

Chapitre : Applications linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif. En pratique, $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Généralités

a) Définitions

Définition 1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **linéaire** si pour tout $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 2.

- Si $F = E$, alors les applications linéaires de E dans lui-même sont appelées **endomorphismes** de E et leur ensemble est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Si $F = \mathbb{K}$, alors les applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$ sont appelées **formes linéaires** sur E .

Exemples.

1. En analyse, limite d'une suite convergente, intégrale d'une fonction continue, dérivation.
2. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'homothétie vectorielle $h_\lambda : E \longrightarrow E$ est linéaire
$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

(h_0 est l'application nulle et $h_1 = \text{Id}_E$).
3. $\mathcal{L}(\mathbb{K})$ n'est constitué que des homothéties de $\mathbb{K}$.
4. Pour $X \neq \emptyset$ et $a \in X$, l'application $\Phi : \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est linéaire.
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array}$$
5. Les applications $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sont linéaires.
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 2x + 3y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, 3x - y) \end{array}$$
6. Dans un plan orienté muni d'une base orthonormale, la rotation vectorielle d'angle θ :

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta, \end{cases}$$

est linéaire.

b) Propriétés élémentaires

Propriétés. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires où E, F, G sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

1. $f(0_E) = 0_F$.

Démonstration. $f(0_E) = f(0_E) + f(0_E)$, d'où en simplifiant par le vecteur $f(0_E)$, on en déduit que $f(0_E) = 0_F$. □

2. Si E' est un sous-espace vectoriel de E , alors l'image directe $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration.

- $f(E') \subset F$ et $f(E') \neq \emptyset$ car E' est non vide.
- Soient $(y, y') \in (f(E'))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe $(x, x') \in E'^2$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.

$$y + \lambda y' = f(x) + \lambda f(x') = f(\underbrace{x + \lambda x'}_{\in E'}) \in f(E')$$

car E' est un sous-espace vectoriel de E .

On en déduit que $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F . □

3. Si F' est un sous-espace vectoriel de F , alors l'image réciproque $f^{<-1>}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

- $f^{<-1>}(F') \subset E$ et $f^{<-1>}(F') \neq \emptyset$ car $f(0_E) = 0_F \in F'$, d'où $0_E \in f^{<-1>}(F')$.
- Soient $(x, x') \in (f^{<-1>}(F'))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$f(x + \lambda x') = \underbrace{f(x)}_{\in F'} + \lambda \underbrace{f(x')}_{\in F'} \in F'$$

car F' est un sous-espace vectoriel de F .

On en déduit que $f^{<-1>}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E . □

4. $g \circ f : E \longrightarrow G$ est linéaire. On en déduit que $\circ$ est une L.C.I. sur $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration. Soient $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$(g \circ f)(u + \lambda v) = g(f(u + \lambda v)) = g(f(u) + \lambda f(v)) = g(f(u)) + \lambda g(f(v)) = (g \circ f)(u) + \lambda (g \circ f)(v),$$

d'où $g \circ f$ est linéaire. □

Définition 3. Un endomorphisme f de E est dit **stable** sur un sous-espace vectoriel A de E si $f(A) \subset A$. Dans ce cas, la restriction $f|_A$ induit un endomorphisme de A qu'on notera encore $f|_A$.

c) Structures algébriques de $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$

Dans $\mathcal{L}(E, F)$, on utilise l'addition et la multiplication par les scalaires définies sur $\mathcal{F}(E, F)$. Pour $(f, g) \in (\mathcal{F}(E, F))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f + g : E &\longrightarrow F & \text{et} & \quad \lambda \cdot f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) + g(x) & & \quad x &\longmapsto \lambda f(x). \end{aligned}$$

Théorème 1. $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. En particulier, $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démonstration. On va prouver que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

- $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{F}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E, F) \neq \emptyset$ car l'application nulle est linéaire.

– Soient $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour $(u, v) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}(f + \lambda g)(u + \alpha v) &= f(u + \alpha v) + \lambda g(u + \alpha v), \\ (f + \lambda g)(u + \alpha v) &= (f(u) + \alpha f(v)) + \lambda(g(u) + \alpha g(v)), \\ (f + \lambda g)(u + \alpha v) &= (f(u) + \lambda g(u)) + \alpha(f(v) + \lambda g(v)), \\ (f + \lambda g)(u + \alpha v) &= (f + \lambda g)(u) + \alpha(f + \lambda g)(v).\end{aligned}$$

Donc $f + \lambda g \in \mathcal{L}(E, F)$.

On conclut que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$. □

Théorème 2. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, en général, non commutatif et non intègre.

Démonstration. On sait déjà que :

- $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe abélien car $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel.
- $\circ$ est une L.C.I. sur $\mathcal{L}(E)$.
- $\circ$ est associative.
- $\circ$ admet un élément neutre dans $\mathcal{L}(E)$ car Id_E est linéaire.

Il reste à prouver que $\circ$ est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition. Soit $(f, g, h) \in (\mathcal{L}(E))^3$. Pour $x \in E$, par définition des lois,

$$[(f + g) \circ h](x) = (f + g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)) = (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x),$$

d'où $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$. Puis,

$$[h \circ (f + g)](x) = h((f + g)(x)) = h(f(x) + g(x)),$$

or h est linéaire, donc

$$[h \circ (f + g)](x) = h(f(x)) + h(g(x)) = (h \circ f)(x) + (h \circ g)(x).$$

Par conséquent, $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$ et $\circ$ est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition. On conclut que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau. □

Remarque. On montre de la même manière que si $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f \circ (\lambda g) = (\lambda f) \circ g = \lambda(f \circ g)$. On pourra également noter $f \circ g = fg$, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ n fois si $n \in \mathbb{N}^*$ et $f^0 = \text{Id}_E$.

II) Linéarité et bijectivité

a) Isomorphismes et automorphismes

Théorème 3. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, alors l'application réciproque f^{-1} est linéaire.

Démonstration. Soient $(y, y') \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $x = f^{-1}(y) \in E$ et $x' = f^{-1}(y') \in E$. Comme f est linéaire, $f(x + \lambda x') = f(x) + \lambda f(x')$. On applique f^{-1} à cette égalité, d'où

$$f^{-1}(y) + \lambda f^{-1}(y') = x + \lambda x' = f^{-1}(f(x) + \lambda f(x')) = f^{-1}(y + \lambda y').$$

Par conséquent, f^{-1} est linéaire. □

Définition 4. Une application linéaire bijective est appelée **isomorphisme** et un endomorphisme bijectif de E est appelé **automorphisme** de E . L'ensemble des automorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est noté $\text{Gl}(E)$.

Corollaire 3.1. $(\text{Gl}(E), \circ)$ est un groupe qui n'est, en général, non commutatif et qui est appelé **groupe linéaire**.

Démonstration. $\text{Gl}(E)$ est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{L}(E)$. □

Exemple. Les homothéties

b) Noyau et image

Définition 5. À toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on associe $\text{Ker}(f) = f^{<-1>}(\{0_F\})$ le **noyau** de f et $\text{Im}(f) = f(E)$ l'**image** de f . Comme images réciproque et directe de sous-espaces vectoriels, $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Théorème 4 (Caractérisation). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est injective si, et seulement si, $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective si, et seulement si, $\text{Im}(f) = F$.
3. f est bijective si, et seulement si, $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ et $\text{Im}(f) = F$.

Démonstration. La propriété 2 est vraie pour n'importe quel type d'application et la propriété 3 est la réunion des deux autres propriétés. Donc il n'y a que la première à démontrer.

- Supposons que f est injective. On en déduit que 0_F a au plus un antécédent par f . Or 0_E est un antécédent de 0_F car f est linéaire, donc c'est le seul et $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- Réciproquement supposons que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Comme f est linéaire,

$$f(x - x') = f(x) - f(x') = 0_F.$$

D'après l'hypothèse, cela implique que $x - x' = 0_E$, i.e. $x = x'$ et f est injective. □

Exemples.

1. $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y - 3z, -x + 2y + 4z)$ et $g : (x, y, z) \mapsto (2x + y - 3z, 6x + 3y - 9z)$.
2. Une forme linéaire non nulle est toujours surjective.
3. L'ensemble des vecteurs fixes d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E est $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.
4. Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et f une application linéaire, $\text{Ker}(\lambda f) = \text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(\lambda f) = \text{Im}(f)$.

III) Deux exemples importants

a) Projections-Projecteurs

Considérons $E = F \oplus G$ une somme directe. Pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

Définition 6. On appelle **projection** sur F parallèlement à G l'application

$$\begin{aligned} p : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x_F. \end{aligned}$$

p est bien une application car x_F existe et est unique pour tout vecteur x de E .

Propriétés.<http://fsjes-agadir.info>

1. p est linéaire.
2. $\text{Im}(p) = F$ et $\text{Ker}(p) = G$.
3. Soit $x \in E$. On a $p(x) = x \iff x \in F$, i.e. $F = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$.

Démonstration.

1. Soit $y = y_F + y_G$ un autre vecteur de E décomposé dans la somme directe. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$x + \lambda y = \underbrace{x_F + \lambda y_F}_{\in F} + \underbrace{x_G + \lambda y_G}_{\in G}.$$

Donc $p(x + \lambda y) = x_F + \lambda y_F = p(x) + \lambda p(y)$.

2. De façon évidente, $\text{Im}(p) \subset F$. Pour $x \in F$, la décomposition de x dans la somme directe est $x = x + 0_E$, donc $p(x) = x$, i.e. $x \in \text{Im}(p)$ et $F \subset \text{Im}(p)$. Par conséquent, $\text{Im}(p) = F$.
 $x \in \text{Ker}(p) \iff x_F = 0_E \iff x = x_G \in G$, d'où $\text{Ker}(p) = G$.
3. Si $p(x) = x$, alors $x \in \text{Im}(p)$, i.e. $x \in F$. Réciproquement si $x \in F$, alors $x = x + 0_E$ est la décomposition de x dans la somme directe, donc $p(x) = x$.

□

Théorème 5. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p est une projection si, et seulement si, $p \circ p = p$ ou encore $p^2 = p$. Une telle application linéaire est appelée **projecteur**.

Démonstration.

- Si p est une projection, alors p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$ et pour tout $x \in E$, $p(x) \in \text{Im}(p)$, donc $p(p(x)) = p(x)$, i.e. $p \circ p(x) = p(x)$ et $p \circ p = p$.
- Réciproquement si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p^2 = p$, alors on montre que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ et ensuite, que p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.
 → Pour $x \in E$, soit $x' = x - p(x)$. Alors $p(x') = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0_E$, d'où $x' \in \text{Ker}(p)$ et $x = p(x) + x'$. Par conséquent, $x \in \text{Im}(p) + \text{Ker}(p)$ et $E \subset \text{Im}(p) + \text{Ker}(p)$.
 → De plus $\text{Im}(p) + \text{Ker}(p)$ est la somme de deux sous-espaces vectoriels de E , donc $\text{Im}(p) + \text{Ker}(p) \subset E$ et $E = \text{Im}(p) + \text{Ker}(p)$.
 → Soit $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ avec

$$x = p(y) = (p \circ p)(y) = p(p(y)) = p(x) = 0_E$$

car $x \in \text{Ker}(p)$. Donc $\text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) \subset \{0_E\}$. De plus $\text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p)$ est un sous-espace vectoriel de E comme intersection de sous-espaces vectoriels, d'où $0_E \in \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) = \{0_E\}$.

Il en résulte que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ et pour tout $x \in E$, $x = p(x) + x'$ avec $p(x) \in \text{Im}(p)$ et $x' \in \text{Ker}(p)$. Par conséquent, p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

□

Exemples.

1. Projections orthogonales vectorielles en géométrie.
2. Les fonctions paires et les fonctions impaires.
3. Les réels et les imaginaires purs.
4. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $F = \mathbb{R}(2, -3)$ et $G = \mathbb{R}(1, 4)$.

b) Symétries-Involutions

On se place dans les mêmes conditions que dans le paragraphe précédent.

Définition 7. On appelle **symétrie** de E par rapport à F parallèlement à G l'application

$$\begin{aligned} s : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x_F - x_G. \end{aligned}$$

Comme pour la projection, s est bien une application car x_F et x_G existent et sont uniques.

Propriétés.

1. s est linéaire avec $s = 2p - \text{Id}_E$ et $p = \frac{s + \text{Id}_E}{2}$ où p est la projection sur F parallèlement à G .
2. $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

Démonstration.

1. Pour $x \in E$, $2p(x) - x = 2x_F - (x_F + x_G) = x_F - x_G = p(x)$, d'où $s = 2p - \text{Id}_E$. D'où s est une combinaison linéaire d'applications linéaires. Par conséquent, s est linéaire.
2. Il suffit de remarquer que $s - \text{Id}_E = 2(p - \text{Id}_E)$ et $s + \text{Id}_E = 2p$.

□

Théorème 6. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. s est une symétrie si, et seulement si, $s \circ s = \text{Id}_E$ ou encore $s^2 = \text{Id}_E$. Dans ce cas, on dit que s est une **involution**. On en déduit qu'une symétrie de E est un automorphisme de E avec $s^{-1} = s$.

Démonstration. Pour $s \in \mathcal{L}(E)$, on pose $p = \frac{s + \text{Id}_E}{2}$. On remarque que $s = 2p - \text{Id}_E$ et $s^2 = 4p^2 - 4p + \text{Id}_E = 4(p^2 - p) + \text{Id}_E$. Donc

$$s^2 = \text{Id}_E \iff p^2 = p \iff p \text{ est une projection} \iff s \text{ est une symétrie.}$$

□

Exemples.

1. Symétries orthogonales vectorielles en géométrie.
2. Les fonctions paires et les fonctions impaires.
3. Les réels et les imaginaires purs.
4. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $F = \mathbb{R}(2, -3)$ et $G = \mathbb{R}(1, 4)$.