Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des sciences Juridiques,
Economiques et Sociales
- Fès-

Prof : TOUIJAR

Année Universitaire 2007/2008
Filière: Sciences Economiques et Gestion
Module: Méthodes quantitatives IV
S5** - Sections **C & D

Eléments de correction de l'épreuve de Statistique IV

Problème (17pts):

1- a) F.H. $\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 (= 80) \\ \# & \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ test de moyenne du genre TB

b) paramètre : μ

c) Statistique :$\bar{X}$ « bon» estimateur de μ

d) loi de $\bar{X}$ sous H_0 :

Hyp de Normalité et σ^2 inconnue $\Rightarrow$ $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \rightsquigarrow \boldsymbol{t}(\mathrm{n}-1)$

e) R.D.

$$\begin{cases} si \quad |\bar{x} - \mu_0| > c_{\alpha/2} = \boldsymbol{t}_{\alpha/2}(\mathrm{n}-1)\frac{s}{\sqrt{n}} & on\ rejette\ H_0 \\ si \quad |\bar{x} - \mu_0| \leq c_{\alpha/2} = \boldsymbol{t}_{\alpha/2}(\mathrm{n}-1)\frac{s}{\sqrt{n}} & on\ ne\ peut\ rejeter\ H_0 \end{cases}$$

f) A.N.

Temps de montée	n_i	x_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
[50-60[	2	55	110	6050
[60-70[	8	65	520	33800
[70-90[	25	80	2000	160000
[90-100[	10	95	950	90250
[100-120]	5	110	550	60500
TOTAL	50	-	4130	350600

$$\bar{x} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{5} n_i x_i = \frac{4130}{50} = 82{,}6\ mn \qquad \boldsymbol{t}_{0,025}(\mathbf{49}) = 2$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} s_e^2 = \frac{50}{49}\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right) = \frac{50}{49}\left(\frac{350600}{50} - 82{,}6^2\right) = 193{,}1$$

$$\Rightarrow s = 13{,}9\ mn \Longrightarrow c_{\alpha/2} = 3{,}93 \quad et \quad |\bar{x} - \mu_0| = |82{,}6 - 80| = 2{,}6$$

$$d'\text{où} \quad |\bar{x} - \mu_0| < c_{\alpha/2} \Longrightarrow \mathrm{NRH}_0$$

Conclusion : les données ne nous permettent pas de rejeter l'hypothèse que le temps moyen de la montée est de 80 mn.

2- a) paramètre : σ^2

b) F.H. $\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 = 250 \\ \# & \\ H_1: & \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$ test de variance du genre TUD

c) Statistique : S^2 « bon» estimateur de σ^2

d) loi de S^2 sous H_0 :

Hyp de Normalité $\Rightarrow$ $Y = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \rightsquigarrow \chi 2(\mathrm{n}-1)$

e) R.D.

$$\begin{cases} si \quad s^2 > c_\alpha = \dfrac{\sigma_0^2}{(n-1)} \boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{2}}(\mathrm{n}-1) \quad on\ rejette\ H_0 \\ si \quad s^2 \leq c_\alpha = \dfrac{\sigma_0^2}{(n-1)} \boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{2}}(\mathrm{n}-1) \quad on\ ne\ peut\ rejeter\ H_0 \end{cases}$$

f) A.N.

$s^2 = 193{,}1$ (déjà vu en 1)) et $\boldsymbol{\chi^2_{0,05}}(49) = 66{,}34$

$$donc\ c_\alpha = \frac{225}{49} \times 66{,}34 = 304{,}62$$

$$d'où \quad s^2 \leq c_\alpha \Rightarrow NRH_0$$

Conclusion : les données ne nous permettent pas de rejeter l'hypothèse que la variance du temps de la montée est de 225.

3- a) F.H. $\begin{cases} H_0: & X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ \# & \\ H_1: & X \nsim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \end{cases}$ test d'ajustement de χ^2 à la loi normale

b) Statistique : $D^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - n_{ti})^2}{n_{ti}}$

c) Loi de D^2 sous H_0 : $D^2 \sim \chi^2_{k-m-1}$; où m est le nombre de paramètres à estimer.

d) R.D.

$$\begin{cases} Si\ \ d^2 > \chi^2_{k-m-1;\alpha} & on\ rejette\ H_0 \\ Si\ \ d^2 \leq \chi^2_{k-m-1;\alpha} & on\ ne\ rejette\ pas\ H_0 \end{cases}$$

e) A.N. : on a deux paramètres à estimer μ (moyenne) et σ^2 (variance) ; ce qui est déjà vu en 1)

- Estimation de μ et de σ^2 :

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 82{,}6\ mn \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 = s^2 = 193{,}1 \Rightarrow \hat{\sigma} = 13{,}9\ mn$$

Calculons les effectifs théoriques $n_{ti} = np_i$

- Tableau théorique : $Z_i = \frac{e_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$[e_{i-1} ; e_i[$	$[z_{i-1} ; z_i[$	p_i	n_{ti}	n_i	d^2
[50 ; 60[	]-∞ ; -1,63[	0,06	3 } 9	**10**	**0,11**
[60 ; 70[	[-1,63 ; -0,91[	0,12	6		
[70 ; 90[	[-0,91 ; 0,53[	0,52	26	25	0,04
[90 ; 100[	[0,53 ; 1,25[	0,19	9,5	10	0,03
[100 ; 120]	[1,25 ; +∞[	0,11	9,5	5	0,05
TOTAL	**TOTAL**	**1,00**	**50**	**50**	**0,23**

On a $d^2 = 0,23$ et $\chi^2_\alpha(4-2-1) = \chi^2_\alpha(1) = 3,84$

D'où $d^2 < \chi^2_\alpha(1) \Rightarrow \text{NRH}_0$

f)- **Conclusion :** les données ne nous permettent pas de rejeter l'hypothèse que les données proviennent d'une population Normale.

4- a) paramètre : p

b) F.H. $\begin{cases} H_0: & p = p_0 = 0,5 \\ \# & \\ H_1: & p > p_0 = 0,5 \end{cases}$ test de proportion du genre TUD

c) Statistique : F « bon» estimateur de p

d) loi de F sous H_0 :

T.C.L.$\Rightarrow n = 50 \geq 30 \quad np_0 = nq_0 = 25 \geq 5$

d'où $F \approx \mathcal{N}\left(p_0; \frac{p_0 q_0}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \dfrac{F - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} \approx \mathcal{N}(0;1)$

e) R.D.

$$\begin{cases} si \quad f > c_\alpha = p_0 + \mathfrak{z}_\alpha \sqrt{p_0 q_0 / n} & on\ rejette\ H_0 \\ si \quad f \leq c_\alpha = p_0 + \mathfrak{z}_\alpha \sqrt{p_0 q_0 / n} & on\ ne\ peut\ rejeter\ H_0 \end{cases}$$

f)A.N. $f = \frac{32}{50} = 0,64 \quad \mathfrak{z}_{0,05} = 1,65 \quad c_\alpha = 0,5 + 1,65\sqrt{\frac{0,25}{50}} = 0,62$

$d'où \quad f > c_\alpha \Longrightarrow RH_0$

Conclusion : les données semblent être cohérentes avec l'hypothèse que plus de la moitié des randonneurs préfère emprunter le TG2.

$$\alpha_0 = \mathbb{p}_0(F > f) = \mathbb{p}_0\left(Z > \frac{f - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}}\right) = \mathbb{p}_0(Z > 2) = 2\%$$

Le test est donc assez significatif.

Exercice (3pts): 1)

- *µ et σ inconnues*
- **a)** *les limites de contrôle sur la carte* $\overline{X}$: $n=3$; $\bar{\bar{x}} = 3{,}45$; $\bar{r} = 0{,}32$
- $UCL = \bar{\bar{x}} + 3\widehat{\sigma_{\bar{x}}} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{r} = 3{,}45 + 1{,}02 * 0{,}32 = 3{,}78$
- $LCL = \bar{\bar{x}} - 3\widehat{\sigma_{\bar{x}}} = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{r} = 3{,}45 - 1{,}02 * 0{,}32 = 3{,}12$
- CL=3,45
- **b)** *les limites de contrôle sur la carte des étendues:*
- $UCL = D_4\bar{r} = 2{,}57 * 0{,}32 = 0{,}82$
- $LCL = D_3\bar{r} = 0 * 0{,}32 = 0$
- CL=0,32

2) $\beta = P_1\left(-3 - 1{,}5\sqrt{3} < Z_1 < +3 - 1{,}5\sqrt{3}\right) = P_1\left(Z_1 < +0{,}4\right) = 0{,}66$

$$\Rightarrow POM_{1,5;3} = \frac{1}{1-\beta} \cong 3$$

N.B. : **On n'accepte pas les formules sans application numérique (i.e. sans faire de calcul !)**