Cours de Géométrie Affine et Euclidienne

LFMA2
Mars 2017

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

1.1. Rappel d'algèbre linéaire

D'abord $\mathbb{R}$ est un corps commutatif. Cela veut dire que $\mathbb{R}$ est muni d'une addition $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et d'une multiplication $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés adéquates.

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) est un ensemble, disons E, muni d'une addition $+ : E \times E \to E$ et d'une multiplication externe $\mathbb{R} \times E \to E$ telles que

(i) $(E, +)$ est un groupe commutatif (on dit aussi groupe abélien),

(ii) la multiplication externe est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition,

(iii) on a $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$ et $1 \cdot x = x$.

Attention : un espace vectoriel n'est pas juste un ensemble ; c'est la donnée d'un ensemble, d'une addition et d'une multiplication externe.

Exemple : $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ de réels, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour l'addition des n-uplets composante par composante ($(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$) et pour la multiplication par un scalaire composante par composante ($\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$).

Terminologie. On appelle vecteur un élément d'un espace vectoriel. On rencontrera les notations u, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AB}$.

Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un sous-ensemble $F \subset E$ vérifiant : F est non vide, est stable par l'addition de E et par la multiplication par un scalaire. C'est alors un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire.

1.2. Colinéarité de deux vecteurs

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u, v deux éléments de E.

Définition. On dit que u et v sont colinéaires (ou encore liés) s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls tels que $\lambda u + \mu v$ soit l'élément 0 de E.

Proposition. Soient u, v deux éléments d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

(a) Si v est nul alors u et v sont colinéaires.

(b) Supposons $v \neq 0$. Alors u et v sont colinéaires si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'on ait $u = \lambda v$, auquel cas le réel λ est unique.

Terminologie. Si $u = \lambda v$ on dira que u est colinéaire à v.

Le point (b) montre que si v est un vecteur non nul de E alors l'ensemble des vecteurs colinéaires à v est un sous-espace vectoriel de E admettant l'ensemble $\{v\}$ pour base. C'est donc un espace vectoriel de dimension 1 (on dit aussi droite vectorielle).

Exercice. Deux droites vectorielles de E sont soit confondues, soit d'intersection égale à $\{0\}$.

Exercice. Caractérisation dans $\mathbb{R}^2$ par le déterminant : Notons par un vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Deux vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$ est nul.

On note $< u, v >$ le sous-espace vectoriel de E engendré par deux vecteurs u et v : c'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant u et v.

Proposition. Soient u, v deux vecteurs non colinéaires d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E ; alors

(a) Tout élément w de $< u, v >$ s'écrit $w = \lambda u + \mu v$ pour un et un seul couple (λ, μ) de réels.

(b) Si $E = \mathbb{R}^2$ alors $< u, v >= E$.

Le point (a) dit que l'ensemble $\{u, v\}$ est une base du sous-espace vectoriel de E engendré par u et v. Ce sous-espace est donc un espace vectoriel de dimension 2 (on dit aussi plan vectoriel). Les points (a) et (b) montrent que deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice. Soient $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$. Le déterminant $ad - bc$ est donc non nul. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^2$; alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est égal $\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ pour $\lambda = \frac{xd-yc}{ad-bc}$ et $\mu = \frac{ay-bx}{ad-bc}$. Ceci prouve le point (b) de la proposition ci-dessus.

Exemple : Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ qu'on appelle base canonique. Tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ s'écrit de façon évidente $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Il est facile de trouver un vecteur qui ne lui soit pas colinéaire, par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.

Formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$

On appelle forme linéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E une application $f : E \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout u, v dans E et pour tout λ dans $\mathbb{R}$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$. (Ces propriétés disent exactement que f est linéaire.)

Prenons $E = \mathbb{R}^2$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Posons $a = f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $b = f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$; on a par linéarité $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = ax + by$.

Inversement soit a, b deux réels et définissons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = ax + by$; alors f est une forme linéaire.

1.3. Droites affines de $\mathbb{R}^2$.

Notation : Soient M, N deux points d'un espace vectoriel E. On note $\overrightarrow{MN}$ le vecteur de E tel que $N = M + \overrightarrow{MN}$ pour l'addition de E. Si $E = \mathbb{R}^2$, $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a donc $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$

Question : Pourquoi parle t-on tantôt de vecteur, tantôt de point dans $\mathbb{R}^2$?

Définition. On appelle sous-espace affine d'un espace vectoriel E un sous-ensemble $F \subset E$ vérifiant :

Pour tout point M de F, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, N décrivant F, est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice. Soient F un sous-espace affine non vide d'un espace vectoriel E et M_0 un point de F. Montrer que les sous-ensembles de E : $\{\overrightarrow{MN}, M, N \in F\}$ et $\overrightarrow{M_0N}, N \in E\}$ coïncident. En partuculier le second ne dépend pas du choix de M_0.

Terminologie. Lorsque F est un sous-espace affine non vide d'un espace vectoriel E, on appelle direction de F, et on note souvent $\overrightarrow{F}$, le sous-espace vectoriel formé des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, M et N décrivant F. On appelle dimension de F la dimension de sa direction $\overrightarrow{F}$. Les sous-espaces affines de dimension 1 sont appelés droites affines, ceux de dimension 2 sont appelés plans affines. Par abus de langage on appelle point de E à la fois un élément de E et le sous-ensemble de E formé de ce seul élément.

Exercice. Les sous-ensembles de E formés d'un seul élément sont exactement les sous-espace affines de E de dimension 0, c'est à dire ceux dont la direction est le sous-espace vectoriel nul $\{0\}$.

Proposition. Soit D un sous-ensemble d'un espace vectoriel E ; alors D est une droite affine si et seulement si il existe un élément $A \in E$ et un vecteur non nul $u \in E$ tels que D soit l'ensemble $\{M \in E, \overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $u\}$. On dit alors que u est un vecteur directeur de D et que D est la droite passant par A et de vecteur directeur u.

Proposition. Soit D une droite affine d'un espace vectoriel E.

(a) L'ensemble des vecteurs directeurs de D est égale à l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, (A, B) décrivant les couples de points distincts de D.

(b) Deux vecteurs directeurs de D sont colinéaires.

Paramétrisation d'une droite affine de $\mathbb{R}^2$

Soit D la droite affine de $\mathbb{R}^2$ passant par un point $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$; alors D est l'ensemble des points décrits par l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) = \alpha t + a \\ y(t) = \beta t + b \end{cases}$ et inversement.

Equation cartésienne d'une droite affine de $\mathbb{R}^2$

Proposition. Soient a, b, c trois réels avec a et b non tous deux nuls.

(a) L'ensemble des points $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ est la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ passant par le point $(-\frac{c}{a}, 0)$ si $a \neq 0$, par le point $(0, -\frac{c}{b})$ sinon.

(b) Inversement la droite passant par $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ coïncide avec l'ensemble des points solutions de l'équation $ax + by - a\alpha - b\beta = 0$.

Terminologie. On dit que l'équation $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite formée de l'ensemble des points $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ solutions.

Interprétation : La droite d'équation $ax + by + c = 0$ s'interprète comme l'image réciproque de $-c$ par la forme linéaire $f : (x, y) \mapsto ax + by$. Sa direction est le noyau de f ($\mathrm{Ker}(f) = \{u \in \mathbb{R}^2, f(u) = 0\}$).

Exercice. Soient a, b, c trois réels avec a et b non tous deux nuls et soit D la droite d'équation $ax+by+c = 0$. Quels sont les autres équations cartésiennes de D ?

Définition. On dit que deux droites affines sont parallèles si elles ont même direction (donc si elles admettent un même vecteur directeur). On dit qu'elles sont sécantes si leur intersection est réduite à un point.

Voici les premiers énoncés de la géométrie affine dans $\mathbb{R}^2$:

Proposition. Dans $\mathbb{R}^2$:

(a) Par deux points distincts il passe une et une seule droite.

(b) Deux droites affines sont soit sécantes soit parallèles.

(c) Par un point donné il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée.

Les énoncés (a) et (c) sont encore vrais dans un espace de dimension supérieure à 2. L'énoncé (b) est faux dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice. Déduire de cette proposition que deux droites parallèles sont soient confondues soit disjointes.

Faisceau de droites

Définition. Un faisceau de droites est soit l'ensemble des droites affines passant par un point donné, soit l'ensemble des droites parallèles à une droite donnée.

Proposition. Soient D, D' deux droites non confondues de $\mathbb{R}^2$ d'équation respective $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$. Il existe un et un seul faisceau de droites contenant D et D' : c'est l'ensmble des droites d'équation $\alpha(ax + by + c) + \beta(a'x + b'y + c') = 0$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls.

Exercice. Quel est l'ensemble des droites d'équation $ax + by + c + \beta(a'x + b'y + c') = 0$, β décrivant $\mathbb{R}$?

1.4 Mesure algébrique sur la droite

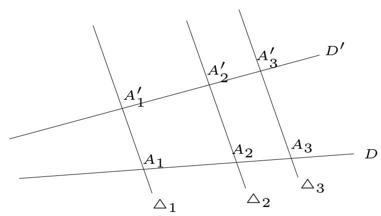
Soient D une droite affine d'un espace vectoriel E et u un vecteur directeur de D. Soient A, B deux points de D ; on appelle mesure (ou longueur) algébrique du segment $[A, B]$ relativement à u le réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda u$. On la note $\overline{AB}$.

Soient A, B, A', B' quatre points de D, avec A' distinct de B'. Le rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ (bien défini !) ne dépend pas du choix du vecteur directeur u.

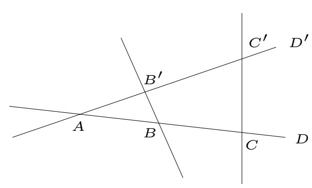
Le théorème suivant résulte de ce que deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ forment une base de $\mathbb{R}^2$:

Théorème [de thales]. Soient D et D' deux droites du plan $\mathbb{R}^2$, $\triangle_1$, $\triangle_2$ et $\triangle_3$ trois droites parallèles entre elles coupant D en les points A_1, A_2, A_3 et D' en A'_1, A'_2, A'_3 respectivement. On suppose $\triangle_1$ et $\triangle_3$ non confondues alors on a l'égalité

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \frac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A'_1A'_3}} .$$



Théorème. Soient D et D' deux droites du plan $\mathbb{R}^2$ sécantes en un point A, B, C deux points de D distincts de A et B', C' deux points de D' également distincts de A. Alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles si et seulement si on a l'égalité $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$.



═ ═

Exercice. Montrer que chacun de ces deux théorèmes se déduit de l'autre.

1.5. Barycentre

Soient E un $\mathbb{R}$ espace vecoriel, n un entier strictement positif, $A_1, \ldots, A_n$ n points de E, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ n réels. On étudie la fonction $\varphi : E \to E$, $M \mapsto \sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

Proposition. Avec les données ci-dessus

(a) Si $\sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i$ est nul alors $\varphi(M)$ ne dépend pas de M.

(b) Si $\sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i$ est non nul alors il existe un unique point G tel que $\varphi(G) = 0$ et on a pour tout point M $\varphi(M) = (\sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i)\overrightarrow{GM}$. En particulier l'application φ est bijective.

Preuve : on compare, pour M et M' deux points de E, $\varphi(M)$ et $\varphi(M')$:

$$\varphi(M') = \varphi(M) + (\sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i)\overrightarrow{MM'} .$$

Si $(\sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i)$ est non nul on appelle barycentre du système de points pondérés (A_i, α_i) le point G tel que $\varphi(G) = 0$.

Terminologie. On dit aussi que G est le barycentre des points A_i affectés des poids α_i. On dit qu'un point M de E est un barycentre des points A_i s'il existe n-réels $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tels que M soit le barycentre du système (A_i, α_i). On appelle isobarycentre des points A_i le barycentre des points A_i affectés chacun du poids 1.

Il existe un plus petit sous-espace affine de E contenant tous les A_i : c'est l'intersection de tous les sous-espaces affines de E contenant chacun des A_i. On l'appelle le sous-espace affine engendré par les A_i.

Proposition. Soient $A_1,\ldots,A_n$ n points d'un espace vectoriel E. L'ensemble des barycentres des points A_i coïncide avec le sous-espace affine de E engendré par les A_i.

Exemple. Soient A et B deux points distincts de E. L'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB). L'ensemble des barycentres des points A et B affectés de poids positifs est le segment $[A, B]$. Voir à ce propos le paragraphe sur la convexité.

Transitivité dans le calcul du barycentre

Proposition. Soient m et n deux entiers strictement positifs, $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq m}$ et $(B_j, \beta_j)_{1\leq j\leq n}$ deux systèmes de points pondérés d'un espace vectoriel E. On suppose que les scalaires $\sum_{1\leq j\leq n} \beta_j$ et $\sum_{1\leq i\leq m} \alpha_i + \sum_{1\leq j\leq n} \beta_j$ sont tous deux non nuls. On note B le barycentre du système (B_j, β_j). Alors le barycentre du système de $m + n$ points pondérés $(A_i, \alpha_i), (B_j, \beta_j)$ coïncide avec le barycentre des $m + 1$ points pondérés $(A_i, \alpha_i), (B, \sum_{1\leq j\leq n} \beta_j)$.

Preuve : les applications $\varphi : E \to E$ associées à chacun de ces systèmes de points pondérés sont les mêmes.

Première application. Soit ABC un triangle non dégénéré du plan. Les trois médianes s'intersectent en l'isobarycentre des points A, B, C (donc sont concourrantes).

1.6. Compléments sur le chapitre 1

Egalité de deux droites affines

Soit E un espace vectoriel. La définition que nous avons donnée d'une droite affine de E est celle d'un sous-espace affine non vide de E dont la direction est de dimension 1, c'est à dire est un sous-espace vectoriel de E engendré par un vecteur non nul. Nous avons rencontré plusieurs caractérisations d'une droite affine : droite passant par un point A de vecteur directeur u ($u \neq 0$), droite passant par deux points distincts A, B, et, dans $\mathbb{R}^2$, droite d'équation cartésienne donnée.

Une droite affine de E est un sous-ensemble de E (vérifiant certaines propriétés). Par définition, deux droites affines de E sont égales si et seulement si elles ont les mêmes éléments.

Proposition.

(a) Deux droites affines de E sont égales si et seulement elles admettent un point commun et si elles ont même direction.

(b) La droite passant par un point A et de vecteur directeur u est égale à la droite passant par un point B et de vecteur directeur v si et seulement si u et v sont colinéaires et si $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à u.

(c) Soient $A \neq B$ et $C \neq D$ quatre points de E. Les droites (AB) et (CD) sont égales si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et si $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

(d) Dans $\mathbb{R}^2$ deux droites d'équation respective $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont égales si et seulement si les triplets (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnels (c'est-à-dire s'ils sont colinéaires comme éléments de $\mathbb{R}^3$).

Mesure algébrique sur un faisceau de droites parallèles

Un faisceau de droites parallèles est l'ensemble des droites parallèles à une droite donnée. Il est donc caractérisé par la donnée d'un vecteur non nul de E, vecteur directeur commun à chacune des droites du faisceau. On appelle mesure algébrique sur les droites du faisceau relativement à u l'application qui à un couple de points M, N d'une même droite du faisceau associe l'unique scalaire λ tel que $\overrightarrow{MN} = \lambda u$. On note ce scalaire $\overline{MN}$.

Soient (M, N), (M', N') deux couples de points, chacun des couples étant formé de deux points d'une même droite du faisceau et M' étant distincts de N'. Le quotient $\frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}}$ ne dépend pas du choix du vecteur u.

On complète le second théorème de Thales donné en section 1.4 :

Théorème. Soient D et D' deux droites du plan $\mathbb{R}^2$ sécantes en un point A. Soient B, C deux points de D distincts de A et B', C' deux points de D' également distincts de A. Alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles si et seulement si on a l'égalité $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}}$.

Exercice. Y a t-il une relation entre les grandeurs $\overline{A_1A_1'}$, $\overline{B_1B_1'}$ et $\overline{C_1C_1'}$ sous les hypothèses du premier théorème de Thales ?

2. Structure euclidienne canonique sur l'espace $\mathbb{R}^2$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une application $E \times E \to \mathbb{R}$ — on notera uv l'image d'un couple (u, v) — vérifiant les propriétés suivantes :

- Pour tout $u \in E$, l'application $E \to \mathbb{R}$, $v \mapsto uv$ est linéaire. De même pour tout $v \in E$ l'application $u \mapsto uv$ est linéaire. (On dit alors que l'application $(u, v) \mapsto uv$ est bilinéaire.)
- On a l'égalité $uv = vu$ pour tous $u, v \in E$. (On dit que l'application $(u, v) \mapsto uv$ est symétrique.)
- uu est strictement positif dès que u est différent de 0.

Terminologie. On appelle espace vectoriel euclidien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Exemple. Soit n un entier strictement positif. L'application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

est un produit scalaire qu'on appelle produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Orthogonalité.

Définition. On dit que deux vecteurs u, v d'un espace vectoriel euclidien E sont orthogonaux si leur produit scalaire uv est nul. On dit que deux sous-espaces vectoriels F, G de E sont orthogonaux si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G. On dit que deux sous-espaces affines non vides de E sont orthogonaux si leurs directions sont orthogonales.

Soit F un sous-espace affine non vide de E et u un vecteur. On dira que u est orthogonal à F si u est orthogonal à tout vecteur de la direction de F.

Proposition. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique :

(a) Soient a, b, c trois réels avec a et b non tous deux nuls. Le vecteur $\binom{a}{b}$ est un vecteur non nul orthogonal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$ et tout vecteur orthogonal à cette droite lui est colinéaire.

(b) Soient $\binom{a}{b}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ et $A = \binom{x_0}{y_0}$ un point de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des points M de $\mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\binom{a}{b}$ est la droite d'équation $ax + by - ax_0 - by_0 = 0$. C'est l'unique droite passant par A et orthogonale à u.

Terminologie. Dans $\mathbb{R}^2$ on appelle vecteur normal à une droite affine un vecteur non nul orthogonal à cette droite.

Norme et distance.

Soit E un espace vectoriel eucidien. L'application $E \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \sqrt{uu}$ (bien définie!) est une norme sur E qu'on note $u \mapsto \|u\|$: c'est une application vérifiant

- Pour tout $u \in E$, $\|u\|$ est positif et est nul si et seulement si u est nul.
- Pour tous $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$.
- Pour tous $u, v \in E$, on a $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

On l'appelle la norme euclidienne sur E.

Proposition. Soient u, v deux éléments d'un espace vectoriel euclidien ;

(a) On a $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2uv$.

(b) On a $|uv| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

L'application $E \times E \to \mathbb{R}$, $(M, N) \mapsto \|\overrightarrow{MN}\|$ est une distance sur E qu'on note $(M, N) \mapsto MN$: c'est une application vérifiant :

- Pour tous $M, N \in E$, MN est positif et est nul si et seulement si M égale N.
- Pour tous $M, N, P \in E$ on a $MP \leq MN + NP$. (C'est l'inégalité triangulaire.)

On l'appelle la distance euclidienne sur E.

Le point (b) de la proposition ci-dessus donne tout de suite le théorème de Pythagore : Si ABC est un triangle rectangle en A alors on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Exercice. Montrer la réciproque du théorème de Pythagore.

Exercice. Soit E un espace vectoriel euclidien. Montrer que si ABC est un triangle dont on note A' le milieu du côté BC, on a la relation $AB^2 + AC^2 = \frac{BC^2}{2} + 2AA'^2$. Inversement montrer que si E est muni d'une norme telle que la distance associée vérifie la relation ci-dessus, alors cette norme provient d'un produit scalaire.

Soient $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ un système de n points pondérés d'un espace vectoriel euclidien E. Soit φ l'application $E \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \sum_i \alpha_i (MA_i)^2$. On a $\varphi(M') = \varphi(M) + (\sum_i \alpha_i)(MM')^2 + \overrightarrow{M'M} \cdot (\sum_i \alpha_i \overrightarrow{MA_i})$ de sorte que :

- Si $\sum_i \alpha_i$ est nul, φ est constante.
- Si $\sum_i \alpha_i$ est non nul, on a $\varphi(M) = \varphi(G) + (\sum_i \alpha_i)(GM)^2$ où G est le barycentre du système (A_i, α_i).

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

Soient A, B deux points d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On appelle segment joignant A et B et on note $[A, B]$ l'ensemble des barycentres des points A et B affectés de poids positifs. C'est une partie de la droite (AB) si A est distinct de B, le singleton $\{A\}$ si $A = B$.

Exercice. Pour $A \neq B$ montrer les égalités

$$[A, B] = \{M \in E, \exists\lambda \in [0, 1], \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}\} = \{M \in (AB), \overline{MA} \cdot \overline{MB} \leq 0\} .$$

Proposition. Soient E un espace vectoriel euclidien et A, B deux points de E. On a l'équivalence

$$MA + MB = AB \Leftrightarrow M \in [A, B] .$$

Preuve : Supposons A distinct de B. On se ramène à montrer que pour u et v deux vecteurs de E avec $v \neq 0$ on a $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ si et seulement si $\exists\lambda > 0, u = \lambda v$. La première égalité élevée au carré (les deux termes sont positifs) se traduit par $u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\|$. Ceci n'est possible que si u et v sont colinéaires et si $u \cdot v$ est positif.

Distance entre deux sous-espaces affines

Soient F et G deux sous-espaces affines non vide d'un espace vectoriel euclidien. L'ensemble des distances entre deux points de F et de G respectivement est une partie non vide minorée (par 0) de $\mathbb{R}$.

Définition. On appelle distance entre F et G le réel $\mathrm{Inf}_{M\in F, N\in G} MN$.

Distance entre un point et une droite dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, entre un point et un plan ou entre deux droites dans $\mathbb{R}^3$

4. Espaces affines abstraits, applications affines.

4.1. Espaces affines

Définition. Un espace affine est un triplet formé d'un ensemble X, d'un espace vectoriel E et d'une application $X \times X \to E$, qu'on note $(M, N) \mapsto \overrightarrow{MN}$, vérifiant :

- Pour tout élément A de X l'application $X \to E$, $M \mapsto \overrightarrow{AM}$ est bijective.
- Pour tout triplet A, B, C d'éléments de X on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).

Terminologie. On note pour faire court X l'espace affine $(X, E, X \times X \to E)$. Lorsque X est non vide on appelle E la direction de X et on la note $\overrightarrow{X}$. On appelle dimension de X la dimension de sa direction comme espace vectoriel, c'est à dire le cardinal d'une de ses bases.

Exemple.

- Soit X un ensemble réduit à un seul élément. (On dit aussi un point, au risque d'une confusion car on appelle également point un élément d'un espace affine !) Il existe un unique $\mathbb{R}$-espace vectoriel E (à isomorphisme près) et une seule application $X \times X \to E$ faisant de $(X, E, X \times X \to E)$ un espace affine : C'est $E = \{0\}$ et $X \times X \to E$ l'unique application entre ensembles ayant un seul élément.

- Soit E un espace vectoriel ; alors le triplet $(E, E, E \times E \to E, (u, v) \mapsto v - u)$ est un espace affine de direction E qu'on appelle structure affine canonique sur E ou espace affine sous-jacent à E.

A l'application $X \times X \to \overrightarrow{X}$ on associe l'application $X \times \overrightarrow{X} \to X$, qui à un couple (M, u) associe l'unique élément N de X tel que $\overrightarrow{MN} = u$. On note cet élément $M + u$. L'application $X \times \overrightarrow{X} \to X$ vérifie alors les axiomes de ce qu'on appelle une action (à droite) du groupe $\overrightarrow{X}$ sur X.

4.2. Applications affines

Rappel : Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour notre propos). Une application d'ensembles $\varphi : E \to F$ est linéaire si on a

- $\forall u, v \in E, \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

PROPOSITION. Soient E, F deux ($\mathbb{R}$-) espaces vectoriels de même dimension finie et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. On a les équivalences :

φ est bijective $\Leftrightarrow$ φ est injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ φ est surjective $\Leftrightarrow$ $\exists g : F \to E,\ g\varphi = \mathrm{Id}_E$ $\Leftrightarrow$ $\exists g : F \to E,\ \varphi g = \mathrm{Id}_F$.

DÉFINITION. Soient X, Y deux espaces affines sur le même corps ($\mathbb{R}$ pour ce cours) avec X non vide. On dit qu'une application d'ensembles $f : X \to Y$ est affine s'il existe une application linéaire $\varphi : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}$ telle que pour tous $M, N \in X$, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$. Si φ existe, elle est unique et on l'appelle la partie linéaire de f.

Exemple. Soit X un espace affine (non vide) et u un vecteur de $\overrightarrow{X}$. L'application $X \to X$, $M \mapsto M + u$ est une application affine dont la partie linéaire est l'identité. On l'appelle la translation de vecteur u.

Soient X et Y deux espaces affines sur le même corps avec X non vide. On note $\mathrm{L}(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ l'ensemble des applications linéaires de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{Y}$, $\mathcal{A}\mathrm{ff}(X, Y)$ l'ensemble des applications affines de X dans Y et Φ l'application $\mathcal{A}\mathrm{ff}(X, Y) \to \mathrm{L}(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ qui à une application affine associe sa partie linéaire.

PROPOSITION. Avec les notations ci-dessus :

(a) L'application Φ respecte la composition des applications.

(b) Une application $f \in \mathcal{A}\mathrm{ff}(X, Y)$ est bijective si et seulement si sa partie linéaire $\Phi(f)$ est bijective, auquel cas l'application réciproque f^{-1} est affine.

(c) $f \in \mathcal{A}\mathrm{ff}(X, X)$ est une translation si et seulement si $\Phi(f)$ est l'identité.

On note GL(E), respectivement $\mathrm{GA}(X)$, l'ensemble des applications linéaires bijectives d'un espace vectoriel E dans lui-même, respectivement l'ensemble des applications affines bijectives d'un espace affine (non vide) X dans lui même. La proposition ci-dessus montre que la restriction de Φ à $\mathrm{GA}(X)$ est un morphisme de groupes $\mathrm{GA}(X) \to \mathrm{GL}(\overrightarrow{X})$.

4.3. Repères affines

Choix d'une origine

Soit X un espace affine non vide. A tout choix d'un point O de X correspond l'application $X \to \overrightarrow{X}$, $M \mapsto \overrightarrow{OM}$. Cette application est affine, bijective et de partie linéaire l'identité. Elle réalise donc un isomorphisme affine entre X et sa direction $\overrightarrow{X}$. Tout isomorphisme affine de X dans $\overrightarrow{X}$ dont la partie linéaire est l'identité est de cette forme.

Soient $f : X \to Y$ une application affine de partie linéaire φ et O, O' deux points de X. L'application f s'écrit $M \mapsto f(O) + \varphi(\overrightarrow{OM}) = f(O) + \varphi(\overrightarrow{OO'}) + \varphi(\overrightarrow{O'M})$ et réciproquement tout application de cette forme est affine. En particulier l'ensemble des applications affines $f : X \to X$ telles que $f(O) = O$ s'identifie via Φ à $\mathrm{L}(\overrightarrow{X})$.

Repères cartésiens, repères affines

Repères cartésiens, repères affines

Soit X un espace affine de dimension n. On appelle repère cartésien de X un $(n+1)$-uplet $(O, e_1, \ldots, e_n)$ où O est un point de X et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel $\overrightarrow{X}$.

Exemple. La famille formée du vecteur nul et de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est un repère cartésien de l'espace affine sous-jacent à $\mathbb{R}^n$, qu'on appelle repère cartésien canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout point $M \in X$ il existe une unique famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de réels telle que $\overrightarrow{OM} = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. On appelle (x_i) la famille des coordonnées de M dans le repère cartésien $(O, e_1, \ldots, e_n)$. L'application $\mathbb{R}^n \to X$, $(x_i) \mapsto O + \sum_i x_ie_i$ est un isomorphisme affine entre l'espace affine sous-jacent à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et X.

On appelle repère affine de X une famille $(A_0, \ldots, A_n)$ de points de X tel que $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0, A_n})$ soit un repère cartésien de X.

Observons que si $(O, e_1, \ldots, e_n)$ est un repère cartésien de X alors la famille $(O, O + e_1, \ldots, O + e_n)$ est un repère affine de X. Il y a donc équivalence entre la donnée d'un repère cartésien et celle d'un repère affine.

Propriété universelle des repères affines

Proposition. Soient X un espace affine muni d'un repère affine $(A_0, \ldots, A_n)$, Y un espace affine sur le même corps de base et $(B_0, \ldots, B_n)$ une famille de $n+1$ points de Y. Alors il existe une et une seule application affine $f : X \to Y$ telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout i.

Compléments : applications affines et sous-espaces affines

La définition d'un sous-espace affine d'un espace affine est la copie de celle de sous-espace affine d'un espace vectoriel :

Définition. Une partie F d'un espace affine X est un sous-espace affine si et seulement si pour tout point M de F, l'ensemble $\{\overrightarrow{MN}, N \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{X}$.

Si F est un sous-espace affine non vide de X, le sous-espace vectoriel $\{\overrightarrow{MN}, N \in F\}$ ne dépend pas de $M \in F$ et coïncide avec le sous-ensemble $\{\overrightarrow{MN}, M, N \in F\}$ de $\overrightarrow{X}$. L'application $F \times F \to \{\overrightarrow{AB}, A, B \in F\}$, $(M, N) \mapsto \overrightarrow{MN}$ fait de F un espace affine de direction $\{\overrightarrow{AB}, A, B \in F\}$.

Tout sous-espace affine non vide de X s'écrit $O + \overrightarrow{F}$ pour O un point de X et $\overrightarrow{F}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{X}$.

Proposition. Soit $f : X \to Y$ une application affine de partie linéaire φ

(a) L'image par f d'un sous-espace affine F de X est un sous-espace affine de Y de direction $\varphi(\overrightarrow{F})$.

(b) L'image réciproque par f d'un sous-espace affine G de Y (c'est à dire l'ensemble $\{x \in X, f(x) \in G\}$) est soit vide soit un sous-espace affine de direction $\varphi^{-1}(\overrightarrow{G}) = \{u \in \overrightarrow{X}, \varphi(u) \in \overrightarrow{G}\}$.

4.4. Retour sur les barycentres

Soit X un espace affine et $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$ un système de n points pondérés de X. On adapte la définition du barycentre du système au cadre affine en considérant l'application $\varphi : X \to \overrightarrow{X}$, $M \mapsto \sum_i \alpha_i\overrightarrow{MA_i}$. On a $\varphi(M') = \varphi(M) + (\sum_i \alpha_i)\overrightarrow{M'M}$ de sorte que φ est une application affine dont la partie linéaire est l'homothétie vectoriel sur $\overrightarrow{X}$ de rapport $-\sum_i \alpha_i$.

Si $\sum_i \alpha_i$ est nul, l'application φ est constante. Sinon φ est bijective et il existe un unique point G tel que $\varphi(G) = 0$, qu'on appelle le barycentre du système (A_i, α_i).

Coordonnées barycentriques

Soient X un espace affine (non vide) de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $(A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine de X.

Proposition. Pour tout point M de X il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tel que $\sum_i \alpha_i = 1$ et M est barycentre du système (A_i, α_i).

Preuve : On a l'égalité $\alpha_0 \overrightarrow{MA_0} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MA_0} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}$ donc on a équivalence entre $\alpha_0 \overrightarrow{MA_0} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = 0$ et $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}$. Or cette dernière écriture existe et est unique puisque $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de $\overrightarrow{X}$.

Remarque : on sait que si M est barycentre du système (A_i, α_i) alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ non nul, M est barycentre du système $(A_i, \alpha\alpha_i)$. Autrement dit le $(n+1)$-uplet (α_i) est déterminé à un facteur non nul près. La condition $\sum_i \alpha_i = 1$ est une normalisation : elle supprime cette indétermination.

Terminologie. On appelle coordonnées barycentriques d'un point M dans le repère affine (A_i) tout $(n+1)$-uplet (α_i) tel que M soit le barycentre du système (A_i, α_i). On appelle coordonnée barycentrique normalisée l'unique $(n+1)$-uplet (α_i) vérifiant de plus $\sum_i \alpha_i = 1$.

Nous donnons ci-dessous un énoncé plus précis expliquant le caractère affine des coordonnées barycentriques normalisées dans un repère affine.

Dans $\mathbb{K}^{n+1}$ l'ensemble, disons $\overrightarrow{H}$ des $(n+1)$-uplets $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ tels que $\sum_i \alpha_i = 0$ est un hyperplan vectoriel : c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $(\alpha_i) \mapsto \sum_i \alpha_i$. L'ensemble H des $(n+1)$-uplets (α_i) tel que $\sum_i \alpha_i = 1$ est donc un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{H}$ (un hyperplan affine) : il s'écrit $(1, 0, \dots, 0) + \overrightarrow{H}$.

Proposition. Soient $A_0, \dots, A_n$ $(n+1)$ points d'un espace affine X sur un corps $\mathbb{K}$.

(a) L'application $\Psi_{(A_i)} : H \to X$ qui à un $(n+1)$-uplet (α_i) associe le barycentre du système (A_i, α_i) est une application affine.

(b) Si $(A_0, \dots, A_n)$ est un repère affine de X alors $\Psi_{(A_i)}$ est bijective ; autrement dit c'est un isomorphisme affine de l'hyperplan affine H de $\mathbb{K}^{n+1}$ dans X.

La réciproque de (b) est également vrai : si $\Psi_{(A_i)}$ est bijective alors (A_i) est un repère affine de X.

Barycentres et applications affines

Proposition. Soient X, Y deux espaces affines sur le même corps et $f : X \to Y$ une application d'ensembles. f est affine si et seulement si pour tout entier n et pour tout système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $\sum_i \alpha_i \neq 0$, l'image par f du barycentre du système est le barycentre du système $(f(A_i), \alpha_i)$.

Preuve : Si f est affine de partie linéaire φ alors on a pour tout point M et pour tout système de point pondéré (A_i, α_i) $\sum_i \alpha_i \overrightarrow{f(M)f(A_i)} = \varphi(\sum_i \overrightarrow{MA_i})$ donc si M est barycentre du système (A_i, α_i), $f(M)$ est barycentre du système $(f(A_i), \alpha_i)$.

Inversement supposons X de dimension finie et soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de X. Si f préserve les barycentres alors f est la composée $\Psi_{(f(A_i))} \circ \Psi_{(A_i)}^{-1}$, donc la composée de deux applications affines donc f est affine.

4.5. Applications affines entre deux droites

On commence par la

Proposition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension 1. Une application linéaire $E \to F$ est nulle ou bijective.

Rappelons qu'une droite affine est un espace affine sur un corps $\mathbb{K}$ non vide dont la direction est de dimension 1.

Soient D une droite et u un vecteur directeur de D, c'est à dire un élément non nul de la direction $\overrightarrow{D}$ de D. On définit relativement à u une mesure algébrique sur D : c'est l'application $D \times D \to \mathbb{K}$ qui à un couple de points (M, N) associe l'unique scalaire λ tel que $\overrightarrow{MN} = \lambda \cdot u$. Si A, B, C sont trois points de D avec A distinct de C alors le rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ ne dépend pas du choix de u : il est caractérisé par $\overrightarrow{AB} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Parmis les applications affines entre deux droites il y a bien sûr les applications constantes. La proposition suivante caractérisent les autres.

Proposition. Soient D, D' deux droites affines sur un même corps $\mathbb{K}$ et $f : D \to D'$ une application d'ensembles ; alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est affine et non constante.

(ii) f est affine et bijective (donc un isomorphisme affine entre D et D').

(iii) f est injective et pour tout triplet (A, B, C) de points de D avec A distinct de C on a

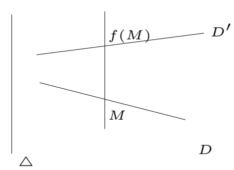
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{f(A)f(B)}}{\overline{f(A)f(C)}} .$$

(On dit alors que f préserve le rapport des mesures algébriques.)

Illustration avec le théorème de Thalès

Soient D et D' deux droites du plan affine et soit $\triangle$ une droite sécante à D et sécante à D'. On considère l'application $f : D \to D'$ qui à un point M de D associe le point intersection de D' avec la parallèle à $\triangle$ passant par M.

Montrer que f est bien définie et qu'elle est injective. Montrer en utilisant le théorème de Thalès et la proposition ci-dessus que f est affine.



4.6. Homothéties-translations

On considère dans ce paragraphe les applications $X \to X$ où X est un espace affine sur un corps $\mathbb{K}$.

Proposition. Soit φ une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même ; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\varphi = k\mathrm{Id}$ pour un scalaire $k \in \mathbb{K}$

(ii) Pour tout élément $u \in E$, $\varphi(u)$ est colinéaire à u.

Pour $k \neq 0$ on appelle homothétie vectoriel de rapport k l'application $k\mathrm{Id}$ de E dans E.

Exercice. Montrer qu'un endomorphisme $\varphi \in \mathrm{L}(E)$ est l'application nulle ou une homothétie vectoriel si et seulement si pour tout $\psi \in \mathrm{L}(E)$ on a $\varphi\psi = \psi\varphi$

Définition. Soient A un point de X et $k \in \mathbb{K}$ un scalaire non nul. On appelle homothétie de centre A et de rapport k l'application $X \to X$, $M \mapsto A + k\overrightarrow{AM}$. C'est donc une application affine de partie linéaire $k\mathrm{Id}$, donc une bijection affine puisque k est non nul.

Proposition. Soit $f : X \to X$ une application affine. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une homothétie de rapport $k \neq 1$.

(ii) La partie linéaire de f est une homothétie vectorielle de rapport $k \neq 1$.

Pour Démontrer l'implication (ii)$\Rightarrow$(i) on montre l'existence d'un point fixe A pour f, car alors $f(A+u) = f(A) + \varphi(u) = A + ku$. L'existence (et l'unicité) d'un point fixe est donné par la proposition suivante.

Proposition. Soient X un espace affine (non vide) de dimension finie et $f : X \to X$ une application affine de partie linéaire φ.

(a) L'ensemble des points fixes de f, $\{M \in X, f(M) = M\}$, est un sous-espace affine de X qui est soit vide soit de direction le noyau de $\varphi - \mathrm{Id}$.

(b) Si $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) = \{0\}$ alors f admet un et un seul point fixe.

Preuve du point (b) : Soit O un point de X. On cherche M tel que $f(M) = M$. Cela se traduit par $\overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{OM}$ donc par $\overrightarrow{Of(O)} + \varphi(\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} = 0$. Or $\varphi - \mathrm{Id}$ est injective par hypothèse et $\overrightarrow{X}$ est de dimension finie, donc $\varphi - \mathrm{Id}$ est bijective et il existe un unique vecteur u tel que $(\varphi - \mathrm{Id})(u) = \overrightarrow{f(O)O}$. Le point $M = O + u$ est alors l'unique point fixe de f.

L'unicité de M dans le point (b) esst cohérente avec le point (a) : un sous-espace affine non vide dont la direction est $\{0\}$ est réduit à un point.

Exemple. Si f est une translation de vecteur u le noyau de $\varphi - \mathrm{Id}$ est $\overrightarrow{X}$ entier. L'ensemble de ses points fixes de f est vide si $u \neq 0$, l'espace X entier si $u = 0$.

On sait que les applications affines dont la partie linéaire est l'identité sont les translations associée à un vecteur de $\overrightarrow{X}$. On obtient :

Proposition. Soit $f : X \to X$ une application affine. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une homothétie ou une translation.

(ii) La partie linéaire de f est une homothétie vectorielle.

(iii) Pour toute droite D de X, $f(D)$ est une droite parallèle à D.

Expliquons la troisième condition : Soient D une droite de X, A un point de D et notons φ la partie linéaire de f. L'image par f de D est le sous-espace affine $f(A) + \varphi(\overrightarrow{D})$ de direction $\varphi(\overrightarrow{D})$. C'est donc un point ou une droite suivant que la restriction de φ à $\overrightarrow{D}$ est nulle ou pas. La condition (iii) se traduit par :

(iv) Pour toute droite vectorielle $\overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{X}$ on a $\varphi(\overrightarrow{D}) = \overrightarrow{D}$.

Or φ est une homothétie vectorielle si et seulement si (iv) est vérifiée.

Comme l'application $\Phi : \mathcal{A}\!\mathit{ff}(X) \to \mathrm{L}(\overrightarrow{X})$, qui à une application affine associe sa partie linéaire, respecte la composition, la proposition ci-dessus montre que la composée de deux homothétie-translations est une homothétie-translation.

Proposition. Le sous-ensemble de $\mathcal{A}\!\mathit{ff}(X)$ formé des homothéties et des translations est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(X)$, image réciproque par Φ du sous-groupe de $\mathrm{GL}(\overrightarrow{X})$ formé des homothéties vectorielles.

Exercice : Construire géométriquement le centre de la composée de deux homothéties lorsqu'il existe.

5. Sous-espaces affines, hyperplans et équations

6. Ensembles convexes

Rappelons que si A et B sont deux points d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, le segment $[A, B]$ est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de poids positifs.

Définition. Une partie F de E est dite convexe si pour toute paire de points A, B dans F le segment $[A, B]$ est inclus dans F.

Exemple. Soient E un espace vectoriel euclidien, A un point de E et r un réel positif, alors l'ensemble $B(A, r) = \{M \in E, AM \leq r\}$ (la boule de centre A et de rayon r) est une partie convexe de E. (Exercice !)

Soit F une partie de E. L'intersection de toutes les parties convexes contenant F est une partie convexe et c'est la plus petite contenant F. On l'appelle l'enveloppe convexe de F.

On appelle polygône l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points d'un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

6. Compléments : autres exemples d'applications affines

Soient X un espace affine (non vide), F un sous-espace affine non vide de X et $\overrightarrow{G}$ un supplémentaire de $\overrightarrow{F}$ dans $\overrightarrow{X}$. On note $p_{\overrightarrow{F}}$, respectivement $p_{\overrightarrow{G}}$, la projection de $\overrightarrow{X}$ sur $\overrightarrow{F}$, respectivement sur $\overrightarrow{G}$, résultant de l'écriture $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$. Soit enfin A un point de F.

On appelle projection sur F parallèlement à $\overrightarrow{G}$ l'application affine

$$p : M \mapsto A + p_{\overrightarrow{F}}(\overrightarrow{AM}) \ .$$

Propriétés : p ne dépend pas du choix de $A \in F$; F est l'ensemble des points fixes de p ; la composée $p \circ p$ est p.

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à $\overrightarrow{G}$ l'application affine

$$s : M \mapsto A + p_{\overrightarrow{F}}(\overrightarrow{AM}) - p_{\overrightarrow{G}}(\overrightarrow{AM}) \ .$$

Propriétés : s ne dépend pas du choix de $A \in F$; F est l'ensemble des points fixes de s ; la composée $s \circ s$ est l'identité.

On appelle affinité de base F parallèlement à $\overrightarrow{G}$ et de rapport $a \in \mathbb{K}$ l'application affine $M \mapsto A + p_{\overrightarrow{F}}(\overrightarrow{AM}) + ap_{\overrightarrow{G}}(\overrightarrow{AM})$. C'est la projection si $a = 0$, la symétrie si $a = -1$, l'identité si $a = 1$.

Cas particulier : Soient X est un espace affine euclidien (de dimension finie) et F est un sous-espace affine non vide de X. On appelle projection orthogonale sur F et on note p_F la projection sur F parallèlement à $\overrightarrow{F}^\perp$ (l'orthogonal de $\overrightarrow{F}$ dans $\overrightarrow{X}$ pour le produit scalaire). On appelle symétrie orthogonale par rapport à F et on note s_F la symétrie par rapport à F parallèlement à $\overrightarrow{F}^\perp$.

Proposition. Soient F un sous-espace affine non vide d'un espace affine euclidien de dimension finie et M un point de X ; alors on a pour tout point $N \in F$ l'inégalité $MN \geq M\mathrm{p}_F(M)$ avec égalité si et seulement si $N = \mathrm{p}_F(M)$.

7. Sous-espaces affines, hyperplans et équations

Rappel d'algèbre linéaire

Soit E un espace vectoriel. On appelle hyperplan vectoriel de E un sous-espace vectoriel H tel que $\dim(E/H) = 1$. Si E est de dimension finie n, un hyperplan vectoriel est donc un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Proposition. Soit H une partie d'un espace vectoriel E ; alors H est un hyperplan vectoriel si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Si f est une telle forme linéaire, $f(x) = 0$ est une équation (linéaire) de H. Observons que pour g une autre forme linéaire on a $H = \mathrm{Ker}(g)$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}, g = \lambda f$. (Cf cours sur la dualité.)

Si E est de dimension finie n et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E alors H s'écrit

$$H = \{x = \sum_i x_i e_i \in E, \sum_i x_i f(e_i) = 0\} \ .$$

Inversement si $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ alors il existe une unique forme linéaire f vérifiant $f(e_i) = a_i$, auquel cas l'équation $\sum_i a_i x_i = 0$ est l'équation dans la base (e_i) d'un hyperplan vectoriel de E.

Si E est euclidien (et de dimension finie) alors toute forme linéaire f coïncide avec l'application $x \mapsto (n|x)$ pour un unique vecteur $n \in E$: Si (e_i) est une base orthonormée de E alors les coordonnées de n dans cette base sont les $f(e_i)$. f est non nulle si et seulement si n est non nul auquel cas on dit que n est un vecteur normal de $H = \mathrm{Ker}(f)$. Comme f, n n'est déterminé par H qu'à un scalaire non nul près.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Pour F un sous-espace vect. de E on note F° l'ensemble des formes linéaires sur E dont la restriction à F est nulle (c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel dual E^*). F° est de dimension $\dim(E) - \dim(F)$. Si E est muni d'un produit scalaire, on dispose également de $F^\perp$, le sous-espace vectoriel de E formé des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F. La restriction de l'application $E \to E^*$, $n \mapsto (n|.)$ à $F^\perp$ est un isomorphisme de $F^\perp$ sur F°.

Proposition. Si $f_1, \dots, f_k$ est une base de $F^\perp$ alors F est l'intersection des noyaux des f_i.

On dit que $f_1(x) = 0, \dots, f_k(x) = 0$ est un système d'équations linéaires de F.

Hyperplans affines

Définition. On appelle hyperplan affine d'un espace affine X un sous-espace affine non vide dont la direction est un hyperplan vectoriel de $\overrightarrow{X}$.

Si X est un espace affine de dimension n, un hyperplan affine est donc un sous-espace affine non vide de X de dimension $n-1$.

Soient H un hyperplan affine de X et A un point de H. H s'écrit $A + \overrightarrow{H}$. Si $f(x) = 0$ (f forme linéaire sur $\overrightarrow{X}$) est une équation de $\overrightarrow{H}$ alors H s'écrit $\{M \in X, f(\overrightarrow{AM}) = 0\}$.

Si $(O, e_1, \dots, e_n)$ est un repère cartésien de X, on peut écrire $f(\overrightarrow{AM}) = f(\overrightarrow{OM}) - f(\overrightarrow{OA})$ puis $H = \{M \in X$ de coordonnées $(x_i), \sum x_i f(e_i) = f(\overrightarrow{OA})\}$. L'équation $\sum x_i f(e_i) = f(\overrightarrow{OA})$ s'appelle une équation cartésienne de H dans le repère $(O, e_1, \dots, e_n)$.

Inversement soit (a_i) un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$ non tous nuls et $a \in \mathbb{K}$. L'ensemble $\{M(x_i), \sum a_i x_i = a\}$ est un hyperplan affine dont la direction est d'équation $\sum a_i x_i = 0$ dans la base (e_i) et qui passe par le point $(0, \dots, 0, \frac{a}{a_i}, 0, \dots, 0)$ si $a_i \neq 0$.

Supposons maintenant X euclidien. Tout hyperplan affine H de X s'écrit $\{M \in X, (\overrightarrow{n}|\overrightarrow{AM}) = 0\}$ pour un point A de X et un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ de $\overrightarrow{X}$. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ s'appelle vecteur normal de H ($\overrightarrow{n}$ est déteminé par H à un scalaire non nul près). Si $\sum a_i x_i = a$ est une équation de H dans un repère orthonormé (un repère formé d'un point et d'une base orthonormée de $\overrightarrow{X}$), alors (a_i) est la famille des coordonnées d'un vecteur normal à H dans la base orthonormée associée.

Systèmes d'équations d'un sous-espace affine

Soient X un espace affine non vide de dimension finie n, $F \subset X$ un sous-espace affine non vide de direction $\overrightarrow{F}$, A un point de F et $f_1, \dots, f_k$ une base de $\overrightarrow{F}^\circ$. Alors F coïncide avec l'ensemble $\{M \in X, f_1(\overrightarrow{AM}) = \cdots = f_k(\overrightarrow{AM}) = 0\}$. On dit que $f_1(\overrightarrow{AM}) = 0, \dots, f_k(\overrightarrow{AM}) = 0$ est un système d'équations affines de F. On obtient un système d'équations cartésiennes lorsqu'on exprime les $f_i(\overrightarrow{AM})$ dans un repère cartésien de X.

Inversement on a la :

Proposition. Soit X un espace affine (non vide) de dimension n muni d'un repère cartésien. Soient $(a_{1,i}), \dots, (a_{k,i})$ une famille **libre** de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et $a_1, \dots, a_k$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors l'ensemble des points de coordonnées (x_i) vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = a_1 \\ \vdots \\ a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n}x_n = a_k \end{array} \right.$$

est un sous-espace affine de X non vide et de dimension $n-k$.

Preuve : par le pivot de Gauss.

8. Isométries d'un espace affine euclidien

8.1. DÉFINITION. Un espace affine euclidien X est un $\mathbb{R}$-espace affine non vide de dimension finie dont la direction $\overrightarrow{X}$ est munie d'un produit scalaire.

On obtient une distance sur X : $\mathrm{d}(M,N) = \sqrt{(\overrightarrow{MN}|\overrightarrow{MN})}$, aussi noté MN.

La donnée d'un produit scalaire sur $\overrightarrow{X}$ n'a rien de mystérieux : si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de $\overrightarrow{X}$ il existe un et un seul produit scalaire sur $\overrightarrow{X}$ pour lequel (e_i) est une base orthonormée : c'est l'application qui a deux vecteurs de coordonnées respectives (x_i) et (y_i) associe le réel $\sum_i x_i y_i$.

DÉFINITION. On appelle isométrie d'un espace affine euclidien X une application d'ensembles $f : X \to X$ vérifiant

$$\forall M,N \in X, \mathrm{d}(f(M),f(N)) = \mathrm{d}(M,N) \ .$$

Exemples.

- Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{X}$. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est une isométrie de X : on a pour tous M,N $\overrightarrow{\mathrm{t}_{\overrightarrow{u}}M\mathrm{t}_{\overrightarrow{u}}N} = \overrightarrow{MN}$ donc les normes sont égales.
- Soit F un sous-espace affine non vide de X, alors la symétrie orthogonal par rapport à F, s_F, est une isométrie. Lorsque F est un hyperplan on parle de symétrie hyperplane ou réflexion (Cf image dans un miroir dans l'espace ambiant de dimension 3). Lorsque F est un point on a affaire à une symétrie centrale (homothétie de rapport -1).

PROPOSITION 8.1. Soit X un espace affine euclidien de dimension n, alors toute isométrie s'écrit comme la composée d'au plus $n+1$ symétries hyperplanes.

COROLLAIRE. Toute isométrie d'un espace affine euclidien est une bijection affine.

Pour démontrer la proposition on utilise la notion d'hyperplan médiateur :
Soient A, B deux points de X. L'ensemble $\{M \in X, MA = MB\}$ est X si $A = B$, l'hyperplan passant par le milieu du segment $[A,B]$ et orthogonale à (AB) si $A \neq B$. Notons le H ; on a $\mathrm{s}_H(A) = B$.

On montre ensuite les deux points suivants pour f une isométrie :

(1) Si $(A_0,\ldots,A_n)$ est un repère affine de X formé de points fixe de f alors f est l'identité.

(2) Quitte à composer f à gauche par au plus $n+1$ symétries hyperplanes, on peut se ramener à une isométrie admettant $n+1$ points fixes affinement indépendants.

(1) vient de ce que si M est un point de X on a $\mathrm{d}(M,A_i) = \mathrm{d}(f(M),A_i)$ car f conserve les distances et A_i est point fixe. Donc si $M \neq f(M)$, chaque point A_i est dans l'hyperplan médiateur du segment $[M,f(M)]$ donc également le sous-espace affine engendré par les A_i, or celui-ci est X entier, il ne peut être inclus dans un hyperplan de X.

(2) se démontre par une récurrence finie : si $A_0,\ldots,A_k$ points fixes affinement indépendants d'une isométrie f_k ont été constuits, on considère un point A_{k+1} dans X privé du sous-espace affine engendré par $A_0,\ldots,A_k$. Un tel point A_{k+1} existe pourvu que $k < n$. Si $f_k(A_{k+1}) = A_{k+1}$, on a construit $k+2$ points fixes affinement indépendants de f_k. Si $f_k(A_{k+1}) \neq A_{k+1}$ on note H l'hyperplan médiateur du segment $[A_{k+1}, f_k(A_{k+1}]$ et on pose $f_{k+1} = \mathrm{s}_H \circ f_k$. On a vu plus haut que les A_i sont dans H pour $i \leq k$ donc sont fixes par s_H. Alors f_{k+1} est une isométrie et $f_{k+1}(A_i) = A_i$ pour $i \leq k+1$.

8.2. Isométrie de la droite affine euclidienne

La proposition 8.1 nous dit qu'une isométrie f de la droite affine s'écrit comme la composée de 0 symétrie centrale (si f est l'identité, auquel cas le sous-espace des points fixes est la droite entière) ou d'une symétrie centrale (auquel cas le sous-espace des points fixes est formé du seul centre de la symétrie) ou de deux symétries centrales.

Proposition. Soient A et B deux points d'une droite affine et s_A, s_B les symétries centrales associées. La composée $s_B \circ s_A$ coïncide avec la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

On observe qu'une translation est de partie linéaire l'identité et qu'une symétrie centrale est de partie linéaire $-\mathrm{Id}$. Comme l'application qui a une application affine associe sa partie linéaire respecte la composition on en déduit que la composée d'un nombre impair de symétries centrales est une symétrie centrale. La composée d'un nombre pair de symétries centrales est une composée de translations donc est une translation.

Exercice. Soient A, B, C trois points d'une droite affine. Déterminer le centre de la symétrie $s_A \circ s_B \circ s_C$ en fonction de A, B, C. Même chose pour la composée de 5 symétries centrales.

8.3. Isométrie du plan affine euclidien

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Un hyperplan de $\mathcal{P}$ est une droite de $\mathcal{P}$; la symétrie orthogonale par rapport à une droite D de $\mathcal{P}$ est appelée symétrie axiale d'axe D et notée s_D.

La proposition 8.1 nous dit qu'une isométrie f de $\mathcal{P}$ s'écrit de l'une des façons suivantes :

- la composée de 0 symétrie axiale – f est alors l'application identité et l'ensemble des points fixes de f est $\mathcal{P}$ entier,
- $f = s_D$ pour D une droite de $\mathcal{P}$ – l'ensemble des points fixes de f est alors D,
- $f = s_D \circ s_{D'}$ pour D et D' deux droites de $\mathcal{P}$ – voir ci-dessous,
- $f = s_D \circ s_{D'} \circ s_{D''}$ – voir ci-dessous.

Si $D = D'$, $s_D \circ_{D'}$ est l'identité.

Si D et D' sont deux droites parallèles et distinctes alors $s_D \circ s_{D'}$ est une translation de vecteur non nul orthogonal à D (et à D'); l'ensemble des points fixes de $s_D \circ s_{D'}$
est vide.

Si D et D' sont deux droites sécantes en un point O alors $s_D \circ s_{D'}$ est une rotation de centre O d'angle non nul : voir la section suivante. L'ensemble des points fixes
est $\{O\}$.

$s_D \circ s_{D'} \circ s_{D''}$ est la composée d'une symétrie axiale et d'une translation .

L'ensemble des points fixes est l'ensemble vide ou une droite.

9. Rotations et angles du plan affine euclidien

9.1. Rappel : Soient X un espace affine euclidien de direction $\overrightarrow{X}$ et $f : X \to X$ une application d'ensembles. f est une isométrie si et seulement si pour tous $M, N \in X$, on a $\mathrm{d}(f(M), f(N)) = \mathrm{d}(M, N)$.

Proposition. Soit $f : X \to X$ une application d'ensembles. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une isométrie.

(ii) f s'écrit comme la composée d'un nombre fini de symétries hyperplanes.

(iii) f est affine et sa partie linéaire est un endomorphisme orthogonal de $\overrightarrow{X}$.

9.2. Etude de la partie linéaire d'une isométrie plane

Rappel Soit $\varphi : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{X}$ une application linéaire (ou endomorphisme). φ est orthogonal si et seulement si pour tous $x, y \in \overrightarrow{X}$ on a $(\varphi(x)|\varphi(y)) = (x|y)$.

Proposition. Soit $\varphi : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{X}$ un endomorphisme. Les conditions suivantes sont équialentes :

(i) φ est un endomorphisme orthogonal.

(ii) Pour toute base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\overrightarrow{X}$, la famille $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{X}$.

(iii) Il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\overrightarrow{X}$ telle que la famille $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ soit une base orthonormée de $\overrightarrow{X}$.

(iv) La matrice M de φ dans une base orthonormée vérifie ${}^tMM = \mathrm{I}$.

On considère $\mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire canonique. La famille de vecteurs $((1,0),(0,1))$ est une base orthonormée (BON) de $\mathbb{R}^2$. On l'appelle la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base canonique. φ est orthogonal si et seulement si

- $a^2 + b^2 = 1$ (c'est la traduction de $\|\varphi(1,0)\|^2 = 1$), et
- $c^2 + d^2 = 1$ (c'est la traduction de $\|\varphi(0,1)\|^2 = 1$), et
- $ac + bd = 0$ (c'est la traduction de $\varphi(1,0)$ est orthogonal à $\varphi(0,1)$).

Supposons ces conditions vérifiées. La condition $a^2 + b^2$ entraine l'existence d'un réel α, unique à un multiple entier de 2π près, tel que $(a,b) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. D'autre part on sait que l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par (a,b) ($(a,b) \neq (0,0)$) est la droite vectorielle engendrée par $(-b,a)$; donc (c,d) s'écrit $(-\lambda b, \lambda a)$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme de plus $c^2 + d^2 = 1$ on a $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$, c'est à dire deux possibilité pour la matrice de φ : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ de déterminant 1 ou $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ de déterminant -1.
Dans le second cas on reconnaît la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par $(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2})$
Dans le premier cas on dit que φ est la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'angle α (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$).

Proposition. L'application $\Phi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $\alpha \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

L'image de Φ est notée $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ dans la littérature). Comme $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif, on obtient que l'image de Φ, $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$, est commutatif (alors que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est loin de l'être).
La périodicité des fonctions cos et sin nous dit que l'homomorphisme Φ est de noyau $2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$. On obtient donc un isomorphisme de groupes $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$.

Lien avec le corps $\mathbb{C}$

L'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(a,b) \mapsto a + ib$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels d'inverse $z \mapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$. La base canonique $((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$ s'identifie via cet isomorphisme à la famille $(1,i)$. Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ correspond via cet isomorphisme à l'application $\mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(z,z') \mapsto \frac{1}{2}(z\bar{z}' + \bar{z}z')$. La norme associée est $z \mapsto |z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ qu'on écrit $z_0 = a + ib$ avec $a,b \in \mathbb{R}$. L'application $\varphi_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z_0 z$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La matrice de φ_{z_0} dans la base canonique est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. On reconnaît la matrice d'une rotation vectorielle si $a^2 + b^2 = 1$ c'est à dire si $|z_0| = 1$.

Notons U l'ensemble des nombres complexes de module 1 ; c'est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. On sait que l'application $\alpha \mapsto e^{i\alpha}$ est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ d'image U et de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.
On a donc deux homomorphismes : $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to U$, $[\alpha] \mapsto e^{i\alpha}$ et $U \to \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$, $z \mapsto \mathrm{mat}(\varphi_z)$ dont la composée coïncide avec l'application $[\alpha] \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Ce sont tous des isomorphismes.

Exercice.

- Soit $a \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module 1. Montrer que la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ identifié à $\mathbb{C}$ par rapport à la droite $\{\lambda a, \lambda \in \mathbb{R}\}$ s'écrit $z \mapsto a^2\bar{z}$.
- Pour $a \in \mathbb{C}$ quelconque montrer que l'application $a \mapsto az$, respectivement $z \mapsto a\bar{z}$, est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une rotation de $\mathbb{R}^2$, respectivement d'une homothétie vectorielle et d'une symétrie orthogonale.

Rotations vectorielles du plan vectoriel euclidien
Soit $\overrightarrow{P}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et soit (e_1, e_2) une base orthonormée de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

DÉFINITION. On appelle rotation vectorielle de $\overrightarrow{P}$ d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ relativement à la BON (e_1, e_2) l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2). On la note r_α.

La discussion qui précède montre qu'une rotation vectorielle de $\overrightarrow{P}$ est exactement un endomorphisme orthogonal de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ de déterminant 1. L'angle α de la rotation dépend de la BON (e_1, e_2) choisie .
En fait il ne dépend que de l'*orientation* de la BON (e_1, e_2).

EXERCICE. Montrer que l'angle α de r_α est changé en $-\alpha$ si on change (e_1, e_2) en (e_2, e_1).

9.3. Rotations dans le plan affine euclidien

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On fixe une BON (e_1, e_2) de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

DÉFINITION. On appelle rotation de centre $O \in \mathcal{P}$ et d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ relativement à la BON (e_1, e_2) l'application $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $M \mapsto O + r_\alpha(\overrightarrow{OM})$, où r_α est la rotation vectorielle de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ d'angle α relativement à la BON (e_1, e_2). On la note $r_{O,\alpha}$.

PROPOSITION. Soient D et D' deux droites de $\mathcal{P}$ sécantes en un point O. Alors l'application composée $s_D \circ s_{D'}$ est une rotation de centre O.

Preuve : $s_D \circ s_{D'}$ est une isométrie et sa partie linéaire est de déterminant le produit des déterminants de s_D et de $s_{D'}$, c'est à dire $-1 \cdot -1 = 1$. Donc la partie linéaire de $s_D \circ s_{D'}$ est une rotation vectorielle.

Entraînement: Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Soit E un espace affine et $\overrightarrow{E}$ l'espace vectoriel associé. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Pour tout vecteur $\vec{v}$ de $\overrightarrow{E}$, il existe un couple (A, B) de points de E et un seul tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
2. ☒ Pour tout vecteur $\vec{v}$ de E, il existe un couple (A, B) de points de E tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
3. ☒ Pour tout point A de E et tout vecteur $\vec{v}$ de $\overrightarrow{E}$, il existe un point B de E et un seul tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
4. ☒ Pour tout couple (A, B) de points de E, il existe un unique vecteur $\vec{v}$ de $\overrightarrow{E}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.
5. ☐ Pour tout triplet (A, B, C) de points de E, on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
6. ☒ Pour tout point B de E et tout vecteur $\vec{v}$ de $\overrightarrow{E}$, il existe un unique point A de E tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
7. ☐ Pour tout couple (A, B) de points de E, il existe un unique point C de E tel que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.

Vrai-Faux 2. Soit E un espace affine et A, B, C trois points de E. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ Le vecteur $\overrightarrow{OA} - 2\,\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ne dépend pas du point O de E.
2. ☐ Le point M défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - 2\,\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ne dépend pas du point O de E.
3. ☒ Le point M défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ne dépend pas du point O de E.
4. ☒ Le point M défini par $4\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ne dépend pas du point O de E.
5. ☐ Le vecteur $\vec{v}$ défini par $3\,\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ne dépend pas du point O de E.

Vrai-Faux 3. Soit E un espace affine, n et m deux entiers strictement positifs, $A_1, \ldots, A_n$ et $B_1, \ldots, B_m$ des points de E, G l'isobarycentre des points $A_1, \ldots, A_n$, H l'isobarycentre des points $B_1, \ldots, B_m$, K l'isobarycentre des $n+m$ points $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ K est toujours le milieu du segment $[GH]$.
2. ☒ K appartient toujours au segment $[GH]$.

3. ☐ $n\,\overrightarrow{KG} = m\,\overrightarrow{KH}$.
4. ☒ $n\,\overrightarrow{KG} + m\,\overrightarrow{KH} = \vec{0}$.
5. ☒ H appartient à la droite (KG) (en supposant $G \neq K$).
6. ☐ H appartient au segment $[KG]$.
7. ☒ $n\,\overrightarrow{KG} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{KA_i}$.
8. ☒ $K = H$ si et seulement si $H = G$.

Vrai-Faux 4. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ Tout segment est convexe.
2. ☐ Une droite privée d'un point est convexe.
3. ☐ Un plan privé d'un point est convexe.
4. ☐ Le graphe d'une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est convexe.
5. ☒ Le graphe d'une fonction affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est convexe.
6. ☒ L'enveloppe convexe de la réunion de deux droites sécantes est le plan contenant ces droites.
7. ☒ L'enveloppe convexe d'une partie bornée du plan est bornée.
8. ☐ L'enveloppe convexe de la réunion de deux droites non coplanaires de l'espace E de dimension 3 est E.

Vrai-Faux 5. Soit, dans un espace affine E, h une homothétie de centre A et de rapport $\lambda \neq 1$ et f une transformation affine de E telle que $f(A) \neq A$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $f \circ h = h \circ f$.
2. ☒ $f \circ h \circ f^{-1}$ est une homothétie de rapport λ.
3. ☐ $f \circ h \circ f^{-1}$ est une homothétie de centre A.
4. ☒ h^{-1} est une homothétie de centre A.
5. ☐ $h \circ f \circ h^{-1}$ est une homothétie de centre A.

Vrai-Faux 6. Le cadre est un espace affine de dimension trois. Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse (en justifiant votre réponse).

1. ☐ Si deux droites sont parallèles à un même plan, elles sont parallèles entre elles.
2. ☒ Si deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.
3. ☐ Si une droite D est parallèle à un plan P, tout plan non parallèle à P rencontre D.
4. ☒ Étant donnés deux plans sécants, toute droite parallèle à ces deux plans est parallèle à leur intersection.

5. ☒ Étant données deux droites non coplanaires, il existe toujours au moins un plan tel que ces deux droites soient parallèles à ce plan.
6. ☒ Étant donnés deux plans sécants, deux droites parallèles à chacun de ces deux plans sont nécessairement parallèles entre elles.
7. ☒ Soient D et D' deux droites non parallèles de l'espace ; il existe un plan P et un seul contenant D tel que D' soit parallèle à P.

Vrai-Faux 7. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ Toute transformation affine qui transforme toute droite en une droite parallèle est une homothétie ou une translation.
2. ☒ Toute transformation affine dont la partie linéaire est $-id$ est une symétrie centrale.
3. ☐ Toute transformation affine admettant un point fixe et un seul est une homothétie.
4. ☒ Toute transformation affine dont la partie linéaire est l'identité est une translation.
5. ☐ Toute transformation affine qui transforme deux droites parallèles quelconques en deux droites parallèles est une homothétie ou une translation.
6. ☒ Toute transformation affine transforme un parallélogramme non aplati en un parallélogramme non aplati.

Vrai-Faux 8. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ Une figure bornée du plan ne peut pas admettre deux centres de symétrie distincts.
2. ☐ Une figure bornée du plan ne peut pas admettre deux axes de symétrie distincts.
3. ☐ Toute transformation affine du plan conservant globalement une droite possède au moins un point fixe.
4. ☒ Toute transformation affine du plan conservant globalement un ensemble fini de points possède au moins un point fixe.
5. ☒ Toute application affine p du plan dans lui-même vérifiant $p \circ p = p$ est une projection.
6. ☐ Toute application affine p du plan dans lui-même vérifiant $\vec{p} \circ \vec{p} = \vec{p}$ est une projection.
7. ☐ Si s est une symétrie de l'espace par rapport à une droite D dans la direction d'un plan P, pour tout couple (M, N) de points n'appartenant pas à D les droites $(Ms(M))$ et $(Ns(N))$ sont parallèles.
8. ☒ Toute application affine s de l'espace affine E dans lui-même vérifiant $s \circ s = id_E$ est une symétrie affine .

Examen

Questions de cours.

1. Qu'est-ce qu'un repère orthonormé dans un espace affine euclidien ?

2. Soit X un espace affine. A quelle condition sur X l'assertion suivante est elle vraie (on ne demande pas la preuve) :
"Pour toute paire de droites D, D' incluses dans X on a D parallèle à D' ou D et D' sont sécantes."

3. $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application d'ensembles. Comparer par des implications (de la forme (7) $\Rightarrow$ (8)) les énoncés suivants :
(1) f est une application linéaire. (2) f est une application affine. (3) f est une application bijective.
(4) f est une translation. (5) f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine de $\mathbb{R}^2$.
(6) Pour tous $M,\, N \in \mathbb{R}^2$ on a $\mathrm{d}(f(M), f(N)) = \mathrm{d}(M, N)$.

Exercices.

4. *Subdivision barycentrique dans le triangle*

Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$.

a. Soient A', B', C' les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ respectivement. Montrer qu'on a $A' \neq B'$ puis que la droite $(A'B')$ est parallèle à la droite (AB).

b. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C. Montrer que G est aussi l'isobarycentre des points A', B', C'.

c. On note A'' l'isobarycentre des points G, B, C, de même B'' l'isobarycentre des points G, A, C et C'' l'isobarycentre des points G, A, B. Montrer que G est l'isobarycentre des points A'', B'', C''.

d. Montrer qu'il existe une homothétie de centre G, de rapport à déterminer, transformant A en A'', B en B'' et C en C''. Montrer que cette homothétie est la seule application affine transformant le triplet (A, B, C) en (A', B', C').

e. Déduire de (d) que les points A'' et B'' sont non confondus et que la droite $(A''B'')$ est parallèle à (AB).

f. Peut on retrouver le résultat du (c) grâce au résultat du (d) ?

5. *Symétries planes de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées*

$\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique : $((x, y, z)|(x', y', z')) = xx' + yy' + zz'$. Soit $P \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x + 2y + 3z = 4$. On note s_P la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P.

a. Déterminer les coordonnées de l'image du point $(0, 0, 0)$ par s_P. s_P est elle une application linéaire ?

b. Déterminer l'image par s_P de la droite passant par le point $(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $(1, 2, 3)$ (justifier le calcul).

c. Soit $P' \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$. Que peut on dire de P' par rapport à P ? Que peut on dire de la composée $s_P \circ s_{P'}$?

6. *Composée d'une rotation et d'une translation*

$\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique. Soient α un réel et r_α la rotation vectorielle de matrice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On suppose que α n'est pas un multiple entier de 2π.

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

a. Montrer que l'application composée $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ r_\alpha$ admet un et un seul point fixe (on pourra vérifier que 1 n'est pas valeur propre de la partie linéaire de f). En déduire que f est une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle α relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Construction du centre de f

Soient D et D' deux droites de $\mathbb{R}^2$. On sait que $t_{\overrightarrow{u}}$ est égale à la composée $s_D \circ s_{D'}$ pourvu que $\overrightarrow{u}$ soit orthogonal à D et que $D' = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(D)$. De même r_α est égal à la composée $s_D \circ s_{D'}$ pourvu que D passe par le centre de r_α et que $D' = r_{-\frac{1}{2}\alpha}(D)$.

b. Montrer qu'on peut choisir trois droites D, D', D'' telles que $t_{\overrightarrow{u}} = s_D \circ s_{D'}$ et $r_\alpha = s_{D'} \circ s_{D''}$.

c. Comment s'exprime le centre la rotation $t_{\overrightarrow{u}} \circ r_\alpha$ en fonction de D, D' et D''.

Autre méthode

d. Montrer que $f \circ f$ est une rotation de même centre que f, d'angle 2α.

Soit M un point de $\mathbb{R}^2$. L'un des trois cas suivants se présente :

(i) $M = f(M)$.

(ii) $M \neq f(M)$ et $M = f(f(M))$.

(iii) $M \neq f(f(M))$

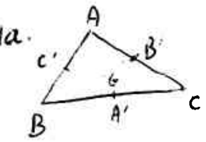
e. Montrer que si on est dans le cas (ii) alors $\alpha = \pi$ modulo un multiple entier de 2π et le centre de f est le milieu du segment $[M, f(M)]$.

f. Montrer que si on est de le cas (iii) alors $M \neq f(M)$ et $f(M) \neq f(f(M))$. Montrer que les médiatrices des segments $[M, f(M)]$ et $[f(M), f(f(M))]$ sont non confondues et s'intersectent en le centre de f.

1. Soit X un espace affine euclidien de direction $\vec{X}$. Un repère orthonormé de X est une famille $(O, e_1, \dots, e_n)$ où O est un point de X et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\vec{X}$

2. $\dim X \leq 2$

3.
$$\begin{array}{ccc} & (4) & \\ & \Downarrow & \\ (1) \Rightarrow (2) \Leftarrow & (6) & \Rightarrow (3) \\ & \Uparrow & \\ & (5) & \end{array}$$
et bien sûr la composée de deux implications est une implication. Par exemple $(4) \Rightarrow (2)$

4a. 

On a $\vec{CB'} = \frac{1}{2}\vec{CA}$ et $\vec{CA'} = \frac{1}{2}\vec{CB}$ donc $\vec{A'B'} = \vec{CB'} - \vec{CA'} = \frac{1}{2}(\vec{CA} - \vec{CB}) = -\frac{1}{2}\vec{AB}$

Comme A, B, C sont non alignés, $\vec{AB} \neq 0$ donc $\vec{A'B'} \neq 0$ c'est à dire $A' \neq B'$. On peut donc parler de la droite $(A'B')$

$\vec{A'B'}$ est un vecteur directeur de $(A'B')$; $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de (AB), $\vec{A'B'}$ est colinéaire à $\vec{AB}$ donc $(A'B')$ est parallèle à (AB).

4b. G isobarycentre de A', B', C' $\Leftrightarrow$ $\vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} = 0$

Or $\vec{GA'} = \frac{1}{2}(\vec{GB} + \vec{GC})$ car $\vec{A'B} + \vec{A'C} = 0$.

De même $\vec{GB'} = \frac{1}{2}(\vec{GA} + \vec{GC})$, $\vec{GC'} = \frac{1}{2}(\vec{GA} + \vec{GB})$

En additionnant $\vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} = \frac{1}{2}(\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GA} + \vec{GB}) = \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$, la dernière égalité venant de ce que G est isobarycentre de A, B, C

4c. $\vec{A''G} + \vec{A''B} + \vec{A''C} = 0$ donc $\vec{A''G} + \vec{A''G} + \vec{GB} + \vec{A''G} + \vec{GC} = 0$ c'est à dire $3\vec{A''G} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$

De même $3\vec{B''G} + \vec{GA} + \vec{GC} = 0$

$3\vec{C''G} + \vec{GA} + \vec{GB} = 0$

En additionnant $3(\vec{A''G} + \vec{B''G} + \vec{C''G}) + 2(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) = 0$

Or G est isobarycentre de A, B, C donc $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$ on obtient $\vec{A''G} + \vec{B''G} + \vec{C''G} = 0$ ce qui équivaut à G isobarycentre de A'', B'', C''

4d. On reprend les calculs de 4c. On avait $3\vec{A''G} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$. Or $\vec{GB} + \vec{GC} = -\vec{GA}$ donc $3\vec{A''G} - \vec{GA} = 0$ soit $\vec{GA''} = -\frac{1}{3}\vec{GA}$

De même $\vec{GB''} = -\frac{1}{3}\vec{GB}$ et $\vec{GC''} = -\frac{1}{3}\vec{GC}$. C'est exactement dire que A'', B'' et C'' sont les images de A, B et C respectivement par l'homothétie de centre G de rapport $-\frac{1}{3}$

Cette homothétie est une application affine. Une application affine est uniquement déterminée par ses valeurs en les points d'un repère affine. Or A, B, C sont trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$ qui est un espace affine de dimension 2, donc (A, B, C) est un repère affine de $\mathbb{R}^2$, donc il existe une et une seule application affine $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformant (A, B, C) en (A'', B'', C'').

4e. Notons h l'homothétie de centre G de rapport $-\frac{1}{3}$. La partie linéaire de h est l'homothétie vectorielle de rapport $-\frac{1}{3}$.

Donc $\vec{A''B''} = \overrightarrow{h(A)h(B)} = -\frac{1}{3}\vec{AB}$.

Puisque $\vec{AB} \neq 0$, $\vec{A''B''} \neq 0$ donc $A'' \neq B''$ et la droite $(A''B'')$ est bien définie.

Puisque $\vec{A''B''}$ est colinéaire à $\vec{AB}$, $(A''B'')$ est parallèle à (AB)

On aurait aussi bien pu dire que l'image d'une droite par une homothétie de rapport $\neq 0$ est une droite qui lui est parallèle.

4f h (l'homothétie de centre G de rapport $-\frac{1}{3}$) est une application affine donc elle conserve les barycentres. Ainsi $h(G)$ est l'isobarycentre des points $h(A), h(B), h(C)$. Or $h(G)=G$ et $h(A)=A''$, $h(B)=B''$, $h(C)=C''$.

5a. $P \subset \mathbb{R}^3$ plan d'équation $x+2y+3z=4$. Alors $\vec{n}=(1,2,3)$ est un vecteur normal à P. On choisit un point de P en prenant $y=z=0 \leadsto x=4$. Notons A ce point.

Soient O le pt $(0,0,0)$ et O_P le projeté orthogonal de O sur P. On a $s_P(O)=O+2\vec{OO_P}$. Il s'agit de déterminer $\vec{OO_P}$.

Comme $\vec{OO_P}$ est orthogonal à P, $\vec{OO_P}$ est colinéaire à $\vec{n}$: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $\vec{OO_P}=\lambda\vec{n}$

D'autre part $\vec{O_PA} \in \vec{P}$ donc est orthogonal à $\vec{n}$: $\vec{n}\cdot\vec{O_PA}=0$. Comme $\vec{O_PA}=\vec{O_PO}+\vec{OA}$ on obtient l'équation $\vec{n}\cdot\vec{OA}=\vec{n}\cdot\vec{OO_P}$

En reportant $\vec{OO_P}=\lambda\vec{n}$ dans l'équation on obtient $\vec{n}\cdot\vec{OA}=\lambda\,\vec{n}\cdot\vec{n}$

$\vec{OA}=(4,0,0)$, $\vec{n}=(1,2,3)$ donc $\vec{n}\cdot\vec{OA}=4$ et $\vec{n}\cdot\vec{n}=1+4+9=14$ puis $\lambda=\frac{2}{7}$

$s_P(O)=O+2\lambda\vec{n}=\left(\frac{4}{7},\frac{8}{7},\frac{12}{7}\right)$

Autre méthode pour déterminer λ : Notons (x,y,z) les coordonnées de O_P. On a $\vec{OO_P}=\lambda\vec{n}$ ce qui se traduit par

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\2\lambda\\3\lambda\end{pmatrix}$$

D'autre part $O_P \in P$ donc $x+2y+3z=4$. On obtient $\lambda+4\lambda+9\lambda=4$ soit $\lambda=\frac{2}{7}$.

Si s_P était linéaire on aurait $s_P(0,0,0)=(0,0,0)$ ce qui n'est pas le cas.

5b. s_P est une application affine bijective donc l'image d'une droite par s_P est une droite (cf cours).

Si A et B sont deux points distincts de $\mathbb{R}^3$ on a $s_P(A)\neq s_P(B)$ (car s_P est bijective) et l'image par s_P de la droite (AB) est l'unique droite passant par $s_P(A)$ et $s_P(B)$.

Soit D la droite passant par $(0,0,0)$ et de vecteur directeur $(1,2,3)$. On prend $A=O=(0,0,0)$ et pour B l'intersection de la droite D avec le plan P. (L'existence de cette intersection est donnée par le calcul qui suit.)

$B=A+\lambda(1,2,3)$ pour un certain $\lambda\in\mathbb{R}$. $B\in P$ se traduit par $(\lambda,2\lambda,3\lambda)$ solution de $x+2y+3z=4$ c'est-à-dire $\lambda=\frac{2}{7}$

(Observer qu'on a $B=O_P$ avec les notations de 5a)

Alors $s_P(B)=B$ (puisque $B\in P$) et $s_P(A)=\left(\frac{4}{7},\frac{8}{7},\frac{12}{7}\right)$ (d'après 5a)
$=\left(\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{6}{7}\right)$

On calcule $\overrightarrow{s_P(A)s_P(B)}=\left(-\frac{2}{7},-\frac{4}{7},-\frac{6}{7}\right)=-\vec{AB}$ donc les droites (AB) et $(s_P(A)\,s_P(B))$ sont parallèles.

$B=s_P(B)$ est un point commun à (AB) et à $(s_P(A)\,s_P(B))$ donc ces droites sont confondues.

(5b) Autre méthode :

Notons φ la partie linéaire de s_P. φ est la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport à la direction $\vec{P}$ de P.

L'image de la droite D passant par $\underset{=(0,0,0)}{O}$ et de vecteur directeur $\vec{n}=(1,2,3)$ est la droite passant par $s_P(O)$ et de vecteur directeur $\varphi(\vec{n})$. ($\varphi(\vec{n})\neq 0$ car φ est bijective)

Or $\vec{n}\in \vec{P}^{\perp}$ donc $\varphi(\vec{n})=-\vec{n}$

De plus $s_P(O)=O+\mu\vec{n}$ pour un certain $\mu\in\mathbb{R}$ (puisque $\vec{n}$ est un vecteur normal à P) donc $s_P(O)\in D$

Les droites D et $s_P(D)$ ont le point $s_P(O)$ en commun et ont des vecteurs directeurs colinéaires donc sont égales.

5c. $P'\subset\mathbb{R}^3$ plan d'équation $x+2y+3z=0$. P' et P admettent un même vecteur normal $\vec{n}=(1,2,3)$ donc sont parallèles.

On étudie la composée $s_P\circ s_{P'}$:

Pour M un point de $\mathbb{R}^3$ on note M_P, resp. $M_{P'}$, le projeté orthogonal de M sur P, resp sur P'. $\overrightarrow{MM_P}$ et $\overrightarrow{MM_{P'}}$ sont colinéaires à $\vec{n}$.

On écrit $s_{P'}(M)=M+2\overrightarrow{MM_{P'}}$ et $s_P\left(s_{P'}(M)\right)=s_{P'}(M)+2\,\overrightarrow{s_{P'}(M)\left(s_{P'}(M)\right)_P}$

On observe $\left(s_{P'}(M)\right)_P=M_P$ puisque $\overrightarrow{s_{P'}(M)M_P}=\overrightarrow{MM_P}-2\overrightarrow{MM_{P'}}$ est colinéaire à $\vec{n}$ et puisque $M_P\in P$.

On obtient $s_P\left(s_{P'}(M)\right)=s_{P'}(M)+2\,\overrightarrow{s_{P'}(M)M_P}$

$$=M+2\overrightarrow{MM_{P'}}+2\,\overrightarrow{s_{P'}(M)M}+2\overrightarrow{MM_P}=M+2\overrightarrow{MM_{P'}}-4\overrightarrow{MM_{P'}}+2\overrightarrow{MM_P}=M+2\overrightarrow{M_{P'}M_P}$$

On détermine $\overrightarrow{M_{P'}M_P}$ en écrivant $M_P=M+\lambda\vec{n}$ pour un $\lambda\in\mathbb{R}$ et $M_{P'}=M+\mu\vec{n}$ pour un $\mu\in\mathbb{R}$

d'où $\overrightarrow{M_{P'}M_P}=(\lambda-\mu)\vec{n}$. En particulier $\overrightarrow{M_{P'}M_P}\cdot\vec{n}=(\lambda-\mu)\,\vec{n}\cdot\vec{n}$

D'autre part $\overrightarrow{M_{P'}M_P}=\overrightarrow{M_{P'}O}+\overrightarrow{OO_P}+\overrightarrow{O_PM_P}$ et on observe $M_{P'}, O\in P'$; $O_P, M_P\in P$ donc $\overrightarrow{M_{P'}M_P}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{OO_P}\cdot\vec{n}$

On obtient $\lambda-\mu=\dfrac{\overrightarrow{OO_P}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}=\dfrac{2}{7}$

En reportant : $s_P\left(s_{P'}(M)\right)=M+\frac{4}{7}\vec{n}$. On reconnaît l'image de M par la translation de vecteur $\frac{4}{7}\vec{n}=\left(\frac{4}{7},\frac{8}{7},\frac{12}{7}\right)$.

6a. $t_{\vec{u}}$ est une application affine de partie linéaire id ; r_α est une application affine de partie linéaire elle même.

Donc $f=t_{\vec{u}}\circ r_\alpha$ est une application affine de partie linéaire $id\circ r_\alpha=r_\alpha$.

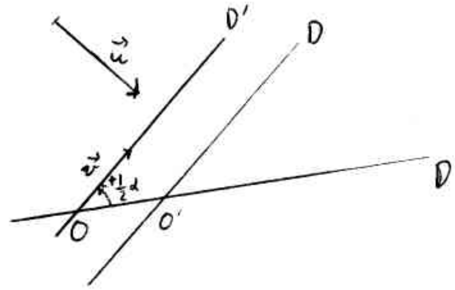
On sait que f admet un et un seul point fixe si (et seulement si) 1 n'est pas valeur propre de sa partie linéaire.

On calcule le polynôme caractéristique $\chi_{r_\alpha}=\det\begin{pmatrix}\cos\alpha-X & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha-X\end{pmatrix}=X^2-2X\cos\alpha+1$

1 est racine de $\chi_{r_\alpha}\iff 2(1-\cos\alpha)=0\iff\alpha\equiv 0\ [2\pi]$ ce qui n'est pas le cas par hypothèse.

Soit O l'unique point fixe de f. On a pour tout $M\in\mathbb{R}^2$ $f(M)=f(O)+r_\alpha(\overrightarrow{OM})=O+r_\alpha(\overrightarrow{OM})$. On reconnaît la définition de la rotation de centre O d'angle α relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

6b. $t_{\vec u} = s_D \circ s_{D'}$ dès que $\vec u \perp D$ et $D' = t_{-\frac12 \vec u}(D)$



$r_\alpha = s_D \circ s_{D'}$ dès que $O \in D$ et $D' = r_{-\frac12 \alpha}(D)$

Soit $\vec v$ un vecteur non nul orthogonal à $\vec u$.

Soit D' la droite passant par O de vecteur directeur $\vec v$.

On pose $D = t_{\frac12 \vec u}(D')$ et $D'' = r_{-\frac12 \alpha}(D')$ (D et D'' sont bien des droites car chacune image d'une droite par une application affine bijective.)

Alors $r_\alpha = s_{D'} \circ s_{D''}$ et $D' = t_{-\frac12 \vec u}(D)$ donc $t_{\vec u} = s_D \circ s_{D'}$

6c. On calcule $t_{\vec u} \circ r_\alpha = s_D \circ s_{D'} \circ s_{D'} \circ s_{D''} = s_D \circ s_{D''}$ car $s_{D'} \circ s_{D'} = id$.

D' et D'' sont deux droites sécantes en O : si ce n'était pas le cas elles seraient confondues (car elles passent par O) et on aurait $s_{D'} \circ s_{D''} = id$ donc $r_\alpha = id$ ce qui est exclu car $\alpha \not\equiv 0\ [2\pi]$

Donc D et D'' sont non parallèles. Comme D est parallèle à D', D et D'' sont non parallèles donc sont sécantes. Appelons O' le point d'intersection. On a $O' \in D''$ donc $s_{D''}(O') = O'$
$O' \in D$ donc $s_D(O') = O'$ } donc $s_D \circ s_{D''}(O') = O'$: O' est le point fixe de $t_{\vec u} \circ r_\alpha$

(point fixe unique d'après 6a)

6d. Puisque $f(O') = O'$ on a $f(f(O')) = O'$. D'autre part la partie linéaire de $f \circ f$ est $r_\alpha \circ r_\alpha \underset{\uparrow \text{ calcul matriciel}}{=} r_{2\alpha}$. C'est bien dire que $f \circ f$ est la rotation de centre O' d'angle 2α par rapport à la base canonique.

6e. Soit $M \in \mathbb{R}^2$. On suppose $M \neq f(M)$ et $M = f \circ f(M)$.

Alors $M \neq O'$ et $r_{2\alpha}(\overrightarrow{O'M}) = \overrightarrow{f\circ f(O')\, f \circ f(M)} = \overrightarrow{O'M}$. Donc 1 est valeur propre de $r_{2\alpha}$ ce qui entraîne $2\alpha \equiv 0\ [2\pi]$ (cf question 6a) c'est à dire $\alpha \equiv 0\ [2\pi]$ ou $\alpha \equiv \pi\ [2\pi]$. Le premier cas est exclu par hypothèse sur α.

Le second cas entraîne que r_α a pour matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc que f est la symétrie centrale par rapport à O'.

On a alors pour tout point M O' milieu de $[M, f(M)]$.

6f. Si $M = f(M)$ ils ont même image par f et on obtient $M = f(M) = f \circ f(M)$ ce qui est exclu.

Comme f est bijective, $f(M) = f \circ f(M)$ équivaut à $M = f(M)$ et on vient de voir que cela est exclu.

Donc $M \neq f(M)$ et $f(M) \neq f \circ f(M)$. On peut donc parler des médiatrices des segments $[M, f(M)]$ et $[f(M), f \circ f(M)]$ qu'on note Δ et Δ' respectivement.

On a $M = s_\Delta(f(M))$ et $f \circ f(M) = s_{\Delta'}(f(M))$, où s_Δ et $s_{\Delta'}$ désignent les symétries orthogonales par rapport à Δ et Δ'.

Si $\Delta = \Delta'$ alors $M = s_\Delta(f(M)) = s_{\Delta'}(f(M)) = f \circ f(M)$ ce qui est exclu. Donc Δ et Δ' sont non confondues.

On a $O'M = O'f(M)$ car $f(O') = O'$ et f est une isométrie. Donc $O' \in \Delta$ (par définition de Δ).

De même $O'f(M) = O'f(f(M))$ donc $O' \in \Delta'$ donc $O' \in \Delta \cap \Delta'$. Comme Δ et Δ' sont non confondues, elles sont sécantes en O'.

Examen

Questions de cours.

1. Dans $\mathbb{R}^3$ qu'appelle t-on droite passant par deux points distincts A et B ? Que se passe t-il si $A = B$?

2. Montrer que la composée de deux applications affines $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est affine.

3. Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + 3z + 3 = 0$. Soit E un sous espace affine de $\mathbb{R}^3$ contenant P et le point $(0, 0, 0)$. Que peut-on dire de E ?

Exercices.

4. *Barycentre*

Soient A, B, C, D quatre points du plan $\mathbb{R}^2$ et G le barycentre du système $(A, \frac{1}{2}), (B, 1), (C, 1), (D, 1)$.

a. Montrer qu'on a $G = A$ si et seulement si A est le centre de gravité du triangle BCD.

b. Soit f une application affine $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Montrer que le barycentre du système $(A, \frac{1}{2})$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$, $(f(A), \frac{1}{2})$, $(f(B), 1)$, $(f(C), 1)$, $(f(D), 1)$ est le milieu du segment $[G, f(G)]$.

5. *Distance d'un point à une droite de* $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique : $(x, y, z) \cdot (x', y', z') = xx' + yy' + zz'$. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ donnée par les équations $x + y + 2z + 2 = 0$ et $x - y + 3z + 3 = 0$. Soit A le point $(1, 1, 1)$. On propose deux méthodes pour calculer la distance de A à D.

Première méthode

a. Exhiber (en donnant les coordonnées) un point B de D et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de D.

b. Montrer que l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ qui à un réel t associe la distance du point A au point $B_t = B + t\overrightarrow{u}$ atteint son minimum en un réel t_0 à déterminer. Quelle est la distance de A à D ?

c. Que peut on dire du vecteur $\overrightarrow{AB_{t_0}}$ par rapport à D ? (Justifier.)

Deuxième méthode

d. Montrer que pour tout réel α le système

$$\begin{cases} x + y + 2z + 2 + \alpha(x - y + 3z + 3) = 0 \\ x - y + 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

est un système d'équations cartésiennes de D.

e. Déterminer α tel que le plan P_α d'équation $x + y + 2z + 2 + \alpha(x - y + 3z + 3) = 0$ soit orthogonal au plan P d'équation $x - y + 3z + 3 = 0$. On notera α_0 la valeur de α trouvée.

On note A_P, respectivement $A_{P_{\alpha_0}}$, le projeté orthogonal de A sur P, respectivement sur P_{α_0}. On note enfin A' le projeté orthogonal de A_P sur P_{α_0}.

f. Montrer qu'on a $A' \in D$. Montrer que pour tout point M de D on a la relation $AM^2 = (AA_P)^2 + (A_PA')^2 + A'M^2$. En déduire que A' est aussi le projeté orthogonal de A sur D.

g. Montrer qu'on a les relations $(AA_P)^2 + (A_PA')^2 = (AA_{P_{\alpha_0}})^2 + (A_{P_{\alpha_0}}A')^2$ et $(AA_P)^2 + (AA_{P_{\alpha_0}})^2 = (A_PA')^2 + (A'A_{P_{\alpha_0}})^2$. En déduire $(AA')^2 = (AA_P)^2 + (AA_{P_{\alpha_0}})^2$.

h. Soient a, b, c, d quatre réels avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et soit P' le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$. Déterminer les coordonées du projeté orthogonal de A sur P'. En déduire la distance de A à P' en fonction de a, b, c, d. (Justifier.)

(**i.** Qu'obtient-on pour la distance de A à D ? Justifier.

../..

6. *Isométrie*

$\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. Soit f l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9x + 2y - 6z + 38 \\ 2x + 9y + 6z + 17 \\ -6x + 6y - 7z - 29 \end{pmatrix} .$$

(2pts) **a.** Montrer que la matrice

$$\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 \\ 2 & 9 & 6 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

est orthogonale. En déduire que f est une isométrie.

b. L'application f admet-elle un point fixe ?

c. Montrer que le plan P d'équation $x - y + 3z + 3 = 0$ est stable par f et que la restriction de f à est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ à déterminer.

d. Déterminer l'ensemble des points fixes de l'application $g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$. Que peut-on dire de g ?

1. $A \neq B$ points de $\mathbb{R}^3$. La droite passant par A et B est l'ensemble $\{M \in \mathbb{R}^3, \vec{AM}$ est colinéaire à $\vec{AB}\} = \{M \in \mathbb{R}^3, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{AM} = \lambda \vec{AB}\}$

C'est le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ engendré par A et B et ce sous espace affine est de dimension 1.

Si $A = B$ il existe une infinité de droite passant par A et B. Le sous-espace affine engendré par A et B est de dimension 0.

2. Soient f, g $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deux applications affines dont on note φ et ψ les parties linéaires. Par définition on a

$\forall M, N \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\vec{MN})$ et $\overrightarrow{g(M)g(N)} = \psi(\vec{MN})$

Alors pour $M, N \in \mathbb{R}^3$ $\overrightarrow{g \circ f(M)\, g \circ f(N)} = \overrightarrow{g(f(M))g(f(N))} = \psi(\overrightarrow{f(M)f(N)}) = \psi(\varphi(\vec{MN})) = \psi \circ \varphi\, (\vec{MN})$

Or $\psi \circ \varphi$ est une application linéaire comme composée d'applications linéaires donc $g \circ f$ est affine.

3. Puisque P est de dimension 2 et $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, un sous espace affine ~~E~~ de $\mathbb{R}^3$ contenant P est de dimension ≥ 2 donc c'est P ou $\mathbb{R}^3$ entier.

Le point $(0,0,0)$ ne satisfait pas l'équation de P donc n'est pas dans P, donc E n'est pas P c'est $\mathbb{R}^3$ entier

4a. G vérifie $\frac{1}{2}\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = 0$

Supposons $G = A$ alors $\vec{GA} = 0$ donc $\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = 0$ donc $G = A$ est l'isobarycentre de BCD

Inversement supposons $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 0$. En introduisant A dans la relation ci-dessus il vient $\frac{1}{2}\vec{GA} + \vec{GA} + \vec{AB} + \vec{GA} + \vec{AC} + \vec{GA} + \vec{AD} = 0$

soit $\frac{7}{2}\vec{GA} = 0$ donc $A = G$

4b. Puisque f est affine, f préserve les barycentres donc $f(G)$ est le barycentre du système $(f(A), \frac{1}{2}), (f(B), 1), (f(C), 1), (f(D), 1)$

Par transitivité du calcul des barycentres le barycentre du système $(A, \frac{1}{2}), (B, 1), \dots, (f(A), \frac{1}{2}), \dots, (f(D), 1)$ coïncide avec le barycentre du système $(G, \frac{1}{2}+1+1+1), (f(G), \frac{1}{2}+1+1+1)$ lequel coïncide avec le barycentre du système $(G, 1), (f(G), 1)$.

On reconnaît l'isobarycentre des points G et $f(G)$, c'est à dire le milieu du segment $[G, f(G)]$

5a. D $\begin{cases} x + y + 2z + 2 = 0 & (1) \\ x - y + 3z + 3 = 0 & (2) \end{cases}$, $A = (1,1,1)$

On choisit un point de D en résolvant le système d'équations. En soustrayant l'équation (1) à l'équation (2) on obtient le système d'équations équivalent : $\begin{cases} x + y + 2z + 2 = 0 \\ -2y + z + 1 = 0 \end{cases}$. On peut alors prendre $y = 0$ on obtient $z = -1$ et en reportant dans (1)

$x = 0$. $B = (0,0,-1)$ est un point de D.

Pour obtenir un vecteur directeur on choisit un autre point de D en prenant par ex $y = 1$ alors $z = 1$ puis $x = -5$. Notons le C. Comme C est distinct de B, $\vec{BC} = (-5,1,1) - (0,0,-1) = (-5,1,2)$ est un vecteur directeur de D.

5b Avec les choix faits en 5a on a $B_t = B + t\vec{u} = (0,0,-1) + (-5t, t, 2t) = (-5t, t, 2t-1)$

puis $\vec{AB_t} = B_t - A = (-5t-1, t-1, 2t-2)$.

La distance de A à B_t est $\|\vec{AB_t}\| = \sqrt{(-5t-1)^2 + (t-1)^2 + (2t-2)^2} = \sqrt{30t^2 + 6}$

(5b) En fait puisque l'application $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante, rechercher le minimum de l'application $t \mapsto \|\vec{AB_t}\|$ équivaut à rechercher le minimum de $t \mapsto \|\vec{AB_t}\|^2$

On a $30t^2+6 \geq 6$ avec égalité ssi $t=0$. Donc l'application $t \mapsto \|\vec{AB_t}\|^2$ atteint son minimum exactement en $t_0=0$ et vaut alors 6. Donc l'application $t \mapsto \|\vec{AB_t}\|$ atteint son minimum exactement en t_0 et vaut alors $\sqrt{6}$

Par définition $d(A,D) = \inf_{M \in D} \|\vec{AM}\|$. Or lorsque t décrit $\mathbb{R}$ B_t décrit la droite D en entier, donc $\inf_{M\in D} \|\vec{AM}\| = \inf_{t \in \mathbb{R}} \|\vec{AB_t}\| = \sqrt{6}$

5c). $\vec{AB_{t_0}}$ est orthogonal à D. On peut le vérifier en calculant le produit scalaire $\vec{AB_{t_0}} \cdot \vec{u} = \vec{AB} \cdot \vec{u} = (-1,-1,-2) \cdot (-5,1,2) = 0$

On peut aussi observer que pour $M \in D$ AM est minimal ssi M est le projeté orthogonal de A sur D. En effet notons A' ce projeté orthogonal. On a par Pythagore $AM^2 = AA'^2 + A'M^2 \geq AA'^2$ avec égalité ssi $M = A'$. Donc nécessairement $B_{t_0} = A'$.

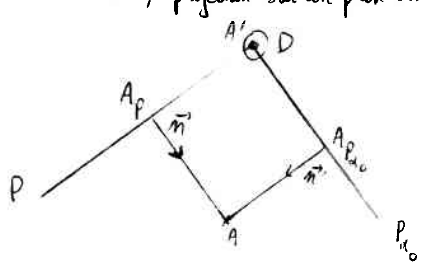
Rq : En choisissant un autre point B de D ou un autre vecteur directeur $\vec{u}$ on change l'application $t \mapsto \|\vec{AB_t}\|$ et la valeur de t_0. Par contre on ne change pas B_{t_0} donc le réel $\inf_{t\in\mathbb{R}} \|\vec{AB_t}\|$ vue l'interprétation donnée en 5b et 5c.

5d. Avec les notations de 5a, l'équation $x+y+2z+2 + \alpha(x-y+3z+3) = 0$ s'obtient en ajoutant à (1) α fois l'équation (2). Or le système ainsi obtenu $\begin{cases} (1)+\alpha(2) \\ (2) \end{cases}$ est équivalent au système $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$: il a les mêmes solutions (c'est la méthode du pivot). Comme les équations $(1)+\alpha(2)$ et (2) sont linéaires avec second membre, on obtient bien un système d'équations cartésiennes du même ensemble solution, c'est à dire D.

Rq l'équation $(1)+\alpha(2)$ est bien l'équation d'un plan car le triplet $(1+\alpha, 1-\alpha, 2+3\alpha)$ n'est jamais nul.
Ce plan n'est pas parallèle au plan d'équation (2) car $(1+\alpha, 1-\alpha, 2+3\alpha)$ n'est pas colinéaire à $(1,-1,3)$

5e. Le vecteur $(1+\alpha, 1-\alpha, 2+3\alpha)$ (qui n'est jamais nul) est un vecteur normal de P_α. De même $(1,-1,3)$ est un vecteur normal de P. Par définition P_α est orthogonal à P ssi les vecteurs normaux sont orthogonaux, c'est à dire si le produit scalaire $(1+\alpha, 1-\alpha, 2+3\alpha)\cdot(1,-1,3) = 11\alpha+6$ est nul. On obtient $\alpha_0 = -\frac{6}{11}$. P_{α_0} est d'équation $\frac{5}{11}x + \frac{17}{11}y + \frac{4}{11}z + \frac{4}{11} = 0$

5f D'abord un dessin, projection sur un plan orthogonal à D de la configuration dans $\mathbb{R}^3$



(5f)

Notons $\vec{n}$ un vecteur normal de P et $\vec{n}'$ un vecteur normal de P_{d_0}. Par construction de d_0 on a $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$ (donc $\vec{n}$ appartient à la direction $\vec{P}_{d_0}$ de P_{d_0})

On veut montrer $A'\in D$. On sait $A'\in P_{d_0}$, il faut donc montrer $A'\in P$

$A_p\in P$ et $\vec{n}$ est un vecteur normal de P donc $P=\{M\in\mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{A_pM}\cdot\vec{n}=0\}$. En particulier $A'\in P \iff \overrightarrow{A_pA'}\cdot\vec{n}=0$

Or $\overrightarrow{A_pA'}$ est orthogonal à P_{d_0} par construction de A' donc est colinéaire à $\vec{n}'$. Or $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$ donc on a bien $\overrightarrow{A_pA'}\cdot\vec{n}=0$

Soit maintenant M un point de D alors $M\in P$ et $\overrightarrow{A_pM}\cdot\vec{n}=0$. Comme $\overrightarrow{AA_p}$ est colinéaire à $\vec{n}$ on obtient $\overrightarrow{A_pM}\cdot\overrightarrow{AA_p}=0$

Le théorème de Pythagore donne alors la relation $AM^2=AA_p^2+A_pM^2$

De même $M\in P'$, $A'\in P'$ et $\overrightarrow{A_pA'}$ est orthogonal à P_{d_0} (c'est à dire colinéaire à $\vec{n}'$) donc $\overrightarrow{A_pA'}\cdot\overrightarrow{A'M}=0$ d'où on déduit par Pythagore la relation $A_pM^2=A_pA'^2+A'M^2$. En remplaçant dans la première on obtient $AM^2=AA_p^2+A_pA'^2+A'M^2$

En faisant $M=A'$ (qui est dans D d'après ce qui précède) dans la première relation on obtient $AA'^2=AA_p^2+A_pA'^2$ de sorte qu'on a $AM^2=AA'^2+A'M^2$ pour tout point M de D. Ceci montre que le produit scalaire $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{A'M}$ est nul (c'est la réciproque du théorème de Pythagore) donc $\overrightarrow{AA'}$ est orthogonal à D. Comme $A'\in D$, ceci caractérise A' comme projeté orthogonal de A sur D.

5g On a vu en 5f qu'on a $AA_p^2+A_pA'^2=AA'^2$ car $\overrightarrow{AA_p}\cdot\overrightarrow{A_pA'}=0$. De même $\overrightarrow{AA_{P_{d_0}}}$ est orthogonal à P_{d_0} et $\overrightarrow{A_{P_{d_0}}A'}$ est dans la direction de P_{d_0} donc $\overrightarrow{AA_{P_{d_0}}}\cdot\overrightarrow{A_{P_{d_0}}A'}=0$ donc $AA'^2=AA_{P_{d_0}}^2+A_{P_{d_0}}A'^2$. En comparant avec la première relation il vient

$$AA_p^2+A_pA'^2=AA_{P_{d_0}}^2+A_{P_{d_0}}A'^2 \qquad (3)$$

$\overrightarrow{AA_p}$ est colinéaire à $\vec{n}$ comme $\overrightarrow{AA_{P_{d_0}}}$ est colinéaire à $\vec{n}'$. Or $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$ donc $\overrightarrow{AA_p}\cdot\overrightarrow{AA_{P_{d_0}}}=0$ donc $A_pA_{P_{d_0}}^2=AA_p^2+AA_{P_{d_0}}^2$

$\overrightarrow{A_pA'}$ est colinéaire à $\vec{n}'$ et $\overrightarrow{A'A_{P_{d_0}}}$ est dans la direction de $\vec{P}_{d_0}$ (car $A', A_{P_{d_0}}\in P_{d_0}$) donc $\overrightarrow{A_pA'}\cdot\overrightarrow{A'A_{P_{d_0}}}=0$

donc on a $A_pA_{P_{d_0}}^2=A_pA'^2+A'A_{P_{d_0}}^2$. En comparant les deux relations on obtient

$$AA_p^2+AA_{P_{d_0}}^2=A_pA'^2+A'A_{P_{d_0}}^2 \quad (4)$$

En soustrayant (4) à (3) on obtient $A_pA'^2-AA_{P_{d_0}}^2=AA_{P_{d_0}}^2-A_pA'^2$ d'où on déduit $A_pA'^2=AA_{P_{d_0}}^2$

En reportant dans la relation $AA'^2=AA_p^2+A_pA'^2$ on obtient $AA'^2=AA_p^2+AA_{P_{d_0}}^2$

5h. P' plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. Notons $\vec{m}$ le vecteur (a,b,c). $\vec{m}$ est un vecteur normal à P'

Notons $A_{p'}$ le projeté orthogonal de A sur P'. $A_{p'}$ est caractérisé par : $\overrightarrow{AA_{p'}}$ est colinéaire à $\vec{m}$: $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{AA_{p'}}=\lambda\vec{m}=(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$

et $A_{p'}\in P'$ autrement dit ses coordonnées vérifient l'équation de P'. $A_{p'}=A+\lambda\vec{m}=(1+\lambda a,\ 1+\lambda b,\ 1+\lambda c)$

donc $\lambda a^2+\lambda b^2+\lambda c^2 \underbrace{+d}_{+a+b+c}=0$ ce qui donne $\lambda=-\dfrac{a+b+c+d}{a^2+b^2+c^2}$ (observons que $a^2+b^2+c^2>0$ car $(a,b,c)\neq(0,0,0)$)

Pour tout point M de P' on a $\overrightarrow{AA_{p'}}\cdot\overrightarrow{A_{p'}M}=0$ donc $AM^2=AA_{p'}^2+A_{p'}M^2$. En particulier $AM^2\geq AA_{p'}^2$ avec égalité ssi $M=A'$

(5h) Donc $d(A,P') := \inf\limits_{M\in P'} AM = AA_{p'}$

On calcule $\overrightarrow{AA_{p'}} = \lambda \vec{m} = -\dfrac{a+b+c+d}{a^2+b^2+c^2}(a,b,c)$

$$AA_{p'} = \|\overrightarrow{AA_{p'}}\| = \sqrt{\frac{(a+b+c+d)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}(a^2+b^2+c^2)} = \frac{|a+b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = d(A,P')$$

5i. D'après 5g on a $AA'^2 = AA_p^2 + AA_{p_{d_0}}^2$

Pour $M\in D$ on a $AM^2 = AA'^2 + A'M^2 \geq AA'^2$ avec égalité ssi $M = A'$ donc $d(A,D) := \inf\limits_{M\in D} AM = AA'$

On calcule avec 5h $AA_p = \dfrac{|1-1+3+3|}{\sqrt{1+1+9}} = \dfrac{6}{\sqrt{11}} \rightsquigarrow AA_p^2 = \dfrac{36}{11}$

$$AA_{p_{d_0}}^2 = \frac{(5/11 + 17/11 + 4/11 + 4/11)^2}{(5/11)^2 + (17/11)^2 + (4/11)^2} = \frac{30^2}{330} = \frac{30}{11}$$

puis $AA'^2 = \dfrac{36}{11} + \dfrac{30}{11} = 6$

On obtient $d(A,D) = \sqrt{6}$ ce qui est conforme aux prévisions de 5b

6 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 9x+2y-6z+38\\ 2x+9y+6z+17\\ -6x+6y-7z-29\end{pmatrix}$

6a les vecteurs $\frac{1}{11}(9,2,-6)$, $\frac{1}{11}(2,9,6)$, $\frac{1}{11}(-6,6,-7)$ (les vecteurs colonnes de la matrice) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. On le vérifie en calculant les produits scalaires $\frac{1}{11}(9,2,-6)\cdot\frac{1}{11}(9,2,-6) = \frac{1}{11^2}(81+4+36) = 1$, $\frac{1}{11}(9,2,-6)\cdot\frac{1}{11}(2,9,6) = \frac{1}{11^2}(18+18-36) = 0, \dots$ (chaque vecteur est de norme 1, le produit scalaire d'un vecteur avec un autre est 0). Donc la matrice $A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 2 & -6\\ 2 & 9 & 6\\ -6 & 6 & -7\end{pmatrix}$ est orthogonale : elle vérifie ${}^tAA = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

f est affine de partie linéaire l'application linéaire φ de matrice A : $f(x,y,z) = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \frac{1}{11}\begin{pmatrix}38\\17\\-29\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + f(0,0,0)$

donc $\forall M, N \in \mathbb{R}^3$, $\underbrace{f(M) - f(N)}_{\overrightarrow{f(M)f(N)}} = \varphi(M) - \varphi(N) = \varphi(\underbrace{M-N}_{\overrightarrow{MN}})$

On a $\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\varphi(\overrightarrow{MN})\| = \|\overrightarrow{MN}\|$ En effet la matrice de φ dans la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^3$ est orthogonale donc φ préserve le produit scalaire, donc la norme.

Donc f préserve les distances : f est une isométrie.

(On aurait pu citer le théorème du cours qui dit qu'une application affine dont la partie linéaire est orthogonale est une isométrie.)

6b. On résout $\begin{cases} 9x+2y-6z+38 = 11x \\ 2x+9y+6z+17 = 11y \\ -6x+6y-7z-29 = 11z \end{cases}$ soit $\begin{cases} -2x+2y-6z = -38 \\ 2x-2y+6z = -17 \\ -6x+6y-18z = 29 \end{cases}$

En ajoutant la première équation à la seconde on obtient $0 = -55$ impossible, donc il n'y a pas de solution. f n'admet pas de point fixe

6c On veut montrer que si (x,y,z) vérifie $x-y+3z+3=0$ alors $f(x,y,z)$ vérifie la même équation.

On calcule $\frac{1}{11}(9x+2y-6z+38) - \frac{1}{11}(2x+9y+6z+17) + \frac{3}{11}(-6x+6y-7z-29)+3 = \frac{1}{11}(-11x+11y-33z-66+33) = 0$

Donc $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \in P \Rightarrow f(x,y,z) \in P$

Pour $(x,y,z) \in P$ on calcule $f(x,y,z)-(x,y,z) = \frac{1}{11}(-2x+2y-6z+38,\ 2x-2y+6z+17,\ -6x+6y-18z-29)$

or $x-y+3z = -3$ donc $f(x,y,z)-(x,y,z) = \frac{1}{11}(6+38,\ -6+17,\ 18-29) = (4,1,-1)$

Conclusion $f|_P$ est la translation de vecteur $\vec{u} = (4,1,-1)$

6d. Soit $g = t_{-\vec{u}} \circ f$. D'après 6c $g|_P$ est l'identité. Puisque g est une isométrie, comme composée d'isométries, g est soit la symétrie orthogonale par rapport à P soit l'identité. Pour le décider on compare $g(M)$ à M pour M un point hors de P

par exemple $M = (0,0,0)$ alors $f(M) = \frac{1}{11}(38,17,-29)$ et $t_{-\vec{u}} \circ f(M) = \frac{1}{11}(38-44,\ 17-11,\ -29+11) = \frac{1}{11}(-6,6,-18) \neq M$

donc g est la symétrie orthogonale par rapport à P.

~~[illegible]~~ Précisions notons s la symétrie orthogonale par rapport à P. Puisque g est une isométrie on a $\forall N \in P$ $MN = g(M)g(N)$

et comme $g(N) = N$ pour $N \in P$ on a $\forall N \in P$ $MN = g(M)N$. Autrement dit P est l'hyperplan médiateur du segment $[M, g(M)]$

donc $s(g(M)) = M$ par définition de s.

Notons $h = s \circ g$. h est une application affine comme composée d'applications affines. L'ensemble des points fixes de h est donc un sous espace affine de $\mathbb{R}^3$. Il contient P et le point M donc c'est $\mathbb{R}^3$ tout entier (Cf la question 3).

Examen

Questions de cours. On ne demande pas pour ces questions de justifier les réponses.

1. On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$.

a. Qu'appelle t-on plan affine de $\mathbb{R}^3$?

b. Qu'est-ce que la donnée d'un repère orthonormé d'un tel plan affine ?

c. Comment est définie la projection orthogonale sur un tel plan affine ?

2. On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de sa base orthonormée canonique.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante (CNS) sur les réels a, b, c, d pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ soit la matrice dans la base canonique d'une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

b. Donner une CNS sur a, b, c, d pour que $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ soit la matrice dans la base canonique d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application affine de partie linéaire φ.

a. Donner une CNS sur φ pour qu'on ait

$$\forall D \text{ droite de } \mathbb{R}^3,\ f(D) \text{ est une droite de } \mathbb{R}^3.$$

Donner un exemple d'application affine f et de droite D telles que $f(D)$ ne soit pas une droite.

b. Donner une condition suffisante sur φ pour que f admette un point fixe. Montrer par un exemple que cette condition n'est pas nécessaire.

Exercices. Toute affirmation doit maintenant être soigneusement justifiée.

4. *Plans dans* $\mathbb{R}^3$

a. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les points $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, -1, 1)$ et $C = (1, 1, 1)$. Montrer que A, B, C sont non alignés.

On note P_1 le plan passant par les points A, B, C.

b. Soit A' le point $(2, -2, -3)$ et D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par les équations

$$\begin{cases} 2x + y + z - 5 = 0 \\ -2x - y + z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Vérifier que D est une droite de $\mathbb{R}^3$ et que A' n'est pas dans D.

On note P_2 le plan passant par A' et contenant D.

c. Montrer que P_2 est parallèle à P_1 et n'est pas confondu avec P_1.

../..

d. On fixe deux réel α, β vérifiant $\alpha + \beta = 1$. Pour $M \in P_1$ on note G_M le barycentre du système $\{(A', \alpha), (M, \beta)\}$.

Calculer en fonction de α et β les coordonnées du point G_A.

e. Montrer que si $\beta \neq 0$ alors l'ensemble des points G_M, M décrivant P_1, est un plan parallèle à P_1. *(On pourra montrer que cet ensemble est l'image de P_1 par une homothétie convenable puis discuter de l'image de P_1 par une homothétie.)*

Dans quel cas est-il confondu avec P_1 ? Que se passe t-il si $\beta = 0$?

f. Pour $M \in P_1$ on note G'_M le barycentre du système $\{(A', \alpha), (M, \beta), (B, 1)\}$. Montrer que si $\beta \neq 0$ alors l'ensemble des G'_M, M décrivant P_1, est un plan parallèle à P_1. *(On pourra distinguer les cas $\alpha \neq -1$ et $\alpha = -1$. Dans le cas $\alpha = -1$ on pourra reconnaître l'ensemble des G'_M comme l'image de P_1 par une translation.)*

5. *Symétrie plane de $\mathbb{R}^3$*

On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit $P \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x - y + z - 1 = 0$. On note s la symétrie orthogonale par rapport à P.

a. Quelle est la distance du point $(0, 0, 0)$ à P ? Quelle est la distance du point $(0, 0, 0)$ à son image par s ? L'application s est elle linéaire ?

b. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la partie linéaire de s.

c. On considère la droite D passant par le point $A = (0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (2, -1, 1)$. Déterminer la droite image de D par s. La droite $s(D)$ est-elle confondue avec D ?

d. Pour M un point de $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ on note $D_{M,\overrightarrow{u}}$ la droite passant par M et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\overrightarrow{u}$ pour qu'on ait $s(D_{M,\overrightarrow{u}}) = D_{M,\overrightarrow{u}}$.

e. Si la condition ci-dessus est satisfaite, que peut-on dire de la restriction à $D_{M,\overrightarrow{u}}$ de s ?

1a C'est un sous-espace affine non vide de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Il s'écrit donc $A + \vec{P}$ où $A \in \mathbb{R}^3$ et P est un sous-espace vectoriel de dim 2 de $\mathbb{R}^3$

1b C'est la donnée d'un triplet (A, e_1, e_2) où A est un point du plan et (e_1, e_2) une base orthonormée de la direction de P.

1c Si on note P le plan affine, la projection orthogonale sur P est l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $M \mapsto M_p$ où M_p est caractérisé par $M_p \in P$ et $\overrightarrow{MM_p}$ est orthogonal à P

Si on s'est donné un repère orthonormé (A, e_1, e_2) de P alors on a $M_p = A + (\overrightarrow{AM} \cdot e_1)\, e_1 + (\overrightarrow{AM} \cdot e_2)\, e_2$

2a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice ds la base canonique de $\mathbb{R}^2$ d'une rotation vectorielle $\iff \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$

(les trois premières conditions disent que la matrice est orthogonale, la quatrième condition dit que son déterminant est 1)

2b $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite de $\mathbb{R}^2$ $\iff \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = -1 \end{cases}$

3a CNS : φ est injective. De façon équivalente $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$

Un exemple : Soit f $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto (0,0,0)$ (l'application constante égale à 0). Soit D la droite passant par $(0,0,0)$ et de vecteur directeur $(1,0,0)$. Alors f est affine de partie linéaire l'application nulle. $f(D)$ est le ~~ss~~ ensemble de $\mathbb{R}^3$ formé du seul élément $(0,0,0)$

$f(D)$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ mais n'est pas une droite.

3b Si 1 n'est pas valeur propre de φ, ie si $\varphi - Id$ est injective, alors f admet un (et un seul) point fixe.

Un exemple : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto x$ alors f est affine de partie linéaire Id. $\varphi - Id$ n'est pas injective mais f admet un point fixe (tout point de $\mathbb{R}^3$ est point fixe).

Exercices

4a. On forme $\vec{AB} = (1, -3, -2)$ et $\vec{AC} = (0, -1, -2)$. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont non nuls et non proportionnels donc A, B, C sont non alignés

4b. Le système d'équations de D est équivalent à $\begin{cases} 2x + y + z - 5 = 0 \\ 2z - 2 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} z = 1 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} z = 1 \\ y = 4 - 2x \end{cases}$

(x, y, z) est solution $\iff (x, y, z) = (0, 4, 1) + x(1, -2, 0)$. On reconnaît la droite passant par $(0, 4, 1)$ et de vecteur directeur $(1, -2, 0)$

Le point A' n'est pas dans D car ses coordonnées ne satisfont pas le syst. d'équations de D.

4c. Soit $B' = (0,4,1)$ et $C' = (1,2,1)$. B' et C' sont deux points distincts de D

$A' = (2,-2,-3)$ n'est pas dans D donc A', B', C' sont trois points de P_2 non alignés.

Cherchons un vecteur normal à P_2 : $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma) \perp P_2 \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{A'B'} = 0$ et $\vec{n}.\vec{B'C'} = 0$

$\Leftrightarrow -2\alpha + 6\beta + 4\gamma = 0$ et $\alpha - 2\beta = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = 2\beta$ et $\beta = -2\gamma$

$\Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = \gamma(-4, -2, 1)$

On choisit $\gamma = 1$ de sorte que $\vec{n}$ est non nul.

On vérifie $\vec{n}.\vec{AB} = -4+6-2 = 0$ et $\vec{n}.\vec{AC} = 2-2 = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $Vect(\vec{AB}, \vec{AC}) = \vec{P_1}$

$\vec{n}$ est non nul et orthogonal à P_1 et à P_2 donc P_1 est parallèle à P_2

Maintenant $P_1 = P_2 \Leftrightarrow A \in P_2 \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{AA'} = 0 \Leftrightarrow -4\times 1 - 2\times(-4) + 1\times(-6) = 0$ ce qui n'est pas.

4d. G_A vérifie $\alpha \vec{A'G_A} + \beta \vec{AG_A} = 0$ soit $G_A = \alpha A' + \beta A = (2\alpha + \beta, -2\alpha + 2\beta, -3\alpha + 3\beta)$

4e. On a $\alpha \vec{A'G_M} + \beta \vec{MG_M} = 0$ soit $\vec{A'G_M} = -\beta \vec{MA'} = \beta \vec{A'M}$. C'est dire que G_M est l'image de M par l'homothétie h de centre A' et de rapport β.

Alors $\{G_M, M \in P_1\} = h(P_1) = h(A + \vec{P_1}) = h(A) + \vec{h}(\vec{P_1}) = G_A + \beta Id(\vec{P_1})$

Si $\beta = 0$ alors $\beta Id(\vec{P_1}) = \{0\}$ donc $h(P_1) = \{G_A\}$. C'est un point

Supposons $\beta \neq 0$ alors $\beta Id(\vec{P_1}) = \vec{P_1}$ donc $h(P_1) = G_A + \vec{P_1}$ = plan passant par G_A ~~passant~~ parallèle à P_1.

$h(P_1) = P_1 \Leftrightarrow G_A \in P_1 \Leftrightarrow \vec{AG_A} \in \vec{P_1}$

Or $\vec{AG_A} = \alpha \vec{AA'}$. $\vec{AA'} \notin \vec{P_1}$ car $A' \notin P_1$ (sinon on aurait $P_1 = P_2$ ce qui n'est pas d'après 4.c)

Donc $\vec{AG_A} \in \vec{P_1} \Leftrightarrow \alpha = 0$

Conclusion : $h(P_1) = P_1 \Leftrightarrow \alpha = 0$

4.f. Si $\alpha \neq -1$ alors G'_M est le barycentre du système $\{(bar\{(A',\alpha),(B,1)\}, 1+\alpha), (M,\beta)\}$ bien défini car $1+\alpha \neq 0$ et $1+\alpha+\beta = 2 \neq 0$

Notons $A'' = bar\{(A',\alpha),(B,1)\}$. G'_M est le barycentre du syst. $\{(A'', 1+\alpha), (M,\beta)\}$. On est ainsi ramené à la question 4.e : Si $\beta \neq 0$ alors $\{G'_M, M \in P_1\}$ est le plan passant par $bar\{(A'', 1+\alpha), (A,\beta)\}$ et parallèle à P_1

Si $\alpha = -1$ on écrit $-\vec{A'G'_M} + 2\vec{MG'_M} + \vec{BG'_M} = 0$ soit $\vec{MG'_M} = \frac{1}{2}\vec{A'B}$. C'est dire que G'_M est l'image de M par la translation t de vecteur $\frac{1}{2}\vec{A'B}$.

Alors $\{G'_M, M \in P_1\} = t(P_1)$ = plan parallèle à P_1 passant par $t(A)$ $\quad (t(P_1) = t(A + \vec{P_1}) = t(A) + Id(\vec{P_1}) = t(A) + \vec{P_1})$

5.a. Notons $A=(0,0,0)$ et $A_p=(x,y,z)$ le projeté orthogonal de A sur P

On a $\begin{cases} \overrightarrow{AA_p} \text{ proportionnel à } (1,-1,1) \text{ car } (1,-1,1) \text{ est un vecteur normal à } P\text{, donc } (x,y,z)=\lambda(1,-1,1) \text{ pour un } \lambda\in\mathbb{R} \\ A_p\in P \text{ soit } x-y+z-1=0 \text{ ce qui } \cancel{\text{se traduit par}} \text{ donne } \lambda+\lambda+\lambda-1=0 \text{ soit } \lambda=\frac{1}{3} \text{ donc } A_p=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \end{cases}$

$AA_p=\sqrt{\frac{3}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=d(A,P)$. En effet pour $M\in P$ on a $AM=\sqrt{AA_p^2+A_pM^2}\geq AA_p$ donc $\inf\limits_{M\in P} AM=AA_p$

On a $\overrightarrow{As(A)}=2\overrightarrow{AA_p}$ donc $As(A)=2\frac{\sqrt{3}}{3}$

s n'est pas linéaire car $s(0,0,0)=s(A)\neq(0,0,0)$

5b. Soit $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Posons $s(M)=(x',y',z')$. On a $\overrightarrow{Ms(M)}$ proportionnel à $(1,-1,1)$ (car le vecteur $(1,-1,1)$ est orthogonal à P et non nul)
donc $(x',y',z')=(x,y,z)+\lambda(1,-1,1)$ pour un $\lambda\in\mathbb{R}$.
D'autre part le milieu du segment $[M,s(M)]$ est dans P ce qui se traduit par $\frac{x+x'}{2}-\frac{y+y'}{2}+\frac{z+z'}{2}-1=0$
donc $x+\frac{\lambda}{2}-y+\frac{\lambda}{2}+z+\frac{\lambda}{2}-1=0$ soit $\lambda=\frac{2}{3}(1-x+y-z)$. On obtient $(x',y',z')=\left(x(1-\frac{2}{3})+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z+\frac{2}{3},\ y(1-\frac{2}{3})+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}z-\frac{2}{3},\ z(1-\frac{2}{3})-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}\right)$

Ce qui s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & -2/3\\ 2/3 & 1/3 & 2/3\\ -2/3 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$ On reconnaît sur cette expression la partie linéaire de s.

Sa matrice est $\begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & -2/3\\ 2/3 & 1/3 & 2/3\\ -2/3 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

5c. $s(D)$ est la droite passant par $s(A)=A+2\overrightarrow{AA_p}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ (On peut utiliser les calculs de 5a ou de 5b) de vecteur directeur $\vec{s}(\vec{u})=\left(-\frac{2}{3},\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$ (d'après le calcul de la matrice de $\vec{s}$ en 5b)

$\vec{s}(\vec{u})$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ donc $s(D)$ n'est pas confondue avec D.

5d. $s(D_{M,\vec{u}})$ est la droite passant par $s(M)$ et dirigée par $\vec{s}(\vec{u})$. On a $s(D_{M,\vec{u}})=D_{M,\vec{u}} \iff s(D_{M,\vec{u}})$ est parallèle à $D_{M,\vec{u}}$ et $M\in s(D_{M,\vec{u}})$
$\iff \vec{s}(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $\overrightarrow{Ms(M)}$ est colinéaire à $\vec{s}(\vec{u})$

Par définition de s on sait que $\overrightarrow{Ms(M)}$ est orthogonal à P ie appartient à $\vec{P}^{\perp}$, et que $\vec{s}$ est l'identité sur $\vec{P}$ et $-Id$ sur $\vec{P}^{\perp}$.
On a $\mathbb{R}^3=\vec{P}\oplus\vec{P}^{\perp}$ et cette décomposition est la décomposition de $\mathbb{R}^3$ comme somme d'espaces propres pour $\vec{s}$. Donc $\vec{s}(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{u}$ ssi $\vec{u}\in\vec{P}$ ou $\vec{u}\in\vec{P}^{\perp}$
D'autre part $\overrightarrow{Ms(M)}\in\vec{P}^{\perp}$ est colinéaire à $\vec{s}(\vec{u})$ ssi $\overrightarrow{Ms(M)}=0$ ou si $\vec{s}(\vec{u})\in\vec{P}^{\perp}$.
Les deux conditions sont satisfaites ssi $\vec{u}\in\vec{P}$ et $M\in P$ (car alors $M=s(M)$)
ou si $\vec{u}\in\vec{P}^{\perp}$ (car alors $s(\vec{u})\in\vec{P}^{\perp}$)
Le premier cas correspond à $D_{M,\vec{u}}\subset P$. Le second cas correspond à $D_{M,\vec{u}}\perp P$

5e Il faut distinguer suivant les deux cas de 5d : si $D_{M,\vec{u}}\subset P$ alors $s_{|D_{M,\vec{u}}}$ est l'identité car $s_{|P}$ est l'identité.
si $D_{M,\vec{u}}\perp P$ alors la restriction de $\vec{s}$ à la direction $\vec{D}_{M,u}$ de $D_{M,\vec{u}}$ est $-Id$. De plus $D_{M,\vec{u}}$ intersecte P en le projeté orthogonal M_p de M sur P. Donc $s_{|D_{M,\vec{u}}}$ admet M_p comme point fixe et est de partie linéaire $-Id$. C'est donc la symétrie centrale par rapport à M_p (ou homothétie de centre M_p de rapport -1).

Examen

Questions de cours. On ne demande pas pour ces questions de justifier les réponses.

1. Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathbb{R}^3$, α, β, γ trois réels de somme non nulle et G le barycentre du système $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$. Parmi les conditions ci-dessous, lesquelles garantissent que G est confondu avec B ?

a) $\beta = 1$ b) $\alpha + \gamma = 0$ c) $\alpha = \gamma$ d) $\beta = 0$.

2. Soient A, B deux points distincts de $\mathbb{R}^3$, α, β deux réels de somme non nulle et G le barycentre du système $(A, \alpha), (B, \beta)$. Parmi les conditions ci-dessous, lesquelles garantissent que G appartient au segment $[A, B]$:

a) $\alpha + \beta > 0$ b) $\alpha\beta > 0$ c)$\alpha < 0$ et $\beta < 0$ d) $\alpha + \beta = 0$ e) $\alpha > 0$.

3. a. A quelles conditions nécessaires et suffisantes sur les réels a, b, c, d l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (ax + by + 1, cx + dy + 1)$ est-elle une rotation ?

b. A quelle condition sur $\theta \in \mathbb{R}$ l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (\cos(\theta)x+\sin(\theta)y+1, \sin(\theta)x-\cos(\theta)y+1)$ admet-elle un point fixe ?

Si elle admet un point fixe, quelle est la nature de cette application ?

Exercices. Toute affirmation doit maintenant être soigneusement justifiée.

4. Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application affine définie par $h(x, y) = (3x + 5y + 1, -2x - 4y - 1)$.

a. Donner la matrice de la partie linéaire de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

b. L'application h admet elle un point fixe ?

c. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par les points $A = (2, 3)$ et $B = (4, 1)$. Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par h.

d. On note g la restriction de h à $\mathcal{D}$ et φ la partie linéaire de g. Calculer $\varphi(u)$ pour u dans la direction $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$. Que peut-on dire de g ?

e. Soit $\mathcal{D}'$ la droite d'équation $-2x - 5y = 3$. Montrer que l'image de $\mathcal{D}'$ par h est une droite parallèle à $\mathcal{D}'$.

5. $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. Soient $A = (1, 0, 2)$, $B = (1, 1, 2)$, $C = (0, 3, 1)$. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A, B, C.

a. Montrer qu'il existe un point $O \in \mathcal{P}$ et un seul vérifiant $OA = OB = OC$.

b. Montrer que l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $MA = MB$ est un plan de $\mathbb{R}^3$. En donner une équation cartésienne (dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$). Calculer de même une équation de l'ensemble des $M \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $MA = MC$.

c. Montrer que l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $MA = MB = MC$ est une droite de $\mathbb{R}^3$ qu'on notera $\mathcal{D}$. Montrer que cette droite est orthogonale à $\mathcal{P}$ puis en donner un vecteur directeur.

d. Exhiber un point de $\mathcal{D}$ et en déduire un paramétrage de $\mathcal{D}$.

e. Montrer que pour tout point M de $\mathcal{D}$ on a $MA \geq OA$ avec égalité si et seulement si $M = O$. En déduire les coordonnées du point O.

../..

(8pt) **6.** L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire usuel et de la base orthonormée canonique $(i, j) = ((1,0),(0,1))$. Soient $\mathcal{D}$ une droite affine dans $\mathbb{R}^2$ et A, B, C trois points. On note $s_{\mathcal{D}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.

a. Quels sont les points fixes de l'application $s_{\mathcal{D}}$?

b. Montrer que si $s_{\mathcal{D}}(A) = B$ alors $s_{\mathcal{D}}(B) = A$.

c. On suppose que les trois points A, B, C sont distincts. Montrer que si l'ensemble $\{s_{\mathcal{D}}(A), s_{\mathcal{D}}(B), s_{\mathcal{D}}(C)\}$ est égal à $\{A, B, C\}$ alors l'un des points A, B ou C est sur $\mathcal{D}$. Montrer que si de plus les points A, B, C sont non alignés alors deux des côtés du triangle ABC ont même longueur.

d. On suppose $AB = BC = AC \neq 0$. Montrer que les trois points A, B, C sont non alignés.

e. On suppose désormais $AB = BC = AC \neq 0$. Quelles sont les symétries axiales transformant le triangle ABC en lui même ?

f. En composant deux symétries axiales convenables, montrer qu'il existe une rotation r vérifiant $r(A) = B$, $r(B) = C$ et $r(C) = A$. Quel est son centre ?

g. En utilisant le fait qu'il n'existe qu'une seule rotation vectorielle φ telle que $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC}$, montrer qu'il n'existe qu'une seule rotation r vérifiant $r(A) = B$, $r(B) = C$ et $r(C) = A$. Quelles sont les rotations transformant le triangle ABC en lui même ?

(bonus) ***h.** Montrer qu'une application affine transformant le triangle ABC en lui même admet au moins le centre de gravité de ABC comme point fixe. Quel est le groupe des isométries transformant le triangle ABC en lui même ? (*Exhiber ses éléments et la table de multiplication.*)

i. On pose $A = (1,0)$, $B = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $C = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Existe t-il une rotation r vérifiant $r(A) = B, r(B) = C, r(C) = A$?

Q1 $G = B \iff \alpha = \gamma = 0$ Ni a ni b ni c ni d ne garantissent $G = B$

Q2 $G \in [A, B] \iff \alpha$ et β ont même signe. b et c le garantissent

Q3 a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une rotation ~~ssi~~ si et seulement si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale de déterminant 1

et est différente de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (sinon l'application donnée est la translation de vecteur $(1,1)$)

La condition peut donc s'écrire $\exists \theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Q3 b On reconnait la composée de la translation de vecteur $(1,1)$ avec la symétrie axiale d'axe $\mathrm{Vect}\left(\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)\right)$

On peut écrire $(1,1) = \left((1,1) \mid \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)\right) \cdot \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right) + v = \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right) + v$ avec $v \perp \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$

$t_v \circ s_{\mathrm{Vect}\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)}$ est la symétrie axiale d'axe la droite passant par $\frac{v}{2}$ de vecteur directeur $\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$

$\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$ est un vecteur parallèle à l'axe de cette symétrie. La composée de la translation par ce vecteur avec la symétrie admet un point fixe si et seul^t si ce vecteur est nul.

La condition est donc $\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} = 0$ soit $\frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$ soit $\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$

On a déjà dit ce qu'était l'application lorsque cette condition est satisfaite.

4 a L'expression matricielle de h est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où la matrice de la partie linéaire de h ds la base canonique $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

4 b On cherche (x,y) tq $h(x,y) = (x,y)$ soit $\begin{cases} 2x + 5y + 1 = 0 \\ -2x - 5y - 1 = 0 \end{cases}$ On obtient l'éq. cartésienne d'une droite, ensemble des pts fixes de h

4c D est la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{AB} = (2,-2)$. On a $h(A) = (22,-17) = A + 10\,\vec{AB} \in D$

$h(B) = (18,-13) = A + 8\,\vec{AB} \in D$

D est le ss espace affine engendré par A et B donc $h(D)$ est le ss esp. affine engendré par $h(A)$ et $h(B)$ donc $h(D) \subset D$

Comme $h(A) \neq h(B)$ on a en fait $h(D) = D$

4d On pose $g : D \to D$, $M \mapsto h(M)$. g est affine comme restriction d'une application affine.

Notons φ la partie linéaire de g : $\varphi : \vec{D} \to \vec{D}$

On a $\varphi(\vec{AB}) = \overrightarrow{g(A)g(B)} = \overrightarrow{h(A)h(B)} = (18,-13) - (22,-17) = (-4,4) = -2\,\vec{AB}$

On a $\vec{D} = \mathrm{Vect}(\vec{AB}) = \{\lambda \vec{AB}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\varphi(\lambda \vec{AB}) = \lambda\,\varphi(\vec{AB}) = -2\lambda\,\vec{AB}$

Conclusion $\varphi = -2\,\mathrm{Id}_{\vec{D}}$ donc g est une homothétie de rapport -2. On peut chercher le centre de cette homothétie en cherchant $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $g(A + \lambda\vec{AB}) = A + \lambda\vec{AB}$ soit $(22,-17) - 2\lambda\,\vec{AB} = (2,3) + \lambda\vec{AB}$. On obtient $\lambda = \frac{10}{3}$

g est l'homothétie de D de centre $A + \frac{10}{3}\vec{AB} = \left(\frac{26}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ de rapport -2

Attention : h n'est pas une homothétie !

4e Notons ψ la partie linéaire de h

D' est la droite passant par $(-\frac{3}{2},0)$ de vecteur directeur $(5,-2)$ donc $h(D')$ est le ss espace affine passant par $h((-\frac{3}{2},0))$ et de direction $\mathrm{Vect}(\psi(5,-2))$

On a $\psi((5,-2)) = (5,-2)$ (on utilise 4a) donc $\overrightarrow{h(D')} = \overrightarrow{D'}$ donc $h(D')$ est une droite parallèle à D'

5a Les points A, B, C ne sont pas alignés car les vecteurs $\vec{AB} = (0,1,0)$ et $\vec{AC} = (-1,3,-1)$ ne sont pas proportionnels.

Dans le plan P les droites (AB) et (AC) ne sont pas parallèles donc les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ ne sont pas parallèles donc elles se coupent en un unique point. Notons O ce point. On a $OA = OB$ car $O \in$ médiatrice de $[AB]$ et de même $OA = OC$

Réciproquement si O est un point de P vérifiant $OA = OB = OC$ alors $O \in$ médiatrice de $[AB]$ et $O \in$ médiatrice de $[AC]$ d'où l'unicité.

5b Puisque $A \neq B$ l'ensemble des pts M de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $MA = MB$ est l'hyperplan médiateur du segment $[AB]$ donc un plan.

Précisément notons I le milieu de $[AB]$. On a $MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$$\Leftrightarrow MI^2 + IA^2 + 2\vec{MI}\cdot\vec{IA} = MI^2 + IB^2 + 2\vec{MI}\cdot\vec{IB}$$
$$\Leftrightarrow \vec{MI}\cdot\vec{AB} = 0$$

L'ensemble $\{M \in \mathbb{R}^3,\ MA = MB\}$ est donc le plan passant par I orthogonal à $\vec{AB}$.

On a $\vec{AB} = (0,1,0)$ donc le plan admet une équation de la forme $0x + 1\cdot y + 0\cdot z = d$ pour un $d \in \mathbb{R}$

Puisque $I = (1, \frac{1}{2}, 2)$ appartient au plan médiateur on a $d = \frac{1}{2}$ d'où l'équation $y = \frac{1}{2}$

De même l'ensemble des $M \in \mathbb{R}^3$ tq $MA = MC$ est l'hyperplan médiateur de $[AC]$ donc le plan orthogonal à $\vec{AC}$ passant par le milieu de $[AC]$

On a $\vec{AC} = (-1,3,-1)$ donc le plan admet une équation de la forme $-x + 3y - z = e$ pour un $e \in \mathbb{R}$

$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ appartient au plan donc $e = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ d'où l'équation $-x + 3y - z = \frac{5}{2}$

5c Notons P_1 l'hyperplan médiateur de $[AB]$ et P_2 celui de $[AC]$. P_1 n'est pas parallèle à P_2 puisque $\vec{AB}$ n'est pas proportionnel à $\vec{AC}$ donc $P_1 \cap P_2$ est une droite. Notons la D

$$\left.\begin{array}{l} \text{On a } MA = MB \Leftrightarrow M \in P_1 \\ MA = MC \Leftrightarrow M \in P_2 \end{array}\right) \quad \text{donc } MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in P_1 \cap P_2 = D$$

Le vecteur $\vec{AB}$ est orthogonal à $\vec{P_1}$ et $\vec{D} \subset \vec{P_1}$ donc $\vec{AB}$ est orthogonal à $\vec{D}$. De même $\vec{AC}$ est orthogonal à $\vec{P_2}$ et $\vec{D} \subset \vec{P_2}$ donc $\vec{AC}$ est orthogonal à $\vec{D}$.

Donc $\vec{D}$ est orthogonale à $\mathrm{vect}(\vec{AB}, \vec{AC}) = \vec{P}$

Pour obtenir un vecteur directeur de $\vec{D}$ il suffit d'exhiber un vecteur non nul orthogonal à $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, par ex le produit vectoriel

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-1,0,1)$$

5d $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ admet pour système d'équation $\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ -x+3y-z = \frac{5}{2} \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x+z = -1 \end{cases}$, d'où une solution particulière

$(0, \frac{1}{2}, -1)$. $\mathcal{D}$ est la droite passant par $(0, \frac{1}{2}, -1)$ de vecteur directeur $(-1, 0, 1)$ d'où un paramétrage $\mathbb{R} \to \mathcal{D}, \lambda \mapsto (-\lambda, \frac{1}{2}, \lambda-1) = M_\lambda$

5e On a $\vec{AM_\lambda} = (-1-\lambda, \frac{1}{2}, \lambda-3)$ donc $AM_\lambda^2 = (1+\lambda)^2 + \frac{1}{4} + (\lambda-3)^2 = 2\lambda^2 - 4\lambda + \frac{1}{4} + 10$

$= 2(\lambda-1)^2 + \frac{1}{4} + 8$

On a $O \in \mathcal{D}$ puisque $OA = OB = OC$. et $O \in \mathcal{P}$ par construction.

Pour $M \in \mathcal{D}$ on a $\vec{OM} \in \vec{\mathcal{D}}$ et $\vec{OA} \in \vec{\mathcal{P}}$ donc $\vec{OM}$ est orthogonal à $\vec{OA}$ donc $AM^2 = OA^2 + OM^2$ (Thm de Pythagore)

donc $AM^2 \geq OA^2$ avec égalité si et seulement si $M = O$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a calculé $AM_\lambda^2 = 2(\lambda-1)^2 + \frac{1}{4} + 8$. AM_λ^2 est minimal pour $\lambda = 1$ donc $O = M_1 = (-1, \frac{1}{2}, 0)$

6a L'ensemble des points fixes de s_D est D

6b Supposons $A \neq B$ alors $s_D(A) = B \Leftrightarrow D$ est la médiatrice de $[AB] \Leftrightarrow s_D(B) = A$

Si $A = B$ et $s_D(A) = B$ alors clairement $s_D(B) = A$.

6c On a $s_D(A) = A \Leftrightarrow A \in D$

Supposons $s_D(A) \neq A$ alors $s_D(A) \in \{B, C\}$. Supposons par exemple $s_D(A) = B$ alors $s_D(B) = A$ par 6b. Comme s_D est bijective et

$\{s_D(A), s_D(B), s_D(C)\} = \{A, B, C\}$ et A, B, C sont distincts nécessairement $s_D(C) = C$ donc $C \in D$

Comme A, B, C sont non alignés, on ne peut avoir $A, B, C \in D$. Supposons par exemple $A \notin D$ alors $s_D(A) \neq A$ donc $s_D(A) \in \{B, C\}$

Supposons par exemple $s_D(A) = B$ alors $s_D(C) = C$ d'après ce qui précède.

s_D est une isométrie donc $AC = s_D(A)s_D(C) = BC$

6d. Supposons par l'absurde A, B, C alignés alors l'un des points est dans le segment reliant les deux autres points. Par exemple $B \in [AC]$

On a alors $AC = AB + BC$ donc l'hypothèse $AB = AC = BC$ entraine $AC = 2AC$ soit $AC = 0$ en contradiction avec l'hypothèse $AC \neq 0$

6e D'après notre raisonnement en 6b et 6c on a $\{s_D(A), s_D(B), s_D(C)\} = \{A, B, C\}$ si et seulement si l'un des points A, B ou C est sur D et si D est la médiatrice du segment reliant les deux autres points.

On a donc trois possibilités pour D: $D =$ médiatrice de $[AB]$ ou $D =$ médiatrice de $[BC]$ ou $D =$ médiatrice de $[AC]$

Si D est la médiatrice de $[AB]$, alors comme $AC = BC$ on a $C \in D$ donc $s_D(C) = C$ donc $s_D(A)s_D(B)s_D(C) = ABC$

De même pour les deux autres cas.

6f. On sait que la composée de deux symétries axiales d'axe concourant est une rotation.

Notons D la médiatrice de $[AB]$ et D' la médiatrice de $[BC]$. On a $\left.\begin{array}{l} s_D \circ s_{D'}(A) = s_D(A) = B \\ s_D \circ s_{D'}(B) = s_D(C) = C \\ s_D \circ s_{D'}(C) = s_D(B) = A \end{array}\right)$ donc $s_D \circ s_{D'}$ convient.

Le centre de la rotation $s_D \circ s_{D'}$ est l'intersection de D et D' (qui sont aussi des médianes de ABC) donc le centre de gravité du triangle ABC

6g Soit r une rotation transformant A, B, C en B, C, A respectivement. Notons O le centre de r et φ la partie linéaire de r

φ est une rotation vectorielle et $\varphi(\vec{AB}) = \overrightarrow{r(A)r(B)} = \vec{BC}$ donc φ est uniquement déterminée

On a $OA = r(O)r(A) = OB$ et $OB = r(O)r(B) = OC$ donc O appartient à la médiatrice de $[AB]$ et à la médiatrice de $[BC]$

Comme $A \neq C$ les médiatrices ne sont pas confondues donc O est uniquement déterminé.

Conclusion r est uniquement déterminé.

((On aurait pu utilisé l'argument meilleur suivant : puisque $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ est un repère cartésien de $\mathbb{R}^2$, une appl. affine $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est déterminée par ses valeurs en A, B, C

Rq : O est le centre de gravité de ABC (6f) et r est la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$ pour une orientation convenable de $\mathbb{R}^2$ (celle donnée par la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$)

~~Soit~~ On connait trois rotations transformant le triangle ABC en lui même : l'application Id, r construit en 6f et r^{-1}

$r^{-1}(A) = C$, $r^{-1}(C) = B$ et $r^{-1}(B) = A$ donc $r \neq r^{-1}$

Montrons que ce sont les seules rotations transformant ABC en lui même : Soit r' une telle rotation, on a $\{r'(A), r'(B), r'(C)\} = \{A, B, C\}$

et on sait que r' est une application affine donc est déterminée par sa restriction à $\{A, B, C\}$

On a 6 possibilités pour la restriction de r' à $\{A, B, C\}$:

$A \mapsto A$	$A \mapsto B$	$A \mapsto C$	$A \mapsto A$	$A \mapsto B$	$A \mapsto C$
$B \mapsto B$	$B \mapsto C$	$C \mapsto B$	$B \mapsto C$	$B \mapsto A$	$B \mapsto B$
$C \mapsto C$	$C \mapsto A$	$B \mapsto A$	$C \mapsto B$	$C \mapsto C$	$C \mapsto A$

Les trois premiers cas correspondent à Id, r, r^{-1}. le quatrième cas correspond à $s_{D'}$, le cinquième à s_D et le sixième à $s_{D''}$ où D'' est la médiatrice de $[AC]$. Ces trois derniers cas font intervenir des symétries axiales qui ne peuvent se confondre avec une rotation.

*6h D'après 6g ~~chaque~~ une application affine de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ transformant ABC en lui même est déterminée par sa restriction à $\{A, B, C\}$

On ne trouve que 6 applications : $Id, r, r^{-1}, s_D, s_{D'}, s_{D''}$. Leurs compositions ~~en~~ sont déterminées par la composition des permutations de $\{A, B, C\}$ correspondantes. On obtient la table de multiplication

$\circ$	id	r	r^{-1}	s_D	$s_{D'}$	$s_{D''}$
id	id	r	r^{-1}	s_D	$s_{D'}$	$s_{D''}$
r	r	r^{-1}	id	$s_{D''}$	s_D	$s_{D'}$
r^{-1}	r^{-1}	id	r	$s_{D'}$	$s_{D''}$	s_D
s_D	s_D	$s_{D'}$	$s_{D''}$	id	r	r^{-1}
$s_{D'}$	$s_{D'}$	$s_{D''}$	s_D	r^{-1}	id	r
$s_{D''}$	$s_{D''}$	s_D	$s_{D'}$	r	r^{-1}	id

Autre méthode :

Une application affine préserve le barycentre donc une application affine ~~préservant~~ transformant le triangle ABC en lui même fixe son centre de gravité. Une isométrie de $\mathbb{R}^2$ admettant un point fixe est soit une rotation soit une symétrie axiale. Les symétries axiales laissant invariant le triangle ABC ont été déterminées en 6e, les rotations en 6g.

6i On a $AB^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 + \sqrt{2}$, $BC^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$

$AB \neq BC$ donc il n'existe pas de rotation r tq $\overrightarrow{r(A)r(B)} = \vec{BC}$