Théorie des Langages

Chapitre 1:

Préliminaire Mathématique

Concepts de bases de la théorie des ensembles: Ensemble

- Un ensemble est une collection d'objets.

- **Exemple:**

Concepts de bases de la théorie des ensembles: Ensemble vide

- L'ensemble vide noté par {} ou $\varnothing$: est l'ensemble qui contient aucun élément.

- **Exemple:**

Concepts de bases de la théorie des ensembles: Singleton

- Si **x** est un objet quelconque on appel singleton x ou ensemble réduit à x est noté par {x} l'ensemble qui ne contient que seul objet qui est égal à x.

- **Exemple:**

Concepts de bases de la théorie des ensembles: Egalité

- Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

- **Exemple:**

Concepts de bases de la théorie des ensembles: Appartenance

- Noté par **a** $\in$ **X**: est la caractéristique d'un objet **a** d'être un élément de l'ensemble X

- **Exemple:**

Concepts de bases de la théorie des ensembles: Inclusion

- On dit que l'ensemble A est inclus dans un ensemble B noté par $A \subseteq B$ si tous les éléments de A sont des éléments de B
- On dit que A est un sous-ensemble de B
- Si $A \not\subset B$ ➔ A n'est pas un sous-ensemble de B.
- Si $A = B$ ➔ $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

Ensemble $\subseteq$ ensemble

Ensemble d'ensembles $\subseteq$ Ensemble d'ensembles

Concepts de bases de la théorie des ensembles: Inclusion

Exemple:

Concepts de bases de la théorie des ensembles: Cardinalité

- La cardinalité de l'ensemble A est noté par **card(A)** ou |**A**| est le nombre d'objets dans cette ensemble.

- **Exemple:**

Concepts de bases de la théorie des ensembles: Ensemble des parties

- Soit **A** un ensemble.
- L'ensemble des parties de A noté par **P(A)** est l'ensemble de tous les sous-ensembles de A.

- **Exemple:**

Opérations sur les ensembles: Union

- Soit **A** et **B** deux ensembles.
- L'union de A et B est l'ensemble des éléments de A ou B ou les deux.
- $\mathbf{A \cup B = \{ a / a \in A \text{ ou } a \in B\}}$

- Un même objet peut être un élément de A et B ➔ il ne figure qu'une seule fois dans $A \cup B$.

- **Exemple:**

Opérations sur les ensembles: Intersection

- L'intersection de **A** et **B** est l'ensemble des éléments contenus à la fois dans A et B.
- On note $\mathbf{A \cap B = \{a/\ a \in A \text{ et } a \in B\}}$

- **Exemple:**

Opérations sur les ensembles: Différence

- La différence entre **A** et **B** est l'ensemble qui existe dans A et pas dans B.
- **$A - B = \{ a \,/\, a \in A \text{ et } a \notin B\}$**

- **Exemple**:

Opérations sur les ensembles:
Produit Cartésien

- Le produit cartésien est l'ensemble des pairs ordonnés (a, b) ou $a \in A$ et $b \in B$.
- On note **$A \times B = \{ (a, b) \ / \ a \in A$ et $b \in B\}$**
- Remarque: $A \times B \neq B \times A$ ➔ il faut respecter l'ordre.
- **Exemple:**

- On peut généraliser la notation
- $A \times A \times A \times A \times \ldots \times A$ (n fois) $= A^n$
- $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \ / \ a_i \in A_i$ pour $i \in \{1,2,\ldots, n\}$

Méthode de preuve

- Une preuve est la démonstration qu’un énoncé est vrai.
- Une méthode de preuve fréquemment utilisée est la preuve par induction.

Méthode de preuve: preuve par induction

- La méthode de preuve par induction permet de démontrer la validité d'un énoncé ou d'une équation.

- Soit **P(N)** une énoncé quelconque impliquant une variable entière n.
- Pour prouver par induction que **P(n)** est vrai pour toute $\mathbf{n} > \mathbf{n_0}$ il faut montrer les deux choses suivantes:

Méthode de preuve: preuve par induction

- –P(n_0) est vrai (**Base d'induction**)
- – Pour tout K $\geq n_0$ si P(k) alors P(k+1) (**Etat d'induction**)

- Selon le principe d'induction cela suffit pour montrer que P(n) est vrai pour tout n.

Méthode de preuve: preuve par induction

- **Exemple:**