s^2$ et que $\sin 2\theta = 2 \cos\theta \sin\theta = 2cs$

et :

$$\begin{aligned} \vec{T}_2 &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{12} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{T}_2 &= \tau_{12}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 = \sigma_{22}\vec{n}_2 - \tau_{12}\vec{t}_2 \text{ car } \vec{t}_2 = -\vec{e}_1 \end{aligned}$$

Comme l'angle de rotation $\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}$ est égal à $\frac{\pi}{2}$, les points figuratifs Φ_1 et Φ_2 des vecteurs contraintes correspondants sont diamétralement opposés et, par conséquent, ces deux points caractérisent complètement le cercle de MOHR :

$$\begin{cases} \text{centre } \sigma_o = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \text{rayon } R = \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2} \end{cases}$$

De là on déduit aisément les contraintes principales :

$$\sigma_I = \sigma_o + R \quad \sigma_{II} = \sigma_o - R$$

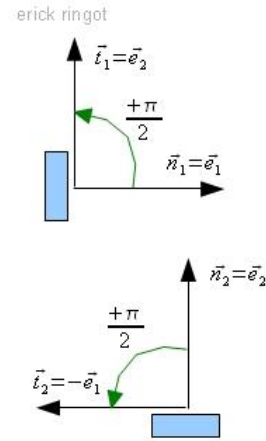


FIGURE 2.6.5 – vecteurs normaux et tangents.

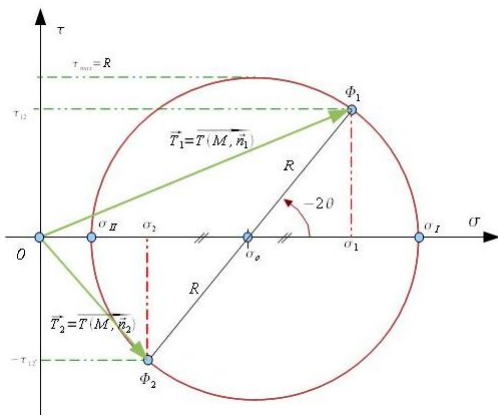


FIGURE 2.6.6 – construction du cercle de MOHR lorsque les contraintes principales sont inconnues.

Et ensuite les directions principales se déduisent de : $\tan(-2\theta) = \frac{\tau_{12}}{\sigma_1 - \sigma_o} \Rightarrow \theta = -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\tau_{12}}{\sigma_1 - \sigma_o}\right)$ où θ est l'angle d'inclinaison du vecteur $\vec{n}_1 = \vec{e}_1$ par rapport à la direction principale \vec{e}_I .

2.7 conditions aux limites du solide exprimées en contraintes

Aux limites du solide, les vecteurs contraintes qui agissent sur les facettes qui tapissent l'enveloppe $\{\partial S\}$ ne sont autres que les forces surfaciques qui y sont appliquées.

Là où les forces de surface sont connues, c'est-à-dire sur $\{\partial S_f\}$ on écrit :

$$\overrightarrow{T(P)} = \overline{\overline{\sigma(P)}} \cdot \overrightarrow{n(P)} = \overline{f_s(P)} \quad \forall P \in \{\partial S_f\} \quad (2.7.1)$$

Les étapes de traitement d'une condition limite en contraintes²⁹ sont donc les suivantes :

1. détermination de l'équation³⁰ du « bord » (surface en 3D ou ligne en 2D) : $\psi(P) = 0$;
2. détermination du vecteur normal extérieur $\overrightarrow{n(P)}$;
3. calcul du vecteur contrainte $\overrightarrow{T(P)} = \overline{\overline{\sigma(P)}} \cdot \overrightarrow{n(P)}$;
4. identification avec la force de surface : $\overrightarrow{T(P)} = \overline{f_s(P)}$; on en déduit alors des conditions portant sur le tenseur des contraintes.

2.8 métrologie des contraintes

29. Voir aussi les conditions en déplacement (§ 1.7.3).

30. Dans l'espace tridimensionnel, une surface est définie par une représentation paramétrique à deux paramètres ou, alternativement, par une équation. En coordonnées cartésiennes, une représentation paramétrique s'écrit :

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}$$

Une équation est de la forme $\psi(x, y, z) = 0$. Par exemple, un cylindre centré sur l'axe Oz de rayon R aura pour représentation paramétrique $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$, $z = h$ (paramètres : θ et h) ou pour équation $x^2 + y^2 = R^2$.

Bien que les contraintes aient un caractère conceptuel et ne soient pas susceptibles de mesures directes, nous indiquons ici pour mémoire et par conformité aux (anciennes) habitudes, une méthode de « mesure ». Il s'agit de la photo-élasticité mise en évidence par E.G.COKER et L.N.G.FILON de l'université de Londres : ce moyen métrologique a été en grande vogue jusqu'à l'avènement du calcul numérique à la fin du vingtième siècle.

2.8.1 photoélasticité par transmission

La photoélasticité est basée sur la biréfringence de certains matériaux transparents sous l'effet de contraintes : alors que le matériau est initialement isotrope, la lumière se décompose selon les axes principaux de réfringence (indices de réfraction principaux différents) qui coïncident avec les axes principaux de contrainte. Les deux ondes lumineuses issues de cette décomposition se propagent à des vitesses différentes, elles se voient être déphasées à la sortie du solide. Le déphasage dépend à la fois de l'épaisseur du solide et de l'intensité de l'état de contrainte, de la longueur d'onde de la lumière.

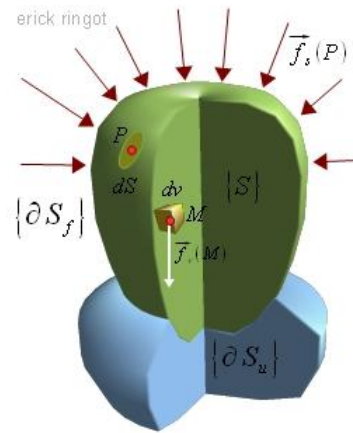


FIGURE 2.7.1 – partition de l'enveloppe : $\partial S = \partial S_f \cup \partial S_u$

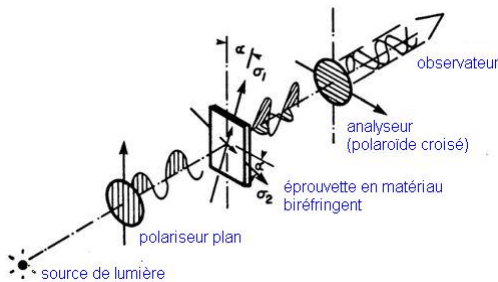


FIGURE 2.8.1 – polariscope employé en photoélasticimétrie

Cette technique est bien adaptée à l'étude de problèmes en contraintes planes, les éprouvettes étant découpées dans des plaques constituées dans un matériau biréfringent (araldite le plus souvent) et observées en transmission.

Le déphasage peut conduire à l'extinction de l'onde recomposée mettant ainsi en évidence les lignes d'égal déphasage que l'on peut associer à des lignes d'égale différence de contraintes principales, isochromes, encore appelées « lignes isostatiques ».

La lumière incidente est polarisée linéairement (voire circulairement) grâce à un polariseur. Après avoir traversé le modèle biréfringent, la lumière est filtrée par un second polariseur croisé avec le polariseur d'entrée et appelé analyseur. Ce dernier permet en effet de révéler les déphasages nuls ou proportionnels à la longueur d'onde de la lumière ou de l'une de ses composantes.

- Condition d'extinction (isochromes) :

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \frac{N\lambda}{Ce}$$

- N est un nombre entier positif,
- λ la longueur d'onde de l'onde éteinte,
- C le coefficient photoélastique,
- e l'épaisseur du modèle.

Le coefficient photoélastique a pour dimension l'inverse d'une contrainte : $[C] = [L^2.F^{-1}]$, il est exprimé en « BREWSTER », tel que $1Brewster = 10^{-12} Pa^{-1}$. La table ci-dessous indique les valeurs de constantes photoélastiques pour différents matériaux.

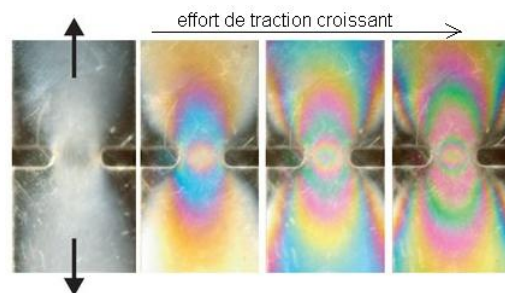


FIGURE 2.8.2 – différentes étapes de l'état de contrainte d'un modèle en araldite.

matériau	indice (Brewster)	matériau	indice (Brewster)
pyrex	3.65	bakelite	40.0 à 50.0
celluloïd	15.0	plexiglas	5.0
verre	2.0 à 3.0	araldite	32.5

Alternativement, une extinction totale de la lumière survient là où les axes des polaroïdes coïncident avec les axes principaux de contrainte. Des lignes noires se dessinent ainsi : ce sont les isoclines³¹.

2.8.2 photoélasticité par réflexion

Lorsque l'on souhaite inspecter le champ de contrainte à la surface d'une pièce solide gauche, on peut recourir à la photoélasticité par transmission. Une couche de vernis (polymérisation aux UV) ayant des propriétés photoélastiques est appliquée sur la pièce d'étude.

L'observation sous contrainte en lumière polarisée permet de visualiser les franges d'extinction de la lumière et de déterminer le niveau de contrainte local sur des géométries compliquées.

2.8.3 autres méthodes

Citons pour mémoire :

- l'interférométrie par moiré ;
 - la stéréophotogrammétrie.
-

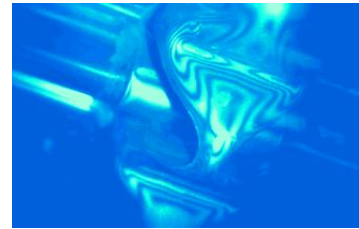


FIGURE 2.8.3 – image en photoélasticité par réflexion.

31. Ces dernières peuvent être éliminées du champ de vision en polarisant la lumière circulairement.

Chapitre 3

Loi de comportement élastique linéaire

3.1 introduction¹

La théorie de l'élasticité est un champ particulier d'étude des matériaux solides dans lequel on considère que contraintes et déformations sont liées par une relation « linéaire ».

Cela induit deux conséquences :

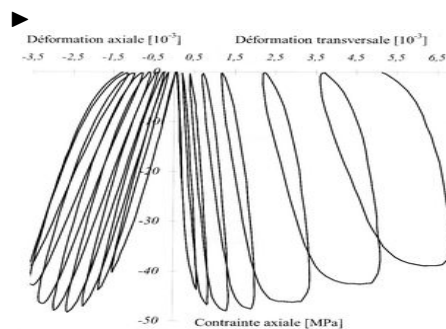
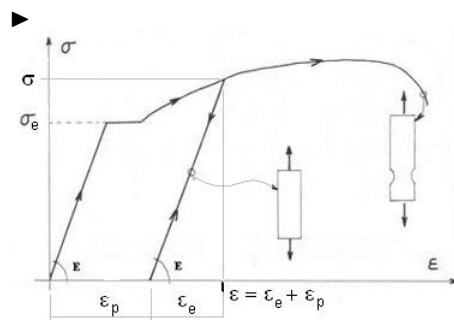
- les effets (déformations) sont proportionnels aux causes (contraintes) ; si l'on considère une sollicitation mono axiale, cela revient à écrire $\sigma = E.\epsilon$. Cette proportionnalité est d'ailleurs transposable aux autres réponses du solide (ou d'une structure composée de solides élastiques) et notamment les déplacements² qui deviennent proportionnels ou plus exactement linéairement dépendants des efforts appliqués.
- les déformations sont réversibles. Lorsque la cause cesse, les déformations s'annulent.

En pratique, les matériaux de construction suivent des lois de comportement très variées et souvent complexes.

Par exemple :

les aciers suivent une loi « élastoplastique » : s'ils sont déformés au delà d'une valeur seuil ϵ_e , la linéarité n'est plus satisfaite. Toutefois, si la déformation vient à décroître $\dot{\epsilon} < 0$ alors on retrouve la linéarité mais exprimée en terme d'accroissements : $d\sigma = E.d\epsilon$. Malgré ce retour à un comportement linéaire, une irréversibilité apparaît sous la forme d'une déformation résiduelle alors même que la contrainte s'annule : c'est une déformation plastique ϵ_p .

Le béton et d'autres matériaux poreux « s'endommagent » lorsque la contrainte qui leur est appliquée dépasse un certain seuil (voisin de la moitié de leur résistance initiale). L'endommagement résulte de l'apparition de microdiscontinuités au sein du matériau (microfissuration, effondrement de la structure poreuse, décohésion des particules) et se traduit à la fois par une réduction de la pente $E = d\sigma/d\epsilon$ et par des déformations irréversibles.



1. certaines illustrations de ce chapitre sont extraites du livre « Comportement mécanique du béton » dirigé par J-M Reynouard et G Pijaudier-Cabot - ISBN 2-7462-0980-2 Ed. Lavoisier.

2. Rappelons que nous supposons l'hypothèse des petites perturbations satisfaite et que les déplacements du solide (de la structure) sont petits devant ses dimensions propres.

- S'il est sollicité durablement à moins de la moitié de sa résistance, le béton présente les caractéristiques d'un matériau viscoélastique³. Cela signifie que les déformations augmentent dans le temps alors même que la charge reste constante. Dans une action mono-axiale de compression appliquée à l'instant t_0 , la déformation à l'instant t est exprimée par une fonction de fluage $J(t_0, t)$ telle que $\epsilon(t) = J(t_0, t) \cdot \sigma_0$.

S'ajoutent à cela, d'autres considérations :

- les déformations peuvent résulter d'une dilatation thermique $\epsilon_{th} = \alpha \Delta T$;
- le caractère cyclique d'un chargement provoque le phénomène de « fatigue » à l'origine d'un endommagement alors même que le niveau de sollicitation est relativement faible eu égard à la résistance du matériau (fig. 3.1.1) ;
- le caractère triaxial de certains chargements ;
- la capacité de consolidation sous charge hydrostatique de certains matériaux ;
- la possibilité de viscoplasticité ;
- la non symétrie de comportement des matériaux en traction et en compression (béton) ;
- la nature anisotrope de certains matériaux (le bois, les céramiques extrudées, les matériaux composites à base de fibres) ;
- la nature composite de certains solides (béton armé, composites à base de carbone) ;
- la sensibilité des caractéristiques mécaniques des matériaux avec la température (tous), voire avec l'hygrométrie (bois, béton) ;
- le caractère évolutif, vieillissant, des matériaux au cours de leur histoire du fait de la migration de l'eau ou d'espèces chimiques (béton, verre) ;
- le couplage avec des actions physicochimiques (rayonnement électromagnétique, adsorption-désorption, attaques chimiques, corrosion) ;
- les effets dynamiques (chocs).

On le voit, l'hypothèse du comportement élastique des matériaux ne rend pas compte de tous les phénomènes évoqués ci-dessus. Néanmoins, il s'agit d'une loi applicable pourvu que le niveau de contrainte ne soit pas trop élevé. Les ingénieurs s'appuient donc sur cette hypothèse en première intention et effectuent des vérifications supplémentaires a posteriori ; c'est ainsi qu'en béton armé, par exemple, il est loisible de déterminer les sollicitations avec l'hypothèse de l'élasticité, de dimensionner les sections aux états limites de service avec cette même hypothèse, les règles Européennes de calcul (Eurocodes) fixant les modalités de calcul.

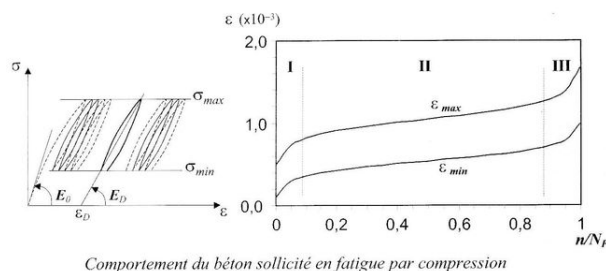


FIGURE 3.1.1 – courbe déformation - nombre de cycles.

Lorsque la situation l'exige (ouvrages spéciaux, requête d'une grande précision, recherche) des modèles plus élaborés sont développés ou utilisés moyennant leur implémentation dans des codes de calcul numérique.

3.2 hypothèses

3.2.1 expérimentation

Sans entrer dans le détail des expériences propres à « identifier » le comportement mécanique de tous les matériaux, attardons nous sur la caractérisation de deux d'entre eux : l'acier et le béton (vis à vis des actions de courte durée).

3.2.1.1 comportement de l'acier (test de traction)

Une éprouvette cylindrique profilée est placée entre les mors d'une presse de traction. Elle est équipée de jauges extensométriques permettant de mesurer à la fois la déformation axiale ϵ_{11} (modification de longueur) et la déformation transversale ϵ_{22} (modification du périmètre). Elle est soumise à l'action d'un effort de

³. Le béton peut, sous certaines conditions, être considéré comme un matériau viscoélastique vieillissant. Les déformations de « fluage » dépendent non seulement de la durée d'application du chargement mais encore de l'âge du béton au moment de l'application dudit chargement.

traction F croissant. On admet que, dans la zone centrale de longueur initiale L , la contrainte de traction σ_{11} est uniforme et vaut $\sigma = F/A$ où A est l'aire de la section droite initiale.

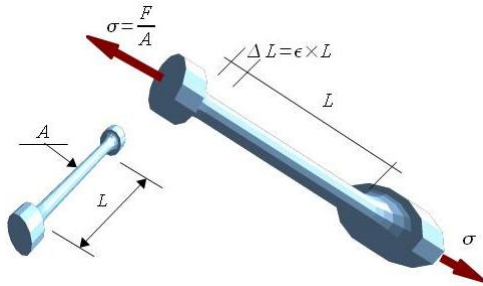


FIGURE 3.2.1 – éprouvette de traction en acier.

L'essai est asservi en déformation et l'on enregistre l'évolution du couple $\{\epsilon_{11}, \sigma_{11}\} = \{\epsilon, \sigma\}$ à vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ constante. On observe quatre étapes :

1) une étape où ϵ et σ croissent proportionnellement l'un à l'autre et ce tant que la contrainte reste inférieure à une valeur σ_e appelée « limite élastique » ; cette valeur est voisine de 360 MPa pour les aciers doux de construction par exemple et peut atteindre $1\,600 \text{ MPa}$ pour l'acier constitutif des câbles de précontrainte. Pendant cette étape, si l'on décharge l'éprouvette, on observe la réversibilité totale de l'histoire de chargement. Lorsque la contrainte s'annule, on n'observe pas de déformation résiduelle.

Cette phase est appelée « phase élastique ». Elle est caractérisée par le rapport constant $\sigma/\epsilon = E$ appelé « module d'élasticité ». Ce module est voisin de $200\,000 \text{ MPa} = 200 \text{ GPa}$ pour la plupart des aciers. Si l'on observe la déformation transversale, on constate qu'elle est négative : alors que l'éprouvette s'allonge, la section se réduit. De plus le rapport $\epsilon_{22}/\epsilon_{11}$, négatif, est également constant. On note $\epsilon_{22} = -\nu\epsilon_{11}$ où ν est le coefficient de contraction encore appelé coefficient de POISSON. ν est adimensionnel et vaut approximativement 0.3 pour les aciers. Ainsi, en régime élastique :

$$\sigma_{11} = E\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} = -\nu\epsilon_{11} \quad (3.2.1)$$

2) une étape au cours de laquelle la déformation augmente alors que la contrainte reste constante. Ce palier est appelé « palier plastique » et on dit que le matériau « s'écoule ». Au niveau nanoscopique, cette phase s'accompagne de réajustements au sein du réseau atomique : les dislocations issues des irrégularités locales se propagent. Si l'on venait à stopper puis inverser la vitesse de déformation, on observerait immédiatement une diminution de la contrainte. Le rapport $\Delta\sigma/\Delta\epsilon$ reprend alors la valeur qu'il avait en régime élastique ; c'est la preuve que le matériau n'est pas endommagé ; par contre une déformation résiduelle ϵ_p subsiste lorsque la contrainte devient nulle.

3) si l'on poursuit l'augmentation des déformations on observe la reprise de l'augmentation de contrainte⁴. Les dislocations étant épuisées, des glissements s'opèrent dans la structure atomique. Le matériau « s'écrouit ». Si l'on décharge l'éprouvette à partir du niveau de contrainte $\sigma_s > \sigma_e$, on constate que le module n'a toujours pas changé, la déformation plastique a augmenté quant à elle. Si l'on recharge le matériau, il adopte un comportement élastique ($\frac{d\sigma}{d\epsilon} = E$) et l'écrouissage reprend à la valeur σ_s de la contrainte comme si le matériau avait gardé cette valeur en mémoire.

4) la déformation axiale continuant d'augmenter, la valeur de σ passe par une valeur maximale, considérée comme étant la « contrainte à la rupture » du matériau. S'en suit une diminution de la contrainte de traction accompagnant une réduction localisée de la section de l'éprouvette : c'est la « striction ». L'essai peut être poursuivi jusqu'à la séparation de l'éprouvette en deux morceaux.

3.2.1.2 comportement du béton (test de compression)

Le béton possède un caractère fragile : non seulement sa résistance à la traction est de l'ordre du dixième de sa résistance en compression mais encore ne présente-t-il aucune ductilité à moins que des fibres ne contrôlent sa rupture. De ce fait, la résistance en traction du béton n'est pas prise en compte (sauf exception) dans les calculs des ouvrages ; les ingénieurs considèrent en effet qu'il est du rôle des armatures (aciers de béton armé ou câbles de précontrainte) de reprendre les efforts de traction. Si l'on utilise le béton en construction, c'est pour son aptitude au coulage, pour son bas coût (moins de 1€ le kg), pour sa grande disponibilité⁵ et pour ses performances en compression.

4. Cet accroissement est plus ou moins marqué selon la qualité de l'acier.

5. Le béton est le matériau de construction le plus employé dans le Monde. L'équivalent de 1m^3 de béton par habitant de la planète est coulé chaque année.

Le comportement mécanique du béton est mis en évidence et caractérisé par un essai mené en laboratoire. On effectue des tests de compression d'éprouvettes cylindriques (typiquement $\Phi 11\text{cm} \times h 22\text{cm}$ ou $\Phi 16\text{cm} \times h 32\text{cm}$) après une période de durcissement adéquat. L'éprouvette est instrumentée avec des jauges ou des extensomètres de sorte à pouvoir mesurer la déformation axiale $\epsilon = \epsilon_{11}$ dans la région centrale et la déformation transversale ϵ_{22} . La contrainte moyenne est estimée comme rapport de l'effort de compression F à l'aire de section droite de l'éprouvette A : $\sigma = \sigma_{11} = F/A$. L'essai est conduit à vitesse de déformation constante.

De nouveau on observe trois étapes :

1) Étape de comportement linéaire quasi-élastique : tant que la contrainte ne dépasse pas environ 40% de la résistance à la compression du béton, les déformations sont réversibles. De nouveau, on admet la relation $\sigma_{11} = E\epsilon_{11}$. Le module d'élasticité dépend de la composition du béton; un ordre de grandeur est $E \sim 40\text{ GPa}$. L'observation de la déformation transversale montre que l'éprouvette se dilate latéralement au fur et à mesure qu'elle se contracte longitudinalement. La relation entre les déformations axiales et transversales est encore linéaire et on peut écrire $\epsilon_{22} = -\nu\epsilon_{11}$ ⁶. Le coefficient de POISSON pour le béton non fissuré est de l'ordre de 0.2.



FIGURE 3.2.2 – éprouvettes de béton après essai de compression

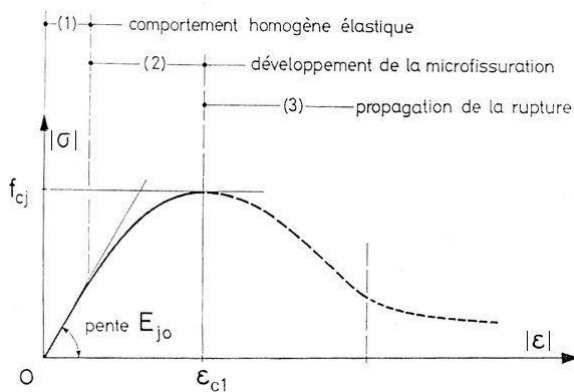


FIGURE 3.2.3 – loi type déformation-contrainte pour le béton en compression ($\sigma, \epsilon < 0$)

du béton affaiblit le module d'élasticité. De plus il reste une déformation irréversible lorsque la contrainte s'annule.

3) À partir du « pic » l'augmentation de la déformation s'accompagne d'une diminution progressive de la contrainte : les fissures se propagent en s'ouvrant jusqu'à éclatement de l'éprouvette. Le comportement post-pic dépend éminemment des conditions d'essais et notamment de la vitesse de déformation.

3.2.2 conséquences sur les déformations d'origine mécanique

Dans un essai de traction - compression, dans le domaine où le matériau est élastique, on observe la linéarité de la contrainte et de la déformation traduite par l'existence d'un module d'élasticité E et la linéarité des déformations axiale et transversale traduite par un coefficient de contraction ν .

On admet les relations d'élasticité mono axiale (eq. 3.2.1).

Si l'on entreprend un essai en cisaillement, grâce, par exemple, à un test en torsion, on observe de nouveau la proportionnalité entre la contrainte de cisaillement et la distorsion correspondante :

$$\tau = G\gamma \iff \sigma_{12} = 2G\epsilon_{12} \quad (3.2.2)$$

6. Cette fois, ϵ_{11} est négative (raccourcissement) alors que ϵ_{22} est positive (dilatation latérale).

Le module G qui apparaît dans cette relation est dépendant du module d'élasticité et du coefficient de contraction :

$$G \simeq \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.2.3)$$

3.2.3 déformations thermiques

Dans des conditions de température voisine de la température ambiante (grossièrement entre 0°C et 60°C) on pourra admettre que les matériaux se dilatent proportionnellement à l'accroissement de température. Cette dilatation possède les caractéristiques suivantes :

- elle est isotrope (comme le matériau) et affecte également toutes les directions de l'espace \Rightarrow on admettra donc qu'une élévation de température ne génère pas de distorsion.
- elle est proportionnelle à l'augmentation de température et le facteur de proportionnalité est appelé « coefficient de dilatation thermique », il est noté α et on le supposera indépendant de la température.

$$\begin{cases} \epsilon_{ij}^{thermique} = \alpha \cdot \Delta T \forall \text{direction } \{i\} \text{ si } i = j \\ \epsilon_{ij}^{thermique} = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Il est notable que le coefficient de dilatation de l'acier et celui du béton sont voisins. Ils valent $\alpha_{acier} = \alpha_{béton} = 10.10^{-6}K^{-1}$ environ.

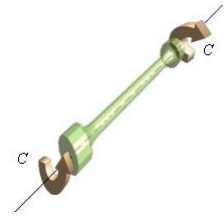


FIGURE 3.2.4 – torsion d'un barreau cylindrique

3.3 formulations de la loi élastique linéaire

Si la sollicitation agissant sur le solide induit un champ de contrainte multiaxial, l'élasticité linéaire se traduit par une relation linéaire entre les tenseurs contrainte et déformation (à l'effet de température près) :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{S}} (\bar{\bar{\sigma}} - \bar{\bar{\sigma}}_0) + \bar{\bar{\alpha}} \delta T \quad (3.3.1)$$

A la température de référence T_0 , le solide peut être le siège d'un champ de contraintes résiduelles dites « autocontraintes » $\bar{\bar{\sigma}}_0$ en l'absence même de forces extérieures.

$\bar{\bar{S}}$ est le tenseur (ordre 4) des « compliances ».

$\bar{\bar{\alpha}}$ est le tenseur des coefficients de dilatation.

Cette expression (3.3.1) se simplifie lorsque le matériau est isotrope, ce que nous supposerons dans la suite.

3.3.1 loi de HOOKE-DUHAMEL

La loi de HOOKE-DUHAMEL⁷ synthétise en les généralisant les hypothèses précédentes au cas des sollicitations multiaxiales appliquées à un solide homogène isotrope. Elle exprime le tenseur des déformations en fonction du tenseur des contraintes. Ainsi :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{(1+\nu)}{E} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{I}} + \underbrace{\alpha \delta T}_{\epsilon_{th}} \bar{\bar{I}} \quad (3.3.2)$$

Dans cette relation apparaissent :

- E le module d'élasticité ou module de YOUNG. Sa dimension est celle d'une contrainte $[E] = [F.L^{-2}]$, son unité SI est le Pascal Pa à laquelle on préférera le mégaPascal MPa (voire le gigaPascal GPa) par commodité dans toutes les applications courantes.
- ν le coefficient de réduction ou coefficient de POISSON. Il est sans dimension et est compris dans l'intervalle $[0; 0.5]$.

7. Les lois de comportement sont aussi appelées « lois constitutives ».

- α le coefficient de dilatation thermique. Sa dimension est celle de l'inverse d'une température $[\alpha] = [T^{-1}]$ et son unité⁸ est donc l'inverse de KELVIN K^{-1} ; δT représente la différence de température avec la température T_0 de référence.

Cette relation montre, chose importante, que les directions principales de contrainte et de déformation sont confondues.

3.3.2 loi de GABRIEL LAMÉ

La loi de Lamé-Duhamel est réciproque de la précédente (eq. 4.1.8) dans la mesure où, cette fois, ce sont les contraintes qui sont exprimées en terme de déformation (et de température) :

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu\bar{\bar{\epsilon}} + \lambda \text{tr}(\bar{\bar{\epsilon}})\bar{\bar{I}} - \beta\delta T\bar{\bar{I}} \quad (3.3.3)$$

Relation dans laquelle

- μ est le 1er coefficient de LAMÉ. On remarque que, si l'état de contrainte est réduit à une contrainte de cisaillement σ_{12} , alors $\sigma_{12} = 2\mu\epsilon_{12}$. Par analogie avec la relation déjà présentée (eq. 3.2.2) on voit que ce coefficient de LAMÉ n'est autre que le module de cisaillement : $\mu = G$. Sa dimension est celle d'une contrainte $[\mu] = [F.L^{-2}]$ et son unité le Pascal Pa .
- λ est le 2nd coefficient de LAMÉ. Dimension : celle d'une contrainte $[\mu] = [F.L^{-2}]$ et unité : Pascal Pa .
- β est un coefficient de contrainte thermique : on voit clairement que si les déformations sont bloquées (matériau confiné) alors qu'il y a augmentation de température, se développe un état de contrainte sphérique dont la composante est négative (pression) $\sigma^{thermique} = -p = -\beta\delta T$. La dimension de β est donc celle du rapport contrainte / température : $[\beta] = [F.L^{-2}.T^{-1}]$. Ce coefficient s'exprime en Pascal par Kelvin, Pa/K .

3.3.3 notation de VOIGT

En élasticité linéaire, en conditions isothermes et en l'absence de contraintes initiales, il y a dépendance linéaire des tenseurs de contrainte et de déformation. On peut ainsi formellement noter :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{C}}.\bar{\bar{\epsilon}} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{S}}.\bar{\bar{\sigma}} \quad (3.3.4)$$

Relations dans lesquelles $\bar{\bar{C}}$ et $\bar{\bar{S}}$ sont respectivement les tenseurs d'élasticité (dimension $[F.L^{-2}]$) et de compliance (dimension inverse). Ce sont des tenseurs du quatrième ordre et sont représentés par une matrice à 4 dimensions.

Compte tenu de la symétrie des tenseurs de contrainte et de déformation, VOIGT donne une représentation vectorielle aux tenseurs (avec une convention un peu différente pour chacun d'eux) comme suit :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} = \sigma_{23} \\ \tau_{13} = \sigma_{13} \\ \tau_{12} = \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.3.5)$$

et :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2.\epsilon_{23} \\ \gamma_{13} = 2.\epsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2.\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (3.3.6)$$

8. Comme la température apparaît en tant qu'accroissement à partir d'une température de référence T_0 , on peut adopter le degré CELSIUS comme unité sans inconvénient.

Dans cette « transformation de VOIGT » tout se passe comme si on avait contracté les indices doubles en indices simples avec la convention :

$$|11 \rightarrow 1| \quad |22 \rightarrow 2| \quad |33 \rightarrow 3| \quad |23 \text{ ou } 32 \rightarrow 4| \quad |13 \text{ ou } 31 \rightarrow 5| \quad |12 \text{ ou } 21 \rightarrow 6| \quad (3.3.7)$$

Avec la différence notable qu'un coefficient $\times 2$ affecte les termes 4 à 6 du « pseudovecteur » des déformations. Ainsi, dans le pseudovecteur des contraintes les termes 4 à 6 sont occupés par les cisaillements alors qu'il s'agit des **distorsions** dans le pseudovecteur des déformations⁹.

La loi de comportement élastique est également changée par la transformation de VOIGT car elle met en relation les deux pseudovecteurs. Ainsi, en élasticité isotrope $\underline{\underline{\bar{\epsilon}}} = \underline{\underline{S}}\underline{\underline{\bar{\sigma}}}$:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (3.3.8)$$

Le tenseur des compliance $\underline{\underline{S}}$ est ainsi simplement représenté par une matrice 6×6 $\underline{\underline{S}}$.

Inversement $\underline{\underline{\bar{\sigma}}} = \underline{\underline{C}}\underline{\underline{\bar{\epsilon}}}$:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.3.9)$$

3.3.4 relations entre coefficients

L'équivalence des relations (eq. 4.1.8) et (eq. 4.1.10) permet d'établir les relations de dépendance entre les divers coefficients. On a ainsi :

LAMÉ \rightarrow HOOKE

HOOKE \rightarrow LAMÉ

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \beta = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \\ 2\mu + \lambda = E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu} \end{array} \right. \quad (3.3.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \\ \alpha = \frac{\beta}{3\lambda+2\mu} \\ \frac{1}{1+\nu} = \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu} \\ \frac{\nu}{1+\nu} = \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \end{array} \right. \quad (3.3.11)$$

3.3.5 formulations croisées

La combinaison des relations précédentes permet d'exprimer le tenseur des contraintes en fonction du tenseur des déformations et de la température, à l'aide seule du module de Young, du coefficient de Poisson et du coefficient de dilatations thermique :

$$\underline{\underline{\bar{\sigma}}} = \frac{E}{1+\nu} \left(\underline{\underline{\bar{\epsilon}}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\underline{\underline{\bar{\epsilon}}}) \underline{\underline{\bar{I}}} \right) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \Delta T \underline{\underline{\bar{I}}}$$

9. Certains auteurs emploient des conventions différentes en doublant les contraintes de cisaillement $2\tau_{ij}$ et en les associant aux distorsions angulaires simples ϵ_{ij} .

Et inversement :

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\bar{\sigma} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \text{tr}(\bar{\sigma}) \bar{I} \right) + \frac{\beta}{3\lambda + 2\mu} \Delta T \bar{I}$$

3.4 puissance, travail, énergie

3.4.1 principe des puissances virtuelles PPV^*

3.4.1.1 théorème général

Considérons l'équation d'équilibre (dynamique) local : $\overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} + \vec{f}_v = \rho \vec{\gamma}$

Multiplions-la scalairement par un (champ de) vecteur virtuel \vec{u}^* continu¹⁰ sur (S) , appelé « champ de vitesse virtuelle » et intégrons sur le volume du solide, alors :

$$\int_S \overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} \cdot \vec{u}^* dv + \int_S \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* dv = \int_S \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{u}^* dv$$

Remarquons que $\overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} \cdot \vec{u}^* = \sigma_{ij,j} \cdot u_i^* = (\sigma_{ij} \cdot u_i^*)_{,j} - \sigma_{ij} \cdot u_{i,j}^*$

D'autre part $\sigma_{ij} \cdot u_{i,j}^* = \sigma_{ji} \cdot u_{j,i}^*$ en changeant le nom des indices muets de sommation et, compte tenu de la symétrie du tenseur $\bar{\sigma}$, il vient $\sigma_{ij} \cdot u_{i,j}^* = \sigma_{ij} \cdot u_{j,i}^*$ ou encore $\sigma_{ij} \cdot u_{i,j}^* = \sigma_{ij} \cdot \frac{1}{2} (u_{j,i}^* + u_{i,j}^*)$. C'est donc que $\sigma_{ij} \cdot u_{i,j}^* = \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij}^*$ en remarquant que $\bar{\epsilon}^* = \frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{u}^* + \overrightarrow{\text{grad}}^t \vec{u}^*)$ est le tenseur des vitesses de déformations virtuelles¹¹.

Ainsi :

$$\int_S (\overrightarrow{\text{div}} (\bar{\sigma} \cdot \vec{u}^*) - \bar{\sigma} : \bar{\epsilon}^*) dv + \int_S \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* dv = \int_S \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{u}^* dv$$

Par application du théorème de flux-divergence, on déduit :

$$\oint_{\partial S} (\bar{\sigma} \cdot \vec{u}^*) \cdot d\vec{S} + \int_S -\bar{\sigma} : \bar{\epsilon}^* dv + \int_S \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* dv = \int_S \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{u}^* dv$$

On partitionne ∂S en $\partial S = \partial S_u \cup \partial S_f$, alors :

$$\int_{\partial S_u} (\bar{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u}^* dS + \int_{\partial S_f} (\bar{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u}^* dS + \int_S -\bar{\sigma} : \bar{\epsilon}^* dv + \int_S \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* dv = \int_S \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{u}^* dv$$

Et donc :

$$\underbrace{\int_{\partial S_u} \vec{f}_u \cdot \vec{u}^* dS}_{P_{el}^*} + \underbrace{\int_{\partial S} \vec{f}_s \cdot \vec{u}^* dS}_{P_{es}^*} + \underbrace{\int_S \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* dv}_{P_{ev}^*} + \underbrace{\int_S -\bar{\sigma} : \bar{\epsilon}^* dv}_{P_i^*} = \underbrace{\int_S \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{u}^* dv}_{P_a^*}$$

En résumé :

10. Si le champ de vitesse virtuelle n'est pas continu, il convient de prendre en compte un terme de puissance interne de liaison P_{ic}^* en plus des termes décrits ici. A noter qu'il n'est pas nécessaire que le champ $\{\vec{u}^*\}$ ait une signification physique et, en particulier, qu'il corresponde à une champ de vitesse.

11. La double somme $\sigma_{ij} \epsilon_{ij}^*$ est appelée « produit contracté » du tenseur des contraintes et du tenseur des déformations ; ce produit est noté $\bar{\sigma} : \bar{\epsilon}$. Il est commutatif.

$$P_e^* + P_i^* = P_a^* \quad (3.4.1)$$

Enoncé : La somme de la puissance virtuelle interne et de la puissance virtuelle externe est égale à la puissance virtuelle d'accélération.

Termes :

- Puissance virtuelle externe (ou puissance virtuelle des forces externes) ; elle est composée de trois termes :
 - la puissance virtuelle des réactions d'appui : $P_{el}^* = \int_{\partial S_u} \vec{f}_u \cdot \vec{u}^* dS$ où \vec{f}_u désigne les forces surfaciques d'appui.
 - la puissance virtuelle des forces de surfaces : $P_{es}^* = \int_{\partial S_f} \vec{f}_s \cdot \vec{u}^* dS$
 - la puissance virtuelle des forces de volume : $P_{ev}^* = \int_S \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* dv$
- Puissance virtuelle interne (ou puissance virtuelle des forces internes) :
 - $P_i^* = \int_S -\bar{\sigma} : \bar{\epsilon}^* dv$
- Puissance virtuelle d'accélération :
 - $P_a^* = \int_S \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{u}^* dv$

3.4.1.2 cas du champ de vitesse virtuelle cinématiquement admissible

Dans ce cas, $\{\vec{u}^*\}$ respecte les conditions d'appui ; et donc $\vec{R}_u \cdot \vec{u}^* = 0$, par conséquent : $P_{el}^* = 0$. La puissance virtuelle des réactions d'appui est nulle¹².

3.4.1.3 cas où $\{\vec{u}^*\}$ est le champ de vitesse réel : théorème de l'énergie cinétique

Dans ce cas $\{\vec{u}^*\} \equiv \{\vec{u}\}$, la puissance d'accélération (réelle) s'écrit $P_a = \int_S \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{u} dv = \int_S \rho \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} dv$ soit encore $P_a^* = \int_S \frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} (u^2) dv = \frac{d}{dt} \int_S \frac{1}{2} \rho (u^2) dv$ on reconnaît la variation de l'énergie cinétique E_c . D'où le théorème de l'énergie cinétique :

$$P_e + P_i = \frac{dE_c}{dt} \quad (3.4.2)$$

Avec :

- Puissance externe (ou puissance des forces externes) composée de deux termes :
 - la puissance des forces de surfaces : $P_{es} = \int_{\partial S_f} \vec{f}_s \cdot \vec{u} dS$
 - la puissance des forces de volume : $P_{ev} = \int_S \vec{f}_v \cdot \vec{u} dv$
- Puissance interne (ou puissance des forces internes) : $P_i = \int_S -\bar{\sigma} : \bar{\epsilon} dv$
- Énergie cinétique : $E_c = \int_S \frac{1}{2} \rho \vec{u}^2 dv$

3.4.2 énergie élastique volumique

La puissance interne volumique s'écrit : $p_i = -\bar{\sigma} : \bar{\epsilon}$

Au cours d'un intervalle de temps dt , la densité volumique de travail fourni par les contraintes est égal à $dw = -p_i \cdot dt = \bar{\sigma} : \bar{\epsilon} dt = \bar{\sigma} : d\bar{\epsilon}$ ¹³

En élasticité $\bar{\epsilon} = \bar{S}\bar{\sigma}$ (eq. 3.3.4) de sorte que $dw = \bar{\sigma} : \bar{S}d\bar{\sigma} = \frac{1}{2} d \left[\bar{\sigma} : \bar{S}\bar{\sigma} \right]$. Et ainsi : $dw = \frac{1}{2} d (\bar{\sigma} : \bar{\epsilon})$

Si l'on intègre sur l'histoire du chargement entre l'instant initial $t_0 = 0$ et l'instant actuel t , en convenant que l'énergie élastique initiale était nulle, on définit l'énergie élastique par unité de volume par l'une ou l'autre des expressions équivalentes suivantes :

$$w_e = \frac{1}{2} \bar{\sigma} : \bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \bar{\sigma} : \bar{S}\bar{\sigma} = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} : \bar{C}\bar{\epsilon} \quad (3.4.3)$$

Et, par sommation sur le volume, l'énergie élastique emmagasinée par le solide vaut :

12. A condition de considérer des liaisons sans frottement.

13. On notera le changement de signe.

$$W_e = \int_S w_e dv = \int_S \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} dv = \int_S \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}} dv \quad (3.4.4)$$

La valeur de l'énergie volumique peut être précisée en utilisant la notation de VOIGT (eq. 3.3.8 et 3.3.9) :

$$w_e = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}} \quad (3.4.5)$$

$$w_e = \frac{1}{2} (2\mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \lambda \theta^2) \quad (3.4.6)$$

ou θ désigne la déformation volumique (1.3.13).

$$w_e = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \Sigma^2 \right) \quad (3.4.7)$$

3.4.3 théorème de l'énergie mécanique

Intégrons le théorème de l'énergie cinétique sur l'histoire du chargement du solide (S) entre l'instant initial $t_0 = 0$ et l'instant actuel t , alors :

$$\mathcal{T}_f = W_e + E_c \quad (3.4.8)$$

ÉNONCÉ : Le travail des forces extérieures est égale à l'énergie cinétique augmentée de l'énergie élastique.

En statique, tout le travail des forces extérieures est converti en énergie élastique.

3.5 critères de limite élastique

L'utilisation des matériaux dans le domaine élastique permet la mise en service de structures, de pièces ou d'assemblages mécaniques réemployables pour une longue durée. Au delà d'un certain seuil de sollicitation, le matériau est le siège de nouveaux phénomènes s'exprimant par des irréversibilités et de l'hystérésis : plasticité, endommagement en particulier.

La définition du seuil en deça duquel le matériau a un comportement élastique linéaire et au delà duquel il ne l'a plus est donc importante et différentes définitions, plus ou moins adaptées à certains matériaux, ont été énoncées au cours du temps.

Lors d'un essai de traction ou de compression mono-axial, il est aisé de mettre en évidence un seuil qui s'exprime alors comme une valeur limite de la contrainte (de traction ou de compression).

Pour des états de contrainte plus complexes, la notion de seuil doit être étendue en devient un « critère » qui porte non plus sur une seule composante scalaire de contrainte mais sur le tenseur lui-même.

Le recours à la projection de MOHR permet d'imager la signification des différents critères. Les critères forment des surfaces enveloppes, éventuellement ouvertes, dans l'espace tridimensionnel des contraintes principales.

3.5.1 critère de RANKINE

C'est un critère d'extension maximale : la contrainte principale maximale σ_I est limitée supérieurement par une valeur expérimentale $\sigma_e^t > 0$ déterminée par un essai de traction simple alors que la contrainte principale minimale σ_{III} est limitée inférieurement par une valeur expérimentale $\sigma_e^c < 0$ déduite d'un essai de compression simple. La contrainte intermédiaire σ_{II} n'est pas prise en considération.

$$\sigma_{III} \geq \sigma_e^c \quad \text{et} \quad \sigma_I \leq \sigma_e^t \quad (3.5.1)$$

3.5.2 critère de TRESCA

C'est un critère de cisaillement maximal τ_{max} : celui-ci est limité par une valeur $\tau_e = \frac{1}{2}\sigma_e$ déterminée expérimentalement par un essai de torsion pure. Et donc :

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \times \max \{|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_{III} - \sigma_I|\} \leq \frac{1}{2}\sigma_e \Rightarrow \sigma_I - \sigma_{III} \leq \sigma_e \quad (3.5.2)$$

Ce critère ne prend pas en compte la composante sphérique du tenseur des contraintes ; il est bien adapté aux matériaux à microstructure compacte comme les métaux.

Pour décrire le niveau de sollicitation locale du matériau, on peut utiliser le concept de « contrainte équivalente » de TRESCA :

$$\sigma_T = \sigma_I - \sigma_{III}$$

Le critère d'élasticité s'exprime alors par : $\sigma_T \leq \sigma_e$

3.5.3 critère de VON MISES

C'est un critère souvent employé pour définir la limite élastique des métaux. La logique en est la suivante :

1. un métal n'est pas sensible aux fortes pressions hydrostatiques \Rightarrow le critère concernera donc le déviateur des contraintes \bar{s} (voir §.2.5.4).
2. le critère est indépendant de la base de projection \Rightarrow le critère sera exprimé à l'aide des invariants du déviateur.

$$\begin{cases} J_1 = 0 \\ J_2 = s_I s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I = \frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2] \\ J_3 = s_I s_{II} s_{III} \end{cases} \quad (3.5.3)$$

3. le critère est symétrique en traction-compression \Rightarrow l'invariant J_3 n'intervient pas, le critère porte sur J_2 seul.
4. la limite est fixée par un test de traction pure ($\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$) où $J_2 = \frac{1}{3}\sigma_I^2$ et $\sigma_I \leq \sigma_e$

Par conséquent le critère de VON MISES est :

$$J_2 \leq \frac{1}{3}\sigma_e^2 \iff (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \leq 2\sigma_e^2 \quad (3.5.4)$$

Une alternative à ce critère est d'introduire la « contrainte équivalente » de VON MISES :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]} \quad (3.5.5)$$

pour exprimer le critère sous la forme :

$$\sigma_{VM} \leq \sigma_e \quad (3.5.6)$$

La contrainte de Von Mises est souvent utilisée pour illustrer la répartition des niveaux de contrainte subis par un solide (les codes de calcul associent un niveau de contrainte à une couleur, les zones rouges matérialisant des zones de « concentrations de contrainte »).

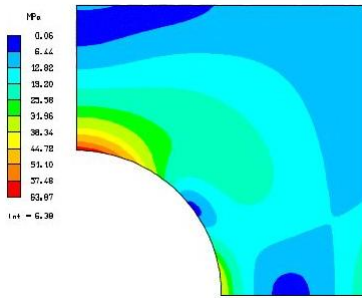


FIGURE 3.5.1 – représentation des contraintes de VON MISES dans un code de calcul bidimensionnel.

Chapitre 4

Méthodes de résolution des problèmes d'élasticité

4.1 problème d'élasticité

4.1.1 position du problème

On considère un solide $\{S\}$ soumis à des forces de volume $\overrightarrow{f_v(M)}$ délimité par son enveloppe (∂S) . Cette enveloppe est partitionnée en (voir fig.4.1.1) :

* (∂S_u) lieu des déplacements connus (surface d'appui) ;

* (∂S_f) lieu des forces de surfaces connues $\overrightarrow{f_s(P)}$.

On suppose aussi les hypothèses suivantes réunies :

1. hypothèse de continuité (§.1.1) ;
2. hypothèse des petites perturbations (HPP) : les déplacements sont petits devant les dimensions du solide de sorte que l'on puisse, en première approximation, établir les équations d'équilibre dans la configuration initiale, non déformée de la structure (§.1.3.3).
3. hypothèse de l'élasticité du comportement du solide. On suppose de plus les déformations petites et réversibles ainsi que la validité de la loi de HOOKE (§.3.3.4).

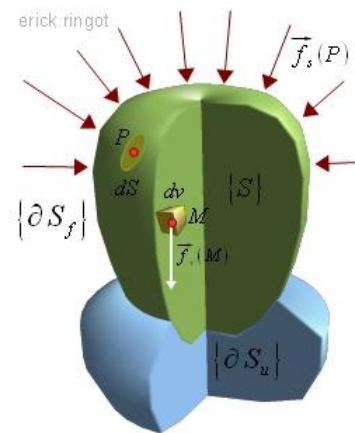


FIGURE 4.1.1 – Données d'un problème d'élasticité

4.1.2 objectif

- 1) déterminer le champ de contraintes $\overline{\overline{\sigma(M)}}$. L'ingénieur a besoin de connaître le niveau de sollicitation du solide dans différentes conditions de chargement. La connaissance du champ de contrainte lui permet de statuer sur la résistance du solide et la réversibilité des déformations.
- 2) déterminer le champ de déformation $\overline{\overline{\epsilon(M)}}$.
- 3) déterminer le champ de déplacement $\overrightarrow{u(M)}$ et statuer sur le bon fonctionnement d'un ensemble mécanique ou d'une ossature de bâtiment.

4.1.3 récapitulation des équations disponibles

4.1.3.1 équations concernant le champ de contrainte

Équilibre statique :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (4.1.1)$$

$$\overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} + \vec{f}_v = \vec{0} \quad (4.1.2)$$

Conditions aux limites :

$$\overrightarrow{T(P)} = \overline{\overline{\sigma(P)}} \cdot \overrightarrow{n(P)} = \overrightarrow{f_s(P)} \quad \forall P \in \{\partial S_f\} \text{ et } \vec{n} \perp \{\partial S\} \text{ sortant} \quad (4.1.3)$$

4.1.3.2 équations concernant le champ de déformation et le champ de déplacement

Équations de compatibilité :

$$\bar{\epsilon} = \overline{\overline{\epsilon^t}} \iff \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad (4.1.4)$$

$$\overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overrightarrow{\text{div}} (\bar{\epsilon}) \right) + \overline{\overline{\text{grad}^t}} \left(\overrightarrow{\text{div}} (\bar{\epsilon}) \right) - \overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} (\text{tr} (\bar{\epsilon}) \bar{\epsilon}) \right) - \overline{\overline{\Delta}} (\bar{\epsilon}) = \vec{0} \quad (4.1.5)$$

Relation déplacement - déformations :

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{u} + \overline{\overline{\text{grad}^t}} \vec{u} \right) \quad (4.1.6)$$

Conditions aux limites :

$$u_i = u_i^0 \quad \text{sur } \{\partial S_u\} \quad (4.1.7)$$

4.1.3.3 loi de comportement

Les lois suivantes sont toutes équivalentes :

Loi de HOOKE-DUHAMEL :

$$\bar{\epsilon} = \frac{(1+\nu)}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr} (\bar{\sigma}) \bar{I} + \underbrace{\alpha \delta T}_{\epsilon_{th}} \bar{I} \quad (4.1.8)$$

inversement :

$$\bar{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\bar{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr} (\bar{\epsilon}) \bar{I} \right) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \delta T \bar{I} \quad (4.1.9)$$

Loi de LAMÉ-DUHAMEL :

$$\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\epsilon} + \lambda \text{tr} (\bar{\epsilon}) \bar{I} - \beta \delta T \bar{I} \quad (4.1.10)$$

et :

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\bar{\sigma} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \text{tr} (\bar{\sigma}) \bar{I} \right) + \frac{\beta}{3\lambda + 2\mu} \delta T \bar{I} \quad (4.1.11)$$

4.1.3.4 bilan

Résoudre un problème d'élasticité, c'est déterminer 15 fonctions du point qui, en coordonnées cartésiennes sont : $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, u_1, u_2, u_3, \epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{22}, \epsilon_{23}, \epsilon_{33}$.

pour cela on dispose de 3 équations de d'équilibre local (4.1.2), de 6 relations de comportement (4.1.8 ou 4.1.10) et de 6 équations de compatibilité (4.1.5)¹; soient 15 équations au total.

Le problème est donc bien posé; a priori, une solution analytique devrait pouvoir être dégagée pour chaque problème. En pratique, le recours au calcul numérique, basé sur le découpage du solide en petits éléments volumiques appelés éléments finis, sera nécessaire dans la plupart des situations concrètes (voir aussi §.4.5.3).

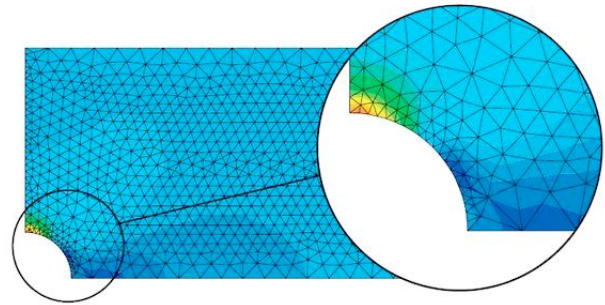


FIGURE 4.1.2 – découpage d'un solide 2D en éléments finis

NOTE : Le nombre d'équations statiques (3) est inférieur au nombre d'inconnues statiques (6) : le seul recours aux équations de statique ne permet généralement pas de résoudre un problème d'élasticité, sauf à réduire le nombre d'inconnues par des hypothèses supplémentaires. \Rightarrow Un solide, vu sous l'angle de la mécanique des milieux continus, constitue un système hyperstatique.

4.1.3.5 méthodologie



FIGURE 4.1.3 – méthodologie de résolution d'un problème d'élasticité

Pour résoudre un problème d'élasticité, l'ingénieur est obligé de combiner entre elles les équations ci-dessus. Avant cela, il doit s'assigner un objectif primaire : veut-il aborder le problème sous l'angle des forces internes auquel cas il s'attachera à déterminer en priorité le champ de contraintes ou préférera-t-il d'abord établir le champ de déplacement ?

Quel que soit l'objectif primaire, les autres inconnues en seront ensuite déduites en parcourant dans un sens ou dans l'autre le cercle méthodologique ci-contre.

La résolution du problème, une fois l'objectif choisi, se « réduit » à la recherche de solutions analytiques d'un jeu d'équations aux dérivées partielles plutôt générales et qui font l'objet des paragraphes suivants. Il faut y adjoindre les conditions aux limites pour que la solution particulière, unique, se dessine complètement.

Si le problème présente des particularités géométriques, elles sont prises en compte le plus tôt possible de sorte à réduire la complexité mathématique. Parmi les simplifications possibles, notons les situations suivantes qui feront l'objet d'un développement particulier ultérieur :

- état plan de contrainte;
- état plan de déformation;
- problème axisymétrique.

4.2 Méthode de NAVIER

4.2.1 principe

La méthode de NAVIER s'inscrit dans une « méthode des déplacements ». On l'emploie chaque fois que l'objectif primaire est la détermination du champ de déplacement. Pour obtenir les équations différentielles permettant la détermination du champ $\{u(M)\}$, on combine tour à tour :

1. Les équations de compatibilité « incluent » implicitement les relations déformations - déplacements.

- l'équation d'équilibre local ;
- la loi de comportement élastique (forme de LAMÉ) ;
- la relation déplacement - déformation.

4.2.2 équations

Equilibre local (4.1.2) :

$$\overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} + \vec{f}_v = \vec{0}$$

Compte tenu de la loi de LAMÉ (4.1.10) en conditions isothermes :

$$\overrightarrow{\text{div}} \left[2\mu \bar{\epsilon} + \lambda \text{tr}(\bar{\epsilon}) \bar{I} \right] + \vec{f}_v = \vec{0}$$

Puis de la relation déplacement - déformation (4.1.6) :

$$2\mu \overrightarrow{\text{div}} \left[\frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}}^t \vec{u} \right) \right] + \lambda \overrightarrow{\text{div}} \left(\overrightarrow{\text{div}} \vec{u} \cdot \bar{I} \right) + \vec{f}_v = \vec{0}$$

Or : $\overrightarrow{\text{div}} (w \cdot \bar{I}) = \overrightarrow{\text{grad}} (w)^2$, $\overrightarrow{\text{div}} \left(\overrightarrow{\text{grad}}^t \vec{u} \right) = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{u}$ ³ et encore : $\overrightarrow{\text{div}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} \right) = \overrightarrow{\Delta} \vec{u}$ ⁴

Donc :

$$\mu \overrightarrow{\Delta} \vec{u} + (\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{u} + \vec{f}_v = \vec{0}$$

En notant que $\overrightarrow{\Delta} \vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{u} - \overset{\circ}{\text{rot}} \overset{\circ}{\text{rot}} \vec{u}$ ⁵, il vient l'autre forme de la même équation :

$$(\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{u} - \mu \overset{\circ}{\text{rot}} \overset{\circ}{\text{rot}} \vec{u} + \vec{f}_v = \vec{0}$$

Résumons ici les équations de NAVIER pour mémoire ⁶ :

$$\mu \overrightarrow{\Delta} \vec{u} + (\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{u} + \vec{f}_v = \vec{0} \quad (4.2.1)$$

$$(\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{u} - \mu \overset{\circ}{\text{rot}} \overset{\circ}{\text{rot}} \vec{u} + \vec{f}_v = \vec{0} \quad (4.2.2)$$

A quoi il convient d'ajouter les conditions limites en déplacement déjà énoncées (4.1.7) :

$$u_i = u_i^0 \quad \text{sur } \{\partial S_u\}$$

$$2. \overrightarrow{\text{div}} (w \cdot \bar{I}) = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \frac{\partial w}{\partial x_2} \\ \frac{\partial w}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{grad}} w$$

$$3. \overrightarrow{\text{div}} \left(\overrightarrow{\text{grad}}^t \vec{u} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,11} + u_{2,21} + u_{3,31} \\ u_{1,12} + u_{2,22} + u_{3,32} \\ u_{1,13} + u_{2,23} + u_{3,33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3})_{,1} \\ (u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3})_{,2} \\ (u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3})_{,3} \end{pmatrix} =$$

$\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{u}$

$$4. \overrightarrow{\text{div}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,11} + u_{1,22} + u_{1,33} \\ u_{2,11} + u_{2,22} + u_{2,33} \\ u_{3,11} + u_{3,22} + u_{3,33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\Delta} \vec{u}$$

5. On se rappellera la formule du double produit vectoriel selon laquelle $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$ par conséquent : $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \nabla^2 \vec{u}$.

6. Dans le cas où l'élevation de température T intervient, l'équation de NAVIER devient : $\mu \overrightarrow{\Delta} \vec{u} + (\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{u} + \vec{f}_v - (3\lambda + 2\mu) \alpha \overrightarrow{\text{grad}} T = \vec{0}$

4.2.3 champ de déplacement cinématiquement admissible

On appelle « champ de déplacement cinématiquement admissible » (champ CA) tout champ de déplacement virtuel $\{\vec{u}^*\}$ continu et dérivable (au moins par morceau) et satisfaisant les conditions aux limites du solide :

$$u_i^* = u_i^0 \quad \text{sur } \{\partial S_u\}$$

De tels champs sont utilisés dans les méthodes approchées (par exemple la méthode de RITZ en éléments finis ou encore dans les méthodes d'analyse limite en calcul élastoplastique des structures métalliques).

NOTE : Le champ de déplacement « réel » (solution exacte des équations de NAVIER) est cinématiquement admissible.

4.3 Méthode de BELTRAMI-MITCHEL

4.3.1 principe

La méthode de BELTRAMI constitue une « méthode des forces » ; elle est utilisée lorsque l'objectif primaire est d'établir le champ de contrainte. Pour cela, on écrit les équations de compatibilité en terme de contraintes grâce à la loi de comportement élastique tout en prenant en compte l'équilibre local.

4.3.2 équations

Partons des 6 équations de compatibilité (4.1.5) :

$$\overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overrightarrow{\text{div}} (\bar{\bar{\epsilon}}) \right) + \overline{\overline{\text{grad}}^t} \left(\overrightarrow{\text{div}} (\bar{\bar{\epsilon}}) \right) - \overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} (tr \bar{\bar{\epsilon}}) \right) - \overline{\overline{\Delta}} (\bar{\bar{\epsilon}}) = \bar{\bar{0}}$$

Prenons en compte la loi de comportement (4.1.9) :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{(1+\nu)}{E} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{I}} \Rightarrow \text{tr}(\bar{\bar{\epsilon}}) = \frac{1-2\nu}{E} \text{tr}(\bar{\bar{\sigma}}) \text{ et } \overline{\overline{\Delta}} \bar{\bar{\epsilon}} = \frac{(1+\nu)}{E} \overline{\overline{\Delta}} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \overline{\overline{\Delta}} \text{tr}(\bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{I}}$$

posons $\Sigma = \text{tr}(\bar{\bar{\sigma}})$, alors :

$$\overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overrightarrow{\text{div}} \left((1+\nu) \bar{\bar{\sigma}} - \nu \Sigma \bar{\bar{I}} \right) \right) + \overline{\overline{\text{grad}}^t} \left(\overrightarrow{\text{div}} \left((1+\nu) \bar{\bar{\sigma}} - \nu \Sigma \bar{\bar{I}} \right) \right) - \overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \left((1-2\nu) \Sigma \right) \right) - \left((1+\nu) \overline{\overline{\Delta}} \bar{\bar{\sigma}} - \nu \overline{\overline{\Delta}} \Sigma \bar{\bar{I}} \right) = \bar{\bar{0}}$$

ou encore⁷ :

$$(1+\nu) \left(\overline{\overline{\text{grad}}} \overrightarrow{\text{div}} \bar{\bar{\sigma}} + \overline{\overline{\text{grad}}^t} \overrightarrow{\text{div}} \bar{\bar{\sigma}} - \overline{\overline{\Delta}} \bar{\bar{\sigma}} \right) - \nu \overbrace{\left[\overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \Sigma \right) + \overline{\overline{\text{grad}}^t} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \Sigma \right) \right]}^{2\overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \Sigma \right)} - (1-2\nu) \overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \Sigma \right) + \nu \overline{\overline{\Delta}} \Sigma \bar{\bar{I}} = \bar{\bar{0}}$$

par conséquent :

$$\left(\overline{\overline{\text{grad}}} \overrightarrow{\text{div}} \bar{\bar{\sigma}} + \overline{\overline{\text{grad}}^t} \overrightarrow{\text{div}} \bar{\bar{\sigma}} - \overline{\overline{\Delta}} \bar{\bar{\sigma}} \right) - \frac{1}{(1+\nu)} \left(\overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \Sigma \right) - \nu \overline{\overline{\Delta}} \Sigma \bar{\bar{I}} \right) = \bar{\bar{0}} \quad (4.3.1)$$

Maintenant, prenons la divergence de l'équation 4.2.1 :

7. $\overline{\overline{\text{grad}}} \overline{\overline{\text{grad}}} \Sigma$ est symétrique puisque $\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_j \partial x_i}$.

$$\mu \operatorname{div} \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{u} + (\mu + \lambda) \overbrace{\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}}}^{\Delta} \operatorname{div} \overrightarrow{u} + \operatorname{div} \overrightarrow{f}_v = 0$$

comme $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \Delta f$ et que $\operatorname{div} \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{u} = \Delta \operatorname{div} \overrightarrow{u}$, et que, d'autre part $\operatorname{div} \overrightarrow{u} = \operatorname{tr}(\overline{\epsilon}) = \theta = \frac{1-2\nu}{E} \Sigma$, il vient :

$$(2\mu + \lambda) \frac{1-2\nu}{E} \Delta \Sigma + \operatorname{div} \overrightarrow{f}_v = \overrightarrow{0} \quad (4.3.2)$$

Finalement, compte tenu des relations 49, il reste :

$$\frac{2\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \Delta \Sigma + \operatorname{div} \overrightarrow{f}_v = \overrightarrow{0}$$

soit :

$$\frac{1-\nu}{1+\nu} \Delta \Sigma + \operatorname{div} \overrightarrow{f}_v = \overrightarrow{0} \quad (4.3.3)$$

Prenons maintenant en compte l'équation d'équilibre local 4.1.2, et substituons dans l'équation 4.3.1, il vient :

$$\overline{\overline{\Delta \sigma}} + \frac{1}{1+\nu} \overline{\overline{\operatorname{grad} \operatorname{grad}}} \Sigma + \overline{\overline{\operatorname{grad}}} \overrightarrow{f}_v + \overline{\overline{\operatorname{grad}^t}} \overrightarrow{f}_v + \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \overrightarrow{f}_v \overline{\overline{I}} = \overline{\overline{0}} \quad (4.3.4)$$

Ce sont les 6 équations de BELTRAMI^{8,9}.

4.3.3 cas des forces de volume uniformes

Dans le cas où les forces de volume sont uniformes (poids volumique¹⁰ dans le cas d'un matériau homogène), il reste :

$$\overline{\overline{\Delta \sigma}} + \frac{1}{1+\nu} \overline{\overline{\operatorname{grad} \operatorname{grad}}} \Sigma = \overline{\overline{0}}$$

Si l'on prend le Laplacien de cette dernière équation :

$$\overline{\overline{\Delta \Delta \sigma}} + \frac{1}{1+\nu} \overline{\overline{\operatorname{grad} \operatorname{grad}}} \Delta \Sigma = \overline{\overline{0}}$$

et comme $\operatorname{div} \overrightarrow{f}_v = 0$, il reste :

$$\overline{\overline{\Delta^2 \sigma}} = \overline{\overline{0}}$$

⇒ le tenseur des contraintes est « bi-harmonique ».

D'autre part l'équation 4.3.3 devient $\Delta \Sigma = 0$: la trace des contraintes est une fonction harmonique.

8. Dans le cas où l'élévation de température T intervient, les équations de Beltrami deviennent :

$$\overline{\overline{\Delta \sigma}} + \frac{1}{1+\nu} \overline{\overline{\operatorname{grad} \operatorname{grad}}} \Sigma + \overline{\overline{\operatorname{grad}}} \overrightarrow{f}_v + \overline{\overline{\operatorname{grad}^t}} \overrightarrow{f}_v + \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \overrightarrow{f}_v \overline{\overline{I}} + \frac{\alpha E}{1+\nu} \overline{\overline{\operatorname{grad} \operatorname{grad}}} T + \Delta T \overline{\overline{I}} = \overline{\overline{0}}$$

9. Dans la littérature, on trouve également la forme suivante :

$$\overline{\overline{\operatorname{grad}}} \overrightarrow{f}_v + \overline{\overline{\operatorname{grad}^t}} \overrightarrow{f}_v + \overline{\overline{\Delta \sigma}} + \frac{1}{1+\nu} \overline{\overline{\operatorname{grad} \operatorname{grad}}} \Sigma - \frac{\nu}{1+\nu} \Delta \Sigma \overline{\overline{I}} = \overline{\overline{0}} \quad (4.3.5)$$

10. En réalité, à cause de la dilatation volumique, le poids volumique est légèrement modifié du fait des déformations du solide.

4.3.4 champ de contrainte statiquement admissible

On appelle « champ de contrainte statiquement admissible » (champ SA) tout champ de contrainte virtuel $\{\overline{\sigma}^*\}$ continu et dérivable (au moins par morceau) et satisfaisant :

1. les équations de l'équilibre local :

$$\overrightarrow{\text{div}} \overline{\sigma}^* + \overrightarrow{f}_v = \overrightarrow{0} \quad (4.3.6)$$

2. les conditions aux limites du solide :

$$\overrightarrow{T^*(P)} = \overline{\overline{\sigma}^*(P)} \cdot \overrightarrow{n}(P) = \overrightarrow{f_s(P)} \quad \forall P \in \{\partial S_f\} \text{ et } \overrightarrow{n} \perp \{\partial S\}$$

De tels champs sont utilisés dans les méthodes approchées de calcul.

NOTE : Le champ de contrainte « réel » (solution exacte des équations de BELTRAMI) est statiquement admissible.

4.4 unicité de la solution d'un problème d'élasticité

4.4.1 principe de superposition

Constatons que les équations de NAVIER sont des équations linéaires aux dérivées partielles, du second ordre et à coefficients constants. \Rightarrow Si un chargement $\{\mathcal{F}_1\}$ appliqué à un solide (\mathcal{D}) conduit à une solution $\{\overline{\sigma}_1, \overline{\epsilon}_1, \overline{u}_1\}$ et qu'un autre chargement $\{\mathcal{F}_2\}$ appliqué au solide (\mathcal{D}) conduit la solution $\{\overline{\sigma}_2, \overline{\epsilon}_2, \overline{u}_2\}$, alors le chargement $\{\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2\}$ admet $\{\overline{\sigma}_1 + \overline{\sigma}_2, \overline{\epsilon}_1 + \overline{\epsilon}_2, \overline{u}_1 + \overline{u}_2\}$ comme solution ¹¹.

4.4.2 unicité de la solution

On suppose le solide (\mathcal{D}) exempt de contraintes au repos (état initial) et on lui applique un chargement $\{\mathcal{F}\}$. Supposons que la résolution du problème, via les équations de BELTRAMI ou de NAVIER conduisent à dégager deux solutions différentes $\{\overline{\sigma}_1, \overline{\epsilon}_1, \overline{u}_1\}$ et $\{\overline{\sigma}_2, \overline{\epsilon}_2, \overline{u}_2\}$. Le principe de superposition (ci-dessus) permet de conclure que la différence des deux champs $\{\overline{\sigma}_1 - \overline{\sigma}_2, \overline{\epsilon}_1 - \overline{\epsilon}_2, \overline{u}_1 - \overline{u}_2\}$ est solution du problème alors même que le solide (\mathcal{D}) n'est soumis à aucune force.

Le théorème de l'énergie (§.3.4.3) permet d'affirmer qu'en l'absence de forces appliquée, le travail de celle-ci étant nul, l'énergie élastique emmagasinée par le solide est également nulle et donc :

$$W_e = \int_S \frac{1}{2} [\overline{\sigma}_1 - \overline{\sigma}_2] : \overline{\overline{S}} [\overline{\sigma}_1 - \overline{\sigma}_2] dv = 0$$

Or W_e est une forme quadratique définie et positive ¹² et ne peut s'annuler que si $\overline{\sigma}_1 - \overline{\sigma}_2 = \overline{0} \Rightarrow$ c'est donc que les deux solutions trouvées ne constituent qu'une seule et unique solution.

4.4.3 champ $\{\overline{u}^*\}$ CA et champ $\{\overline{\sigma}^*\}$ SA associés

Si pour un problème d'élasticité et par la loi de comportement, on peut associer un champ de déplacement $\{\overline{u}^*\}$ cinématiquement admissible à un champ de contrainte $\{\overline{\sigma}^*\}$ statiquement admissible, alors les champs $\{\overline{u}^*, \overline{\sigma}^*\}$ constituent la solution unique du problème.

4.5 Méthode de RITZ

La méthode de RITZ constitue une méthode approchée dans la recherche d'une solution à un problème de mécanique des milieux continus.

11. A condition que les déplacements de la structure restent petits et que la loi de Hooke reste valable.

12. W_e est une forme bilinéaire positive et symétrique des forces extérieures à condition que la configuration d'équilibre soit stable.

4.5.1 théorème

En statique, on introduit la fonctionnelle « Potentiel » (nommé potentiel ou énergie potentielle) notée \mathcal{V} et composée comme suit :

$$\mathcal{V}(u^*) = V_e(u^*) + V_f(u^*) \quad (4.5.1)$$

Dans laquelle :

- $\{u^*\}$ est un champ de déplacement cinématiquement admissible (CA).
- V_e est le potentiel élastique (voir eq. **3.4.4**) associée à ce champ de déplacement CA¹³ :

$$V_e(u^*) = \int_S \frac{1}{2} \bar{\bar{\bar{\epsilon}}}^* : \bar{\bar{\bar{C}}} \bar{\bar{\bar{\epsilon}}}^* . dv = \int_S \frac{1}{2} \bar{\bar{\bar{\epsilon}}}^* : \bar{\bar{\bar{C}}} \bar{\bar{\bar{\epsilon}}}^* . dv$$

- V_f est le potentiel¹⁴ des forces extérieures¹⁵ :

$$V_f(u^*) = - \left(\underbrace{\int_S \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* . dv}_{\text{forces volumiques}} + \underbrace{\int_{\partial S} \vec{f}_s \cdot \vec{u}^* . dS}_{\text{forces surfaciques}} \right)$$

Supposons que $\{u^*\}$ soit égal au champ de déplacement réel à une perturbation cinématiquement admissible $\{\delta u\}$ près :

$$\{u^*\} = \{u\} + \{\delta u\} \quad \text{avec } \{\delta u\} \text{ CA.} \quad (4.5.2)$$

On peut établir le tenseur des déformations dérivant de $\{u^*\}$. Par linéarité :

$$\bar{\bar{\bar{\epsilon}}}^* = \underbrace{\bar{\bar{\bar{\epsilon}}}}_{\text{champ de déformation réel}} + \underbrace{\delta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}}}_{\text{champ des perturbations de déformation}} \quad (4.5.3)$$

Alors, par symétrie :

$$V_e(u^*) = \int_S \frac{1}{2} \left(\delta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} : \bar{\bar{\bar{C}}} \delta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} + 2 \delta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} : \underbrace{\bar{\bar{\bar{C}}}}_{\bar{\bar{\bar{\sigma}}}} + \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} : \bar{\bar{\bar{C}}} \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} \right) dv \quad (4.5.4)$$

D'autre part :

$$V_f(u^*) = - \left(\int_S \vec{f}_v \cdot \vec{\delta u} . dv + \int_{\partial S} \vec{f}_s \cdot \vec{\delta u} . dS \right) - \left(\int_S \vec{f}_v \cdot \vec{u} . dv + \int_{\partial S} \vec{f}_s \cdot \vec{u} . dS \right) \quad (4.5.5)$$

Par sommation et regroupement :

13. **ATTENTION** : il ne s'agit pas de l'énergie élastique mais bien d'un potentiel car le champ de déplacement envisagé ici n'est qu'un candidat parmi l'ensemble des champs cinématiquement admissibles.

14. Noter le signe négatif qui précède l'expression.

15. **ATTENTION** : il ne s'agit pas du travail des forces extérieures mais d'un potentiel. En effet le travail des forces extérieures appliquées à un solide dans l'hypothèse HPP s'écrirait $\int_S \left(\int_0^t \vec{f}(t) \cdot \vec{\delta u} \right) dv$ pour les forces de volume par exemple.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(u^*) = & \underbrace{\left[\int_S \frac{1}{2} \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} : \bar{\bar{\bar{C}}} \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} . dv - \left(\int_S \vec{f}_v \cdot \vec{u} . dv + \int_{\partial S} \vec{f}_s \cdot \vec{u} . dS \right) \right]}_{\mathcal{V}(u)} \\
 - & \underbrace{\left[- \int_S \bar{\bar{\sigma}} : \delta \bar{\bar{\epsilon}} . dv + \left(\int_S \vec{f}_v \cdot \delta \vec{u} . dv + \int_{\partial S} \vec{f}_s \cdot \delta \vec{u} . dS \right) \right]}_{P_i^* + P_e^* = 0} + \underbrace{\int_S \frac{1}{2} \delta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} : \bar{\bar{\bar{C}}} \delta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} . dv}_{\text{forme bilinéaire symétrique} \geq 0}
 \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

- Le 1er terme est le potentiel $\mathcal{V}(u)$ calculée pour la valeur du champ réel de déplacement.
- Le second terme est nul en vertu du principe des puissances virtuelles (voir eq.3.4.1).
- Le troisième terme est une forme bilinéaire du champ de perturbation des déformations (et donc des déplacements dans l’hypothèse des petites perturbations). Cette forme bilinéaire est définie, symétrique et positive¹⁶.

Par conséquent :

$$\boxed{\mathcal{V}(u^*) \geq \mathcal{V}(u) \quad \forall u^* CA.} \tag{4.5.7}$$

Enoncé de RITZ : Parmi l’ensemble de tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles, le champ de déplacement « réel » (solution du problème d’élasticité) minimise le Potentiel du système solide.

NOTE : Sur le plan mathématique, il s’agit d’un problème « variationnel » (minimisation d’une fonctionnelle).

Enoncé 2 : Dans un ensemble restreint (une « famille ») de champs de déplacements cinématiquement admissibles, le « meilleur » champ de déplacement minimise le Potentiel.

Rappel : Bien différencier « potentiel élastique » et « énergie élastique », d’une part, et « travail des forces extérieures » et « potentiel des forces extérieures » d’autre part. Le théorème de RITZ s’exprime en terme de potentiels.

Si l’on prend l’exemple d’un ressort de rigidité k soumis à l’action d’une force F et que l’on cherche son allongement u .

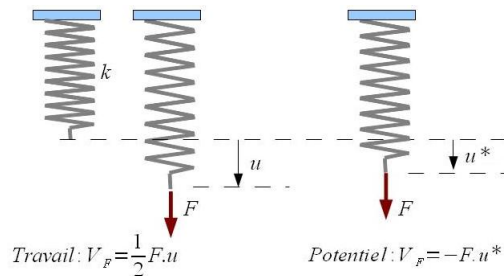


FIGURE 4.5.1 – travail versus potentiel d’une force - cas du ressort

Théorème de l’énergie mécanique :

Energie élastique du ressort : $W_e = \frac{1}{2} k u^2$

Travail de la force : $\mathcal{T}_F = \frac{1}{2} F u$

Identification : $W_e = \mathcal{T}_F \Rightarrow u = \frac{F}{k}$

Méthode de Ritz :

Potentiel élastique du ressort : $V_e = \frac{1}{2} k u^{*2}$

Potentiel de la force : $V_F = -F u^*$

Potentiel du système : $\mathcal{V} = \frac{1}{2} k u^{*2} - F u^*$

Minimisation du potentiel : $\frac{d\mathcal{V}}{du^*} \Big|_{u^*=u_{real}} = 0 \Rightarrow k u - F = 0 \Rightarrow u = \frac{F}{k}$

16. Si les grands déplacements sont envisagés, la forme bilinéaire peut ne pas être positive dans le cas d’une instabilité de forme.

4.5.2 application

Ce théorème est à la base d'une méthode de recherche de solutions approchées des problèmes d'élasticité. Elle s'inscrit dans une logique de recherche du champ de déplacement, celui-ci étant candidat dans une famille de champs de déplacement cinématiquement admissibles.

Il est ainsi fréquent de chercher le champ de déplacement comme combinaison linéaire¹⁷ de fonctions cinématiquement admissibles et indépendantes choisies dans une classe de fonctions (par exemple des polynômes ou des fonctions harmoniques) :

$$\vec{u}^*(M) = \sum_{i=1}^n Z_i \cdot \vec{\varphi}_i(x, y, z) \quad \text{avec } \varphi_i \text{ CA.} \quad (4.5.8)$$

Les paramètres scalaires Z_i sont des amplitudes (proportionnelles à des déplacements) tandis que les fonctions $\vec{\varphi}_i$ sont des « fonctions de forme » judicieusement choisies. Du fait de la substitution de la fonction \vec{u}^* par la combinaison linéaire de fonctions connues, la fonctionnelle $\mathcal{V}(\vec{u}^*)$ est remplacée, sur le plan mathématique, par une fonction à plusieurs variables $\tilde{\mathcal{V}}(Z_i)$.

Le problème pratique de minimisation de la fonctionnelle \mathcal{V} est ainsi ramené à la recherche des zéros des dérivées partielles de la fonction $\tilde{\mathcal{V}}$. La meilleure solution (compte tenu du choix fait *a priori* des fonctions de forme) est ainsi obtenue en résolvant le jeu d'équations :

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{V}}}{\partial Z_j} = 0 \quad \forall j \quad (4.5.9)$$

En élasticité linéaire, sous la condition des petites perturbations, ces équations sont linéaires et forment un système défini, positif et symétrique¹⁸. On obtient :

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & \\ K_{12} & K_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & K_{n,n-1} \\ & & K_{n,n-1} & K_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (4.5.10)$$

Ce système $[K][Z] = [F]$ est composé d'une « matrice de rigidité » $[K]$, du « vecteur déplacement » $[Z]$ dont les composantes sont les amplitudes Z_i encore nommées « degrés de liberté » et, enfin, le vecteur des « forces généralisés » $[F]$ qui ne dépend que du chargement appliqué à l'ossature et du choix des fonctions de forme.

A partir de là :

- La colonne des inconnues $[Z_i]$ est calculée en inversant le système linéaire : $[Z] = [K]^{-1} \cdot [F]$
- On en déduit ensuite le champ de déplacement approché : $\vec{u}^*(M) = \sum_{i=1}^n Z_i \cdot \vec{\varphi}_i(M)$
- De là on tire le champ de déformation approché : $\vec{\epsilon}^* = \frac{1}{2} [\overline{\mathbf{grad}} \vec{u}^* + \overline{\mathbf{grad}}^t \vec{u}^*]$
- Et finalement les contraintes : $\vec{\sigma}^* = 2\mu\vec{\epsilon}^* + \lambda\theta^*\vec{I}$
- Si le champ de contrainte obtenu est statiquement admissible et satisfait les conditions aux limites, l'ensemble $\{\vec{u}^*, \vec{\sigma}^*, \vec{\epsilon}^*\}$ constitue la solution « réelle » du problème d'élasticité sinon il ne s'agit que d'une approximation.

4.5.3 méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à décomposer le solide étudié en petits éléments (finis) de forme choisie (en 3D : tétraèdres, parallélépipèdes ; en 2D : triangles, rectangles, quadrilatères...) étant entendu que, sur chacun d'eux les motifs de déplacements sont connus.

Sur chaque élément, le champ de déplacement est donné par les amplitudes des déplacements de points particuliers appelés « noeuds » (par exemple, mais pas seulement, les sommets). Chaque élément possède donc sa propre matrice de rigidité (matrice élémentaire).

17. Naturellement il n'est pas interdit d'envisager d'autres types de combinaison.

18. En grands déplacements, le système peut ne pas être défini pour certaines configurations de chargement conduisant à une instabilité de forme.

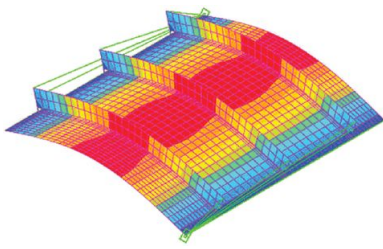


FIGURE 4.5.2 – maillage d'une coque.

La continuité du solide et du champ de déplacement est obtenue par la mise en commun des noeuds des éléments adjacents. Les amplitudes de déplacement de l'ensemble des noeuds constituent les « degrés de liberté » du système. Formellement, cette mise en commun¹⁹ conduit à « l'assemblage matriciel » d'où résulte la « matrice de rigidité globale » du solide ainsi que le vecteur des forces généralisées.

Cette méthode de discrétisation d'un solide en petits éléments se prête au calcul automatique sur ordinateur. Les programmes de calcul permettent ainsi de modéliser le problème, se chargent du « maillage », effectuent l'assemblage matriciel, résolvent le système linéaire et permettent l'exploitation des résultats sous forme de

graphes, tables, animations diverses.

Cette méthode trouve des développements importants en dehors du champ de l'élasticité ou même du cadre strict de la mécanique. On trouve ainsi des codes permettant de traiter des problèmes de thermique (conduction), de diffusion, de mécanique des fluides, d'électromagnétisme, et même de phénomènes couplés.

4.6 Elasticité bidimensionnelle

L'élasticité bidimensionnelle concerne des solides de géométrie particulière dans des chargements particuliers ; on montre alors que le tenseur des contraintes (ou celui des déformations) ne comporte plus que quatre composantes dépendantes de deux variables de l'espace.

Dans une telle configuration, non seulement le problème est considérablement simplifié du point de vue des mathématiques, mais encore bénéficie-t-il de méthodes de résolution spécifiques.

Il existe deux cas d'élasticité dite plane :

1) - l'état de déformation plane concerne les corps prismatiques dont la longueur (selon z axe du prisme) est infiniment plus grand que les dimensions transversales de la section droite. Ce prisme est uniquement soumis à des efforts latéraux agissant perpendiculairement à l'axe du prisme et uniformément sur toute la longueur. Dans ce cas, on convient que le déplacement axial u_z est nul et qu'il n'y a pas de déformation axiale le long de cet axe ni de distorsion des angles droits bâtis sur cet axe et toute direction orthogonale. Ainsi, en coordonnées cartésiennes, $\epsilon_{zz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = 0$. Cette fois c'est le tenseur des déformations qui ne comporte plus que trois composantes non-nulles $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}$. A noter que, du fait du coefficient de Poisson, la contrainte normale axiale n'est pas nulle mais vaut $\sigma_{zz} = +\nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$.

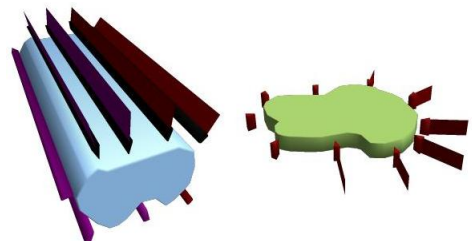


FIGURE 4.6.1 – états plans de déformation & de contrainte

2) - l'état de contrainte plan concerne les plaques minces chargées dans leur plan (il n'y a donc pas de flexion comme cela serait le cas pour un plancher par exemple). Les surfaces parallèles délimitant la plaque ne sont pas chargées. Si on note \vec{z} l'axe perpendiculaire à la plaque on considère que les grandeurs ne dépendent pas de la coordonnée z . De plus le vecteur contrainte $\vec{\Phi}_{\vec{z}} = \vec{\sigma} \cdot \vec{z}$ est uniformément nul. Le tenseur des contraintes ne comporte donc plus que 3 composantes non-nulles, par exemple $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ en coordonnées cartésiennes. A noter que, du fait du coefficient de Poisson, la déformation transversale ϵ_{zz} n'est pas nulle mais vaut $\epsilon_{zz} = -\nu \cdot (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})$ localement.

4.6.1 forme des tenseurs - tenseurs réduits

Bien que chaque tenseur ne comporte que trois composantes indépendante, la forme des tenseurs change avec le type d'élasticité plane.

¹⁹. Les conditions d'appui sont également prises en compte.

Etat plan de contrainte

En coordonnées cartésiennes, le tenseur des contraintes prend la forme :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $\bar{\bar{\sigma}}$ la partie plane du tenseur des contraintes.

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Du fait de la loi de Hooke, le tenseur des déformations (non-plan) est :

$$\bar{\bar{\epsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}(x_1, x_2) & \epsilon_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \epsilon_{12}(x_1, x_2) & \epsilon_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Du fait du coefficient de Poisson, la déformation axiale selon l'axe \vec{e}_3 n'est pas nulle mais vaut :

$$\epsilon_{33} = -\nu(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$$

On pose $\bar{\bar{\epsilon}}$ la partie plane du tenseur des déformations.

$$\bar{\bar{\epsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}(x_1, x_2) & \epsilon_{12}(x_1, x_2) \\ \epsilon_{12}(x_1, x_2) & \epsilon_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Etat plan de déformation

En coordonnées cartésiennes, le tenseur des déformations prend la forme :

$$\bar{\bar{\epsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}(x_1, x_2) & \epsilon_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \epsilon_{12}(x_1, x_2) & \epsilon_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $\bar{\bar{\epsilon}}$ la partie plane du tenseur des déformations.

$$\bar{\bar{\epsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}(x_1, x_2) & \epsilon_{12}(x_1, x_2) \\ \epsilon_{12}(x_1, x_2) & \epsilon_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Du fait de la loi de Hooke, le tenseur des contraintes (non plan) est :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Du fait du coefficient de Poisson, la contrainte normale selon l'axe \vec{e}_3 n'est pas nulle mais vaut :

$$\sigma_{33} = +\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

On pose $\bar{\bar{\sigma}}$ la partie plane du tenseur des contraintes :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

4.6.2 équation de compatibilité

Rappelons les équations de compatibilité établies en 3D et en coordonnées cartésiennes (eq. 1.7.2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Compte tenu de ce que $\epsilon_{31} = \epsilon_{32} = 0$ et que $\frac{\partial}{\partial x_3} \equiv 0$, en élasticité plane, il reste :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \end{array} \right.$$

– En état plan de déformation le terme ϵ_{33} est également nul de sorte qu'il ne reste qu'une seule équation :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (4.6.1)$$

- En état plan de contrainte la fonction $\epsilon_{33}(x_1, x_2)$ a ses trois dérivées secondes nulles ; c'est donc que c'est une fonction linéaire de ses variables : $\epsilon_{33}(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c$. Cette condition étant difficilement satisfaite, les états de contrainte plan constituent une approximation de l'état de contrainte siégeant dans les plaques chargées dans leur plan.

4.6.3 trace des tenseurs

Au besoin, on notera que $\text{tr} \left(\overline{\overline{I}} \right) = 2$.

Etat plan de contrainte

$$\Sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \tilde{\Sigma}$$

$$\theta = (1 - \nu)(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = (1 - \nu)\tilde{\theta}$$

Etat plan de déformation

$$\Sigma = (1 + \nu)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = (1 + \nu)\tilde{\Sigma}$$

$$\theta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} = \tilde{\theta}$$

4.6.4 équilibre

Etat plan de contrainte

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2^v = 0 \\ f_3^v = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{div} \overline{\overline{\sigma}} + \overline{\overline{f}}_v = \overline{\overline{0}}$$

Au « bord » du solide (surface latérale (∂S)) :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{T}}(P, \overline{\overline{n}}) &= \overline{\overline{\sigma}}(P) \cdot \overline{\overline{n}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^s \\ f_2^s \\ f_3^s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cela confirme bien qu'il ne peut y avoir de force agissant selon $\overline{\overline{e}}_3$.

Etat plan de déformation

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2^v = 0 \\ f_3^v = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{div} \overline{\overline{\sigma}} + \overline{\overline{f}}_v = \overline{\overline{0}}$$

Au « bord » du solide (surface latérale (∂S)) :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{T}}(P, \overline{\overline{n}}) &= \overline{\overline{\sigma}}(P) \cdot \overline{\overline{n}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^s \\ f_2^s \\ f_3^s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cela confirme bien qu'il ne peut y avoir de force axiale.

4.6.5 relation contraintes - déformations

Etat plan de contrainte

La trace du tenseur des contraintes vaut

$\Sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22}$, en appliquant la loi de HOOKE :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}}{E} \\ \epsilon_{22} = \frac{\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}}{E} \\ \epsilon_{12} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{12} \end{cases}$$

Etat plan de déformation

La trace du tenseur des contraintes vaut

$\Sigma = (1 + \nu)(\sigma_{11} + \sigma_{22})$; en appliquant la loi de HOOKE :

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (1 + \nu)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ &\Rightarrow \epsilon_{11} = \left[\frac{1 - \nu^2}{E} \right] \left[\sigma_{11} - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{22} \right] \end{aligned}$$

Etat plan de contrainte

on pose :

$$E = E' \frac{1 + 2\nu'}{(1 + \nu')^2} \text{ et } \nu = \frac{\nu'}{1 + \nu'}$$

loi de comportement « réduite » :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{E}{1 + \nu} \left[\bar{\bar{\epsilon}} + \frac{\nu}{1 - \nu} \bar{\bar{\theta}} \bar{\bar{I}} \right]$$

ou :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \bar{\bar{\Sigma}} \bar{\bar{I}}$$

notation de VOIGT :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

Etat plan de déformation

de même :

$$\epsilon_{22} = \left[\frac{1 - \nu^2}{E} \right] \left[\sigma_{22} - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{11} \right]$$

et enfin :

$$\begin{aligned} \epsilon_{12} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12} = \left[\frac{1 - \nu^2}{E} \right] \left[\frac{1}{1 - \nu} \right] \sigma_{12} \\ \Rightarrow \epsilon_{12} &= \left[\frac{1 - \nu^2}{E} \right] \left[1 + \frac{\nu}{1 - \nu} \right] \sigma_{12} \end{aligned}$$

on pose :

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \text{ et } \nu' = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

alors, en état plan de déformation :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11} - \nu' \sigma_{22}}{E'} \\ \epsilon_{22} = \frac{\sigma_{22} - \nu' \sigma_{11}}{E'} \\ \epsilon_{12} = \frac{(1 + \nu')}{E'} \sigma_{12} \end{cases}$$

loi de comportement « réduite » :²⁰

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1 + \nu'}{E'} \left[\bar{\bar{\sigma}} - \nu' \bar{\bar{\Sigma}} \bar{\bar{I}} \right]$$

ou :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1 + \nu'}{E'} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu'}{E'} \bar{\bar{\Sigma}} \bar{\bar{I}}$$

notation de VOIGT :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E'}{1 + \nu'} \begin{pmatrix} \frac{1 - \nu'}{1 - 2\nu'} & \frac{\nu'}{1 - 2\nu'} & 0 \\ \frac{\nu'}{1 - 2\nu'} & \frac{1 - \nu'}{1 - 2\nu'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

4.6.6 énergie volumique

Dans les deux cas :

$$w_e = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \cdot \epsilon_{11} + \sigma_{22} \cdot \epsilon_{22} + \sigma_{12} \cdot \gamma_{12}) \quad (4.6.2)$$

4.6.7 équations de BELTRAMI

Nous allons établir les équations de Beltrami en état plan de contrainte. La transposition à l'état plan de déformation s'effectuera simplement en remplaçant E par $E' = E/(1 - \nu^2)$ et ν par $\nu' = \nu/(1 - \nu)$

20. Noter que $\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\text{tr}(\bar{\bar{I}}) = 2$ (non pas 3).

Etat plan de contrainte

Partons de l'équation de compatibilité en 2D et en coordonnées cartésiennes (eq. 4.6.1) et remplaçons les déformations par les contraintes compte tenu de la loi de comportement :

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} [\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}] + \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} [\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}] - 2 \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

soit :

$$-(1+\nu) \left[\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right] = 0$$

or : $\overrightarrow{\text{div}} \vec{\sigma} + \vec{f}_v = \vec{0}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1^v = 0 & \times \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2^v = 0 & \times \frac{\partial}{\partial x_2} \end{cases}$$

en sommant :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \text{div} \vec{f}_v = 0$$

finalement :

$$\Delta \tilde{\Sigma} + (1+\nu) \text{div} \vec{f}_v = 0 \quad (4.6.3)$$

Etat plan de déformation

en transposant en déformations planes :

$$\Delta \tilde{\Sigma} + (1+\nu') \text{div} \vec{f}_v = 0$$

soit :

$$\Delta \tilde{\Sigma} + \frac{1}{1-\nu} \text{div} \vec{f}_v = 0 \quad (4.6.4)$$

4.6.8 fonction de AIRY**4.6.8.1 Les contraintes dérivent d'une fonction unique**

Il s'agit de mettre en évidence une fonction unique de laquelle le champ de contrainte dérive. Pour cela repartons des équations d'équilibre qui sont les mêmes dans les deux états d'élasticité plane.

$$\text{div} \vec{\sigma} + \vec{f}_v = \vec{0}$$

Supposons, ce qui constitue quand même une situation très courante, que les forces de volumes dérivent d'un potentiel²¹ :

$$\vec{f}_v = \overrightarrow{\text{grad}} V \Leftrightarrow f_1^v = \partial V / \partial x_1 \text{ et } f_2^v = \partial V / \partial x_2$$

Les équations deviennent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial(\sigma_{11}+V)}{\partial x_1} = -\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\sigma_{22}+V)}{\partial x_2} = -\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} \end{cases}$$

Si on se souvient du théorème de Cauchy²², en introduisant deux fonctions φ et ψ , alors on peut poser :

21. Par exemple, si la gravité agit selon l'axe \vec{e}_1 alors : $\vec{f}_v = \rho g \vec{e}_1$, le potentiel correspondant au poids volumique est $V = \rho g x_1$.

22. $\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_1}$ (dans une double dérivation, l'ordre de dérivation n'importe pas si la fonction h est suffisamment « lisse »).

$$\begin{cases} \sigma_{11} + V = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \sigma_{22} + V = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \sigma_{12} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \sigma_{12} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{cases}$$

Comme, manifestement $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$, on peut de nouveau introduire une fonction Φ telle que :

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \sigma_{11} + V = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \\ \sigma_{22} + V = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \\ \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \end{cases} \quad (4.6.5)$$

4.6.8.2 propriété de la fonction d'AIRY

– cas où les forces de volumes dérivent d'un potentiel

Etat plan de contrainte

Equation de BELTRAMI :

$$\Delta \tilde{\Sigma} + (1 + \nu) \operatorname{div} \vec{f}_v = 0$$

avec :

$$\tilde{\Sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \Delta \Phi - 2V$$

donc²³ :

$$\Delta (\Delta \Phi - 2V) + (1 + \nu) \Delta V = 0$$

par conséquent :

$$\Delta^2 \Phi + (1 - \nu) \Delta V = 0 \quad (4.6.6)$$

Etat plan de déformation

Equation de BELTRAMI :

$$\Delta \tilde{\Sigma} + (1 + \nu') \operatorname{div} \vec{f}_v = 0$$

tansposition en déformations planes :

$$\Delta^2 \Phi + (1 - \nu') \Delta V = 0$$

c'est-à-dire :

$$\Delta^2 \Phi + \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \Delta V = 0 \quad (4.6.7)$$

– cas où les forces de volume sont hamoniques, uniformes ou nulles

Alors : $\Delta V = 0$. Pour les deux cas d'élasticité plane, il reste :

$$\Delta^2 \Phi = 0 \quad (4.6.8)$$

⇒ La fonction de AIRY est bi-harmonique.

23. $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} h = \Delta h$

4.6.8.3 formulation d'un problème d'élasticité plane

Chercher une fonction $\Phi(x_1, x_2)$ telle que (si les forces de volume sont harmoniques) $\Delta^2 \Phi = 0$ et dont les contraintes dérivent par les relations :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - V \\ \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - V \\ \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \end{cases} \quad (4.6.9)$$

Le champ de contrainte satisfait alors automatiquement les équations d'équilibre et les équations de compatibilité. Il doit aussi vérifier les conditions aux limites en contrainte : $T(P, \vec{n}) = \vec{f}_s$ sur ∂S_f . Les déplacements dérivant des contraintes doivent, quant à eux, vérifier les conditions en déplacement $\vec{u} = \vec{u}_0$ sur ∂S_u .

⇒ En pratique la recherche d'une telle fonction Φ est aussi compliquée que la recherche directe du champ de contrainte (équation aux dérivées partielles du 4ème ordre); aussi cherche-t-on souvent une solution approchée sous la forme d'un polynôme

$$\Phi = \sum \alpha_i x_1^n x_2^m \quad (4.6.10)$$

dont l'ordre est de 4 au maximum avec des coefficients judicieusement choisis de sorte à exploiter les symétries éventuelles et les conditions limites en contraintes. On trouve ainsi des applications intéressantes notamment en théorie des poutres pour la mise en évidence d'effets du second ordre par rapport aux hypothèses classiques de NAVIER-BERNOULLI.

La solution obtenue par ce moyen est statiquement admissible mais pas souvent cinématiquement admissible.

4.7 Élasticité axisymétrique

Un problème d'élasticité est dit axisymétrique lorsque deux conditions sont réunies.

1. la forme du solide étudié présente une symétrie de révolution autour d'un axe (z);
2. le chargement et les conditions aux limites sont également de révolution autour de ce même axe.

Dans ce cas, la solution est aussi axisymétrique. Il est alors avantageux d'employer un système de coordonnées cylindriques autour de l'axe d'axisymétrie. Toutes les grandeurs sont donc indépendantes de l'angle polaire θ . On est ainsi ramené à un problème à deux variables r, z .

L'axisymétrie peut aussi se combiner avec un état plan d'élasticité, auquel cas les grandeurs ne dépendent plus que de r . C'est le cas très particulier du tube infiniment long ou de la plaque annulaire chargée radialement²⁴.

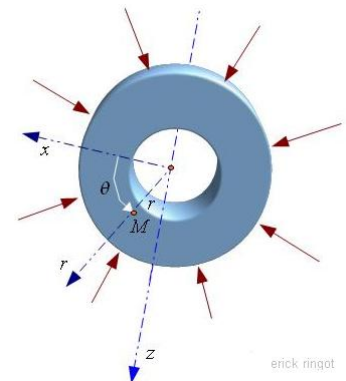


FIGURE 4.7.1 – Exemple de problème axisymétrique



24. Voir travaux dirigés.

Chapitre 5

Définitions & théorèmes de l'analyse vectorielle

5.1 notations

– NOTATION DES DERIVEES PARTIELLES :

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = g_{,i} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = \partial_i g \quad (5.1.1)$$

– SOMMATION IMPLICITE

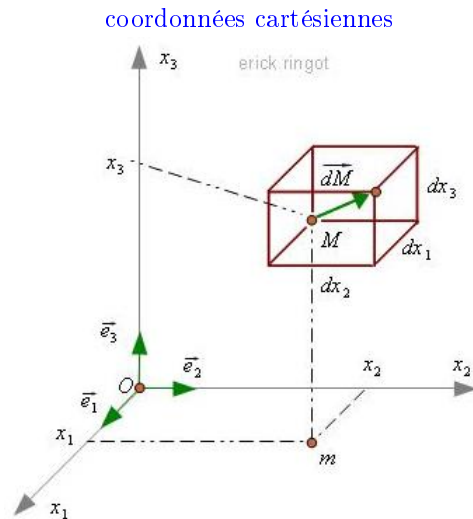
Un indice muet doublé indique une sommation ledit indice, par exemple, dans un espace de dimension 3 :

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \quad (5.1.2)$$

– DIFFERENTS PRODUITS ET NOTATIONS

- produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entre deux scalaires : $c = ab = a.b = a \times b$
- produit externe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ entre un scalaire et un vecteur : $\vec{v} = \lambda \vec{u} = \lambda . \vec{u}$
- produit vectoriel de deux vecteurs : $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$: $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$
- produit scalaire de deux vecteurs : $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$: $a = \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} . \vec{v}$
- produit mixte de trois vecteurs : $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$: $a = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) . \vec{w}$
- double produit vectoriel : $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$: $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} . \vec{w}) . \vec{v} - (\vec{v} . \vec{w}) . \vec{u}$
- produit tensoriel (eq.5.3.1) de deux vecteurs : $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 2}$: $\vec{A} = \vec{u} \otimes \vec{v}$
- produit matriciel de deux tenseurs : $\mathbb{R}^{2 \times 3} \times \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$: $\vec{C} = \vec{A} \vec{B} = \vec{A} . \vec{B}$
- application d'un tenseur à un vecteur : $\mathbb{R}^{2 \times 3} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$: $\vec{v} = \vec{A} \vec{u} = \vec{A} . \vec{u}$
- produit contracté de deux tenseurs : $\mathbb{R}^{2 \times 3} \times \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$: $a = \vec{A} : \vec{B}$

5.2 Systèmes de projection



coordonnées cartésiennes

Vecteur position :

$$\vec{M} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

Petit décalage :

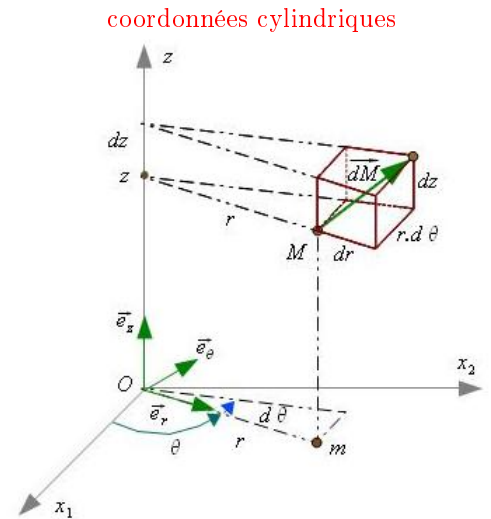
$$d\vec{M} = dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 + dx_3 \vec{e}_3$$

Elément de volume :

$$dv = dx_1 dx_2 dx_3$$

Dérivée des vecteurs de base :

$$\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x_i} = \vec{0} \quad \forall i, j$$



coordonnées cylindriques

Vecteur position :

$$\vec{M} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

Petit décalage :

$$d\vec{M} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

Elément de volume :

$$dv = r dr d\theta dz$$

Dérivée des vecteurs de base :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} &= \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} &= \vec{e}_\theta & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\vec{e}_r & \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} &= \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} &= \vec{0} \end{aligned}$$

5.3 Opérateurs vectoriels

Dans cette partie, on envisage des champs, fonctions du point dans l'espace tridimensionnel, pouvant être scalaires, vectorielles ou tensorielles. Ces champs et leurs fonctions dérivées peuvent être exprimés en coordonnées cartésiennes dans la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ou autre ; on donne ici également les expressions en coordonnées cylindriques.

- champ scalaire : $g = g(x_1, x_2, x_3)$
- champ vectoriel : $\vec{u} = \vec{u}(x_1, x_2, x_3)$
- champ tensoriel : $\vec{A} = \vec{A}(x_1, x_2, x_3)$

5.3.1 gradient grad

L'opérateur « gradient » est un opérateur différentiel du premier ordre qui promeut une grandeur scalaire en vecteur ou un vecteur en tenseur (on « gagne » une dimension).

5.3.1.1 vecteur gradient d'un champ scalaire $\overrightarrow{\text{grad}}$

- définition : $dg = \overrightarrow{\text{grad}} g \cdot d\vec{M}$
- coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\text{grad}} g = \frac{\partial g}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial g}{\partial x_3} \vec{e}_3$
- coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}} g = \frac{\partial g}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{e}_z$

5.3.1.2 opérateur symbolique $\overrightarrow{\nabla}$

On introduit l'opérateur vectoriel Nabla¹ tel que : $\overrightarrow{\text{grad}} g = \overrightarrow{\nabla} \cdot g$ (produit externe).

- coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}}$$

L'intérêt de l'opérateur NABLA est qu'il permet d'exprimer symboliquement les opérateurs différentiels et d'énoncer des relations entre eux.

ATTENTION : NABLA ne permet pas d'établir les composantes des opérateurs dans d'autres systèmes de projection que le système cartésien. Cela vient du fait que les vecteurs de base sont invariants par dérivation uniquement en coordonnées cartésiennes.

5.3.1.3 tenseur gradient d'un champ vectoriel $\overline{\overline{\text{grad}}}$

- définition (voir eq. 1.3.2) : $d\vec{u} = \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{u} \cdot d\vec{M}$

On introduit l'opération « produit tensoriel de deux vecteurs » non commutatif² et défini par :

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & \rightarrow & A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 & \rightarrow & A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 & \rightarrow & A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{pmatrix} \quad (5.3.1)$$

Le produit tensoriel de deux vecteurs est un tenseur.

Alors :

$$\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{u} = \vec{u} \otimes \overrightarrow{\nabla} \quad (5.3.2)$$

- coordonnées cartésiennes :

$$\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (5.3.3)$$

- coordonnées cylindriques :

$$\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (5.3.4)$$

5.3.2 divergence *div*

L'opérateur « divergence » est un opérateur différentiel du premier ordre qui « dégrade » une grandeur vectorielle en scalaire ou un tenseur en vecteur (on « perd » une dimension).

1. Une « nabra » est une harpe grecque ayant la forme d'un delta inversé.

2. Ce produit s'appelle aussi « produit dyadique ».

5.3.2.1 divergence scalaire d'un champ vectoriel div

- définition symbolique : $\text{div } \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ (produit scalaire).
- coordonnées cartésiennes : $\text{div } \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$
- coordonnées cylindriques : $\text{div } \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$

5.3.2.2 divergence vectorielle d'un tenseur $\vec{\text{div}}$

- définition symbolique : $\vec{\text{div}} = \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$
- coordonnées cartésiennes : $\vec{\text{div}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}$
- coordonnées cylindriques : $\vec{\text{div}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{r\theta} - T_{\theta r}}{r} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{zz}}{r} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$

5.3.3 vecteur rotationnel $\vec{\text{rot}}$

L'opérateur « rotationnel » est un opérateur différentiel du premier ordre qui s'applique à un champ vectoriel pour produire un champ vectoriel.

- définition symbolique : $\vec{\text{rot}} \vec{u} = \vec{\nabla} \circlearrowleft \wedge \vec{u}$
- coordonnées cartésiennes : $\vec{\text{rot}} \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$
- coordonnées cylindriques : $\vec{\text{rot}} \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} \{ \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z \}$

5.3.4 laplacien Δ

L'opérateur « laplacien » est un opérateur différentiel du second ordre; il ne change pas la dimension de la grandeur à laquelle il s'applique.

5.3.4.1 laplacien d'un champ scalaire Δ

- définition symbolique : $\Delta g = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} g) = \vec{\nabla}^2 g \Rightarrow \Delta g = \text{div } \vec{\text{grad}} g$
- coordonnées cartésiennes : $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x_k^2} = g_{,kk} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2}$
- coordonnées cylindriques : $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$

5.3.4.2 laplacien d'un champ vectoriel $\vec{\Delta}$

- définition symbolique : $\vec{\Delta} \vec{u} = \vec{\nabla}^2 \vec{u} = (\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) \vec{\nabla} \Rightarrow \vec{\Delta} \vec{u} = \vec{\text{div}} \vec{\text{grad}} \vec{u}$
- coordonnées cartésiennes : $\vec{\Delta} \vec{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix}$
- coordonnées cylindriques : $\vec{\Delta} \vec{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_r - \frac{1}{r^2} (u_r + 2 \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}) \\ \Delta u_\theta - \frac{1}{r^2} (u_\theta - 2 \frac{\partial u_r}{\partial \theta}) \\ \Delta u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u_r}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u_\theta}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u_z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$

5.3.4.3 laplacien d'un champ tensoriel $\overline{\Delta}$

– définition symbolique : $\overline{\Delta} = \overrightarrow{\nabla}^2 \overline{\Gamma}$

– coordonnées cartésiennes : $\overline{\Delta} \overline{T} = \begin{pmatrix} \Delta T_{11} & \Delta T_{12} & \Delta T_{13} \\ \Delta T_{21} & \Delta T_{22} & \Delta T_{23} \\ \Delta T_{31} & \Delta T_{32} & \Delta T_{33} \end{pmatrix}$

5.4 formules d'analyse vectorielle

5.4.1 identités remarquables

$$\text{rot } \overrightarrow{\text{grad}} g = \vec{0}$$

$$\text{div } \text{rot } \vec{u} = \vec{0}$$

$$\text{rot } \left(\text{rot } \vec{u} \right) = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{u} - \overrightarrow{\Delta} \vec{u}$$

$$\Delta g = \text{div } \overrightarrow{\text{grad}} g$$

5.4.2 opérateurs appliqués à des produits de fonctions

$$\overrightarrow{\text{grad}} (fg) = f \overrightarrow{\text{grad}} g + g \overrightarrow{\text{grad}} f \quad (5.4.1)$$

$$\text{div} (f \vec{u}) = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{u} + f \cdot \text{div } \vec{u} \quad (5.4.2)$$

$$\text{div} (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{v} - \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (5.4.3)$$

$$\text{rot} (f \vec{u}) = f \cdot \text{rot } \vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{u} \quad (5.4.4)$$

5.4.3 formes intégrales d'analyse vectorielle : $\int_D \partial g = \oint_{\partial D} g$

5.4.3.1 notations

\mathcal{D} est un domaine (volume en 3D, surface plane ou gauche) délimité par un contour $\partial \mathcal{D}$ (surface fermée, contour linéique fermé³).

dV est un élément infinitésimal de volume.

dS est un élément infinitésimal de surface.

\vec{n} est le vecteur directeur unitaire perpendiculaire à la surface $\partial \mathcal{D}$ et orienté vers l'extérieur.

\overrightarrow{dS} est un élément infinitésimal de surface orienté
 $\overrightarrow{dS} = dS \cdot \vec{n}$.

ds est un élément de longueur du contour fermé $\partial \mathcal{D}$.

\vec{t} est le vecteur unitaire parcourant le contour fermé $\partial \mathcal{D}$ (il définit un sens de parcours).

\overrightarrow{ds} est un élément de longueur orienté.

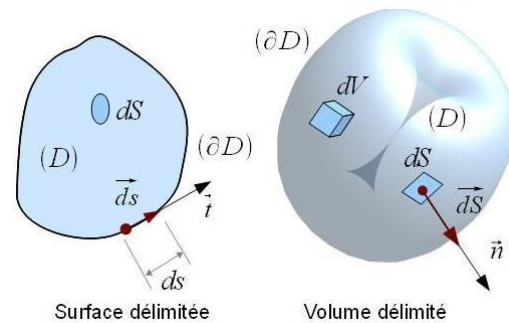


FIGURE 5.4.1 – domaines et leur contour

3. Le contour fermé n'est pas nécessairement plan.

5.4.3.2 théorème d'Ostrogradsky (dit de « flux-divergence »)

Flux d'un vecteur à travers l'enveloppe fermée d'un volume⁴ :

$$\oiint_{\partial \mathcal{D}} \vec{u} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{u} \cdot dV \quad (5.4.5)$$

Variante : flux d'un vecteur contrainte à travers l'enveloppe fermée d'un volume :

$$\oiint_{\partial \mathcal{D}} \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\partial \mathcal{D}} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{\sigma} \cdot dV \quad (5.4.6)$$

théorèmes associés

théorème du gradient :

$$\oiint_{\partial \mathcal{D}} f \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot dV \quad (5.4.7)$$

corrolaire :

$$\oiint_{\partial \mathcal{D}} f \cdot dS_i = \oiint_{\partial \mathcal{D}} f \cdot n_i \, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dV \quad (5.4.8)$$

théorème du rotationnel :

$$\oiint_{\partial \mathcal{D}} \vec{u} \wedge d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{D}} \overset{\circ}{\operatorname{rot}} \vec{u} \cdot dV \quad (5.4.9)$$

théorème de Green (forme 1) :

$$\oiint_{\partial \mathcal{D}} (f \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} g - g \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f) \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{D}} (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f) \cdot dV \quad (5.4.10)$$

théorème de Green (forme 2) :

$$\oiint_{\partial \mathcal{D}} f \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{D}} (f \cdot \Delta g + \overrightarrow{\operatorname{grad}}^2 f) \cdot dV \quad (5.4.11)$$

5.4.3.3 théorème de Stockes

Circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé. la normale à la surface est orientée par la règle du « tire-bouchon » compte tenu du sens de parcours du contour⁵.

$$\oint_{\partial \mathcal{D}} \vec{u} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{D}} \overset{\circ}{\operatorname{rot}} \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (5.4.12)$$



4. Relation que l'on peut noter plus simplement : $\oint_{\partial \mathcal{D}} \vec{u} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{u} \cdot dV$

5. la surface \mathcal{D} est une surface quelconque s'appuyant sur le contour $\partial \mathcal{D}$. Si $\partial \mathcal{D}$ est une ligne plane, on a tout intérêt à prendre \mathcal{D} dans le plan du contour de sorte que la normale \vec{n} soit uniforme sur \mathcal{D} .

Chapitre 6

Formulaire d'élasticité linéaire

En coordonnées cartésiennes et cylindriques.

6.1 hypothèses

- Hypothèse des petites perturbations
- Hypothèse de l'élasticité linéaire
- Température uniforme
- Forces de volume dérivant d'un potentiel harmonique
- Equilibre statique

6.2 équilibre local

6.2.1 tenseur contrainte

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}} \quad (6.2.1)$$

6.2.2 vecteur contrainte

$$\overline{T(M, \vec{n})} = \overline{\overline{\sigma}}(M) \cdot \vec{n} \quad (6.2.2)$$

6.2.3 équilibre

équation intrinsèque :

$$\overline{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} + \vec{f}^v = \vec{0} \quad (6.2.3)$$

coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3^v = 0 \end{cases} \quad (6.2.4)$$

coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + f_r^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + f_\theta^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z^v = 0 \end{cases} \quad (6.2.5)$$

symétrie du tenseur des contraintes :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}^t \quad \text{dans tout système de projection} \quad (6.2.6)$$

6.3 conditions limites

6.3.1 CL en contraintes

$$\overline{\overline{T}}(P, \overline{\overline{n}}) = \overline{\overline{\sigma}}(P) \cdot \overline{\overline{n}} = \overline{\overline{f}}_s \quad \text{sur } (\partial S_f) \quad (6.3.1)$$

1. établir l'équation du bord (∂S_f)
2. établir le vecteur normal extérieur $\overline{\overline{n}}$
3. calculer le vecteur contrainte $\overline{\overline{T}}$
4. identifier à la force surfacique $\overline{\overline{f}}_s$

6.3.2 CL en déplacements

$$\overline{\overline{u}} = \overline{\overline{u}}_0 \quad \text{sur } (\partial S_u) \quad (6.3.2)$$

6.4 relation déplacements - déformations

6.4.1 tenseur déformation

relation intrinsèque :

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad}}} \overline{\overline{u}} + \overline{\overline{\text{grad}}}^t \overline{\overline{u}} \right) \quad (6.4.1)$$

coordonnées cartésiennes :

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \{\overline{\overline{e}}_1, \overline{\overline{e}}_2, \overline{\overline{e}}_3\} \quad (6.4.2)$$

coordonnées cylindriques :

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} & \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ \epsilon_{r\theta} & \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) & \epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \epsilon_{rz} & \epsilon_{\theta z} & \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \{\overline{\overline{e}}_r, \overline{\overline{e}}_\theta, \overline{\overline{e}}_z\} \quad (6.4.3)$$

6.4.2 équations de compatibilité

équation intrinsèque :

$$\overline{\text{grad}} (\text{div} (\bar{\epsilon})) + \overline{\text{grad}}^t (\text{div} (\bar{\epsilon})) - \overline{\text{grad}} (\overline{\text{grad}} (\text{tr} (\bar{\epsilon}))) - \overline{\Delta} (\bar{\epsilon}) = \bar{0} \quad (6.4.4)$$

coordonnées cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (6.4.5)$$

6.5 critères d'élasticité

critère de RANKINE :

$$\max |\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}| \leq \sigma_e \quad (6.5.1)$$

critère de SAINT-VENANT :

$$\max |\epsilon_I, \epsilon_{II}, \epsilon_{III}| \leq \epsilon_e \quad (6.5.2)$$

critère de VON-MISES :

$$\frac{1}{6} \left((\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \right) \leq \frac{1}{3} \sigma_e^2 \quad (6.5.3)$$

critère de TRESCA :

$$\max |\sigma_I - \sigma_{II}, \sigma_{II} - \sigma_{III}, \sigma_{III} - \sigma_I| \leq \sigma_e \quad (6.5.4)$$

6.6 loi de comportement

loi de HOOKE :

$$\bar{\epsilon} = \frac{(1+\nu)}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr} (\bar{\sigma}) \bar{I} \quad (6.6.1)$$

loi de LAMÉ :

$$\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\epsilon} + \lambda \text{tr} (\bar{\epsilon}) \bar{I} \quad (6.6.2)$$

relations entre les coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \end{array} \right. \quad (6.6.3)$$

6.7 équations de NAVIER

$$\mu \overrightarrow{\Delta} \vec{u} + (\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{grad div}} \vec{u} + \vec{f}_v = \vec{0} \quad (6.7.1)$$

coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \text{tr}(\bar{\epsilon}) + f_i^v = 0 \\ \Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2} \\ \text{tr}(\bar{\epsilon}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{cases} \quad (6.7.2)$$

coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \mu \left[\Delta u_r - \frac{1}{r^2} (u_r + 2 \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}) \right] + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \text{tr}(\bar{\epsilon}) + f_r^v = 0 \\ \mu \left[\Delta u_\theta - \frac{1}{r^2} (u_\theta - 2 \frac{\partial u_r}{\partial \theta}) \right] + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{tr}(\bar{\epsilon}) + f_\theta^v = 0 \\ \mu \Delta u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \text{tr}(\bar{\epsilon}) + f_z^v = 0 \\ \Delta g = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ \text{tr}(\bar{\epsilon}) = \text{div} \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases} \quad (6.7.3)$$

6.8 équations de BELTRAMI

$$\overrightarrow{\Delta} \bar{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \overrightarrow{\text{grad grad}} \Sigma + \overrightarrow{\text{grad}} \vec{f}_v + \overrightarrow{\text{grad}^t} \vec{f}_v + \frac{\nu}{1-\nu} \text{div} \vec{f}_v \vec{I} = \vec{0} \quad (6.8.1)$$

coordonnées cartésiennes :

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial f_k^v}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial f_i^v}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j^v}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (6.8.2)$$

coordonnées cylindriques (cas particulier du problème de révolution) :

$$\begin{cases} \Delta \sigma_{rr} - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial r^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \text{div} \vec{f}_v + 2 \frac{\partial f_r^v}{\partial r} = 0 \\ \Delta \sigma_{\theta\theta} - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Sigma}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \text{div} \vec{f}_v + 2 \frac{f_r^v}{r} = 0 \\ \Delta \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \text{div} \vec{f}_v + 2 \frac{\partial f_z^v}{\partial r} = 0 \\ \Delta \sigma_{r\theta} - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta} - \frac{1}{r} f_\theta^v + \frac{\partial f_\theta^v}{\partial r} = 0 \\ \Delta \sigma_{rz} - \frac{1}{r^2} \sigma_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial z \partial r} + \frac{\partial f_z^v}{\partial r} + \frac{\partial f_r^v}{\partial z} = 0 \\ \Delta \sigma_{\theta z} - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta z} + \frac{\partial f_\theta^v}{\partial z} = 0 \\ \Delta g = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ \Sigma = \text{tr}(\bar{\sigma}) = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} \\ \text{div} \vec{f}_v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f_r^v) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f_\theta^v}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z^v}{\partial z} \end{cases} \quad (6.8.3)$$

6.9 élasticité plane

6.9.1 forces de volume

Rappel : On suppose les forces de volume dérivant d'un potentiel V ($\vec{f}_v = \overrightarrow{\text{grad}} V$) harmonique $\Delta V = 0$.

coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} f_x^v = \frac{\partial V}{\partial x} \\ f_y^v = \frac{\partial V}{\partial y} \end{cases} \quad \text{sur } \{\vec{x}, \vec{y}\} \quad (6.9.1)$$

coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} f_r^v = \frac{\partial V}{\partial r} \\ f_\theta^v = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases} \text{ sur } \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\} \quad (6.9.2)$$

6.9.2 contraintes

coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(x, y) & \sigma_{xy}(x, y) \\ \sigma_{xy}(x, y) & \sigma_{yy}(x, y) \end{pmatrix} \{\vec{x}, \vec{y}\} \quad (6.9.3)$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} +\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \text{déformations planes} \\ 0 & \text{contraintes planes} \end{cases} \quad (6.9.4)$$

coordonnées cylindriques :

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(r, \theta) & \sigma_{r\theta}(r, \theta) \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) & \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) \end{pmatrix} \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\} \quad (6.9.5)$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} +\nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) & \text{déformations planes} \\ 0 & \text{contraintes planes} \end{cases} \quad (6.9.6)$$

6.9.3 équilibre local

En coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma_{xx}+V)}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy}+V)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.9.7)$$

coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{rr} + V) + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_{\theta\theta} + V) + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \end{cases} \quad (6.9.8)$$

6.9.4 déplacements & déformations

déplacements en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{u}(x, y) = u(x, y) \cdot \vec{x} + v(x, y) \cdot \vec{y} \quad (6.9.9)$$

déplacements en coordonnées cylindriques :

$$\vec{u}(r, \theta) = u(r, \theta) \cdot \vec{e}_r + v(r, \theta) \cdot \vec{e}_\theta \quad (6.9.10)$$

déformations en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\vec{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}(x, y) & \epsilon_{xy}(x, y) \\ \epsilon_{xy}(x, y) & \epsilon_{yy}(x, y) \end{pmatrix} \{\vec{x}, \vec{y}\} \quad (6.9.11)$$

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{zz} = \begin{cases} 0 & \text{déformations planes} \\ -\nu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) & \text{contraintes planes} \end{cases} \end{cases} \quad (6.9.12)$$

déformations en coordonnées cylindriques :

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{rr}(r, \theta) & \epsilon_{r\theta}(r, \theta) \\ \epsilon_{r\theta}(r, \theta) & \epsilon_{\theta\theta}(r, \theta) \end{pmatrix} \{ \vec{e}_r, \vec{e}_\theta \} \quad (6.9.13)$$

$$\begin{cases} \epsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \\ \epsilon_{zz} = \begin{cases} 0 & \text{déformations planes} \\ -\nu(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta}) & \text{contraintes planes} \end{cases} \end{cases} \quad (6.9.14)$$

6.9.5 loi de Hooke

état plan de contrainte, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{xx}) \\ \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{xy} \end{cases} \quad (6.9.15)$$

état plan de contrainte, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{rr} + \nu\epsilon_{\theta\theta}) \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{\theta\theta} + \nu\epsilon_{rr}) \\ \sigma_{r\theta} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{r\theta} \end{cases} \quad (6.9.16)$$

état plan de déformation, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\ \epsilon_{yy} = \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu)\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \\ \epsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \end{cases} \quad (6.9.17)$$

état plan de déformation, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \epsilon_{rr} = \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu)\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}) \\ \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu)\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}) \\ \epsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{r\theta} \end{cases} \quad (6.9.18)$$

6.9.6 fonction d'Airy

Les contraintes dérivent de la fonction d'Airy $\Phi(x, y)$ en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + V = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ \sigma_{yy} + V = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (6.9.19)$$

en coordonnées cylindriques $\Phi(r, \theta)$:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} + V = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} + V = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (6.9.20)$$

6.9.7 Propriété

Si le potentiel V est harmonique, alors la fonction d'AIRY est bi-harmonique.

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (6.9.21)$$

En coordonnées polaires :

$$\Delta^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (6.9.22)$$

