UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire en vue de l'obtention du
Diplôme d'Etudes Approfondies

Option : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Mécanique

Système Dynamique Hamiltonien intégrable et Paires de Lax

Présenté par

LAINIRINA Berthier Marcelin

Soutenu le 31 Juillet, 2014

Président de Jury : Monsieur ANONA Manelo Fréderic,
Professeur Titulaire à l'Université d'Antananarivo

Rapporteur : Monsieur RAKOTONDRALAMBO Joseph,
Maître de Conférences à l'Université d'Antananarivo

Examinateur : Monsieur SOLOFONIAINA Joëlson,
Maitre de Conférences à l'Université d'Antananarivo

Monsieur RAVELONIRINA H. Sammy Grégoire
Maître de Conférences à l'Université d'Antananarivo

REMERCIEMENTS

Je remercie le Dieu Eternel de m'avoir offert sa grâce en me donnant tous les moyens nécéssaires pour la conception de ce mémoire. Au Seigneur seul soit toute la gloire !

Mes remerciements, mes gratitudes et profond respect s'adressent particulièrement à :

- Monsieur ANONA Manelo Fréderic, Professeur titulaire, pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de ce mémoire

- Monsieur RAKOTONDRALAMBO Joseph, Maître de Conférences, je lui adresse ma profonde reconnaissance pour l'encadrement de ce travail

- Monsieur SOLOFONIAINA Joëlson et Monsieur RAVELONIRINA H. Sammy Grégoire, Maîtres de Conférences à l'Université d'Antananarivo, d'avoir accepté d'être les examinateurs de ce mémoire

Enfin, je remercie toutes les personnes, de près ou de loin, qui ont contribué à l'élaboration du présent mémoire, en particulier les enseignants, les amis et surtout un grand merci à toute ma famille qui est toujours présente pour me soutenir.

MERCI A TOUS.

Table des matières

Introduction Générale

L'un des domaines les plus actifs des Mathématiques Appliquées dans le domaine de la Physique est la théorie sur les systèmes hamiltoniens intégrables. Elle réunit à la fois des méthodes et des idées très variées, allant de l'analyse fonctionnelle la plus classique à la Géométrie algébrique et les récents développements dans le domaine de la Géométrie Différentielle et en Algèbre non commutative. Elle réunit actuellement les puissantes méthodes analytiques, par exemples, les problèmes de Riemann-Hilbert, et les fonctions thêta de Riemann, avec les méthodes algébriques de la théorie des Groupes et Algèbre de Lie surtout en dimension infinie. La théorie des systèmes hamiltoniens intégrables est riche en applications dans le domaine de la Physique et la Technique. Bien qu'elle trouve son application du domaine de l'hydrodynamique et de l'optique non linéaire jusqu'à l'astrophysique et la théorie des particules élémentaires, elle débouche actuellement en mathématiques pures comme la création de la théorie des groupes quantiques. Dans ce travail, nous allons parler des systèmes Hamiltoniens en partant des systèmes intégrables classiques aux Paires de Lax.
Les systèmes intégrables classiques sont les systèmes dont les solutions exactes s'expriment sous forme de quadratures, par un nombre fini de calculs d'intégrales et d'autres opérations algébriques. Outre la possibilité d'obtenir la solution exacte du système lui-même, ces systèmes prêtent beaucoup mieux sur l'analyse qualitative et la généralisation aux problèmes dont les solutions ne peuvent être trouvées que par des méthodes numériques approchées ou même des systèmes possédant une solution exacte mais qui ne s'exprime pas en quadrature. En pratique, l'étude qualitative seule n'est pas d'une grande utilité. C'est alors que les systèmes intégrables jouent un rôle spécifique dans le domaine de la mécanique classique. Jusqu'à une époque relativement récente, très peu de modèles intégrables ont été découvert. Le premier développement moderne et déterminant dans ce sujet fut le Théorème de Liouville, qui a permis de réunir tous les exemples de modèles des systèmes intégrables connus dans le cadre général d'un système Hamiltonien possédant le nombre maximal d'intégrales du mouvement. Le théorème assure aussi l'existence des variables canoniques qui sont les variables angles-actions dont les équations du mouvement se linéarisent et peuvent donc être immédiatement résolues. Mais, le problème de détermination effective de ces variables est resté un peu en marge de la mathématique physique

pendant longtemps.
La révolution qui a mené à la théorie moderne a commencé par les oeuvres de Gardner, Green, Kruskal et Miura, sur les solutions exactes de l'équation de Korteveg-de Vries (KdV) :

$$\dot{u} = 6uu' - u'''$$

et la découverte du formalisme des paires de Lax qui a été utilisé par Faddeev, Zakharov, Gardner et autres. Cela nous permet de poser la question suivante : En quoi l'éxistence d'une paire de Lax a-t-elle facilité l'étude de l'intégrabilité d'un système Dynamique Hamiltonien ? C'est pourquoi le thème du mémoire s'intitule : Système Dynamique Hamiltonien intégrable et Paires de Lax. Dans la première partie, nous allons parler d'un système dynamique Hamiltonien en mécanique classique. Nous partirons de la mécanique Newtonienne, de la mécanique lagrangienne et voir les calculs qui nous permettent d'avoir les équations de Hamilton. Les équations de Hamilton, qui sont les équations du mouvement, forment un système d'équations différentielles. Dans la deuxième partie de ce mémoire, nous parlerons des systèmes Hamiltoniens intégrables au sens de Liouville. Nous allons définir les systèmes Hamiltoniens intégrables. Ce sont des systèmes qui admettent n quantités conservées en involution sur un espace des phases de dimension $2n$. Nous allons ensuite voire que le théorème de Liouville nous permet de résoudre les équations du mouvement par quadrature. Nous parlerons aussi des variables angles-actions pour décrire le mouvement le long des cycles d'une Tore. Enfin dans la troisième partie, nous allons voir les Paires de Lax. Nous allons relier la théorie sur les Paires de Lax et les systèmes Hamiltoniens intégrables. Nous allons voir la construction de Zakharov-Shabat pour construire des paires de Lax. Les paires de Lax nous aident à chercher les intégrales premières de l'équation du mouvement, ce qui facilite l'étude de l'intégrabilité du système.

Chapitre 1

Système Dynamique Hamiltonien

1.1 Mécanique de Lagrange

1.1.1 Coordonnées généralisées

La mécanique de Newton se base sur trois points :

1. Principe d'inertie : le mouvements d'un corps isolé est rectiligne dans un référentiel galiléen.
2. Principe dynamique d'une force mécanique :

$$\dot{\vec{p_i}} = m\ddot{\vec{r_i}} = \vec{F_i}$$

$\vec{p_i} = m\vec{v_i}$ est l'impulsion de la particule i,

$\vec{v_i} \equiv \frac{d\vec{r_i}}{dt}$ est la vitesse de la particule i,

$\vec{r_i}$ est la position de la particule i, et

$\ddot{\vec{r_i}} \equiv \frac{d\vec{v_i}}{dt}$ est l'accélération de la particule i.

3. Principe d'action et de la réaction

Ainsi, par la mécanique de Newton, on obtient un système quelconque de N particules par la résolution de N équations vectorielles différentielles du 2^{me} ordre, utilisant $6N$ constantes d'intégrations, correspondant aux positions et vitesses initiales des N particules.
L'évolution du système peut se décrire à l'aide du système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{d\vec{p_i}}{dt} = \vec{F_i}, \quad i = 1, ..., N$$

où $\vec{F_i}(\vec{r_i}, ..., \vec{r_n}, \vec{v_1}, ..., \vec{v_n}, t)$ est a priori une fonction des positions et des vitesses de toutes les particules, ainsi que du temps, mais pas des accélérations.
En général, les masses ne dépendent pas du temps, et on obtient donc un système d'équations différentielles du second ordre :

$$m_i\ddot{\vec{r_i}} = \vec{F_i}(\vec{r_1}, ..., \vec{r_N}, \dot{\vec{r_1}}, ..., \dot{\vec{r_N}}, t), \quad i = 1, ..., N$$

Mais lorsqu'un système possède des contraintes internes dues à des forces de liaisons, limitant le mouvement du système et diminuant ainsi ses degrés de liberté, la situation est plus délicate. Considérons un système de points matériels soumis à des liaisons parfaites qui astreignent les positions des points matériels à satisfaire k contraintes holonômes sans déperdition d'énergie. Pour décrire un tel système à l'aide des équations de Newton, il faut introduire un champ de forces de contrainte. Pour un système de N particules, cela conduit à $6N$ inconnues : $3N$ coordonnées pour décrire les positions des particules. Or, on ne dispose a priori que $3N + k$ équations du mouvement $\dot{\vec{p_i}} = \vec{F_i}$, et les k contraintes. Pour pouvoir résoudre le problème, il est donc indispensable d'introduire $3N - k$ conditions supplémentaires. Par exemple, dans le cas d'un pendule sphérique, il y a une contrainte holonômes, et $N = 1$ puisqu'on ne le considère que comme une seule particule. Il faut donc deux équations supplémentaires. Ces équations découlent de l'hypothèse que la force de contrainte ne travaille pas, donc qu'elle est centrale, ce qui implique que ses deux composantes tangentes à la sphères sont nulles.
L'idée est d'exprimer les lois de la mécanique en fonction des coordonnées dites généralisées indépendantes q_j, $j = 1, ..., n$ mais plus en fonction des coordonnées habituelles de positions $\vec{r_i}$, $i = 1, ..., n$. Les coordonnées généralisées les plus naturelles correspondent aux n degrées de liberté du système. Il suffit a priori d'identifier les coordonnées q et de faire ensuite toute la cinématique avec elles,

$$\vec{r_i} = \vec{r_i}(q_1, ..., q_n, t)$$

On appelle contrainte holonôme, toute relation obéissant à une équation de type :

$$f(\vec{r_1}, ...\vec{r_N}, t) = 0$$

qui est différentiable en tout point. Si les contraintes sont holonôme, alors on peut exprimer certaines coordonnées en fonction des autres.
Supposons qu'un système soit défini par k contraintes holonômes. Le système d'équations

$$f(\vec{r_1}, ...\vec{r_N}, t) = 0, \quad i = 1, ..., k$$

doit permettre d'exprimer les positions $\vec{r_i}$ en fonction de $3N - k$ coordonnées généralisées q_i :

$$\vec{r_i} = \vec{r_i}(q_1, ..., q_{3N-k}, t).$$

Tout système de coordonnées $q_j, j = 1, ..., 3N - k$, qui permet de décrire un système en satisfaisant automatiquement les k contraintes holonômes auxquelles il est soumis s'appelle un système de coordonnées généralisés. S'il n'y a aucune contrainte, tous les systèmes de coordonnées sont des systèmes de coordonnées généralisées !

1.1.2 Le principe de d'Alembert

Le principe de d'Alembert est une généralisation de cette condition au cas général d'un système quelconque soumis à k contraintes holon$\widehat{o}$mes. Sa formulation repose sur la notion de déplacement virtuel. Un déplacement virtuel est un déplacement infinitésimal qui, à un instant donné, satisfait les contraintes holon$\widehat{o}$mes imposées à un système.
Pour tout déplacement virtuel $\delta\vec{r_i}$, on a :

$$\sum_i (\vec{F_i}^{(a)} - \dot{\vec{p_i}}).\delta\vec{r_i} = 0$$

Les contraintes interviennent dans cette équation car $\delta\vec{r_i}$ est un déplacement qui satisfait les contraintes holonômes. Si $\delta\vec{r_i}$ pouvaient être un déplacement absolument quelconque, on déduirait de la relation ci-dessus que :

$$\vec{F_i}^{(a)} - \dot{\vec{p_i}} = 0,$$

ce qui correspond au système sans contraintes, c'est-à-dire que les déplacements $\delta\vec{r_i}$ ne sont

plus des variables indépendantes.
D'après la relation fondamentale de la dynamique,

$$\delta W = \sum_i \dot{\vec{p_i}}.\delta\vec{r_i}$$

$$\sum_i \dot{\vec{p_i}}.\delta\vec{r_i} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r_i}}.\delta\vec{r_i} = \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{r_i}} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\delta q_j$$

Car le déplacement virtuel est $\delta\vec{r_i} = \sum_j \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\delta q_j$,
et

$$\ddot{\vec{r_i}} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r_i}} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}) - \dot{\vec{r_i}} \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}$$

Or $\vec{v_i} = \frac{d\vec{r_i}}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t}$

Donc

$$\ddot{\vec{r_i}} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}(\vec{v_i}.\frac{\partial \vec{v_i}}{\partial \dot{q}_j}) - \dot{v}_i \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial q_j}$$

$$= \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\frac{1}{2}v_i^2)) - \frac{\partial}{\partial q_j}(\frac{1}{2}v_i^2)$$

$$\sum_i \dot{\vec{p_i}}.\delta\vec{r_i} = \sum_{i,j} \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\frac{1}{2}m_i v_i^2)) - \frac{\partial}{\partial q_j}(\frac{1}{2}m_i v_i^2)\delta q_j$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2)) - \frac{\partial}{\partial q_j}(\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2)\delta q_j$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j$$

où $T = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$ est l'énergie cinétique du système.
Puisque

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)}.\delta\vec{r_i} = \sum_{i,j} \vec{F}_i^{(a)}.\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}.\delta q_j \equiv \sum_j Q_j \delta q_j$$

où $Q_j \equiv \sum_{i,j} \vec{F_i}^{(a)}.\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}$ est la force généralisée.
Le principe de d'Alembert permet de réécrire la relation fondamentale de la dynamique sous la forme :

$$\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i} m_i \dot{\vec{v_i}}.\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} - Q_j)\delta q_j = 0$$

où les n déplacements virtuels δq_j sont quelconques et indépendants. Puisque les contraintes sont holonômes, les δq_j étants indépendants, ainsi l'équation ci-dessus n'est satisfaite que si tous les coefficients sont nuls. On en déduit :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q_j}}) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

1.1.3 Force dérivant d'un potentiel global V

Si la force extérieure totale qui s'exerce sur chaque particule du système dérive d'un potentiel V, c'est-à-dire $F_i = \bigtriangledown_i V$, $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$, l'équation s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q_j}}) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

soit

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q_j}}) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

Mais puisque V ne dépend que des $\vec{r_i}$, donc que des q_j, alors $\frac{\partial V}{\partial \dot{q_j}} = 0$. On peut finalement écrire :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_j}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

L est le Lagrangien du système potentiel : $L = T - V$.
Ces équations s'appellent équations de Lagrange.

1.1.4 Propriétés des équations de Lagrange

Elles conduisent directement aux équations du mouvement pour les coordonées généralisées (p, q).

Elles ne font pas intervenir les forces de contraintes.

Elles restent valables tant que les forces sont reliées au potentiel par :

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_j}}\right)$$

Elles ont la même forme dans tous les systèmes de coordonnées.

Le Lagrangien n'est pas défini de manière unique car si $F(q_1, ..., q_n, t)$ est une fonction des coordonées généralisées et du temps, la fonction :

$$L'(q_1, ..., q_n, \dot{q_1}, ..., \dot{q_n}, t) = L(q_1, ..., q_n, \dot{q_1}, ..., \dot{q_n}, t) + \frac{dF}{dt}$$

conduit aux mêmes équations.

1.1.5 Variables cycliques et lois de conservation

Si $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ pour j fixé, la quantiés $\frac{\partial L}{\partial \dot{q_j}}$ est conservée. Cela signifie que le Lagrangien ne dépend pas de la coordonnée q_j. On dit ainsi que la variable q_j est cyclique.

Système isolés :

Un système est dit isolé si le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps. Soit

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

1.2 Equations canoniques de Hamilton

1.2.1 Transformation de Legendre

Soit une fonction $f(x)$ deux fois dérivable et posons $z = \frac{df}{dx}$ et $x = g(z)$. La fonction dérivée f' est inversible. La fonction de Legendre est une fonction $f_*(z)$ telle que $\frac{df_*}{dz} = g(z)$.
Comme $g(z)$ est la fonction inverse de $f'(z)$, on a :

$$f'(g(z)) = z$$

alors

$$f'(g(z))g'(z) = zg'(z)$$

En intégrant, il vient :

$$\frac{d}{dz}\left[f(g(z))\right] = \frac{d}{dz}\left[(zg(z))\right] - g(z)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}\left[(zg(z)) - f(g(z))\right]$$

$$\Rightarrow f_*(z) = zg(z) - f(g(z)).$$

Le but de cette transformation est d'obtenir une équation de la forme :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial F(q_i, p_i, t)}{\partial \dot{q}_i}$$

Car les N équations du second d'ordre des équations de Lagrange peuvent s'écrire, en posant

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\dot{p}_i \equiv \frac{d}{dt}(p_i) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Puisque ces équations ne sont pas symétriques on préfèrerait transformer la seconde. Nous devons alors faire une transformation de Legendre d'une fonction à plusieurs variables.

1.2.2 Transformation de Legendre des fonctions à plusieurs variables

La transformation de Legendre se fait par rapport à certaines variables. Soit la fonction $F(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, ..., u_n)$.
Si $\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0$, les équations :

$$z_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n; u_1, ..., u_n)$$

ou pour simplifier la notation

$$z_i = \partial_i F(x_1, ..., x_n; u_1, ...u_n)$$

peuvent s'inverser en

$$x_i = g_i(z_1, ..., z_n; u_1, ..., u_n)$$

La transformation de Legendre de F est définie par :

$$F_*(z_1, ..., z_n; u_1, ..., u_n) = \sum_{k=1}^{m} x_k z_k - F.$$

$$\frac{\partial F_*}{\partial z_i} = x_i + \sum_{k=1}^{m} z_k \frac{\partial g_k}{\partial z_i} - \sum_{k=1}^{m} \partial_k F(g_1(z...), g_2(z...)...) \frac{\partial g_k}{\partial z_i}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_*}{\partial z_i} = x_i$$

et

$$\frac{\partial F_*}{\partial u_i} = -\frac{\partial F}{\partial u_i}$$

Car $\frac{\partial F_*}{\partial u_i} = -\frac{\partial F}{\partial u_i} - \sum_k \frac{\partial F}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u_i} + \sum_k z_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i}$ et que $z_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$.

1.2.3 Les équations de Hamilton

En prenant maintenant les équations de Lagrange, nous allons faire une transformation de Legendre par rapport aux variables $\dot{q}_i$. Soit un système lagrangien à n degrées de libertés et de Lagrangien L.

$$L_*(q_1, ..., q_n; p_1, ..., p_n; t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n; p_1, ..., p_n; t)$$

dont les $\dot{q}_i$ sont considérés comme des fonctions des p_i et des q_i d'après les équations $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$
On note

$$L_*(q_1, ..., q_n; p_1, ..., p_n; t)$$

par

$$H(q_1, ..., q_n; p_1, ..., p_n; t)$$

et H s'appelle l'Hamiltonien du système.
On a

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

Ces équations s'apellent équations canoniques d'Hamilton.

1.2.4 Exemple

Considérons un oscillateur harmonique et assimillons le à un mouvement d'une particule de masse m à une dimension, soumise à une force de rappel égale à $-kx$.
L'Hamiltonien H est donné par

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \quad (q = x, \quad p = m\dot{x})$$

Nous avons alors le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p}{m} \\ \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} = -m\omega^2 q \end{cases}$$

Chapitre 2

Systèmes Hamiltoniens intégrables

Dans ce chapitre, par le théorème de Liouville, nous allons définir les systèmes Hamiltoniens intégrables. Ce sont des systèmes qui admettent n quantités conservées en involution sur un espace des phases de dimension $2n$. Nous allons ensuite voire que le théorème de Liouville nous permet de résoudre les équations du mouvement par quadrature. Enfin, nous verrons aussi parler des variables angles-actions pour décrire le mouvement le long des cycles d'une Tore.

La dynamique du système est déterminée par la donnée d'une fonction H sur l'espace des phases, généralement un espace de dimension paire avec des coordonnées généralisées (p_i, q_i), appelée Hamiltonien notée $H(p_i, q_i)$ et qui nous donne les équations du mouvement sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

2.0.5 Crochets de Poisson

Le crochet de Poisson de deux fonctions f et g des variables q_i, p_i et t est défini par :

$$\{f, g\} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

L'équation d'évolution d'une fonction f définie par $f(q_1, ..., q_n; p_1, ..., p_n; t)$ s'écrit alors :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}.$$

Car

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

La dérivée par rapport au temps d'une fonction F sur l'espace des phases, qui ne dépende pas explicitement du temps est décrite par l'équation :

$$\frac{dF}{dt} = \{H, F\} \equiv \dot{F}$$

Si F commute avec l'Hamiltonien, elle ne change pas de valeur au cours de l'évolution du système, on dira que F est une intégrale première.

2.0.6 Définition

$f(q_i, p_i, t)$ est une intégrale première si et seulement si :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0$$

En particulier, si f ne dépend pas alors du temps on a :

$$\{f, H\} = 0$$

Propriétés des crochets de Poisson :

bilinéaire :$\{af_1 + bf_2, f\} = a\{f_1, g\} + b\{f_2, g\}$,

antisymétrique : $\{f, g\} = -\{g, f\}$,

identité de Jacobi : $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$, formule de Leibniz : $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2$.

Les crochets de Poisson prend une forme particulière simple pour les variables p_i et q_j :

$$\{q_i, q_j\} = 0, \{p_i, p_j\} = 0, \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

2.0.7 Système intégrable

Intégrabilité au sens de Liouville :
Soit H l'Hamiltonien d'un système donné.
Le système est intégrable au sens de Liouville s'il possède n intégrales premières fonctionnellement indépendantes $F_{i,i=1,\ldots,n}$, $\{H, F_j\} = 0$, en involution :

$$\{F_i, F_j\} = 0$$

Fonctionnellement indépendantes signifie que les formes dF_i sont linéairement indépendantes partout sauf peut être en des points isolés. Il ne peut pas y avoir plus de n quantités indépendantes en involution sinon le crochet de Poisson serait degénéré.
Introduisons les coordonées canoniques p_i et q_i , telles que le crochet de Poisson non degénéré s'écrit comme :

$$\{q_i, q_j\} = 0, \{p_i, p_j\} = 0, \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$$

Un crochet de Poisson non dégénéré sur M est équivalent à la donéee d'une 2-forme non dégénérée fermée $dw = 0$ définie sur M, c'est la forme symplectique qui s'écrit en coordonnées canoniques :

$$w = \sum_j dp_j \wedge dq_j$$

2.0.8 Théorème de Liouville

La solution des équations du mouvement d'un système intégrable au sens de Liouville est obtenue par "quadrature".

Preuve :

Soit $\alpha = \sum_i p_i dq_i$ la 1-forme canonique et $w = d\alpha = \sum_i dp_i \wedge dq_i$ la 2-forme symplectique sur l'espace des phases M.
Construisons une transformation canonique (p_i, q_i) vers (F_i, ψ_i) telle que les quantités conservées F_i soient parmi les nouvelles coordonnées :

$$w = \sum_i dp_i \wedge dq_i = \sum_i dF_i \wedge d\psi_i$$

Les équations du mouvement deviennent alors triviales :

$$\dot{F_j} = \{H, F_j\} = o$$

$$\dot{\psi_j} = \{H, \psi_j\} = \frac{\partial H}{\partial F_j} = \Omega_j$$

Les Ω_j dépendent uniquement des F_i et donc sont constantes par rapport au temps. Dans ces nouvelles coordonées canoniques, la solution des équations du mouvement s'écrit :

$$F_j(t) = F_j(0), \psi_j(t) = \psi_j(0) + t\Omega_j$$

Introduisons alors sa fonction géneratrice S. Une fonction génératrice est une fonction qui engendre une transformation canonique et que les équations du mouvement soient encore des équations canoniques dans les nouvelles coordonnées.
Soit M_f la variété de niveau $F_i(p, q) = f_i$. Supposons que sur M_f, nous pouvons résoudre les équations du mouvement pour p_i, $p_i = p_i(f, q)$, et considérons la fonction :

$$S(F, q) = \int_{m_0}^{m} \alpha = \int_{q_0}^{q} \sum p_i(f, q) dq_i,$$

dont le chemin d'intégration est contenu dans M_f et a pour extrémités les points de coordonnées

$(p(f, q_o), q_o) et (p(f, q), q)$ avec $q = (q_0^1, ..., q_o^n)$.
Définissons ψ_j par : $\psi_j = \frac{\partial S}{\partial F_j}$
Si nous supposons que cette fonction génératrice S existe, et ne dépend pas du chemin liant m_o et m, alors $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$
Nous avons alors : $dS = \sum_j (\psi_j dF_j + p_j dq_j)$.
Puisque $d^2S = 0$, on en déduit que $w = \sum_j dp_j \wedge dq_j = \sum_j dF_j \wedge d\psi_j$
Cela montre que si S est une fonction bien définie alors la transformation est canonique.
Pour montrer que S existe, nous devons prouver qu'elle est indépendante du chemin d'intégration.
En utilisons le théorèmes de Stokes, nous devons montrer que :
Sur M_f

$$d\alpha = \omega = 0$$

Soit X_{F_i} le champ vectoriel hamiltonien associé à F_i, défini par $dF_i = w(X_{F_i}, .)$,

$$X_{F_i} = \sum_k \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \right)$$

Ces champs vectoriels sont tangents à la variétés M_f car les F_j sont en involutions :

$$X_{F_i}(F_j) = \{F_i, F_j\} = 0$$

Comme les F_j sont fonctionnellement indépendantes, l'espace tangent à la sous-variétés M_f est généré en chaque point par les vecteurs $X_{F_i}(i = 1, ..., n)$ et alors $dF_i(X_{F_j}) = 0$ d'où $w(X_{F_i}, X_{F_j}) = dF_i(X_{F_j}) = 0$.
Cela prouve que w=0 ce qui implique que S existe. Nous avons obtenu la solution des équations du mouvement par quadrature pour calculer la fonction génératrice S et quelque manipulations algébriques pour exprimer le p en fonction de q et de F.

La théorie de Liouville ne nous donne pas les racines et les intégrales premières, mais elle ne sert qu'à justifier l'intégrabilité du système et nous donne des solutions locales par quadrature.

2.0.9 Théorème d'Arnold-Liouville

Soit $\pi : M \longrightarrow R^n$
$x \longrightarrow (F_1(x), ..., F_n(x))$ une fibration

$F_1 = H, F_2, ...F_n$ sont fonctionnellement indépendantes
Alors :
(i) π est une fibration Lagrangien et chaque composante connexe de $\pi^-1(c)$ est un cylindre. Il existe un système de coordonées affines $(\theta^1, ..., \theta^n)$ sur $\pi^{-1}(c)$ tel que θ^i est constante.
(ii) Si $\pi^{-1}(c)$ est connexe et compacte alors c'est un Tore topologique π^n. Il existe un voisinage U de $\pi^{-1}(c)$ et une trivialisation $(s^1, ..., s^n, \theta^1, ..., \theta^n) : U \longrightarrow R^n \times \pi^n$ tel que $w = \sum_i ds^i \wedge d\theta^i$.

Le Tore π^n est difféomorphe au produit des n cercles c_i. Nous pouvons alors choisir des coordonnés angulaires spéciales sur $\pi^{-1}(c)$ qui soient duaux aux n cycles fondamentaux $(c_1, ..., c_n)$.

2.0.10 Variable Angle-Action

Les variables (θ^i, s^i) sont les variables angle-action. Dans le théorème de Liouville, nous avons vu que la variété de niveau M_f a des cycles non-triviaux. Si M_f est compacte et connexe, alors elle est difféomorphe au Tore. Le Tore est difféomorphe au produit de n cercles. Nous pouvons choisir des coordonnées angulaires spéciales sur M_f qui soient duaux aux n cycles du Tore. Donc les variables action s^i sont définies explicitement comme intégrales des 1-formes des coordonnées canoniques sur les cycles c_j $(c_1, ..., c_n)$ du Tore. De plus, chaque tore $\pi^{-1}(c)$ est une sous-variété lagrangienne, alors la forme symplectique w est exacte au voisinage de U : $w = d\alpha$.

$$s^i = \frac{1}{2\pi} \oint_{c_j} \alpha.$$

Considérons la transformation canonique générée par la même fonction vue précédemment dans le Théorème de Liouville :

$$S(s, q) = \int_{m_0}^{m} \alpha$$

mais exprimée en terme des variables s_i au lieu de F_i. Notons par θ^j la variable conjuguée de s^i, la transformation canonique générée par S est définie par :

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \theta^k = \frac{\partial S}{\partial s^k}$$

Les variables θ^k sont canoniquement conjuguées aux variables action s^i.

Par définition de θ^k :

$$\int_{c_j} d\theta^k = \frac{\partial}{\partial s^k} \int_{c_j} dS$$

$$dS = \sum \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial s^i} ds^i \right)$$

Puisque ds^i sur la variété $\pi^{-1}(c)$, nous avons alors :

$$\int_{c_j} d\theta^k = \frac{\partial}{\partial s^k} \int_{c_j} \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i = \frac{\partial}{\partial s^k} \int_{c_j} \alpha = 2\pi \delta_{jk}$$

Soit :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{c_j} d\theta^k = \delta_{jk}$$

Nous avons montrer que les θ^k sont les variables angles.

Chapitre 3

Paires de Lax

Nous allons introduire dans ce chapitre, les paires de Lax et la notion de la matrice de Lax. La matrice de Lax est une matrice dont les éléments sont dynamiques et dont l'évolution par rapport au temps est isospectrale. L'équation de Lax est l'équivalent de l'équation du mouvement. Pour construire des Paires de Lax consistantes pour des système intégrables, nous allons présenter la méthode de Zakharov-Shabat. Enfin, nous introduirons la notion de la matrice r classique. C'est l'éxpression des crochets de Poisson des éléments de la matrice de Lax.

3.1 Matrice de Lax d'un système Hamiltonien

Un couple de matrices L et M définies sur l'espace des phases telles que les équations du mouvement sont équivalentes $\grave{a}$ l'équation suivante :

$$\frac{dL}{dt} = [L, M]$$

est appelé paire de Lax et L est la matrice de Lax. $[L, M] = ML - LM$ est le commutateur des matrices L et M.
Cette équation de Lax est équivalent à l'équation Hamiltonien d'un système
En effet, dans les coordonnées canoniques

$$\dot{L} = [L, M] \Leftrightarrow (\dot{p}_i = \{p_i, H\}\,; \dot{q}_i = \{q_i, H\})$$

3.1.1 Exemple

Reprenons l'exemple d'un oscillateur harmonique. Les matrices de Lax sont :

$$L = \begin{pmatrix} p & m\omega q \\ m\omega q & -p \end{pmatrix}$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

En calculant l'équationde Lax : $\frac{dL}{dt} = [L, M]$, nous avons le système d'equations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{p}{m} \\ \dot{p}_i = -m\omega^2 q \end{cases}$$

3.1.2 Proposition

Les valeurs propres de L sont constantes.

Preuve :

Soit λ la valeur propre de L et φ son vecteur propre.
Alors

$$L\varphi = \lambda\varphi$$

La relation de Paire de Lax implique :

$$M\varphi = \dot{\varphi}$$

En différentiant $L\varphi = \lambda\varphi$ on a :

$$\frac{dL}{dt}\varphi + L\dot{\varphi} = \dot{\lambda}\varphi + \lambda\dot{\varphi}$$

l'équation de Lax nous donne :

$$ML\varphi - LM\varphi + L\dot{\varphi} = \dot{\lambda}\varphi + \lambda\dot{\varphi}$$

$$\lambda M\varphi - L\dot{\varphi} + L\dot{\varphi} = \dot{\lambda}\varphi + \lambda\dot{\varphi}$$

Finalement on a $\dot{\lambda}\varphi = 0$ soit $\dot{\lambda} = 0$.

3.1.3 Quantités conservées

La solution de l'équation de Lax est

$$L(t) = g(t)L(0)g(t)^{-1}$$

$g(t)$ est une matrice inversible définie par

$$\dot{g}(t) = M(t)g(t)$$

Donc le polynôme caractéristique de $L(t)$ est preservé par l'évolution et donc ses valeurs propres le sont aussi. Alors toutes les quantités trL^k sont conservées et bien évidement, elles sont en involution en tant que polynômes en valeur propres de L

$$F_i = tr(L^{k_i}) \Rightarrow \dot{F}_i = k_i tr(L^{k_i-1}[L, M]) = 0$$

3.1.4 Corollaire

La trace et déterminant de L sont les intégrales premières du système.
Si la matrice L est diagonalisable alors pour toute puissance de L, les valeurs propres aussi que

la trace et déterminants sont les intégrales premières du système.
La dimension n des matrices L et M doit vérifié $n \leq N$ car si $n_i \geq N$ nous avons des fonctions dépendante F_i.
En effet

$$F_i = tr(L^{n_i}) \Rightarrow \dot{F}_i = n_i tr(L^{n_i-1}[L, M]) = 0$$

sont les intégrales.

Ainsi, l'existence d'une formulation de Lax d'un système dynamique donnée est très importante car elle implique l'existence des suites de quantités conservées :

$$F_k = \frac{1}{k} tr L^k,$$

tr est la trace des matrices et k entier strictement positif. Ces quantités conservés doivent être fonctionellement indépendantes.

$$\frac{dF_k}{dt} = \frac{1}{k} tr L^{k-1} \frac{dL}{dt} = \frac{1}{k} tr L^{k-1} [L, M] = \frac{1}{k} tr \left(L^k M - L^{k-1} M L \right) = 0.$$

Si la fonction L de Lax est définie sur une espace de phase avec une structure Hamiltonienne (sur une structure de Poisson) alors la trace des puissances de L qui sont des quantités conservées sont en involution deux *à* deux. cela fait partie de la définition de la matrice de Lax.

3.1.5 Paramètre spéctrale

Pour avoir une forme d'intégrabilité plus puissante, nous allons introduire un paramètre supplémentaire "complexe" qu'on appelle paramètre spectrale. Le paire de Lax avec un paramètre spectral est toujours un couple de matrice $n \times n$

$$\dot{L(z)} = [L(z), M(z)] \Longleftrightarrow (\dot{p_i} = \{p_i, H\} ; \dot{q_i} = \{q_i, H\})$$

On peut étudier les propriétés analytiques de L et M comme fonction de z.
On peut aussi définir un courbe spectrale

$$\Gamma = \{(k, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} / det \left(kF - L(z) \right) = 0\}$$

avec le 1-forme $d\lambda = kdz$.
Remarquons que grâce au caractère isospéctrale de l'équation, cette courbe ne dépend pas du temps. C'est une surface de Riemann et qu'on peut utiliser les méthodes de la géométrie algébrique pour l'étudier. La courbe spéctrale est indépendante du temps mais seulement des n intégrales F_i.
Les intégrales premières peuvent s'écrire :

$$TrL(z) = \sum_n A_n z^n$$

L'équation de Lax avec un paramètre spectrale nous permet d'avoir plus de degrés de libertés.

3.2 Construction de Zakharov-Shabat

La méthode de Zakharov-Shabat est une méthode générale pour la construction des matrices $L(z)$ et $M(z)$ des systèmes intégrables, telle que l'équation de Lax :

$$\frac{dL(z)}{dt} = [M(z), L(z)]$$

soit l'équivalente des équations du mouvement d'un système intégrable.

3.2.1 Notation et définitions

Toute matrice $f(z)$ dont les éléments sont des fonctions rationnelles avec des pôles d'ordre n_k aux points z_k peut s'écrire par décomposition sous la forme :

$$f(z) = f_0 + \sum_k f_k(z)$$

avec

$$f_k(z) = \sum_{r=-n_k}^{-1} f_{k,r}(z - z_k)^r$$

f_0 est une matrice constante, $f_{k,r}$ sont des matrices et $f_k(z)$ est la partie polaire au point z_k.

Autour des points z_k, $f(z)$ peut être décomposée de la manière suivante :

$$f(z) = f(z)_+ + f(z)_-$$

où $f(z)_+$ est la partie regulière et $f(z)_- = f_k(z)$ est la partie polaire au point z_k.

3.2.2 Structure de la paire de Lax

Revenons maintenant aux matrices $L(z)$ et $M(z)$ de dimension $n \times n$ et supposons que ces matrices sont des fonctions rationnelles du paramètre z et soit z_k l'ensemble de leurs pôles. En reprenant les notations ci-dessus, nous pouvons écrire $L(z)$ et $M(z)$ de la manière suivante :

$$L(z) = L_0 + \sum_k L_k(z)$$

avec

$$L_k(z) = \sum_{r=-n_k}^{-1} L_{k,r}(z - z_k)^r$$

et

$$M(z) = M_0 + \sum_k M_k(z)$$

avec

$$M_k(z) = \sum_{r=-m_k}^{-1} M_{k,r}(z - z_k)^r$$

n_k et m_k sont l'ordre des pôles aux points z_k correspondants. Les coefficients $L_{k,r}$ et $M_{k,r}$ sont des matrices $n \times n$, L_0 et M_0 sont des matrices constantes. Nous supposerons que les pôles z_k sont des constantes indépendantes du temps.
En menant les expressions de $L(z)$ et $M(z)$ dans l'équation de Lax :

$$\frac{d}{dt}\left(L_0 + \sum_k L_k(z)\right) = [M_0 + \sum_k M_k(z), L_0 + \sum_k L_k(z)]$$

$$\sum_k \dot{L}_k(z) = [M_0 + \sum_k M_k(z), L_0 + \sum_k L_k(z)]$$

Alors le pôle z_k dans la partie gauche de l'équation est d'ordre n_k tandis que dans la partie droite, il est d'ordre $n_k + m_k$. Ce qui nous donne deux types d'équations. Le premier type ne contient pas les dérivées par rapport au temps et il est obtenu en annulant les coefficients des pôles d'ordre plus grand que n_k dans la partie droite de l'équation. Et nous aurons m_k équations dans M_k. Le second type d'équations est obtenu en faisant les correspondance entre les coefficients des pôles d'ordre inférieur ou égal à n_k sur les deux côtés de l'équation. Ces équations contiennent les dérivées par rapport au temps et sont alors les vraies équations dynamiques.

3.2.3 Proposition

On peut effectuer une transformation régulière $g^{(k)}(z)$ diagonalisant $L(z)$ au voisinage de z_k :

$$L(z) = g^{(k)}(z)A^{(k)}(z)g^{(k)-1}(z)$$

où $A^{(k)}(z)$ est une matrice diagonale et possède un pôle d'ordre n_k au point z_k et en supposant que $L(z)$ a des valeurs propres distinctes au voisinage de z_k.
Par conséquent, la décomposition de $L(z)$ et $M(z)$ en partie polaire est :

$$L = L_0 + \sum_k L_k$$

avec

$$L_k = (g^{(k)}A^{(k)}g^{(k)-1})_-$$

$$M = M_o + \sum_k M_k$$

avec

$$M_k = (g^{(k)}B^{(k)}g^{(k)-1})_-$$

où $B^{(k)}(z)$ a un pôle d'ordre m_k au point z_k. Et l'équation de Lax implique que $B^{(k)}(z)$ est diagonale.

Preuve :

Si z_k est un pôle de $L(z)$ et exiger que $L(z)$ a des valeurs propres distinctes au voisinage de z_k signifie que la matrice $L_{k,-n_k}$ a des valeurs propres distinctes. Alors la matrice $Q(z) = (z-z_k)^{n_k}L(z)$ qui est régulière au point z_k peut être diagonalisée au voisinage de z_k avec une matrice régulière $g^{(k)}(z)$. Ainsi $L(z) = g^{(k)}(z)A^{(k)}(z)g^{(k)-1}(z)$
Et donc si on définit $B^{(k)}(z)$ par :

$$M(z) = g^{(k)}B^{(k)}(z)g^{(k)-1}(z) + \partial_t g^{(k)}(z)g^{(k)-1}(z)$$

l'équation de Lax devient :

$$\dot{A}^{(k)}(z) = [B^{(k)}(z), A^{(k)}(z)]$$

Ceci implique que $\dot{A}^{(k)} = 0$. En effet le commutateur avec une matrice diagonale n'a aucun élément sur la diagonale. De plus, si nous supposons que les éléments diagonaux de $A^{(k)}$ sont tous distincts, cette équation implique que $B^{(k)}$ est aussi diagonale. Finalement, le terme $\partial_t g^{(k)}(z)g^{(k)-1}$ est régulier et ne contribue pas à la partie singulière M_K de M au point z_k. Par conséquent,

$$M_k = (g^{(k)}B^{(k)}g^{(k)-1})_-$$

M_k dépend uniquement de $B_-^{(k)}$. Notons que les n premiers coefficients du développement de $g^{(k)}(z)$ dépend uniquement des n premiers coefficients du développement de $Q(z)$. La matrice $g^{(k)}(z)$ est définie à une multiplication près par une matrice diagonale analytique arbitraire. Cette diagonalisation simultanée de $L(z)$ et $M(z)$ est valable autour de n'importe quel point dont $L(z)$ a des valeurs propres distinctes.

Cette proposition clarifie la structure de la paire de Lax. Seules les parties singulières de $A^{(k)}$ et $B^{(k)}$ contribuent dans L_k et M_k. Les paramètres indépendants dans $L(z)$ sont ainsi L_0, ensuite, les matrices singulières diagonales $A_-^{(k)}$ de la forme :

$$A_-^{(k)} = \sum_{r=-n_k}^{-1} A_{k,r}(z-z_k)^r$$

et une suite de matrices régulières $\hat{g}^{(k)}$ d'ordre $n_k - 1$, définie à une multiplication près par une matrice régulière diagonale $g_{k,r}(z)$:

$$\hat{g}^{(k)} = \sum_{r=0}^{n_k-1} g_{k,r}(z-z_k)^r$$

A partir de ces données, nous pouvons reconstruire la matrice de Lax $L(z)$ en définissant $L = L_0 + \sum_k L_k$ avec :

$$L_k \equiv (\hat{g}^{(k)} A_-^{(k)} \hat{g}^{(k)-1})_-$$

Alors, autour de chaque point z_k, on peut diagonaliser $L(z) = g^{(k)}(z)A^{(k)}(z)g^{(k)-1}(z)$. Cela nous donne une extension des matrices $A_-^{(k)}$ et $\hat{g}^{(k)}$ pour compléter les séries $A^{(k)}$ et $g^{(k)}$ en $(z-z_k)$. Enfin, pour définir $M(z) = M_0 + \sum_k M_k$, nous choisissons un ensemble de matrices polaires $(B^{(k)}(z))_-$ et nous utilisons la série $g^{(k)}$ pour définir M_k.

3.2.4 Forme générale de M

Si l'équation de Lax est vérifiée, $L(z)$ et $M(z)$ peuvent être simultanément diagonalisées au voisinage d'une singularité. Dans ce cas, l'équation de Lax affirme que la matrice $A^{(k)}(z)$ est conservée et que $B^{(k)}(z)$ est diagonale. Ces résultats nous donnera la solution des contraintes dynamiques sur $M(z)$.

3.2.5 Proposition

Soit $L(z)$ une matrice de Lax de la forme $L(z) = L_0 + \sum_k L_k(z)$ avec $L_k(z) = \sum_{r=-n_k}^{-1} L_{k,r}(z-z_k)^r$. La forme générale de la matrice $M(z)$ tels que les ordres des pôles soient égaux sur les deux côtés de l'équation de Lax est $M = M_0 + \sum_k M_k$ avec :

$$M_k = (P^{(k)}(L,z))_-$$

où $P^{(k)}(L,z)$ est un polynôme en $L(z)$ avec les coefficients z, $z \in \mathbb{R}$ et $()_-$ signifie la partie

singulière au point $z = z_k$.
En effet, puisque $A^{(k)}(z)$ est une matrice diagonale d'ordre $n \times n$ avec tous ses éléments distincts au voisinage de z_k, ses puissances de 0 jusqu'à $n-1$ engendrent l'espace des matrices diagonales et on peut écrire :

$$B^{(k)} = P^{(k)}(A^{(k)}, z)$$

où $P^{(k)}(A^{(k)}, z)$ est un polynôme de degré $n-1$ en $A^{(k)}$. Les coefficients de $P^{(k)}$ sont les combinaisons linéaires des éléments de $A^{(k)}$ et $B^{(k)}$ qui sont des valeurs rationnelles. Alors, ils admettent les développements de Laurent en $(z - z_k)$ au voisinage de z_k. En insérant $B^{(k)}$ dans $M_k = (g^{(k)} B^{(k)} g^{(k)-1})_-$, on obtient

$$M_k = (P^{(k)}(L, z))_-$$

Les variables dynamiques sont les éléments matriciels de la matrice de Lax L ou les éléments matriciels de $L_{k,r}$. Le choix du nombre et de l'ordre des pôles de la matrice L revient à spécifier un modèle particulier et que le choix des polynômes $P^{(k)}(L, z)$ revient à spécifier les flux dynamiques. Et nous pouvions aussi formuler $M(z)$ en ce qui concerne la matrice et la dépendance en z.

3.3 Existence d'une matrice r

Soit une paire de Lax (L, M), avec L et M des matrices d'ordre $n \times n$, et supposons que la matrice L peut être diagonalisée comme suit :

$$L = U \Lambda U^{-1}$$

Les éléments matriciels z_k de la matrice diagonale Λ sont les intégrales premières (quantités conservées).

3.3.1 Notations et définitions

Soit $(E_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ la base canonique des matrices $n \times n$, $(E_{i,j})_{k,l} = \delta_{ik}\delta_{jl}$.
L s'écrit sous la forme :

$$L = \sum_{ij} L_{ij} E_{ij}$$

L_{ij} sont des fonctions sur l'espace des phases.
Posons

$$L_1 \equiv L \otimes 1 = \sum_{ij} L_{ij}(E_{ij} \otimes 1),$$

$$L_2 \equiv 1 \otimes L = \sum_{ij} L_{ij}(1 \otimes E_{ij})$$

L'indice 1 ou 2 signifie que la matrice L se trouve dans le premier ou le deuxième facteur du produit tensoriel, et notons par L_α le produit tensoriel où L se trouve dans la position α.
De même, pour T se trouvant dans le produit tensoriel de deux matrices $n \times n$, nous avons :

$$T = T_{12} = \sum_{ij,kl} T_{ij,kl} E_{ij} \otimes E_{kl},$$

$$T_{21} = \sum_{ij,kl} T_{ij,kl} E_{kl} \otimes E_{ij}$$

Notons par Tr_α la trace partielle sur l'espace dans une position α dans un produit tensoriel. Par exemple :

$$Tr_1 T_{12} = \sum_{ij,kl} T_{ij,kl} Tr(E_{ij}) E_{kl}$$

On définit le crochet de Poisson entre les éléments L_1 et L_2 de la matrice L comme suit :

$$\{L_1, L_2\} = \sum_{ij,kl} \{L_{ij}, L_{kl}\} E_{ij} \otimes E_{kl}$$

3.3.2 Crochet de Poisson de la matrice de Lax

Pour un système intégrable, le crochet de Poisson entre les éléments de la matrice de Lax L peut être écrit sous la forme spéciale donnée par la proposition suivante :

La propriété d'involution des valeurs propres de L est équivalente à l'existence d'une fonction r_{12} sur l'espace des phases telle que :

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2] \tag{3.1}$$

avec

$$r_{12} = \sum_{ij,kl} r_{ij,kl} E_{ij} \otimes E_{kl},$$

$$r_{21} = \sum_{ij,kl} r_{ij,kl} E_{kl} \otimes E_{ij}$$

En effet, supposons que $\{z_i, z_j\} = 0$ (les valeurs propres de L commutent au sens de Poisson). Rappelons que L est diagonalisée par U. Comme U est une fonction sur l'espace des phases, nous pouvons calculer directement en utilisant la règle de Leibnitz, les crochets de Poisson

$$\{L_1, L_2\} = \left\{U_1\Lambda_1U_1^{-1}, U_2\Lambda_2U_2^{-1}\right\}$$

Nous obtenons neuf termes dont quatre contiennent le crochet de Poisson $\{U_1, U_2\}$. Introduisons la quantité $k_{1,2} = \{U_1, U_2\}\, U_1^{-1}U_2^{-1}$, ces termes peuvent être écrits sous la forme :

$$[[k_{12}, L_2]\,, L_1] = \frac{1}{2}\,[[k_{12}, L_2]\,, L_1] - \frac{1}{2}\,[[k_{21}, L_1]\,, L_2]$$

Les quatres termes non nuls restants contiennent $\{\Lambda_1, U_2\}$ et $\{U_1, \Lambda_2\}$. Si on introduit :

$$q_{12} = U_2\,\{U_1, \Lambda_2\}\, U_1^{-1}U_2^{-1}$$

nous pouvons écrire ces termes sous la forme :

$$[q_{12}, L_1] - [q_{21}, L_2]$$

Ainsi, le crochet de Poisson $\{L_1, L_2\}$ devient :

$$\{L_1, L_2\} = U_1U_2\,\{\Lambda_1, \Lambda_2\}\, U_1^{-1}U_2^{-1} + [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2]$$

où :

$$r_{12} = q_{12} + \frac{1}{2}[k_{12}, L_2]$$

Si $\{\Lambda_1, \Lambda_2\} = 0$, la première partie de l'équivalence est prouvée.
Inversement, si l'on suppose que le crochet de Poisson vérifie l'équation (3.1), alors, dans n'importe quelle représentation matricielle, nous avons :

$$\{L_1^n, L_2^m\} = [a_{12}^{n,m}, L_1] + [b_{12}^{n,m}, L_2]$$

avec :

$$a_{12}^{n,m} = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} L_1^{n-p-1} L_2^{m-q-1} r_{12} L_1^p L_2^q$$

$$b_{12}^{n,m} = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} L_1^{n-p-1} L_2^{m-q-1} r_{21} L_1^p L_2^q$$

Si l'on prend la trace de l'équation $\{L_1^n, L_2^m\} = [a_{12}^{n,m}, L_1] + [b_{12}^{n,m}, L_2]$, on obtient les quantités de $Tr(L^n)$ qui sont en involutions, en utilisant le fait que la trace d'un commutateur est nulle. Ces quantités sont équivalentes à l'involution des valeurs propres z_k de L.
L'identité de Jacobi sur le crochet de Poisson, entraîne la contrainte suivante sur r :

$$[L_1, [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{32}, r_{13}] + \{L_2, r_{13}\} - \{L_3, r_{12}\}] + perm.cyc. = 0$$

Où perm.cyc. sont les permutations cycliques des indices tensoriels $1, 2, 3$. Ainsi, la résolution de cette équation revient à classifier les systèmes Hamiltoniens intégrables.
Si r est constante, les seuls termes restants dans cette équation sont les premiers. En particulier, l'identité de Jacobi est satisfaite si une matrice r constante satisfait :

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{32}, r_{13}] = 0$$

Si r est antisymétrique, $r_{12} = -r_{21}$, l'équation est appelée équation de Yang-Baxter classique.

3.3.3 Remarques

Premièrement, la forme du crochet est préservée par des transformations de jauge. Si l'équation (3.1) est vérifiée et $L' = gLg^{-1}$, alors il existe une fonction matricielle r'_{12} telle que :

$$\{L'_1, L'_2\} = [r'_{12}, L'_1] - [r'_{21}, L'_2]$$

La fonction r'_{12} peut être exprimée en termes des fonctions r_{12} et des crochets de Poisson entre g et la matrice de Lax L :

$$r'_{12} = g_1 g_2 \left(r_{12} + g_1^{-1} \{g_1, L_2\} + \frac{1}{2} [x_{12}, L_2] \right) g_1^{-1} g_2^{-1}$$

où $x_{12} = g_1^{-1} g_2 {-} 1 \{g_1, g_2\}$.
Deuxièmement, la propriété d'antisymétrie du crochet est explicite bien que r n'ait aucune propriété de symétrie spéciqle. Ainsi, nous pouvons redéfinir r par :

$$r_{12} \longrightarrow r_{12} + [\sigma_{12}, L_2]$$

où σ est symétrique sans que le crochet de Poisson change.

3.3.4 Exemple

Prenons l'exemple dans le cas simple de l'oscillateur harmonique, pour la construction de la matrice r. Le paire de Lax est donnée par :

$$L = \begin{pmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{pmatrix}$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Cette équation de Lax est équivalente aux équations du mouvement :

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega^2 q$$

et l'Hamiltonien H peut être écrit comme suit :
$H = \frac{1}{4} TrL^2$
Cet exemple peut être généralisé à n oscillateurs harmoniques indépendants en écrivant les matrices de Lax L et M sous forme de bloc diagonal, chaque bloc est composé d'une matrice 2×2 comme ci-dessus. Les quantités conservées seront alors :

$$TrL^{2p} = 2\sum(2F_i)^p$$

avec $2F_i = p_i^2 + \omega^2 q_i^2$, et $TrL^{2p+1} = 0$.
Les variables angle-action (θ, ρ) sont : $p = \rho cos\theta$, et $q = \frac{\rho}{\omega} sin\theta$.
Dans ces coordonnées d'angle-action, la matrice L est diagonalisée par :

$$U = U^{-1} = \begin{pmatrix} cos\frac{\theta}{2} & sin\frac{\theta}{2} \\ sin\frac{\theta}{2} & -cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Comme $\{U_1, U_2\} = 0, \quad \mathrm{r}_{12} = q_{12}$, on obtient :

$$r_{12} = \frac{\omega}{2\rho^2} \begin{pmatrix} cos\frac{\theta}{2} & sin\frac{\theta}{2} \\ sin\frac{\theta}{2} & -cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \otimes L$$

Cette matrice r satisfait l'équation $\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2]$ et que c'est une matrice dynamique, ce qui signifie qu'elle dépende explicitement des variables dynamiques.

Conclusion

Nous avons relié, dans ce mémoire, les théories sur les Paires de Lax et la théorie sur le système Dynamique Hamiltonien Intégrable. Par le théorème de Liouville, nous savons l'intégrabilité d'un système dynamique et que nous pouvons résoudre l'équation du mouvement par quadrature. Par conséquent, les équations du mouvement se linéarisent par un changement de variables. Mais en pratique, il est difficile de trouver le changement de variable donnant les variables angles-action et de celle de construire de nouveaux exemples de tels systèmes. Ces obstacles sont dépassés par la découverte des paires de Lax, qui est le premier développement majeur de la théorie moderne des systèmes intégrables. En construisant un paire de Lax d'un système Hamiltonien intégrable, nous obtenons la solution du système. Car l'équation de Lax est l'équivalent de l'équation du système dynamique. La méthode qu'on utilise, pour avoir des paires de Lax consistantes est la méthode de Zakharov-Shabat.

Bibliographie

[1] B. K. Harrison, : *The Differential Form Method for Finding Symmetries, in Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications*, Vol. 1 (2005).

[2] Herbert Goldstein,Charles P. Poole John L. Safko : *Classical mechanics*, Addison-Wesley, 3e éd., 2001 .

[3] Abraham, R., and Marsden : *Foundations of Mechanics*, 2nd ed., Benjamin,New-York, J.E(1978).

[4] E.H. Saidi, M.B. Sedra : *On $N = 4$ integrable models*, Int.J.Mod.Phys.A 9 (1994) 891-913.

[5] E.H. Saidi, M.B. Sedra : *HyperKahler metrics building and integrable models*, Mod.Phys.Lett.A 9 (1994) 3163-3174.

[6] L.M. Gelfand, B.M. Levitan : *On the determination of a differential equation from its spectral function*, Am. Math. Soc. TransI. 1 (1955) 259.

[7] V. Arnol'd : *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, MIR, Moscou, 1976.

[8] H. Brezis : *Théorie et applications*, Masson, paris 1983.

[9] R. Courant et D. Hilbert : *Methods of mathematical physics*, Interscience Publishers, New-York,1953.

[10] L. Schwartz : *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*,Hermann, Paris, 1965.

[11] R. Dautray et J.L. Lions : *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et Techniques*, 9 Tomes, Paris, Masson, 1984/1987.

[12] Magri : *A simple model of the integrable Hamiltonian Equation*, J. Math. Pures Appl. 20, 137-138, J.(1978).

[13] V.I. Arnold, V.V. Kozlov, A.I. Neishtadt : *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, in Dynamical Systems III, EMS vol. 3, Springer–Verlag, Berlin 1988.

[14] B. A. Dubrovin, I. M. Krichever, S. P. Novikov : *Integrable Systems I*, in Dynamical Systems IV, EMS vol. 4, Springer–Verlag, Berlin 1990, pp. 173–280.

[15] H. Goldstein, : *Classical Mechanics*, Addison-Wesley 1980.

[16] L. Landau, E. Lifchitz, : *Mécanique*, Ed. Mir Moscou 1960.

[17] L. Landau, E. Lifchitz, : *Théorie des champs,*, Ed. Mir Moscou 1960.

Résumé : Dans ce mémoire, nous étudions les systèmes Hamiltoniens intégrables et les paires de Lax. L'existence d'une paire de Lax a facilité l'étude de l'intégrabilité d'un système Hamiltonien. Pour un système intégrable donné, il n'existe pas encore un algorithme utile pour construire une paire de Lax. Cependant, la procédure de Zakharov et Shabat est une méthode générale permettant d'expliciter une paire de Lax.

Mots clés : système Hamiltonien, système dynamique Hamiltonien intégrable, Théorème de Liouville, Paires de Lax, matrice de Lax, Méthode de Zakharov-Shabat, matrice r classique.

Abstract: In this memory, we study Hamiltonians integrables systems with the Lax pairs. The existence of Lax pair has facilitated the study of an Hamiltonian system integrability. For a given integrable system, there is not yet a useful algorithm to construct a Lax pair. However, the Zakharov and Shabat procedure is a general method permitting to clarify a Lax pair.

Key words: Hamiltonian system, integrable Hamiltonian dynamical system, Liouville Theorem, Lax Pairs, Lax matrice, Zakharov-Shabat method, classical r matrice.