

Cours de Mécanique des Milieux Continus

Mondher NEIFAR

Institut Supérieur de l'Éducation et de la Formation Continue

Janvier 2009

Sommaire

CHAPITRE 1 : ELEMENTS DE CALCUL TENSORIEL EN BASES ORTHONORMEES..	4
1. Convention d'indice muet.....	4
2. Tenseurs euclidiens en bases orthonormées.....	4
2.1. Définitions.....	4
2.2. Changement de base orthonormées.....	7
3. Tenseurs isotropes.....	8
4. Multiplication des tenseurs.....	8
5. Tenseurs gradient et divergence.....	9
5.1. Tenseur gradient.....	9
5.2. Tenseur divergence.....	10
CHAPITRE 2 : CINEMATIQUE DES MILIEUX CONTINUS.....	12
1. Définition d'un milieu continu – Hypothèses de base.....	12
1.1. Notion de particule.....	12
1.2. Hypothèse de continuité.....	13
2. Repérage des milieux continus.....	13
2.3. Configuration de référence et configuration actuelle.....	13
2.4. Relation entre les configurations actuelles et de référence : La transformation du milieu continu.....	14
2.5. Transformation linéaire tangente.....	15
2.6. Jacobien de la transformation.....	17
2.7. Champ des déplacements et champ des vitesses.....	19
3. Description lagrangienne du mouvement.....	20
4. Dérivée matérielle et champ des accélérations.....	20
4.1. Dérivée matérielle.....	20
4.2. Champ des accélérations.....	21
CHAPITRE 3 : LES DEFORMATIONS.....	22
1. Considérations intuitives.....	22
2. Tenseur de déformation lagrangien.....	23
2.3. Tenseur de Cauchy à droite et tenseur de green-Lagrange.....	23
2.3.1. Tenseur de Cauchy à droite.....	24
2.3.2. Tenseur de Green-Lagrange.....	25
2.3.3. Décomposition en fonction du champ des déplacements.....	25
2.4. Décomposition polaire de la transformation linéaire tangente.....	26
2.5. Directions principales de déformation et déformation principales.....	28
2.6. Variation de longueur d'un vecteur matériel élémentaire : Notion de dilatation.....	29
2.6.1. Calcul de ε_{NN} en fonction de C (tenseur de Cauchy à droite).....	30
2.6.2. Calcul de ε_{NN} en fonction de L (tenseur de déformation de Green-Lagrange).....	30
2.7. Variation d'angle entre deux vecteur matériel élémentaires : Notion de distorsion.....	31
2.8. Variation de volume matériel élémentaires : Notion de dilatation volumique.....	33
3. Cas des transformations infinitésimales.....	33
3.1. Définition :.....	33
3.1.1. Définition.....	34
3.1.2. Conséquences.....	35
3.2. Tenseur des petites déformations et des petites rotations :.....	35
3.3. Expression de C, L, et U dans le cas des transformations infinitésimales :.....	36
3.3.1. Tenseur de Cauchy à droite (C) :.....	36
3.3.2. Tenseur de Green-Lagrange (L) :.....	36

3.3.3.	Tenseur de déformation pure avant rotation (U) :	37
3.3.4.	Tenseur des rotations (R) :	37
3.4.	Variation de longueur en transformations infinitésimales :	37
3.5.	Variation d'angle droit : distorsion dans le cas des transformations infinitésimales : 38	
3.6.	Variation de volume : dilatation volumique dans le cas des transformations infinitésimales :	39
3.7.	Déviateur des déformations.....	40
3.7.1.	Définition :	40
3.7.2.	Significations physiques.....	40
3.8.	Déformations planes (représentation géométrique)	41
3.8.1.	Définition	41
3.8.2.	Représentation géométrique du tenseur des déformations planes.....	41
CHAPITRE 4 : LES CONTRAINTES		44
1.	Actions mécaniques sur un milieu continu et tenseur des contraintes	44
1.1.	Les actions du milieu extérieur	45
1.1.1.	Les actions de contact	45
1.1.2.	Les actions à distance	46
1.2.	Les actions mécaniques intérieures : notion de vecteur de contraintes.....	46
1.3.	Tenseur des contraintes de Cauchy	47
1.3.1.	Définition	47
1.3.2.	Relation entre vecteur contrainte et tenseur des contraintes	48
1.3.3.	Symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy	49
2.	Propriétés du tenseur des contraintes de Cauchy	50
2.1.	Théorème de Cauchy.....	50
2.2.	Direction principales de contraintes et contraintes principales.....	51
2.3.	Déviateur des contraintes	52
2.4.	Invariants des contraintes	53
3.	Etat de contraintes planes – représentation géométrique	54
4.	Equations d'équilibre	55
TD1 :	Eléments de calcul tensoriel	57
TD2 :	Cinématique des Milieux Continues.....	58
TD3 :	Déformations	60
TD4 :	Contraintes	63
Références	66

CHAPITRE 1 : ELEMENTS DE CALCUL TENSORIEL EN BASES ORTHONORMEES

On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, muni d'une base orthonormée fixe $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Dans la pratique, $n=3$ et même 2 et E représente respectivement l'espace physique et le plan.

1. Convention d'indice muet

Soit \vec{x} un vecteur de E , de composantes x_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ relativement à la base \mathcal{B} . On a alors:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$$

Et l'on notera :

$$\vec{x} = x_i \vec{e}_i$$

Définition (convention d'indice muet ou convention d'Einstein)

La répétition d'un même indice dans une expression arithmétique vaut convention de sommation sur cet indice.

Remarque : On écrira indifféremment $\vec{x} = x_i \vec{e}_i$ ou $\vec{x} = x_j \vec{e}_j$

Exemple :

Soient \vec{x} et \vec{y} des vecteurs de E , de composantes respectives x_i et y_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, relativement à la base \mathcal{B} . Le produit scalaire de \vec{x} par \vec{y} , représenté par $\vec{x} \cdot \vec{y}$ et définie par :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

s'écrira, en utilisant la convention d'indice muet :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_i y_i$$

(ou encore $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_k y_k$).

2. Tenseurs euclidiens en bases orthonormées

2.1. Définitions

Définition

On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E vers \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Exemple :

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{x} \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i$$

est une forme linéaire.

Définition

On appelle forme p -linéaire sur $E \times \dots \times E$ (p fois) toute application p -linéaire de $E \times \dots \times E$ vers \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Exemple :

$$f: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y}$$

est une forme bilinéaire.

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle tenseur d'ordre p sur $E = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, toute forme p -linéaire sur l'espace produit $E \times \dots \times E$ (p fois).

Soit alors t un tenseur d'ordre p sur E et $\vec{x}, \vec{y}, \dots, \vec{u}$, et \vec{v} p vecteurs de E , de composantes respectives x_i, y_i, \dots, u_i et $v_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, relativement à la base \mathcal{B} . On a alors:

$$t(\vec{x}, \vec{y}, \dots, \vec{u}, \vec{v}) = t\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i, \dots, \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i, \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i\right)$$

Ou encore en utilisant la convention d'indice muet:

$$t(\vec{x}, \vec{y}, \dots, \vec{u}, \vec{v}) = t(x_i \vec{e}_i, y_i \vec{e}_i, \dots, u_i \vec{e}_i, v_i \vec{e}_i)$$

Exploisons à présent la p -linéarité du tenseur t . Il vient :

$$t(\vec{x}, \vec{y}, \dots, \vec{u}, \vec{v}) = x_i y_j \dots u_k v_l t(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_l)$$

On voit alors que le tenseur t est complètement caractérisé par l'ensemble des n^p scalaires $t(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_l), (i, j, \dots, k, l) \in \{1, \dots, n\}^p$.

Cas où $p = 1$

$$\mathbf{t}(\vec{x}) = \mathbf{t}\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i\right) = \mathbf{t}(x_i \vec{e}_i) = x_i \mathbf{t}(\vec{e}_i) = x_i t_i$$

Le tenseur \mathbf{t} de composantes $t_i = \mathbf{t}(\vec{e}_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, s'identifie au vecteur \vec{t} de E ayant les mêmes composantes : $\vec{t} = t_i \vec{e}_i$

Soit $\vec{y} = y_i \vec{e}_i \in E$.

$$\mathbf{t}(\vec{y}) = t_i y_i = \vec{t} \cdot \vec{y}$$

Cette relation permet d'identifier tout vecteur $\vec{x} = x_i \vec{e}_i \in E$ à un tenseur \mathbf{x} d'ordre 1 de composantes x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$.

Les vecteurs \vec{e}_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, s'identifient en particulier à des tenseurs du premier ordre \mathbf{e}_i de composantes δ_{ij} , $j \in \{1, \dots, n\}$.

Remarque : δ_{ij} est le symbole de Kronecker . $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, et $\delta_{ij} = 0$ sinon.

On a $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{e}_i(\vec{y}) = \vec{e}_i \cdot \vec{y} = y_i \quad \forall \vec{y} \in E$, et $\mathbf{e}_i(\vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Cas où $p = 2$

$$\mathbf{t}(\vec{x}, \vec{y}) = t_{ij} x_i y_j \quad (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$$

Le tenseur \mathbf{t} s'identifie à la matrice \mathbf{T} ayant les mêmes composantes que \mathbf{t} .

$$\mathbf{T}_{ij} = t_{ij} = \mathbf{t}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$

Le tenseur de Kronecker δ de composante δ_{ij} est un tenseur d'ordre 2 sur \mathbb{R}^n .

$$\delta(\vec{x}, \vec{y}) = \delta_{ij} x_i y_j = x_i y_j = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Cas où $p = 3$

$$\mathbf{t}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = t_{ijk} x_i y_j z_k \quad (i, j, k) \in \{1, \dots, n\}^3$$

Un tenseur d'ordre 3 sur \mathbb{R}^n contient n^3 composantes.

Dans le cas où $n = 3$, c'est-à-dire $E = \mathbb{R}^3$, on introduit le tenseur d'orientation ϵ . Les composantes de ce tenseur d'ordre 3 sont données par :

$$\forall (i, j, k) \in \{1, \dots, n\}^3, \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation circulaire de } (1, 2, 3) \\ 2 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation circulaire de } (3, 2, 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le tenseur d'orientation ϵ permet d'exprimer les composantes du produit vectoriel $\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ où $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, z_i = \epsilon_{ijk} x_j y_k$$

Le tenseur d'orientation ϵ permet aussi d'exprimer le produit mixte $(\vec{x} | \vec{y} | \vec{z}) = \vec{x} \cdot (\vec{y} \wedge \vec{z})$. On a :

$$(\vec{x} | \vec{y} | \vec{z}) = \epsilon_{ijk} x_i y_j z_k$$

Cas où $p = 4$

$$t(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}) = t_{ijkl} x_i y_j z_k w_l \quad (i, j, k, l) \in \{1, \dots, n\}^4$$

Un tenseur d'ordre 4 sur \mathbb{R}^n contient n^4 composantes.

2.2. Changement de base orthonormées

Examinons à présent comment se transforment les composantes d'un tenseur d'ordre p dans un changement de base orthonormée de l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Soient $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ et $\hat{\mathcal{B}} = (\hat{\vec{e}}_1, \hat{\vec{e}}_2, \dots, \hat{\vec{e}}_n)$ deux bases orthonormées de E , et soit \hat{P} la matrice de passage de \mathcal{B} à $\hat{\mathcal{B}}$ définie par :

$$\hat{\vec{e}}_i = \hat{P}_{ij} \vec{e}_j \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Soit à présent t un tenseur d'ordre p sur E de composantes $t_{ij\dots kl}$, $(i, j, \dots, k, l) \in \{1, \dots, n\}^p$ relativement à la base \mathcal{B} , et $\hat{t}_{ij\dots kl}$, $(i, j, \dots, k, l) \in \{1, \dots, n\}^p$, relativement à la base $\hat{\mathcal{B}}$. On alors, par définition des composantes d'un tenseur et $\forall (i, j, \dots, k, l) \in \{1, \dots, n\}^p$:

$$\begin{aligned} \hat{t}_{ij\dots kl} &= t(\hat{\vec{e}}_i, \hat{\vec{e}}_j, \dots, \hat{\vec{e}}_k, \hat{\vec{e}}_l) \\ &= t(\hat{P}_{i'i'} \vec{e}_{i'}, \hat{P}_{j'j} \vec{e}_{j'}, \dots, \hat{P}_{k'k} \vec{e}_{k'}, \hat{P}_{l'l} \vec{e}_{l'}) \\ &= \hat{P}_{i'i'} \hat{P}_{j'j} \dots \hat{P}_{k'k} \hat{P}_{l'l} t(\vec{e}_{i'}, \vec{e}_{j'}, \dots, \vec{e}_{k'}, \vec{e}_{l'}) \\ &= \hat{P}_{i'i'} \hat{P}_{j'j} \dots \hat{P}_{k'k} \hat{P}_{l'l} t_{i'j'\dots k'l'} \end{aligned}$$

Cas où $p = 1$

Le tenseur t s'identifie à un vecteur \vec{t} de composantes $t_i = t(\vec{e}_i)$ relativement à la base \mathcal{B} et de composantes $\hat{t}_i = t(\hat{\vec{e}}_i)$ relativement à la base $\hat{\mathcal{B}}$. On a alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \hat{t}_i = \hat{P}_{ji} t_j$$

On pose $[t] = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$; $[\hat{t}] = \begin{pmatrix} \hat{t}_1 \\ \vdots \\ \hat{t}_n \end{pmatrix}$ et $[\hat{P}] = [\hat{P}_{ij}]$.

On retrouve ainsi la relation classique :

$$[\hat{t}] = {}^t[\hat{P}] [t]$$

Cas où $p = 2$

Le tenseur t est une forme bilinéaire de composantes $t_{ij} = t(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, relativement à la base \mathcal{B} et de composantes $\hat{t}_{ij} = t(\vec{\hat{e}}_i, \vec{\hat{e}}_j)$ relativement à la base $\hat{\mathcal{B}}$. On a alors :

$$\hat{t}_{ij} = \hat{P}_{ki} \hat{P}_{lj} t_{kl}$$

En posant $[t] = [t_{ij}]$; $[\hat{t}] = [\hat{t}_{ij}]$ ainsi que $[\hat{P}] = [\hat{P}_{ij}]$, nous obtenons la relation matricielle connues :

$$[\hat{t}] = {}^t[\hat{P}] [t] [\hat{P}]$$

3. Tenseurs isotropes

Définition

Un tenseur t d'ordre p sur $E = \mathbb{R}^n$ est isotrope lorsque ses composantes sont invariantes dans tout changement de repère orthonormé.

Un tenseur isotrope est nécessairement d'ordre pair. Les composantes d'un tenseur isotrope du second ordre sur $E = \mathbb{R}^n$ relativement à une base orthonormée sont de la forme :

$$t_{ij} = \alpha \delta_{ij} \quad (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Les composantes d'un tenseur isotrope d'ordre 4 sur $E = \mathbb{R}^n$ relativement à une base orthonormée sont quant à elles de la forme :

$$t_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}$$

4. Multiplication des tenseurs

Définition

On appelle produit de deux tenseurs t et t' d'ordre respectifs p et p' et on le note $t \otimes t'$ le tenseur d'ordre $p+p'$ sur $E = \mathbb{R}^n$ de composantes $t_{ij\dots kl} t'_{i'j'\dots k'l'}$.

Exemple

Soit u le tenseur d'ordre 1 sur \mathbb{R}^3 de composantes $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 0$, et v le tenseur d'ordre 1 sur \mathbb{R}^3 de composantes $v_1 = 2, v_2 = 1, v_3 = 5$. On a :

$$[\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Définition

On appelle contraction sur un indice d'un tenseur \mathbf{t} d'ordre p sur $E = \mathbb{R}^n$ par un tenseur \mathbf{t}' d'ordre p' sur $E = \mathbb{R}^n$ et on le note $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}'$ le tenseur d'ordre $p+p'-2$ sur $E = \mathbb{R}^n$ de composantes $t_{ij\dots kl} t'_{j'\dots k'l'}$.

Exemple

$\in \cdot \delta$ est le tenseur de composantes $\in_{ijk} \delta_{kl} = \in_{ijl}$ d'où $\in \cdot \delta = \in$.

Définition

On appelle contraction sur un indice d'un tenseur \mathbf{t} d'ordre $p \geq 2$ sur $E = \mathbb{R}^n$ par un tenseur \mathbf{t}' d'ordre $p' \geq 2$ sur $E = \mathbb{R}^n$ et on le note $\mathbf{t} : \mathbf{t}'$ le tenseur d'ordre $p+p'-4$ sur $E = \mathbb{R}^n$ de composantes $t_{ij\dots kl} t'_{kl\dots k'l'}$.

Exemple

$\in : \delta$ est le tenseur d'ordre 1 de composante $\in_{ijk} \delta_{jk} = \in_{ijj} = 0$. D'où $\in : \delta = \mathbf{0}$.

5. Tenseurs gradient et divergence

5.1. Tenseur gradient

Soit $E = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Soit Ω un ouvert de E , et f une fonction réelle définie sur Ω . Si f est différentiable au point $\vec{x} = x_k \vec{e}_k \in \Omega$, et si $i \in \{1, \dots, n\}$ est un indice quelconque mais fixé, on désigne par $\partial_i f(\vec{x})$ la dérivée partielle de f par rapport à la variable x_i au point \vec{x} :

$$\partial_i f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$$

Dans ce cas, le gradient de f au point \vec{x} est le tenseur du premier $\mathbf{g} = \mathbf{grad} f$ de composantes $g_i = \partial_i f(\vec{x})$, $i \in \{1, \dots, n\}$ relativement à la base \mathcal{B} . On a donc :

$$\mathbf{grad} f = \partial_i f(\vec{x}) \vec{e}_i$$

Ce tenseur s'identifie au vecteur \vec{g} de E ayant les même composantes g_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ relativement à cette base. On a alors :

$$df(\vec{x}) = \vec{g} \cdot d\vec{x} = \partial_i f(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

Définition

Soit à présent \mathbf{t} une fonction tensorielle d'ordre p , $p \in \mathbb{N}^*$, définie sur Ω . Les composantes $t_{ij\dots kl}(\vec{x})$, $(i,j,\dots,k,l) \in \{1,\dots,n\}^p$ de \mathbf{t} relativement à la base \mathcal{B} sont des fonctions des variables x_i , $i \in \{1,\dots,n\}$. Si \mathbf{t} est différentiable au point \vec{x} et si $m \in \{1,\dots,n\}$ est un indice quelconque mais fixé, on désigne par $\partial_m \mathbf{t}(\vec{x})$ la dérivée partielle de \mathbf{t} par rapport à la variable x_m au point \vec{x} . Cette dérivée est le tenseur d'ordre p dont les composantes relativement à la base \mathcal{B} sont :

$$\partial_m t_{ij\dots kl}(\vec{x}) = \frac{\partial t_{ij\dots kl}}{\partial x_m}(\vec{x}) \quad (i,j,\dots,k,l) \in \{1,\dots,n\}^p.$$

Le gradient de \mathbf{t} au point \vec{x} est alors le tenseur d'ordre $p+1$, $\mathbf{g} = \mathbf{grad} \mathbf{t}$ de composantes $g_{ij\dots klm} = \partial_m t_{ij\dots kl}(\vec{x})$, $(i,j,\dots,k,l,m) \in \{1,\dots,n\}^{p+1}$ relativement à la base \mathcal{B} . On a donc :

$$d\mathbf{t}_{ij\dots kl}(\vec{x}) = \partial_m t_{ij\dots kl}(\vec{x}) dx_m$$

Exemple

Soit \mathbf{u} la fonction tensorielle d'ordre 1 définie sur \mathbb{R}^3 par :

$$\begin{cases} u_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ u_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ u_3 = x_1 x_2 x_3 \end{cases}$$

$$[\mathbf{grad} \mathbf{u}(\vec{x})] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 + x_3 & x_1 + x_3 & x_1 + x_2 \\ x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

5.2. Tenseur divergence

Définition

On considère à présent un champ tensoriel de premier ordre \mathbf{u} définie sur Ω de composantes u_i , $i \in \{1,\dots,n\}$, relativement à la base \mathcal{B} , fonctions des variables x_i , $i \in \{1,\dots,n\}$. Si \mathbf{u} est différentiable au point \vec{x} , sa divergence en ce point est alors le scalaire :

$$d = \mathbf{div} \mathbf{u} = \partial_i u_i(\vec{x})$$

Exemple

On considère l'exemple précédent, $\mathbf{div} \mathbf{u} = 1 + x_1 + x_3 + x_1 x_2$.

Définition

Soit à présent \mathbf{t} une fonction tensorielle d'ordre p , $p \in \mathbb{N}^*$, définie sur Ω , de composantes $t_{ij\dots kl}(\vec{x})$, $(i,j,\dots,k,l) \in \{1,\dots,n\}^p$, relativement à la base \mathcal{B} , fonctions des variables x_i , $i \in \{1,\dots,n\}$. Si \mathbf{t} est différentiable au point \vec{x} , on peut alors définir p tenseurs d'ordre $p-1$ appelés divergences de \mathbf{t} au point \vec{x} et notés $\mathbf{div}^{(q)} \mathbf{t}(\vec{x})$, $q \in \{1,\dots,p\}$. Les composantes de $\mathbf{div}^{(q)} \mathbf{t}(\vec{x})$ relativement à la base \mathcal{B} sont données par :

$$(\mathbf{div}^{(q)}\mathbf{t}(\vec{x}))_{ij\dots rt\dots kl} = \partial_s t_{ij\dots rst\dots kl}(\vec{x})$$

$(i,j,\dots,r,t,\dots,k,l) \in \{1,\dots,n\}^{p-1}$, q désignant ici le rang de l'indice s sur lequel porte la sommation.

Si par exemple $p = 2$, on obtiendra deux tenseurs du premier ordre $\mathbf{div}^{(1)}\mathbf{t}(\vec{x})$ et $\mathbf{div}^{(2)}\mathbf{t}(\vec{x})$ de composantes respectifs $\partial_i t_{ij}(\vec{x})$ et $\partial_j t_{ij}(\vec{x})$. Si le tenseur $\mathbf{t}(\vec{x})$ est symétrique $\forall \vec{x} \in \Omega$, alors $\mathbf{div}^{(1)}\mathbf{t}(\vec{x}) = \mathbf{div}^{(2)}\mathbf{t}(\vec{x}) = \mathbf{div}\mathbf{t}(\vec{x})$.

Exemple

Soit $\mathbf{t}(\vec{x})$ le tenseur du second ordre sur \mathbb{R}^3 s'identifiant à la matrice suivante :

$$[\mathbf{t}(\vec{x})] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 x_3 & x_1 x_2 x_3 \\ x_2 & x_1 x_3 & x_1 x_2 x_3 \\ x_3 & x_1 x_2 & x_1 x_2 x_3 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{div}^{(1)}\mathbf{t}(\vec{x})] = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\mathbf{div}^{(2)}\mathbf{t}(\vec{x})] = \begin{bmatrix} 1 + x_3 + x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 + x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

CHAPITRE 2 : CINEMATIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Cinématique : c'est l'étude et la description du mouvement du milieu sans considérer les efforts.

Avant : - on considérait des corps indéformables, représentés par leur centre de gravité G.
- Les grandeurs physiques qui leurs étaient attachées étaient représentées par des fonctions vectorielles (\vec{v} , $\vec{\gamma}$, \vec{F}).

En mécanique des milieux continus :

- Les corps sont supposés déformables sous l'action de charges externes.
- Les grandeurs physiques étudiées sont représentées par des fonctions tensorielles.

1. Définition d'un milieu continu – Hypothèses de base

Idée intuitive

A l'échelle microscopique, la matière apparaît discontinue. Cette discontinuité n'est pas décelable à l'échelle macroscopique : un solide qui se déforme est formé de corps matériels occupant en totalité (de façon continue) un domaine de l'espace physique. Cette idée est à la base du concept de milieu continu.

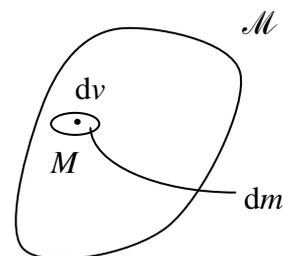
Dans tout ce qui suit, \mathcal{M} désigne un milieu, ou corps matériel (mais qui peut être un liquide ou un gaz).

1.1. Notion de particule

Définition

Soit \mathcal{M} un corps matériel. On appelle particule de \mathcal{M} un élément matériel de masse dm occupant au point M de l'espace physique le volume élémentaire dv .

Le volume élémentaire dv est d'un point de vue macroscopique, "suffisamment petit" pour pouvoir être assimilé à un infiniment petit, tout en restant représentatif de la matière. Cette représentativité dépend de chaque milieu et elle sera requise à différentes échelles très différentes :



- Cristaux constituant un métal (nm).
- Paillettes dont se compose une argile (μm).
- Grains d'un sable (mm).
- Granulats entrant dans la composition d'un béton (cm).
- Bloc d'un barrage en enrochement.

Si ρ désigne la masse volumique au point M , on a :

$$dm = \rho dv$$

1.2. Hypothèse de continuité

Soit \mathcal{M} un corps matériel continu ou milieu continu. L'ensemble des particules de \mathcal{M} occupe, à chaque instant t un domaine Ω_t ouvert et connexe de l'espace physique. A tout point de Ω_t correspond une et une seule particule.

2. Repérage des milieux continus

On considère l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , munie d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ direct d'origine O supposé fixe.

2.3. Configuration de référence et configuration actuelle

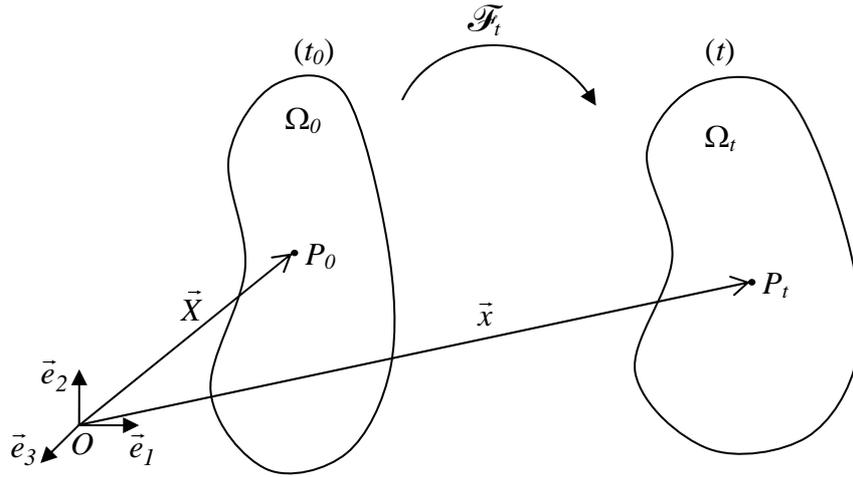
Définition

Soit \mathcal{M} un milieu continu. On appelle configuration de référence, ou configuration non déformée de \mathcal{M} l'ensemble Ω_0 des positions de ses particules à un instant de référence t_0 quelconque mais fixé.

Soit P une particule de \mathcal{M} quelconque mais fixée. La position P_0 de P à l'instant de référence est alors repérée par le vecteur :

$$\vec{X} = \overrightarrow{OP_0} = X_k \vec{e}_k$$

Les variables (X_1, X_2, X_3) coordonnées des particules de \mathcal{M} à l'instant de référence t_0 , sont appelées variables de Lagrange.



Définition

Soit t l'instant actuel (on dit aussi l'instant courant). On appelle configuration actuelle, ou encore configuration déformée, de \mathcal{M} à l'instant t l'ensemble Ω_t des positions de ses particules à cet instant.

Soit P la particule de \mathcal{M} quelconque mais fixée considérée plus haut. La position P_t de cette particule à l'instant t est repérée par le vecteur :

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP_t} = x_i \vec{e}_i$$

Les variables (x_1, x_2, x_3) coordonnées des particules de \mathcal{M} à l'instant de courant t , sont appelées variables d'Euler

2.4. Relation entre les configurations actuelles et de référence : La transformation du milieu continu.

L'application \mathcal{F}_t de Ω_0 sur Ω_t : $\Omega_0 \rightarrow \Omega_t$

$$\vec{X} \mapsto \vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$$

est appelé transformation du milieu continu \mathcal{M} relative à l'instant t .

\mathcal{F}_t est une bijection de Ω_0 sur Ω_t .

Par ailleurs, on appelle transformation du milieu continu \mathcal{M} et l'on désigne par \mathcal{F} l'application qui à \vec{X} et t associe le vecteur \vec{x} . On a donc :

$$\vec{x} = \mathcal{F}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_t(\vec{X})$$

Cette relation peut s'écrire aussi parfois :

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t) = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \vec{e}_i \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 = x_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 = x_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{cases}$$

La transformation \mathcal{F}_t relative à l'instant t étant bijective, l'application réciproque existe et est une bijection de Ω_t sur Ω_0 . On a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t^{-1} : \Omega_t &\rightarrow \Omega_0 \\ \vec{x} &\mapsto \vec{X} = \mathcal{F}_t^{-1}(\vec{x}) \end{aligned}$$

et nous écrivons aussi parfois :

$$\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t) = X_i(x_1, x_2, x_3, t) \vec{e}_i \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = X_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ X_2 = X_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ X_3 = X_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases}$$

2.5. Transformation linéaire tangente.

Hypothèse :

Soit t l'instant actuel quelconque mais fixé. La transformation \mathcal{F}_t relative à cet instant est une bijection continûment différentiable et il en est de même de sa réciproque \mathcal{F}_t^{-1} . Soit par ailleurs $\vec{X} \in \Omega_0$ quelconque mais fixé. Les applications $t \mapsto \mathcal{F}(\vec{X}, t)$ ainsi que $t \mapsto \partial_K \mathcal{F}(\vec{X}, t)$, $K \in \{1, 2, 3\}$, sont continues.

Cette hypothèse nous permet de considérer le gradient de \mathcal{F}_t , $\mathbf{grad} \mathcal{F}_t$ au point \vec{X} . Ce gradient noté $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$ ou $\mathbf{F}_t(\vec{X})$ ou plus simplement \mathbf{F}_t et même \mathbf{F} est le tenseur du second ordre appelé transformation linéaire tangente au point P_0 et à l'instant t . Il est caractérisé par :

$$\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X}) : \mathbf{F}(\vec{X}, t) = \mathbf{grad} \mathcal{F}_t(\vec{X}) \quad \Leftrightarrow \quad d\vec{x} = \mathbf{F}(\vec{X}, t) d\vec{X}$$

Ses composantes relatives au repère orthonormé fixe $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ont alors pour expression :

$$F_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \quad \forall (i, k) \in \{1, 2, 3\}^2$$

La transformation linéaire tangente \mathbf{F} au point P_0 et à l'instant t et donc représentée par une matrice à 3 lignes et 3 colonnes :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Et la relation $d\vec{x} = \mathbf{F}(\vec{X}, t) d\vec{X}$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix}$$

Théorème :

La transformation linéaire tangente $\mathbf{F}(\vec{X}, t) = \mathbf{grad} \mathcal{F}_t(\vec{X})$ au point P_0 de coordonnées (X_1, X_2, X_3) et à l'instant t , est inversible. Son inverse noté $\mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t)$ ou $\mathbf{F}_t^{-1}(\vec{X})$ ou plus simplement \mathbf{F}_t^{-1} et même \mathbf{F}^{-1} n'est autre que le gradient $\mathbf{grad} \mathcal{F}_t^{-1}$ de \mathcal{F}_t^{-1} au point P_t de coordonnées (x_1, x_2, x_3) avec $\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$ l'image de \vec{X} par \mathcal{F}_t . Les composantes de \mathbf{F}^{-1} relativement au repère $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont :

$$F_{Ki} = \frac{\partial X_K}{\partial x_i} \quad \forall (K, i) \in \{1, 2, 3\}^2$$

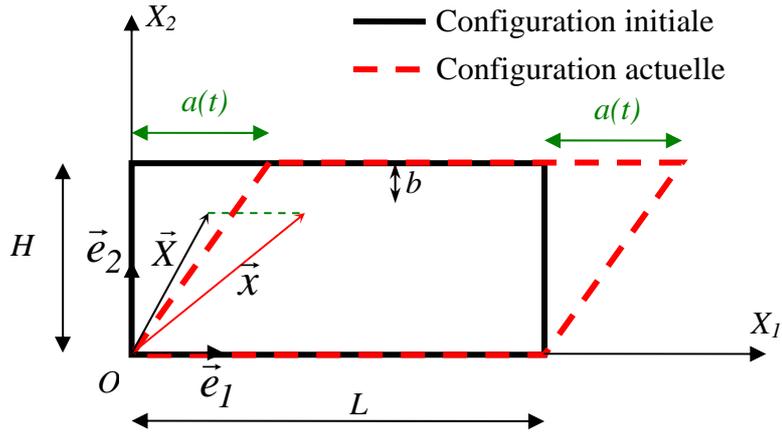
et la matrice représentative s'écrit :

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

La relation $d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1}(\vec{x}, t) d\vec{x}$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

Exemple :

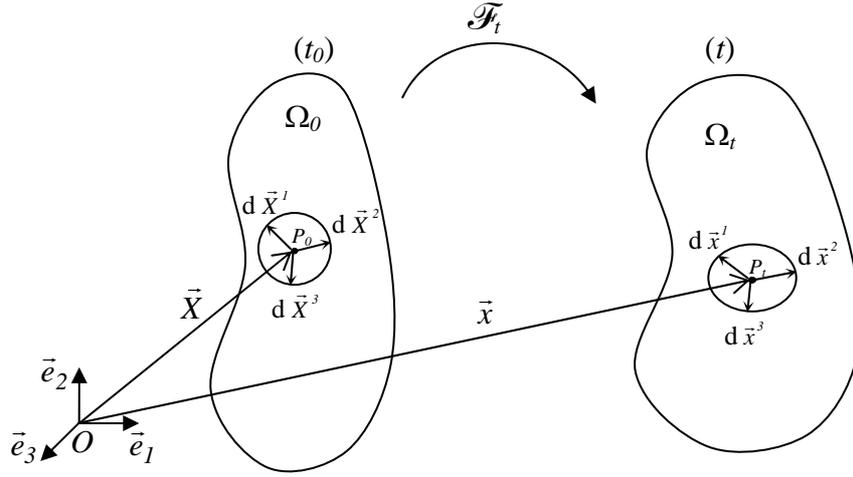


$$\mathcal{F}_t \begin{cases} x_1 = X_1 + a(t) \frac{X_2}{H} \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a(t)}{H} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_t^{-1} \begin{cases} X_1 = x_1 - a(t) \frac{x_2}{H} \\ X_2 = x_2 \\ X_3 = x_3 \end{cases} \quad \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a(t)}{H} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.6. Jacobien de la transformation

Soit t l'instant actuel et $\vec{X} \in \Omega_0$ quelconque mais fixé, et soit \mathcal{F}_t la transformation du milieu continu \mathcal{M} relative à cet instant. Considérons, au point P_0 de coordonnées (X_1, X_2, X_3) extrémité du vecteur \vec{X} , un volume matériel élémentaire dV bâti sur trois vecteurs matériels élémentaires non liés $d\vec{X}^1$, $d\vec{X}^2$ et $d\vec{X}^3$.



On a alors :

$$dV = (d\bar{X}^1 | d\bar{X}^2 | d\bar{X}^3) = \det [d\bar{X}^1, d\bar{X}^2, d\bar{X}^3] = \epsilon_{IJK} dX_I^1 dX_J^2 dX_K^3$$

La transformée de ce volume matériel élémentaire dans la configuration actuelle Ω_t à l'instant t est alors le volume élémentaire dv bâti au point P_t de coordonnées (x_1, x_2, x_3) extrémité du vecteur $\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$ sur trois vecteurs matériels élémentaires non liés $d\bar{x}^1$, $d\bar{x}^2$ et $d\bar{x}^3$ définis par :

$$d\bar{x}^\alpha = \mathbf{F} \cdot d\bar{X}^\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2, 3\}$$

avec \mathbf{F} : transformation linéaire tangente $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$ au point P_0 à l'instant t . Il vient alors :

$$\begin{aligned} dv &= \det [d\bar{x}^1, d\bar{x}^2, d\bar{x}^3] \\ &= \epsilon_{ijk} F_{i1} dX_1^1 F_{j2} dX_2^2 F_{k3} dX_3^3 \\ &= \epsilon_{ijk} F_{i1} F_{j2} F_{k3} dX_1^1 dX_2^2 dX_3^3 \\ &= \det \mathbf{F} \epsilon_{IJK} dX_I^1 dX_J^2 dX_K^3 \\ &= \det \mathbf{F} dV \end{aligned}$$

Le déterminant de \mathbf{F} noté $J(\vec{X}, t)$ ou $J_t(\vec{X})$ ou plus simplement J_t et même J est appelé le jacobien de la transformation \mathcal{F}_t au point P_0 extrémité du vecteur \vec{X} .

$$\forall t, \forall \vec{X} \in \Omega_0, J(\vec{X}, t) = \det \mathbf{F}$$

et on a :

$$J = \frac{dv}{dV}$$

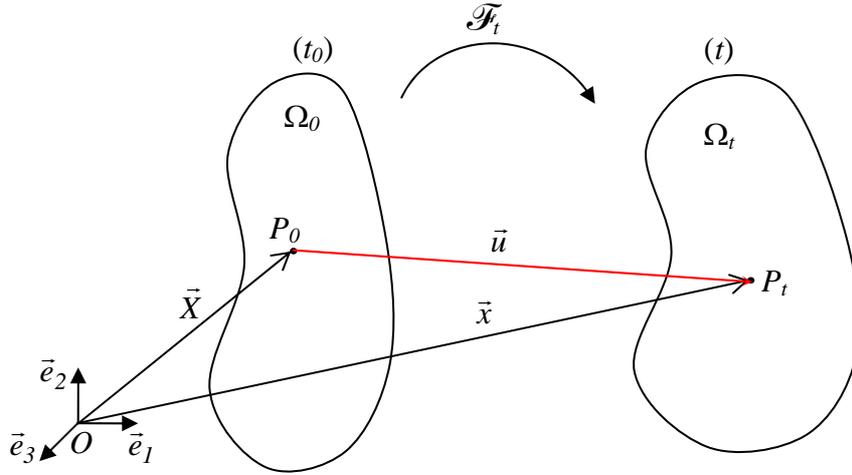
Théorème :

$$\forall t, \forall \vec{X} \in \Omega_0, J(\vec{X}, t) > 0$$

2.7. Champ des déplacements et champ des vitesses

Soit t l'instant actuel quelconque mais fixé, et soit \mathcal{F}_t la transformation du milieu continu \mathcal{M} relative à cet instant. Soit par ailleurs P une particule quelconque mais fixée de \mathcal{M} , de position dans la configuration de référence Ω_0 le point P_0 extrémité du vecteur \vec{X} , et de position dans la configuration actuelle Ω_t le point P_t extrémité du vecteur $\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$. Le déplacement de la particule P à cet instant est alors le vecteur :

$$\vec{u} = \overrightarrow{P_0 P_t} = \vec{x} - \vec{X}$$



On appelle champs des déplacement l'application \mathbf{u} qui à t et \vec{X} associe le vecteur \vec{u} de déplacement de la particule P à cet instant :

$$\mathbf{u} : \Omega_0 \times [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\vec{X}, t) \mapsto \mathbf{u}(\vec{X}, t) = \vec{u} = \vec{x}(\vec{X}, t) - \vec{X} = u_i(X_1, X_2, X_3) \vec{e}_i$$

$$\vec{u} = u_i(X_1, X_2, X_3) \vec{e}_i \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = u_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ u_2 = u_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ u_3 = u_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{cases}$$

La vitesse \vec{v} de la particule P à l'instant courant t n'est alors autre que la dérivée par rapport au temps du déplacement $t \mapsto \mathbf{u}(\vec{X}, t)$ de cette particule à cet instant :

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\vec{X}, t)$$

Exprimée sous cette forme, elle est ainsi fonction du temps et des variable de Lagrange (X_1, X_2, X_3) coordonnées de la particule P dans la configuration de référence Ω_0 .

Or $\vec{X} = \mathcal{F}_t^{-1}(\vec{x})$, donc \vec{v} peut s'exprimer en fonction du temps et des variables d'Euler (x_1, x_2, x_3) coordonnées de la particule P dans la configuration actuelle Ω_t et on a :

$$\vec{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathcal{F}_t^{-1}(\vec{x}), t)$$

On appelle champ des vitesses l'application \mathbf{v} qui à t et \vec{x} associe la vitesse \vec{v} de la particule P à cet instant :

$$\mathbf{v} : \Omega_t \times [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\vec{x}, t) \mapsto \mathbf{v}(\vec{x}, t) = \vec{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathcal{F}_t^{-1}(\vec{x}), t) = v_i(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_i$$

$$\vec{v} = v_i(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_i \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = v_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_2 = v_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_3 = v_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases}$$

3. Description lagrangienne du mouvement

Définition

Soit P une particule quelconque mais fixée du milieu continu \mathcal{M} . On appelle trajectoire de P le lieu des positions successives de cette particule au cours du temps.

Soit \vec{X} le vecteur position de la particule P dans la configuration de référence Ω_0 et soit \mathcal{F}_t la transformation du milieu continu \mathcal{M} relative à l'instant courant t . La trajectoire de P est alors la courbe géométrique ayant pour équation de paramètre t :

$$t \mapsto \vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$$

Dans ce mode de description associé aux variables de Lagrange X_1, X_2 , et X_3 nous adoptons un point de vue consistant à suivre les particules dans leur mouvement. Ce point de vue, où l'on privilégie la particule est appelé point de vue lagrangien et la description du mouvement du milieu \mathcal{M} qui en résulte est dite lagrangienne.

4. Dérivée matérielle et champ des accélérations

4.1. Dérivée matérielle

Soit P une particule quelconque mais fixée du milieu continu \mathcal{M} et soit $g(P, t)$ une grandeur physique (scalaire, vectorielle ou tensorielle) liée à la matière, ou grandeur matérielle. On

appelle dérivée matérielle ou dérivée totale encore dérivée particulière de g et l'on note \dot{g} ou $\frac{dg}{dt}$, le taux de variation de cette grandeur lorsqu'on suit la particule P dans son mouvement.

Supposons que g est une grandeur scalaire. Soient alors (X_1, X_2, X_3) les coordonnées de la particule P dans la configuration de référence Ω_0 (variables de Lagrange), et soit (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de cette même particule dans la configuration de actuelle Ω_t à l'instant t (variables d'Euler).

Point de vue lagrangien

$$g(P, t) = g(X_1, X_2, X_3, t) \text{ et on a : } \dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t}$$

Point de vue eulerien

$$g(P, t) = g(x_1, x_2, x_3, t) \text{ et on a : } \dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x_i} v_i$$

$$\text{d'où } \dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{grad}_x g \cdot \mathbf{v}$$

La dérivé matérielle d'une grandeur vectorielle ou tensorielle exprimée dans un système de coordonnées cartésiennes s'obtient aisément en dérivant chacune de ses composante, à l'aide des relations fournies précédemment.

4.2. Champ des accélérations

Soit P une particule quelconque mais fixée du milieu continu \mathcal{M} . L'accélération $\vec{\gamma}$ de cette particule à l'instant t n'est autre que la dérivée matérielle de sa vitesse à cet instant.

$$\text{Si } \vec{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\vec{X}, t) \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\vec{X}, t)$$

$$\text{Si } \vec{v} = \mathbf{v}(\vec{x}, t) \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(\vec{x}, t)$$

On appelle champ des accélérations et désignerons par γ l'application qui à tout t et \vec{x} associe l'accélération $\vec{\gamma}$ de la particule P à cet instant :

$$\gamma(\vec{x}, t) = \vec{\gamma} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(\vec{x}, t) = \gamma_i(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ \gamma_2 = \gamma_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ \gamma_3 = \gamma_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases}$$

Propriété

$$\gamma_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad}_x \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

CHAPITRE 3 : LES DEFORMATIONS

1. Considérations intuitives

Définition

Un corps est dit déformable si lorsqu'on lui applique des efforts, les distances relatives entre ses particules sont variables au cours du temps (par opposition aux corps rigides).

Exemple

Ecrasement d'un échantillon cubique d'un matériaux déformable homogène (même matériaux, même densité, ..., dans tout le volume) isotrope (les propriétés physiques sont les mêmes en tout point et dans toutes les directions).

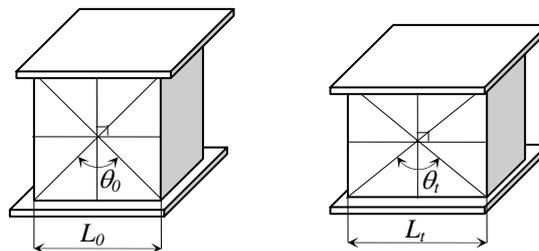
On suppose que cet écrasement se déroule dans des conditions idéales de compression simple (pression uniforme, pas de frottement entre l'échantillon et les embases de la presse). La transformation est dans ce cas linéaire :

$$\vec{x} = \mathcal{F}(\vec{X}, t) = \mathcal{F}_t(\vec{X}) = [\alpha] \vec{X}$$

et donc :

$$[\alpha] = \mathbf{F}_t(\vec{X}) = \mathbf{grad} \mathcal{F}_t(\vec{X})$$

(Dans ce cas la transformation coïncide avec son gradient).



On observe :

- raccourcissement de la hauteur,
- allongement de la longueur,
- conservation de l'angle droit,
- variation de l'angle entre diagonale,
- diminution du volume et de l'aire des faces latérales.

Notre objectif est de trouver un outil mathématique en mesure de retranscrire toutes ces informations : variation de longueur, d'angles, de surface, de volume au cours de la transformation. C'est le rôle du tenseur des déformations.

Remarques

- Les déformations sont différentes des déplacements.
- Les déformations sont des grandeurs adimensionnelles, car il s'agit de variations relatives de mesures.
- Dans tout projet de génie civil, les déformations sont des grandeurs dimensionnante de l'ouvrage.
- Il existe plusieurs méthodes de mesure et de suivi des déformations : jauges d'extensométrie, extensomètre à fibre optique, extensomètre à corde vibrante, ...

2. Tenseur de déformation lagrangien

Soit \mathcal{M} un milieu continu dont les configurations successives sont observées relativement à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de \mathbb{R}^3 supposé fixe. On considère :

- \mathcal{F} : transformation du milieu déformable \mathcal{M} .
- \mathcal{F}_t : transformation relative à l'instant t .
- Ω_0 : état de référence de \mathcal{M} .
- Ω_t : état déformé de \mathcal{M} à t .

Soit P une particule fixée de \mathcal{M} repérée par :

$$\begin{aligned}\vec{X} &= \overrightarrow{OP_0} = X_k \vec{e}_k \text{ dans } \Omega_0 \\ \vec{x} &= \overrightarrow{OP_t} = x_k \vec{e}_k \text{ dans } \Omega_t\end{aligned}$$

La notion de déformation, liée aux variations relatives de mesures est basée sur l'étude de la transformation de domaines matériel élémentaire, c'est-à-dire une approche locale qui utilise la transformation linéaire tangente (on peut passer au volume global en intégrant).

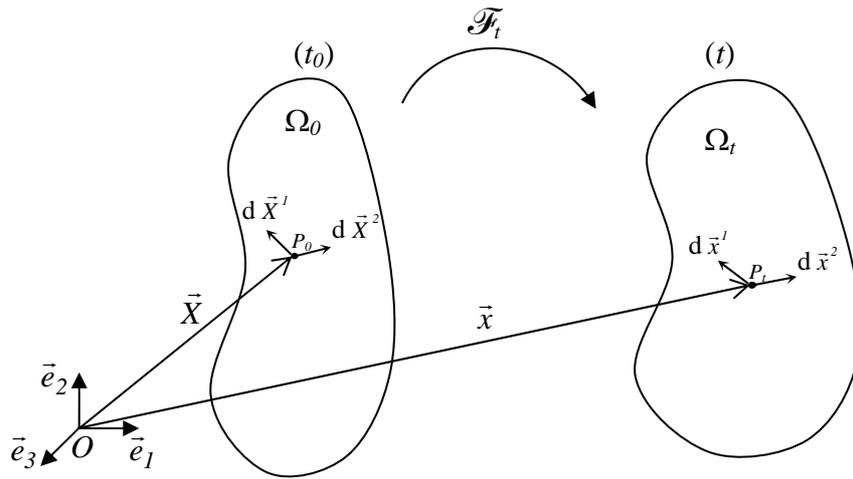
2.3. Tenseur de Cauchy à droite et tenseur de green-Lagrange

On choisit deux vecteurs élémentaires de longueur au point P_0 de Ω_0 $d\vec{X}^1$ et $d\vec{X}^2$. Au temps t , ils leur correspond au point P_t extrémité de $\vec{x} = \mathcal{F}_t(\vec{X})$ deux vecteurs élémentaires $d\vec{x}^1$ et $d\vec{x}^2$ vérifiant :

$$\begin{aligned}d\vec{x}^1 &= \mathbf{F} d\vec{X}^1 \\ d\vec{x}^2 &= \mathbf{F} d\vec{X}^2\end{aligned}$$

où \mathbf{F} est la transformation linéaire tangente de composantes $F_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K}$, $(i, K) \in \{1, 2, 3\}^2$.

Pour quantifier les variations de longueurs et d'angle au cours de la transformation, regardons comment évolue le produit scalaire de ces vecteurs élémentaires.



2.3.1. Tenseur de Cauchy à droite

$$d\bar{x}^1 \cdot d\bar{x}^2 = dx_i^1 dx_i^2 = F_{iK} dX_K^1 F_{iL} dX_L^2 = F_{iK} F_{iL} dX_K^1 dX_L^2$$

Posons :

$$C_{KL} = F_{iK} F_{iL} = {}^t F_{Ki} F_{iL}$$

ce qui équivaut à introduire le tenseur du second ordre tel que :

$$\mathbf{C} = {}^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}$$

\mathbf{C} est un tenseur lagrangien car est fonction des variables de Lagrange : $\mathbf{C}(\bar{\mathbf{X}}, t) = {}^t \mathbf{F}(\bar{\mathbf{X}}, t) \cdot \mathbf{F}(\bar{\mathbf{X}}, t)$.

On a donc :

$$d\bar{x}^1 \cdot d\bar{x}^2 = C_{KL} dX_K^1 dX_L^2$$

d'où :

$$\boxed{d\bar{x}^1 \cdot d\bar{x}^2 = d\bar{\mathbf{X}}^1 \cdot \mathbf{C} \cdot d\bar{\mathbf{X}}^2}$$

\mathbf{C} est appelé tenseur de Cauchy à droite : $\boxed{\mathbf{C} = {}^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}}$

Propriété

\mathbf{C} est un tenseur d'ordre 2, lagrangien et symétrique (par construction), défini positif (SDP).

En effet

$$d\bar{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{C} \cdot d\bar{\mathbf{X}} = \|d\bar{\mathbf{x}}\|^2 \geq 0, \text{ donc } \mathbf{C} \text{ est positif}$$

Si $d\bar{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{C} \cdot d\bar{\mathbf{X}} = 0$, alors $d\bar{\mathbf{x}} = \vec{0}$ et donc $d\bar{\mathbf{X}} = \vec{0}$.

Comme \mathbf{F} est inversible, \mathbf{C} est inversible et on a $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t \mathbf{F}^{-1}$

2.3.2. Tenseur de Green-Lagrange

Etudions la variation du produit scalaire :

$$d\bar{x}^1 \cdot d\bar{x}^2 - d\bar{X}^1 \cdot d\bar{X}^2 = C_{KL} dX_K^1 dX_L^2 - dX_K^1 \delta_{KL} dX_L^2 = (C_{KL} - \delta_{KL}) dX_K^1 dX_L^2 = d\bar{X}^1 \cdot (\mathbf{C} - \boldsymbol{\delta}) \cdot d\bar{X}^2$$

avec $\boldsymbol{\delta}$ le tenseur de Kronecker.

On pose $\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \boldsymbol{\delta})$; $L_{KL} = \frac{1}{2}(C_{KL} - \delta_{KL})$

\mathbf{L} est le tenseur de déformation de Green Lagrange.

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \boldsymbol{\delta})$$

Propriété

\mathbf{L} est un tenseur du deuxième ordre, symétrique et lagrangien par construction.

On montrera par la suite que \mathbf{L} contient toutes les informations pour décrire les déformations autour de P_i au temps t .

2.3.3. Décomposition en fonction du champ des déplacements

Calculons de façon explicite les termes de \mathbf{C} et \mathbf{L} . Considérons le champs des déplacements $\mathbf{u}(\bar{X}, t) = \bar{x}(\bar{X}, t) - \bar{X}$ et son gradient lagrangien :

$$\mathbf{H}^L(\bar{X}, t) = \mathbf{grad}_X \mathbf{u}(\bar{X}, t) ; \quad H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

On a $\bar{x}(\bar{X}, t) = \bar{X} + \mathbf{u}(\bar{X}, t)$

Exprimons \mathbf{F} en fonction de \mathbf{H}^L .

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial (X_i + u_i)}{\partial X_j} = \delta_{ij} + H_{ij}^L$$

d'où la relation intrinsèque :

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}^L$$

Exprimons \mathbf{C} en fonction de \mathbf{H}^L

$$\mathbf{C} = {}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} \text{ donc } C_{IJ} = {}^tF_{IK} F_{KJ} = F_{KI} F_{KJ} = (\delta_{KI} + H_{KI}^L)(\delta_{KJ} + H_{KJ}^L) = \delta_{IJ} + H_{IJ}^L + H_{JI}^L + H_{KI}^L H_{KJ}^L$$

soit $C_{IJ} = \delta_{IJ} + H_{IJ}^L + {}^tH_{IJ}^L + {}^tH_{IK}^L H_{KJ}^L$

d'où :

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L \cdot \mathbf{H}^L$$

$$C_{IJ} = \delta_{IJ} + \frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_J}{\partial X_I} + \frac{\partial u_K}{\partial X_I} \frac{\partial u_K}{\partial X_J}$$

Exprimons \mathbf{L} en fonction de \mathbf{H}^L . $\mathbf{L} = \frac{I}{2}(\mathbf{C} - \delta)$, d'où :

$$\mathbf{L} = \frac{I}{2}(\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L \cdot \mathbf{H}^L)$$

$$L_{IJ} = \frac{I}{2} \left(\frac{\partial u_I}{\partial X_J} + \frac{\partial u_J}{\partial X_I} + \frac{\partial u_K}{\partial X_I} \frac{\partial u_K}{\partial X_J} \right)$$

2.4. Décomposition polaire de la transformation linéaire tangente

Théorème

Toute transformation linéaire tangente admet une unique double décomposition en produit d'une déformation pure par une rotation telle que :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

où :

\mathbf{F} : transformation linéaire tangente ($\mathbf{F}(\vec{X}, t) = \mathbf{grad} \mathcal{F}_t(\vec{X})$) : tenseur lagrangien d'ordre 2)

\mathbf{R} : tenseur de rotation du second ordre orthogonal ($\mathbf{R}^{-1} = {}^t\mathbf{R}$ soit $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \delta$) de déterminant égal à 1.

\mathbf{U} : tenseur lagrangien de déformation pure avant rotation du second ordre symétrique défini positif (les valeurs propres de \mathbf{U} sont strictement positives).

\mathbf{V} : tenseur eulerien de déformation pure après rotation du second ordre symétrique défini positif (les valeurs propres de \mathbf{V} sont strictement positives).

Démonstration

1) Montrons l'unicité de la décomposition $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$. en supposant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \text{ est orthogonal } ({}^t\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \delta) \\ \det \mathbf{R} = 1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U} \text{ symétrique} \\ \mathbf{U} \text{ défini positif} \end{array} \right.$$

Supposons la non unicité de la décomposition et donc $\mathbf{F} = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{U}_1 = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{U}_2$

Considérons le tenseur de Cauchy à droite :

$$\mathbf{C} = {}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = ({}^t(\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{U}_1)) \cdot (\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{U}_1) = {}^t\mathbf{U}_1 \cdot {}^t\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{U}_1 = {}^t\mathbf{U}_1 \cdot \delta \cdot \mathbf{U}_1 = {}^t\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_1$$

Or \mathbf{U}_1 est symétrique donc ${}^t\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_1$ et par conséquent $\mathbf{C} = \mathbf{U}_1^2$.

De même $\mathbf{C} = \mathbf{U}_2^2$.

Or \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 sont définis positifs et $\mathbf{U}_1^2 = \mathbf{U}_2^2$ donc $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}$ et $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$.

2) Montrons l'existence de la décomposition $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \text{ est orthogonal } ({}^t\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \delta) \\ \det \mathbf{R} = 1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U} \text{ symétrique} \\ \mathbf{U} \text{ défini positif} \end{array} \right.$$

On sait que le tenseur de Cauchy à droite \mathbf{C} est symétrique ($\mathbf{C} = {}^t\mathbf{F}\mathbf{F}$), donc il est diagonalisable. Il est défini positif, donc ses valeurs propres C_1, C_2 et C_3 sont strictement positives.

Soit $\mathcal{R}_{\mathcal{D}} = (P_0, \vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3)$ un repère orthonormé direct associé aux directions principales de \mathbf{C} .
Donc \mathbf{C} est représenté dans $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ par la matrice diagonale :

$$\mathbf{C}_{\mathcal{R}_{\mathcal{D}}} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \text{ avec } C_1 > 0, C_2 > 0, C_3 > 0$$

Soit \mathbf{Q} la matrice de passage de $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ vers $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Notons que \mathbf{Q} est orthogonal et $\det \mathbf{Q} = 1$. On a $\mathbf{C} = {}^t\mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_{\mathcal{R}_{\mathcal{D}}} \cdot \mathbf{Q}$.

Soit \mathbf{U} le tenseur du second ordre représenté dans $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ par la matrice :

$$\mathbf{U}_{\mathcal{R}_{\mathcal{D}}} = \begin{bmatrix} \sqrt{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C_3} \end{bmatrix}$$

\mathbf{U} est défini positif.

Dans $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, \mathbf{U} est représenté par la matrice :

$$\mathbf{U} = {}^t\mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}_{\mathcal{R}_{\mathcal{D}}} \cdot \mathbf{Q}$$

Par construction, \mathbf{U} est symétrique, défini positif avec $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$.

Considérons le tenseur \mathbf{R} tel que :

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

$${}^t\mathbf{R}\mathbf{R} = {}^t(\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}) = {}^t\mathbf{U}^{-1} \cdot {}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \boldsymbol{\delta}$$

Donc \mathbf{R} est orthogonal.

Montrons que $\det \mathbf{R} = 1$. Considérons pour cela le jacobien de la transformation :

$$\begin{aligned} J &= \det \mathbf{F} = \det (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = (\det \mathbf{R}) (\det \mathbf{U}) = (\det \mathbf{R}) \sqrt{\det \mathbf{C}} = (\det \mathbf{R}) \sqrt{\det ({}^t\mathbf{F}\mathbf{F})} \\ &= (\det \mathbf{R}) \sqrt{J^2} = (\det \mathbf{R}) J \text{ (car } J > 0). \end{aligned}$$

D'où $\det \mathbf{R} = 1$

3) Il convient de montrer l'existence et l'unicité de la décomposition $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}'$, \mathbf{V} tenseur eulerien de déformation pure. Il suffit d'agir comme précédemment en considérant le tenseur de Cauchy à gauche $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot {}^t\mathbf{F}$ qui est un tenseur eulerien symétrique défini positif.

4) On a $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}'$. Montrons que $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot {}^t\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot {}^t\mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}$$

L'unicité de la décomposition impose que :

$$\begin{cases} \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot {}^t\mathbf{R} = \mathbf{V} \\ \mathbf{R} = \mathbf{R}' \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot {}^t\mathbf{R} \\ \mathbf{U} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{V} \cdot {}^t\mathbf{R} \end{cases}$$

2.5. Directions principales de déformation et déformation principales

Par construction, on a vu que \mathbf{C} , \mathbf{L} et \mathbf{U} ont les mêmes directions principales $(\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3)$ relativement à la configuration initiale Ω_0 .

Corollaire

- Les tenseurs \mathbf{U} et \mathbf{V} ont les mêmes valeurs propres
- Les directions principales \vec{i}_1, \vec{i}_2 et \vec{i}_3 de \mathbf{V} sont les transformées par la rotation \mathbf{R} des directions principales \vec{I}_1, \vec{I}_2 et \vec{I}_3 de \mathbf{U} , \mathbf{C} et \mathbf{L} .

Démonstration

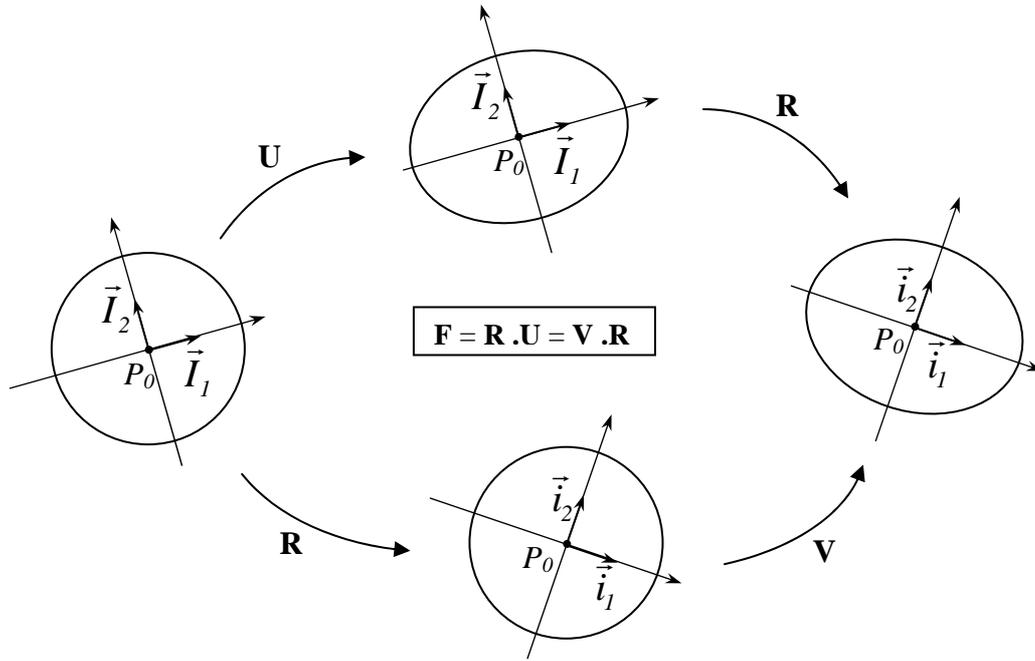
Montrer que \mathbf{U} et \mathbf{V} ont les mêmes valeurs propres et que les directions principales de \mathbf{V} s'obtiennent par rotation \mathbf{R} des directions principales de \mathbf{U} revient à montrer que :

- pour α fixé, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$: si U_α est valeur propre de \mathbf{U} associée à la direction \vec{I}_α , alors U_α est valeur propre de \mathbf{V} associée à la direction $\mathbf{R} \cdot \vec{I}_\alpha$ ce qui reviendrait à écrire que :

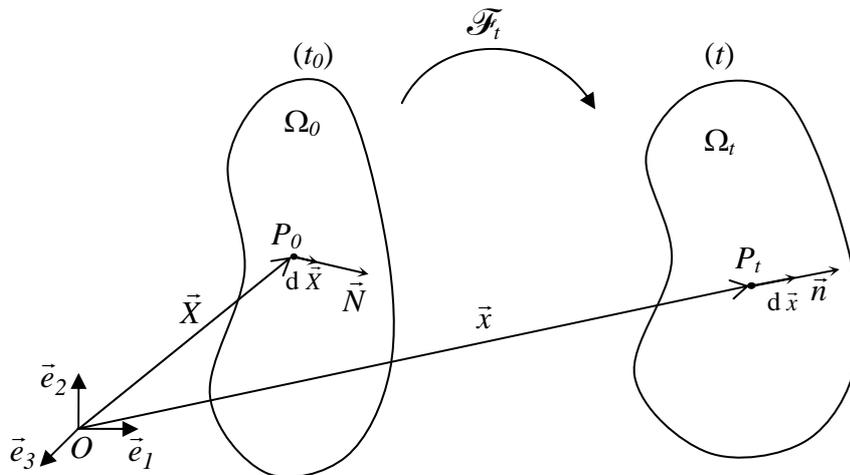
$$\mathbf{V} \cdot (\mathbf{R} \cdot \vec{I}_\alpha) = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{R}) \cdot \vec{I}_\alpha = \mathbf{F} \cdot \vec{I}_\alpha = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) \cdot \vec{I}_\alpha = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{U} \cdot \vec{I}_\alpha) = \mathbf{R} \cdot (U_\alpha \vec{I}_\alpha) = U_\alpha (\mathbf{R} \cdot \vec{I}_\alpha)$$

D'où $\vec{i}_\alpha = \mathbf{R} \cdot \vec{I}_\alpha$ est direction principale pour \mathbf{V} .

Exemple : Cas d'un disque plan



2.6. Variation de longueur d'un vecteur matériel élémentaire : Notion de dilatation



Soit $d\vec{X}$ un vecteur élémentaire de longueur $\|d\vec{X}\|$ dans Ω_0 .

Soit \vec{N} un vecteur unitaire dans la direction et le sens de $d\vec{X}$.

Soit $d\vec{x}$ le vecteur élémentaire image de $d\vec{X}$ par \mathcal{F}_t .

Définition

On appelle dilatation ε_{NN} dans la direction \vec{N} au point P_0 à l'instant t , la différence relative entre les longueurs des vecteurs élémentaires $d\vec{x}$ et $d\vec{X}$ ramenée à la longueur initiale $\|d\vec{X}\|$.

$$\varepsilon_{NN} = \frac{\|\mathrm{d}\bar{x}\| - \|\mathrm{d}\bar{X}\|}{\|\mathrm{d}\bar{X}\|} \quad (\text{dilatation lagrangienne})$$

On a alors $\|\mathrm{d}\bar{x}\| = (I + \varepsilon_{NN})\|\mathrm{d}\bar{X}\|$

Remarque :

- ε_{NN} est sans unité (variation relative de longueur).
- Il existe une dilatation eulerienne :

$$\varepsilon_{mm} = \frac{\|\mathrm{d}\bar{x}\| - \|\mathrm{d}\bar{X}\|}{\|\mathrm{d}\bar{x}\|}$$

- On a $(I + \varepsilon_{NN})(I - \varepsilon_{mm}) = I$

2.6.1. Calcul de ε_{NN} en fonction de C (tenseur de Cauchy à droite)

On a $\mathrm{d}\bar{x}' \cdot \mathrm{d}\bar{x}' = \mathrm{d}\bar{X}' \cdot \mathbf{C} \cdot \mathrm{d}\bar{X}'$.

Soit $\mathrm{d}\bar{X} = \mathrm{d}\bar{X}' = \mathrm{d}\bar{X}'$ et donc $\mathrm{d}\bar{x} = \mathrm{d}\bar{x}' = \mathrm{d}\bar{x}'$

D'où $\|\mathrm{d}\bar{x}\|^2 = \mathrm{d}\bar{X} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathrm{d}\bar{X}$

Or $\mathrm{d}\bar{X} = \|\mathrm{d}\bar{X}\| \vec{N}$ d'où $\|\mathrm{d}\bar{x}\|^2 = \|\mathrm{d}\bar{X}\|^2 \vec{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{N}$

Or $\|\mathrm{d}\bar{x}\| = (I + \varepsilon_{NN})\|\mathrm{d}\bar{X}\|$ d'où $\|\mathrm{d}\bar{x}\|^2 = (I + \varepsilon_{NN})^2 \|\mathrm{d}\bar{X}\|^2$

Par conséquent :

$$\boxed{\varepsilon_{NN} = \sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{N}} - I}$$

En notation indicielle $\boxed{\varepsilon_{NN} = \sqrt{N_K C_{KL} N_L} - I}$

2.6.2. Calcul de ε_{NN} en fonction de L (tenseur de déformation de Green-Lagrange)

On a : $\mathrm{d}\bar{x}' \cdot \mathrm{d}\bar{x}' - \mathrm{d}\bar{X}' \cdot \mathrm{d}\bar{X}' = \mathrm{d}\bar{X}' \cdot 2\mathbf{L} \cdot \mathrm{d}\bar{X}'$

D'où en prenant $\mathrm{d}\bar{X} = \mathrm{d}\bar{X}' = \mathrm{d}\bar{X}'$ et donc $\mathrm{d}\bar{x} = \mathrm{d}\bar{x}' = \mathrm{d}\bar{x}'$, on obtient :

$$\|\mathrm{d}\bar{x}\|^2 - \|\mathrm{d}\bar{X}\|^2 = \|\mathrm{d}\bar{X}\|^2 \vec{N} \cdot 2\mathbf{L} \cdot \vec{N} \quad \text{soit} \quad (I + \varepsilon_{NN})^2 \|\mathrm{d}\bar{X}\|^2 - \|\mathrm{d}\bar{X}\|^2 = \|\mathrm{d}\bar{X}\|^2 \vec{N} \cdot 2\mathbf{L} \cdot \vec{N}$$

D'où :

$$\frac{I}{2} \varepsilon_{NN}^2 + \varepsilon_{NN} = \vec{N} \cdot \mathbf{L} \cdot \vec{N}$$

Remarques :

- ε_{NN} traduit physiquement la variation de longueur entre les temps t_0 et t autour de la particule P dans la direction \vec{N} .

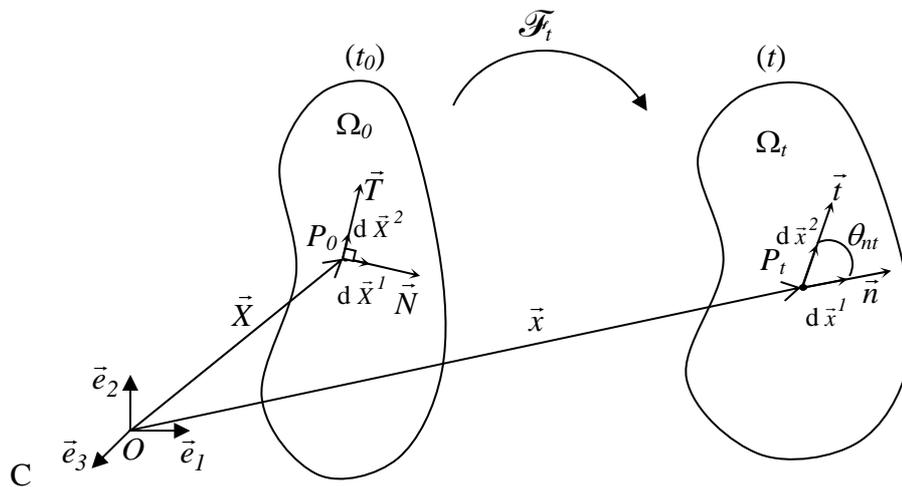
Si $\varepsilon_{NN} > 0$, alors il s'agit d'un allongement.

Si $\varepsilon_{NN} < 0$, alors il s'agit d'un raccourcissement.

Si $\varepsilon_{NN} = 0$, alors il s'agit d'une conservation de longueur.

$$\begin{cases} \varepsilon_{e_1 e_1} = \varepsilon_{11} = \sqrt{\vec{e}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{e}_1} - 1 = \sqrt{C_{11}} - 1 \\ \varepsilon_{e_2 e_2} = \varepsilon_{22} = \sqrt{\vec{e}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{e}_2} - 1 = \sqrt{C_{22}} - 1 \\ \varepsilon_{e_3 e_3} = \varepsilon_{33} = \sqrt{\vec{e}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{e}_3} - 1 = \sqrt{C_{33}} - 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{\begin{cases} \varepsilon_{11} = \sqrt{C_{11}} - 1 \\ \varepsilon_{22} = \sqrt{C_{22}} - 1 \\ \varepsilon_{33} = \sqrt{C_{33}} - 1 \end{cases}}$$

2.7. Variation d'angle entre deux vecteur matériel élémentaires : Notion de distorsion



Soit $d\vec{X}^1$ et $d\vec{X}^2$ deux vecteurs orthogonaux élémentaires en P_0 .

Soit \vec{N} et \vec{T} deux vecteurs unitaires de directions respectives $d\vec{X}^1$ et $d\vec{X}^2$.

Définition :

On appelle distorsion entre les directions orthogonaux \vec{N} et \vec{T} au point P_0 et au temps t , notée γ_{NT} , l'opposé de la variation entre l'instant de référence t_0 et l'instant actuel t , de l'angle que font entre elles ces directions matérielles.

$$\gamma_{NT} = \frac{\pi}{2} - \theta_{nt}$$

On définit aussi la demi distorsion :

$$\varepsilon_{NT} = \frac{\gamma_{NT}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{nt} \right)$$

Explicitons la distorsion γ_{NT} :

On sait que $d\vec{x}^1 \cdot d\vec{x}^2 - d\vec{X}^1 \cdot d\vec{X}^2 = d\vec{X}^1 \cdot 2\mathbf{L} \cdot d\vec{X}^2$

ce qui équivaut à $\|d\vec{x}^1\| \|d\vec{x}^2\| \cos(\theta_{nt}) = \|d\vec{X}^1\| \|d\vec{X}^2\| \vec{N} \cdot 2\mathbf{L} \cdot \vec{T}$

Or $\cos(\theta_{nt}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{nt}\right) = \sin(\gamma_{nt})$

$$\|d\vec{x}^1\| = (1 + \varepsilon_{NN}) \|d\vec{X}^1\| = \|d\vec{X}^1\| \sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{N}}$$

$$\|d\vec{x}^2\| = (1 + \varepsilon_{TT}) \|d\vec{X}^2\| = \|d\vec{X}^2\| \sqrt{\vec{T} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{T}}$$

D'où : $\|d\vec{X}^1\| \sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{N}} \|d\vec{X}^2\| \sqrt{\vec{T} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{T}} \sin(\gamma_{nt}) = \|d\vec{X}^1\| \|d\vec{X}^2\| \vec{N} \cdot 2\mathbf{L} \cdot \vec{T}$

Soit :

$$\boxed{\sin(\gamma_{NT}) = \frac{\vec{N} \cdot 2\mathbf{L} \cdot \vec{T}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{N}} \sqrt{\vec{T} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{T}}}}$$

Remarques :

- Lorsque $\gamma_{NT} > 0$, il y'a entre t_0 et t une diminution de l'angle que font entre elles les directions des vecteurs \vec{N} et \vec{T} .
- Lorsque $\gamma_{NT} < 0$, il y'a entre t_0 et t une augmentation de l'angle que font entre elles les directions des vecteurs \vec{N} et \vec{T} .
- Lorsque $\gamma_{NT} = 0$, il y'a entre t_0 et t une conservation de cet angle droit.

- Distorsion entre \vec{e}_1 et \vec{e}_2 :

$$\boxed{\sin(\gamma_{12}) = \sin(2\varepsilon_{12}) = \frac{2L_{12}}{\sqrt{C_{11}} \sqrt{C_{22}}}}$$

- Distorsion entre \vec{e}_1 et \vec{e}_3 :

$$\boxed{\sin(\gamma_{13}) = \sin(2\varepsilon_{13}) = \frac{2L_{13}}{\sqrt{C_{11}} \sqrt{C_{33}}}}$$

- Distorsion entre \vec{e}_2 et \vec{e}_3 :

$$\boxed{\sin(\gamma_{23}) = \sin(2\varepsilon_{23}) = \frac{2L_{23}}{\sqrt{C_{22}} \sqrt{C_{33}}}}$$

- Distorsion entre \vec{I}_1 et \vec{I}_2 directions principales de \mathbf{L} (et aussi de \mathbf{C} et \mathbf{U}) :

Dans $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}} = (P_0, \vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3)$, \mathbf{L} est représenté par la matrice $\mathbf{L}_{\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix}$, \mathbf{C} est

représenté par la matrice $\mathbf{C}_{\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$ et on a $\vec{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où :

$$\boxed{\sin(\gamma_{I_1, I_2}) = \frac{0}{\sqrt{C_1}\sqrt{C_2}} = 0}$$

donc $\gamma_{I_1, I_2} = 0$ et par conséquent les directions principales de déformations restent orthogonales deux à deux.

2.8. Variation de volume matériel élémentaires : Notion de dilatation volumique

Soit dV un volume élémentaire en P_0 .

Soit dv le volume élémentaire en P_t au temps t image de dV par \mathcal{F}_t .

On sait que $J = \frac{dv}{dV}$

Définition :

On appelle dilatation volumique notée θ_v au point P_0 , à l'instant t , la différence relative entre les volumes élémentaires dv et dV ramenée au volume initial dV .

$$\theta_v = \frac{dv - dV}{dV}$$

On a

$$\boxed{\theta_v = J - 1}$$

signification physique :

- Si $\theta_v > 0$, il y'a entre t_0 et t une augmentation du volume élémentaire.
- Si $\theta_v < 0$, il y'a entre t_0 et t une diminution du volume élémentaire.
- Si $\theta_v = 0$, il y'a entre t_0 et t une conservation du volume élémentaire.

3. Cas des transformations infinitésimales

3.1. Définition :

Tout ce qui a été dit jusqu'alors sur les déformations est absolument général et indépendants de la grandeur relative des déformations.

En mécanique des milieux continus, et en particulier en mécanique des solides, il existe toutefois un cas particulier important : c'est le cas des "petites déformations" ou "transformations infinitésimales".

3.1.1. Définition

Soit $\mathbf{u}(\bar{X}, t)$ le champ des déplacements du milieu continu \mathcal{M} .

Soit $\mathbf{H}^L(\bar{X}, t) = \mathbf{grad}_X \mathbf{u}(\bar{X}, t)$: le gradient lagrangien du déplacement au point P_0 au temps t .

La transformation est dite infinitésimale, ou infiniment petite, lorsqu'en tout point P_0 , et en tout temps t , la norme euclidienne de \mathbf{H}^L reste petite devant 1. C'est-à-dire :

$$\forall t, \forall \bar{X} \in \Omega_0, \|\mathbf{H}^L\| \ll 1 \text{ ou encore } \sqrt{\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_j}} \ll 1$$

Remarque

Il existe une définition équivalente qui concerne le gradient eulérien \mathbf{H}^E et qui dit que la transformation est infinitésimale si en tout point P_t , et en tout temps t , la norme euclidienne de \mathbf{H}^E reste petite devant 1. C'est-à-dire :

$$\forall t, \forall \bar{x} \in \Omega_t, \|\mathbf{H}^E\| \ll 1 \text{ ou encore } \sqrt{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \ll 1$$

Montrons l'équivalence de ces deux définitions.

$$\mathcal{F} : (\bar{X}, t) \mapsto \bar{x} = \bar{X} + \mathbf{u}(\bar{X}, t)$$

$$\mathbf{F} : \text{gradient de } \mathcal{F} \text{ de composantes } F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + H_{ij}^L(\bar{X}, t)$$

$$\mathcal{F}^{-1} : (\bar{x}, t) \mapsto \bar{X} = \bar{x} - \mathbf{u}(\bar{x}, t)$$

$$\mathbf{F}^{-1} : \text{gradient de } \mathcal{F}^{-1} \text{ de composantes } F_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - H_{ij}^E(\bar{x}, t)$$

$$H_{ij}^E = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = H_{ik}^L F_{kj}^{-1} = H_{ik}^L (\delta_{kj} - H_{kj}^E) = H_{ik}^L - H_{ik}^L H_{kj}^E$$

d'où :

$$\mathbf{H}^E = \mathbf{H}^L - \mathbf{H}^L \cdot \mathbf{H}^E \text{ et } \mathbf{H}^L = \mathbf{H}^E + \mathbf{H}^L \cdot \mathbf{H}^E$$

On a alors :

$$\|\mathbf{H}^E\| \leq \|\mathbf{H}^L\| + \|\mathbf{H}^L\| \|\mathbf{H}^E\|$$

Si $\|\mathbf{H}^L\| \ll 1$ on obtient : $\|\mathbf{H}^E\| \leq \frac{\|\mathbf{H}^L\|}{1 - \|\mathbf{H}^L\|} \ll 1$ et donc $\|\mathbf{H}^E\| \ll 1$

D'autre part :

$$\|\mathbf{H}^L\| \leq \|\mathbf{H}^E\| + \|\mathbf{H}^L\| \|\mathbf{H}^E\|$$

Si $\|\mathbf{H}^E\| \ll 1$ on obtient : $\|\mathbf{H}^L\| \leq \frac{\|\mathbf{H}^E\|}{1 - \|\mathbf{H}^E\|} \ll 1$ et donc $\|\mathbf{H}^L\| \ll 1$

3.1.2. Conséquences

Dans le cas d'une transformation infiniment petite, il est possible de négliger les termes en gradient lagrangien \mathbf{H}^L et eulérien \mathbf{H}^E des déplacements d'ordre supérieur ou égal à 2 devant ceux du 1^{er} ordre.

Dans le cas des transformations infinitésimales, le gradient lagrangien \mathbf{H}^L du déplacement en P_0 au temps t est égal au 1^{er} ordre au gradient eulérien \mathbf{H}^E du déplacement en P_t au temps t .

$$\mathbf{H}^E = \mathbf{H}^L - \underbrace{\mathbf{H}^L \cdot \mathbf{H}^E}_{\substack{\text{terme du} \\ 2^{\text{nd}} \text{ ordre}}} \approx \mathbf{H}^L$$

D'où, dans une transformation infinitésimale, on écrit :

$$\mathbf{H}^E = \mathbf{H}^L = \mathbf{H}$$

En petites déformations, on peut écrire indifféremment :

$$H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

En petites déformation, il n'y a plus lieu de différencier variables d'Euler et variables de Lagrange (physiquement, tout se passe autour de P_0 et demeure dans le domaine des petites déformations).

3.2. Tenseur des petites déformations et des petites rotations :

La considération des petites déformations (transformation infinitésimales) apporte des simplifications considérables à la théorie générales évoquée précédemment.

Soit \mathbf{H} le gradient du champ des déplacements \mathbf{u} . Ce tenseur du 2nd ordre se décompose en une partie symétrique et une partie anti-symétrique.

- Partie symétrique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + {}^t\mathbf{H}) : \text{tenseur linéarisé des petites déformations de composantes :}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Pour une transformation quelconque, on avait exprimé le tenseur des déformations de Green Lagrange par :

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L + \underbrace{{}^t\mathbf{H}^L \cdot \mathbf{H}^L}_{\text{terme d'ordre 2, négligé en petites déformations}})$$

- Partie anti-symétrique :

$\omega = \frac{1}{2} (\mathbf{H} - {}^t\mathbf{H})$: tenseur linéarisé des petites rotations de composantes :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Remarque

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}$$

3.3. Expression de C, L, et U dans le cas des transformations infinitésimales :

3.3.1. Tenseur de Cauchy à droite (C) :

On a : $\mathbf{C} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L \cdot \mathbf{H}^L$.

Dans le cas des petites déformations, en négligeant le terme du second ordre, on obtient :

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L$$

soit

$$\boxed{\mathbf{C} = \boldsymbol{\delta} + 2 \boldsymbol{\varepsilon}}$$

3.3.2. Tenseur de Green-Lagrange (L) :

On a : $\mathbf{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L \cdot \mathbf{H}^L)$

Dans le cas des petites déformations, en négligeant le terme du second ordre, on obtient :

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^L + {}^t\mathbf{H}^L)$$

soit

$$\boxed{\mathbf{L} = \boldsymbol{\varepsilon}}$$

3.3.3. Tenseur de déformation pure avant rotation (\mathbf{U}) :

On a : $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$

Dans le cas des petites déformations : $\mathbf{C} = \boldsymbol{\delta} + 2\boldsymbol{\varepsilon}$, avec $\boldsymbol{\varepsilon}$ symétrique et $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$. Alors :

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\boldsymbol{\delta} + 2\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} + O(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$$

D'où :

$$\boxed{\mathbf{U} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbf{U}^{-1} = \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\varepsilon}}$$

3.3.4. Tenseur des rotations (\mathbf{R}) :

On a : $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ soit $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$

Dans le cas des petites déformations : $\mathbf{F} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}$

D'où : $\mathbf{R} = (\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\varepsilon}^2 - \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\varepsilon}$, et en négligeant les termes du second ordre :

$$\boxed{\mathbf{R} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\omega}}$$

Remarque

Soit \vec{I}_1, \vec{I}_2 et \vec{I}_3 les directions principales de déformation en P_0 à l'instant t (directions principales de \mathbf{C} , \mathbf{U} et \mathbf{L}).

Soit \vec{i}_1, \vec{i}_2 et \vec{i}_3 les directions principales de déformation en P_t à l'instant t (directions principales de \mathbf{V}). On sait que $\vec{i}_\alpha = \mathbf{R}\vec{I}_\alpha$, avec $\alpha \in \{1, 2, 3\}$.

En transformations infinitésimales : $\vec{i}_\alpha = (\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\omega})\vec{I}_\alpha = \vec{I}_\alpha + \boldsymbol{\omega}\vec{I}_\alpha$. Donc \vec{i}_α et \vec{I}_α diffèrent entre elles d'un terme du premier ordre en \mathbf{H} (ou $\boldsymbol{\omega}$).

D'où en transformations infinitésimales, on ne parlera plus que de directions principales de déformations au point et à l'instant considéré associées aux directions propres du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x}, t)$.

Les valeurs propres de $\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x}, t)$ sont appelées déformations principales au point et à l'instant considéré.

3.4. Variation de longueur en transformations infinitésimales :

On a défini la dilatation $\varepsilon_{\vec{N}}$ comme la variation de longueur relative de dans la direction \vec{N} au point P_0 entre les instants t_0 et t telle que :

$$\varepsilon_{NN} = \frac{\|\vec{d}\vec{x}\| - \|\vec{d}\vec{X}\|}{\|\vec{d}\vec{X}\|}$$

avec : $\vec{d}\vec{X} = \|\vec{d}\vec{X}\| \vec{N}$ et $\vec{d}\vec{x} = \mathbf{F} \cdot \vec{d}\vec{X}$.

On a montré dans le cas général que : $\frac{1}{2} \varepsilon_{NN}^2 + \varepsilon_{NN} = \vec{N} \cdot \mathbf{L} \cdot \vec{N}$.

Or en transformations infinitésimales, on sait que $\mathbf{L} = \boldsymbol{\varepsilon}$, et $\varepsilon_{NN}^2 \ll \varepsilon_{NN}$ puisque c'est un terme en \mathbf{H}^2 . D'où en transformations infinitésimales, on a :

$$\boxed{\varepsilon_{NN} = \vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N}}$$

Remarque

En considérant la dilatation eulérienne $\varepsilon_m = \frac{\|\vec{d}\vec{x}\| - \|\vec{d}\vec{X}\|}{\|\vec{d}\vec{x}\|}$, dans le cas des transformations infinitésimales, les points de vue lagrangien et eulérien étant confondus au premier ordre en \mathbf{H} et on a :

$$\boxed{\varepsilon_{NN} = \varepsilon_m = \vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{n}}$$

3.5. Variation d'angle droit : distorsion dans le cas des transformations infinitésimales :

On a dans le cas général :

$$\sin(\gamma_{NT}) = \frac{\vec{N} \cdot 2\mathbf{L} \cdot \vec{T}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{N}} \sqrt{\vec{T} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{T}}}$$

Or $\sqrt{\vec{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{N}} = \varepsilon_{NN} + 1$ et $\sqrt{\vec{T} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{T}} = \varepsilon_{TT} + 1$, et donc en transformations infinitésimales sachant que $\varepsilon_{NN} = \vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N}$, $\varepsilon_{TT} = \vec{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T}$ et $\mathbf{L} = \boldsymbol{\varepsilon}$, on obtient :

$$\sin(\gamma_{NT}) = \frac{\vec{N} \cdot 2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T}}{(\vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N} + 1)(\vec{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T} + 1)}$$

En faisant un développement limité au voisinage de 0, on obtient :

$$\sin(\gamma_{NT}) = \vec{N} \cdot 2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T} \left[1 - \vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{N} + O(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2) \right] \left[1 - \vec{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T} + O(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2) \right] = \vec{N} \cdot 2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T} + O(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)$$

Donc $\sin(\gamma_{NT})$ est un terme d'ordre 1 en $\boldsymbol{\varepsilon}$. Et comme $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$, on alors :

$$\boxed{\gamma_{NT} = \vec{N} \cdot 2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T}}$$

et

$$\boxed{\varepsilon_{NT} = \frac{1}{2} \gamma_{NT} = \vec{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{T}} : \text{demi distorsion}$$

Remarque

Sachant que $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$, on a :

$$\begin{cases} \varepsilon_{e_1 e_1} = \vec{e}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{e}_1 = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{e_2 e_2} = \vec{e}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{e}_2 = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{e_3 e_3} = \vec{e}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{e}_3 = \varepsilon_{33} \end{cases}$$

Alors, ε_{11} , ε_{22} , et ε_{33} représentent les dilatations dans les directions \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , et \vec{e}_3 respectivement.

D'autre part :

$$\begin{cases} \varepsilon_{e_1 e_2} = \vec{e}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{e}_2 = \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{e_1 e_3} = \vec{e}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{e}_3 = \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{e_2 e_3} = \vec{e}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{e}_3 = \varepsilon_{23} \end{cases}$$

Alors les termes ε_{12} , ε_{13} , et ε_{23} représentent les demi distorsions entre les directions deux à deux perpendiculaires du repère $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

3.6. Variation de volume :dilatation volumique dans le cas des transformations infinitésimales :

On a $\mathbf{F} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}$ et $J = \frac{dv}{dV} = \det \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} 1 + H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & 1 + H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & 1 + H_{33} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} J &= (1 + H_{11}) \begin{vmatrix} 1 + H_{22} & H_{23} \\ H_{32} & 1 + H_{33} \end{vmatrix} - H_{12} \begin{vmatrix} H_{21} & H_{23} \\ H_{31} & 1 + H_{33} \end{vmatrix} + H_{13} \begin{vmatrix} H_{21} & 1 + H_{22} \\ H_{31} & H_{32} \end{vmatrix} \\ &= (1 + H_{11})(1 + H_{22} + H_{33} + O(\|\mathbf{H}\|^2)) - H_{12}O(\|\mathbf{H}\|^2) + H_{13}O(\|\mathbf{H}\|^2) \\ &= 1 + H_{11} + H_{22} + H_{33} + O(\|\mathbf{H}\|^2) \end{aligned}$$

Or $H_{11} = \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$; $H_{22} = \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$; $H_{33} = \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$

D'où :

$$J = 1 + \text{tr}(\mathbf{H}) = 1 + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 1 + \text{div}(\mathbf{u})$$

et par conséquent la dilation volumique devient :

$$\boxed{\theta_v = J - 1 = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \text{div}(\mathbf{u})}$$

3.7. Déviateur des déformations

L'objectif est de décomposer la déformation en :

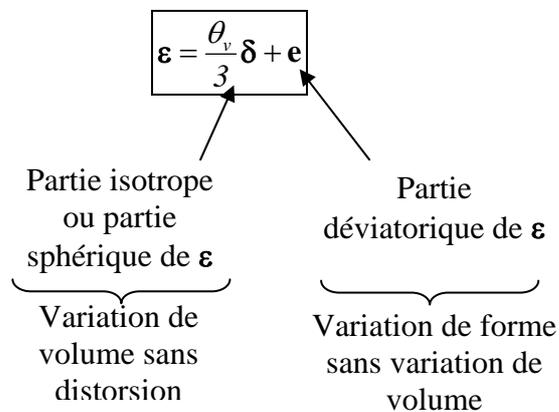
- une déformation avec variation de volume sans distorsion
- une déformation sans variation de volume (à volume constant avec distorsion).

3.7.1. Définition :

On appelle déviateur des déformations le tenseur symétrique du 2nd ordre défini par :

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\theta_v}{3} \boldsymbol{\delta}$$

On a alors :



3.7.2. Significations physiques

$$\frac{\theta_v}{3} \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \frac{\theta_v}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\theta_v}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\theta_v}{3} \end{bmatrix}$$

est un tenseur isotrope qui ne dépend pas du repère orthonormé direct

de référence. Alors toutes les directions de l'espace sont des directions principales de ce tenseur.

Les dilatations ε_{nn}^* dans chacune des directions de l'espace sont égales entre elles et valent :

$$\varepsilon_{nn}^* = \vec{n} \cdot \frac{\theta_v}{3} \boldsymbol{\delta} \cdot \vec{n} = \frac{\theta_v}{3} \vec{n} \cdot \boldsymbol{\delta} \cdot \vec{n} = \frac{\theta_v}{3} \|\vec{n}\|^2 = \frac{\theta_v}{3}$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire dans une direction quelconque mais fixée.

La transformée d'une sphère matérielle élémentaire est donc une sphère (d'où partie sphérique).

A la partie isotrope de $\boldsymbol{\varepsilon}$ (c'est-à-dire au tenseur $\frac{\theta_v}{3} \boldsymbol{\delta}$) est associé un changement de volume sans changement de forme : $tr(\frac{\theta_v}{3} \boldsymbol{\delta}) = tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = \theta_v$.

A la partie déviatorique de $\boldsymbol{\varepsilon}$ (c'est-à-dire au tenseur \mathbf{e}) est associé un changement de forme sans changement de volume : $tr(\mathbf{e}) = 0$.

\mathbf{e} et $\boldsymbol{\varepsilon}$ ont les mêmes directions principales.

3.8. Déformations planes (représentation géométrique)

3.8.1. Définition

Soit \mathbf{u} le champ des déplacements du milieu \mathcal{M} .

\mathcal{M} est soumis à un état de déformation plane s'il existe un repère orthonormé direct dans lequel on puisse écrire :

$$\mathbf{u} \begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2, t) \\ u_2 = u_2(x_1, x_2, t) \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ce repère. La transformation étant supposée infinitésimale, le tenseur des petites déformations au point P_t au temps t s'écrira relativement à ce repère comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{tenseur des déformations planes.}$$

Remarque

La déformation se passe dans les plans de vecteur normal \vec{e}_3 .

3.8.2. Représentation géométrique du tenseur des déformations planes

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormé direct dans lequel le tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ au point P_t au temps t s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soient : \vec{i}_1 et \vec{i}_2 les directions principales de ce tenseur
 ε_I et ε_{II} les valeurs propres associées.

Par convention, on prend \vec{i}_2 est directement orthogonal à \vec{i}_1 et $\varepsilon_I \geq \varepsilon_{II}$.

Compte tenu de la forme de $\boldsymbol{\varepsilon}$ au point P_t , on peut dire que les déformations au point P_t se passent dans le plan $(P_t, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soient :

\vec{n} : un vecteur unitaire de ce plan quelconque mais fixé.

\vec{t} : le vecteur unitaire directement orthogonal à \vec{n} .

ε_{nn} : la dilatation au point P_t dans la direction \vec{n} .

ε_{nt} : la demi distorsion au point P_t entre les directions \vec{n} et \vec{t} .

L'idée est de caractériser l'état de déformation plane au point P_t au temps t par le vecteur :

$$\overrightarrow{P_t M_n} = \varepsilon_{nn} \vec{n} + \varepsilon_{nt} \vec{t}$$

Remarque

L'état de déformation autour de P_t sera entièrement caractérisé lorsque le vecteur \vec{n} décrit l'ensemble des directions du plan de déformation (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , c'est-à-dire que le vecteur \vec{n} tourne de 2π autour de P_t dans (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .

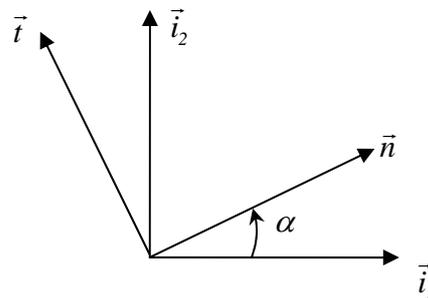
La question posée est la suivante : quand \vec{n} tourne de 2π autour de P_t dans le plan de déformations, que fait le point M_n ?

Les positions du point M_n peuvent être exprimées dans le repère tournant (P_t, \vec{n}, \vec{t}) où M_n a pour coordonnées $(\varepsilon_{nn}, \varepsilon_{nt})$.

Dans le repère des directions principales de déformation $(P_t, \vec{i}_1, \vec{i}_2)$ on a :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} \end{bmatrix}$$

Soit α l'angle que fait \vec{n} avec \vec{i}_1 .



Dans $(P_t, \vec{i}_1, \vec{i}_2)$ on a : $\vec{n} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ et $\vec{t} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$. D'où :

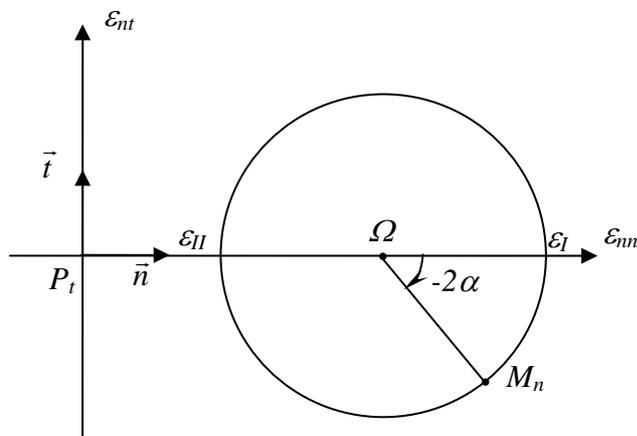
$$\begin{cases} \varepsilon_{nn} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{n} = \varepsilon_I \cos^2 \alpha + \varepsilon_{II} \sin^2 \alpha \\ \varepsilon_{nt} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{t} = -\varepsilon_I \cos \alpha \sin \alpha + \varepsilon_{II} \cos \alpha \sin \alpha \end{cases}$$

ε_{nn} et ε_{nt} sont des grandeurs scalaires indépendantes du repère dans lequel on les exprime.

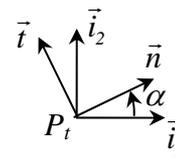
Les deux dernières expressions peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon_{nn} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{n} = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} + \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \cos(-2\alpha) \\ \varepsilon_{nt} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{t} = \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \sin(-2\alpha) \end{cases}$$

Lorsque \vec{n} décrit l'ensemble des directions du plan de déformation autour de P_t , soit lorsque \vec{n} tourne de 2π , on voit que relativement au repère tournant (P_t, \vec{n}, \vec{t}) , M_n décrit un cercle de centre $\Omega(\frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2}, 0)$ et de rayon $R = \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2}$ appelé cercle de Mohr.



Plan de Mohr



Plan Physique

Selon les expressions de ε_{nn} et ε_{nt} , quand \vec{n} tourne d'un angle α autour de P_t dans le plan physique, M_n tourne de -2α autour de Ω dans le plan de Mohr.

Remarque

Si $\alpha = 0$, $\vec{n} = \vec{i}_1$, $\vec{t} = \vec{i}_2$, $\varepsilon_{nn} = \varepsilon_I$ et $\varepsilon_{nt} = 0$: pas de distorsion pour les directions principales.

Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\varepsilon_{nn} = \frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2}$ et $\varepsilon_{nt} = \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2}$: distorsion maximale.

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\vec{n} = \vec{i}_2$, $\vec{t} = -\vec{i}_1$, $\varepsilon_{nn} = \varepsilon_{II}$ et $\varepsilon_{nt} = 0$: pas de distorsion pour les directions principales.

CHAPITRE 4 : LES CONTRAINTES

Avant : En cours de mécanique générale, pour un solide indéformable, nous considérons :

- Les actions mécaniques extérieures appliquées,
- Les déplacements,
- L'outil mathématique : champ vectoriel.

Maintenant : En mécanique des milieux continus, pour les milieux déformables, nous considérons :

- Les actions mécaniques extérieures appliquées,
- Les actions mécaniques intérieures (contraintes),
- Les déplacements,
- Les déformations,
- L'outil mathématique : champ tensoriel.

grandeurs physiques qui leurs étaient attachées étaient représentées par des

- Les corps sont supposés déformables sous l'action de charges externes.
- Les grandeurs physiques étudiées sont représentées par des fonctions tensorielles.

Remarques

- Si les déformations sont observables et mesurables directement (principe des jauges d'extensométrie), les contraintes ne sont généralement pas observables (effort internes).
- Les déformations et contraintes sont reliées par la loi de comportement du matériau considéré (rhéologie). On parle à titre d'exemple de loi élastique, loi élastoplastique, loi visqueuse, ...
- La notion de contrainte est très importantes pour le dimensionnement des ouvrages : si les contraintes sont trop élevées au sein d'un solide, il y'a destruction de la cohésion internes entre particules et donc rupture.

1. Actions mécaniques sur un milieu continu et tenseur des contraintes

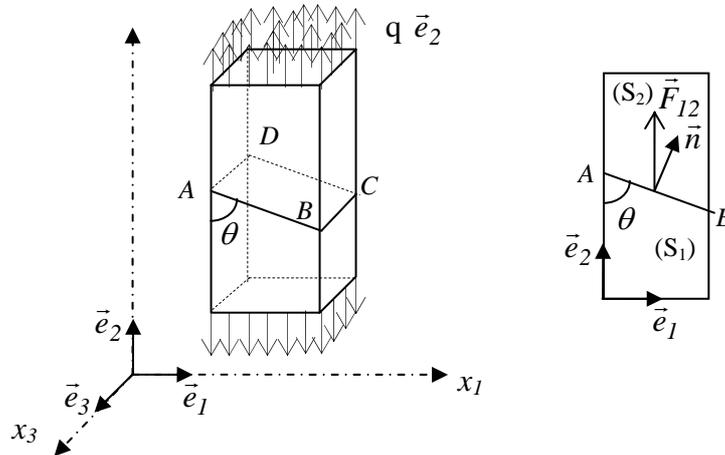
Définition

On appelle actions mécaniques toutes actions qui se caractérisent par des forces ou des couples, ou bien par des densité linéiques, surfaciques, volumiques ou massiques de force, par

opposition aux actions non mécaniques liées à l'existence de flux (chaleur par exemple) ou de source (réaction chimique par exemple).

On distingue parmi les actions mécaniques : les actions du milieu extérieur et les actions intérieures.

Exemple



On considère une poutre (S) soumise à un essai de traction. $q \vec{e}_2$ et $-q \vec{e}_2$ sont deux forces surfaciques extérieures agissant sur les bases de l'éprouvette (S).

Séparons (S) en deux parties (S₁) et (S₂) par un plan virtuel (ABCD). Si (S) est en équilibre, alors (S₁) et (S₂) le sont aussi.

Les forces agissantes sur (S₁) sont $-q \vec{e}_2$ et une autre force exercée par (S₂) dont la résultante est \vec{F}_{12} .

\vec{F}_{12} est une force extérieure pour (S₁) et c'est une force intérieures pour (S).

1.1. Les actions du milieu extérieur

Ces action sont de deux types : les actions de contact et les actions à distances.

1.1.1. Les actions de contact

Elles s'exercent sur la surface extérieure du milieu sous la forme d'une densité surfacique de force \vec{q} . Sur un élément de surface dS s'exerce une force élémentaire :

$$d\vec{f} = \vec{q} dS$$

Exemple

- L'eau sur le parement d'un barrage.
- Le vent sur la voile d'un bateau.

1.1.2. Les actions à distance

Elles se caractérisent sur chaque particule (dm , dv) par une action proportionnelle à la masse de la particule considérée. Sur une particule s'exerce une force élémentaire :

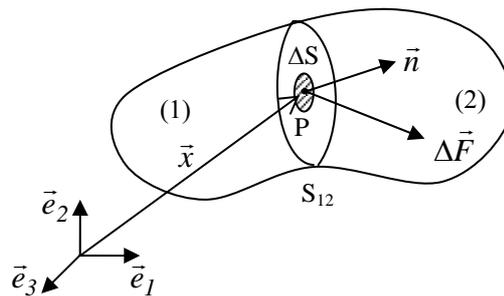
$$d\vec{f}' = \vec{F} dm = \vec{F} \rho dv$$

Exemple

- Force de pesanteur : $\vec{F} = \vec{g}$.
- Forces électromagnétiques.

1.2. Les actions mécaniques intérieures : notion de vecteur de contraintes

Ce sont les actions du milieu sur lui-même. Pour les définir autour d'un point $P(\vec{x}, t)$, il convient de couper le milieu \mathcal{M} en deux parties (1) et (2) par une surface arbitraire S_{12} passant par P .



Considérons une facette élémentaire ΔS de l'interface fictive S_{12} , de normale unitaire \vec{n} . Soit $\Delta\vec{F}$ la force qu'exerce sur cette facette par les particules situées du côté de \vec{n} (c'est-à-dire du côté (2)) et au contact de cette facette. On définit le vecteur contrainte au point P et correspondant au à la direction \vec{n} et à l'instant t par :

$$\vec{\sigma}(\vec{n}, P, t) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}(\vec{n}, P, t)}{dS}$$

Si l'espace physique est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ direct, P peut être remplacé par le vecteur position \vec{x} .

Le vecteur contrainte $\vec{\sigma}$ ou $\vec{\sigma}_n$ est une fonction de la position, du temps, de l'orientation de la facette élémentaire donnée par le vecteur unitaire \vec{n} , et du sens de \vec{n} .

Remarque :

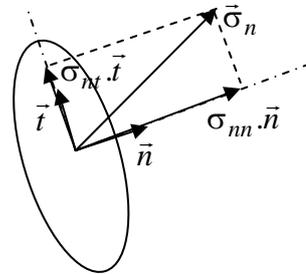
- (i) L'action de (1) sur dS est $d\vec{F}(\vec{n}, \vec{x}, t)$ et l'action of (2) sur dS est $d\vec{F}(-\vec{n}, \vec{x}, t)$.
L'équilibre de dS implique que :

$$d\vec{F}(\vec{n}, \vec{x}, t) + d\vec{F}(-\vec{n}, \vec{x}, t) = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \vec{\sigma}(-\vec{n}, P, t) = -\vec{\sigma}(\vec{n}, P, t)$$

- (ii) Le vecteur contrainte peut être décomposé en une composante normale et une composante tangentielle à la facette :

$$\vec{\sigma}_n = \sigma_{nn} \cdot \vec{n} + \sigma_{nt} \cdot \vec{t}$$



En mécanique des milieux continus :

Si $\sigma_{nn} > 0$: contrainte normale de traction

If $\sigma_{nn} < 0$: contrainte normale de compression.

σ_{nt} est généralement positive. En contrainte plane, elle peut être affectée d'un signe.

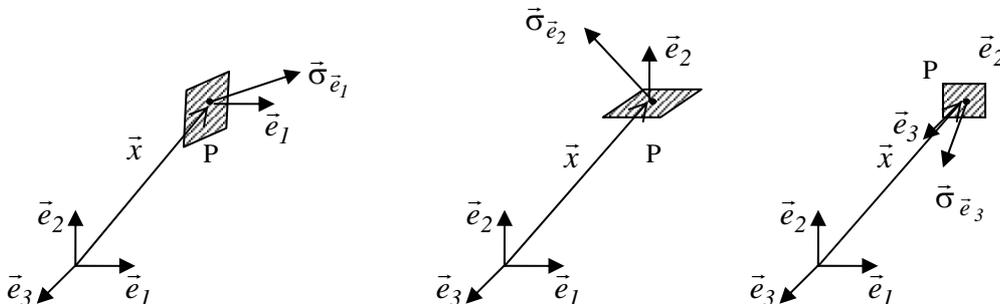
- (iii) En un point matériel P , il passe une infinité de surface élémentaire dS_n , donc il existe une infinité de vecteur contrainte. Pour décrire l'état de contrainte en un point, la notion de vecteur contrainte est insuffisante. Il faut introduire le tenseur des contraintes.

1.3. Tenseur des contraintes de Cauchy

1.3.1. Définition

Définition :

Considérons un point arbitraire P du milieu \mathcal{M} et rappelons la définition du vecteur contrainte correspondant aux facettes de normal extérieur \vec{e}_1 , \vec{e}_2 and \vec{e}_3 . Ces vecteurs contraintes sont respectivement $\vec{\sigma}_{\vec{e}_1}$, $\vec{\sigma}_{\vec{e}_2}$ and $\vec{\sigma}_{\vec{e}_3}$.



$$\vec{\sigma}_{\vec{e}_1} = \vec{\sigma}(\vec{e}_1, \vec{x}, t); \vec{\sigma}_{\vec{e}_2} = \vec{\sigma}(\vec{e}_2, \vec{x}, t); \vec{\sigma}_{\vec{e}_3} = \vec{\sigma}(\vec{e}_3, \vec{x}, t).$$

Notons σ_{ij} les composantes du vecteur contrainte $\vec{\sigma}_{\vec{e}_j}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

$$\vec{\sigma}_{\vec{e}_j} = \sigma_{ij} \vec{e}_i$$

$$(\vec{\sigma}_{\vec{e}_j} = \sigma_{1j} \vec{e}_1 + \sigma_{2j} \vec{e}_2 + \sigma_{3j} \vec{e}_3)$$

Les neuf composantes de ces trios vecteurs contraintes sont les composantes du tenseur du second ordre nommé tenseur des contraintes de Cauchy $\vec{\sigma}(\vec{x}, t)$:

$$\vec{\sigma}(\vec{x}, t) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

\uparrow
 $\vec{\sigma}_{\vec{e}_1}$
 Composantes de

\uparrow
 $\vec{\sigma}_{\vec{e}_2}$
 Composantes de

\uparrow
 $\vec{\sigma}_{\vec{e}_3}$
 Composantes de

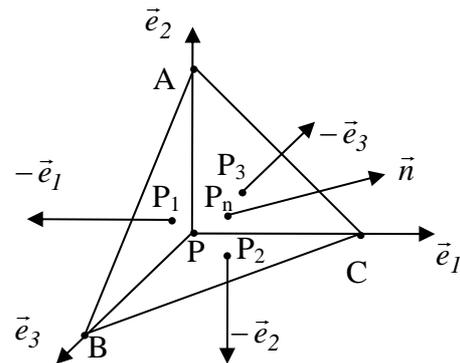
Les composantes perpendiculaires aux facettes, $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})$, sont les contraintes normales. Les composantes contenues dans les facettes, $(\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32})$ sont les contraintes tangentielles.

1.3.2. Relation entre vecteur contrainte et tenseur des contraintes

Remarquons que : $\vec{\sigma}_{\vec{e}_j} = \sigma \vec{e}_j$.

Cette relation entre le tenseur des contraintes σ et le vecteur des contraintes $\vec{\sigma}_{\vec{e}_j}$ au point P peut être généralisée pour tout vecteur unitaire \vec{n} en considérant un volume élémentaire constitué d'un tétraèdre de sommet P .

La base de ce tétraèdre est de normal extérieure \vec{n} et ses trois autres faces sont de normal extérieure $-\vec{e}_1$, $-\vec{e}_2$ et $-\vec{e}_3$ comme le montre la figure.



Les forces agissant sur le tétraèdre sont :

- Les forces à distance \vec{b}
- Les vecteurs contraintes sur les surfaces (APB), (BPC), (APC) and (ABC).

Le vecteur contraintes agissant sur (ABC) est $\vec{\sigma}_n = \sigma_{n1} \vec{e}_1 + \sigma_{n2} \vec{e}_2 + \sigma_{n3} \vec{e}_3$.

Le vecteur contraintes agissant sur (APB) est $\vec{\sigma}_{-\vec{e}_1} = -\vec{\sigma}_{\vec{e}_1} = -\sigma_{11} \vec{e}_1 - \sigma_{21} \vec{e}_2 - \sigma_{31} \vec{e}_3$.

Le vecteur contraintes agissant sur (BPC) est $\vec{\sigma}_{-\vec{e}_2} = -\vec{\sigma}_{\vec{e}_2} = -\sigma_{12}\vec{e}_1 - \sigma_{22}\vec{e}_2 - \sigma_{32}\vec{e}_3$.

Le vecteur contraintes agissant sur (APC) est $\vec{\sigma}_{-\vec{e}_3} = -\vec{\sigma}_{\vec{e}_3} = -\sigma_{13}\vec{e}_1 - \sigma_{23}\vec{e}_2 - \sigma_{33}\vec{e}_3$.

Les aires des surfaces sont :

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= d\Sigma \\ S_{APB} &= d\Sigma \vec{n} \cdot \vec{e}_1 = d\Sigma n_1. \\ S_{BPC} &= d\Sigma \vec{n} \cdot \vec{e}_2 = d\Sigma n_2. \\ S_{APC} &= d\Sigma \vec{n} \cdot \vec{e}_3 = d\Sigma n_3. \end{aligned}$$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique sur le tétraèdre, on obtient :

$$\vec{\sigma}_n S_{ABC} + \sigma_{-\vec{e}_1} S_{APB} + \sigma_{-\vec{e}_2} S_{BPC} + \sigma_{-\vec{e}_3} S_{APC} + \rho dv \vec{b} = \rho dv \vec{\gamma}$$

$$dv = \frac{1}{3} h d\Sigma ; h = d(P, (ABC))$$

D'où,

$$(\sigma_{n_1} - \sigma_{1j}n_j)\vec{e}_1 + (\sigma_{n_2} - \sigma_{2j}n_j)\vec{e}_2 + (\sigma_{n_3} - \sigma_{3j}n_j)\vec{e}_3 = \rho h (\vec{\gamma} - \vec{b})$$

Lorsque le tétraèdre tend vers P , h tend vers 0 et on obtient :

$$\sigma_{n_i} = \sigma_{ij}n_j$$

or

$$\boxed{\vec{\sigma}_n = \sigma \vec{n}}$$

1.3.3. Symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy

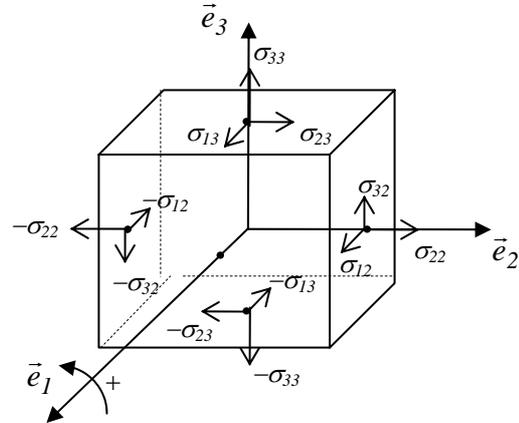
Considérons un volume parallélépipédique centré sur P de dimensions dx_1 , dx_2 et dx_3 .

Les composantes de l'effort qui s'exerce sur la facette de normal \vec{e}_2 sont $\sigma_{12} dx_1 dx_3$, $\sigma_{22} dx_1 dx_3$ and $\sigma_{32} dx_1 dx_3$.

Les composantes de l'effort qui s'exerce sur la facette de normal $-\vec{e}_2$ sont $-\sigma_{12} dx_1 dx_3$, $-\sigma_{22} dx_1 dx_3$ et $-\sigma_{32} dx_1 dx_3$.

Les composantes de l'effort qui s'exerce sur la facette de normal \vec{e}_3 sont $\sigma_{13} dx_1 dx_2$, $\sigma_{23} dx_1 dx_2$ and $\sigma_{33} dx_1 dx_2$.

Les composantes de l'effort qui s'exerce sur la facette de normal $-\vec{e}_3$ sont $-\sigma_{13} dx_1 dx_2$, $-\sigma_{23} dx_1 dx_2$ and $-\sigma_{33} dx_1 dx_2$.



Considérons le principe fondamental de la dynamique pour la rotation autour de l'axe x_1 :

$$\sum m_{/x_1} = I_{/x_1} \theta_1''$$

Somme des moments des forces par rapport à x_1
Moment d'inertie par rapport à x_1
Accélération angulaire par rapport x_1

$$\sum m_{/x_1} = 2\sigma_{32} dx_1 dx_3 \frac{dx_1}{2} - 2\sigma_{23} dx_1 dx_2 \frac{dx_3}{2} = (\sigma_{32} - \sigma_{23}) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$I_{/x_1} = \int_V \rho (x_2^2 + x_3^2) dV = \int_{\frac{dx_1}{2}}^{\frac{dx_1}{2}} \int_{\frac{dx_2}{2}}^{\frac{dx_2}{2}} \int_{\frac{dx_3}{2}}^{\frac{dx_3}{2}} \rho (x_2^2 + x_3^2) dV$$

$$= \frac{\rho}{12} [(dx_2)^2 + (dx_3)^2] dx_1 dx_2 dx_3$$

Donc

$$\sigma_{32} - \sigma_{23} = \frac{\rho}{12} [(dx_2)^2 + (dx_3)^2] \theta_1''$$

Lorsque le volume élémentaire tend vers le point P , dx_2 et dx_3 tendent vers 0 et donc $\sigma_{32} = \sigma_{23}$.

En considérant les rotations par rapport à x_2 et x_3 , on montre que $\sigma_{31} = \sigma_{13}$ et $\sigma_{12} = \sigma_{21}$.

Le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

or

$$\boxed{{}^t\sigma = \sigma}$$

2. Propriétés du tenseur des contraintes de Cauchy

2.1. Théorème de Cauchy

Soit \vec{n} et \vec{n}' deux vecteurs unitaires. Considérons les vecteurs contraintes en un point P agissant sur les facettes de normal \vec{n} et \vec{n}' . Nous avons :

$$\vec{\sigma}_n = \sigma \vec{n}$$

$$\vec{\sigma}_{n'} = \sigma \vec{n}'$$

$$\vec{\sigma}_n \cdot \vec{n}' = \vec{n}' \cdot (\sigma \vec{n}) = {}^t\vec{n}' \cdot \sigma \vec{n} = {}^t\vec{n}' \cdot {}^t\sigma \vec{n} = {}^t(\vec{n}' \cdot {}^t\sigma \vec{n}) = {}^t\vec{n} \cdot \sigma \vec{n}' = \vec{n} \cdot (\sigma \vec{n}') = \vec{\sigma}_{n'} \cdot \vec{n}$$

On peut écrire que :

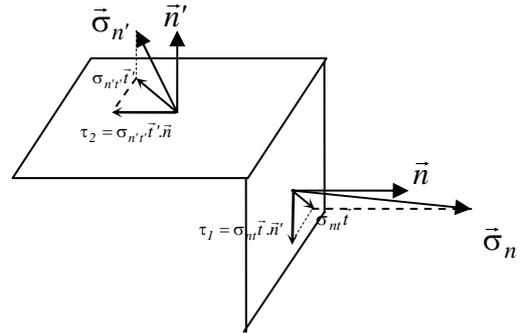
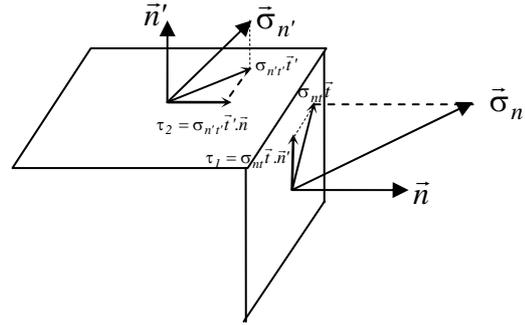
$$\vec{\sigma}_n \cdot \vec{n}' = \vec{\sigma}_{n'} \cdot \vec{n} \quad \forall \vec{n} \text{ et } \forall \vec{n}'$$

ou
$$\begin{cases} \vec{\sigma}_n = \sigma_{nn} \vec{n} + \sigma_{nt} \vec{t} \\ \vec{\sigma}_{n'} = \sigma_{n'n'} \vec{n}' + \sigma_{n't'} \vec{t}' \end{cases}$$

Si $\vec{n} \perp \vec{n}'$ alors

$$\sigma_{nt} \vec{t} \cdot \vec{n}' = \sigma_{n't'} \vec{t}' \cdot \vec{n} \quad \forall \vec{n} \text{ et } \forall \vec{n}' \perp \vec{n}$$

Le théorème de Cauchy énonce que sur deux facettes quelconques orthogonale, les composantes des contraintes tangentielles normales à l'arête commune aux deux facettes sont égales en module ($\tau_1 = \tau_2$) et simultanément convergent ou s'écartent de l'arête.



2.2.Direction principales de contraintes et contraintes principales

Pour un point P où les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy sont σ_{ij} , on associe pour chaque direction \vec{n} le vecteur contrainte $\vec{\sigma}_n$:

$$\vec{\sigma}_n = \sigma \vec{n}$$

Les directions pour lesquelles $\vec{\sigma}_n$ et \vec{n} sont colinéaire sont appelée direction principale de contraintes. Pour une direction principale de contrainte :

$$\vec{\sigma}_n = \lambda \vec{n}$$

où λ , la magnitude du vecteur de contrainte, est appelée contrainte principale.

En notation indicielle, la dernière équation peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} n_j &= \lambda \delta_{ij} n_j \\ (\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j &= 0 \text{ ou } (\sigma - \lambda \delta) \cdot \vec{n} = \vec{0} \end{aligned}$$

Les solutions de cette équations autre que la solution trivial $\vec{n} = \vec{0}$, s'obtiennent en annulant le déterminant $|\sigma - \lambda \delta|$. Soit :

$$\det(\sigma - \lambda I) = 0 \text{ or } \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Le développement de cette expression donne le polynôme de degré 3 en λ :

$$\lambda^3 - I_1^* \lambda^2 + I_2^* \lambda - I_3^* = 0$$

où :

$$I_1^* = \text{tr}(\sigma) = \sigma_{ii} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$I_2^* = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}) = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I$$

$$I_3^* = \det(\sigma) = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III}$$

I_1^*, I_2^* et I_3^* sont des invariants de contraintes. σ_I, σ_{II} et σ_{III} , qui sont les racines du polynôme, sont les contraintes principales.

On associe à chaque contrainte principale (σ_I, σ_{II} et σ_{III}), une direction principale de contrainte (\vec{j}_1, \vec{j}_2 et \vec{j}_3 respectivement), solutions des équations:

$$\begin{cases} (\sigma - \sigma_I I) \cdot \vec{j}_1 = \vec{0} \\ (\sigma - \sigma_{II} I) \cdot \vec{j}_2 = \vec{0} \\ (\sigma - \sigma_{III} I) \cdot \vec{j}_3 = \vec{0} \end{cases}$$

Comme le tenseur des contraintes est réel et symétrique, les contraintes principales sont des valeurs réelles. Dans le repère des directions principales de contraintes, la matrice représentative du tenseur des contraintes est diagonale :

$$\sigma_{(\mathfrak{R}_D)} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{R}_D = (\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$$

2.3. Déviateur des contraintes

Soit σ_m la contrainte moyenne: $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma)$

Le tenseur des contraintes peut se décomposer en une somme de deux tenseurs, un représente la partie sphérique ou isotrope de l'état des contraintes dans lequel toute contrainte

normale est égale à σ_m et toute contrainte tangentielle est égal à zéro, et l'autre est appelé partie déviatorique ou déviateur du tenseur des contraintes noté s :

$$s = \sigma - \sigma_m \delta \quad ; \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$$

Les directions principales du déviateur des contraintes sont les mêmes que celles du tenseur des contraintes :

$$\sigma_{(\mathfrak{R}_D)} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad s_{(\mathfrak{R}_D)} = \begin{bmatrix} \sigma_I - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} - \sigma_m \end{bmatrix}$$

2.4. Invariants des contraintes

Dans § 2.2, nous avons introduits trois invariants des contraintes I_1^*, I_2^* et I_3^* . Nous introduisons ici trois autres invariants des contraintes qui sont plus utile pour décrire les lois de comportement et plus particulièrement les critères de limite élastique.

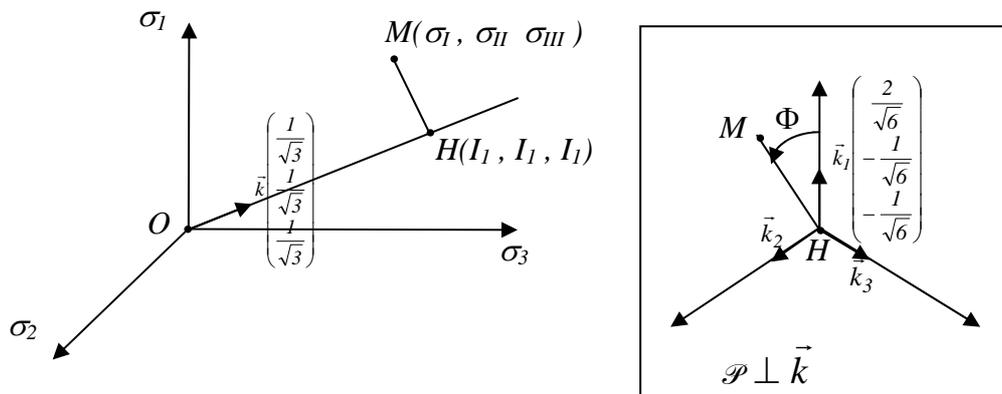
Le premier invariant, noté I_1 , est la contrainte moyenne σ_m .

$$I_1 = \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma)$$

The deuxième et le troisième invariant, notés J_2 et J_3 , sont issus du déviateur des contraintes :

$$\begin{cases} J_2 = \text{tr}(s^2) \\ J_3 = \text{tr}(s^3) = 3 \det(s) \end{cases}$$

Ces invariants peuvent être représentés géométriquement dans l'espace des contraintes principales:



$$OH = \sqrt{3} I_1$$

$$HM = \sqrt{J_2}$$

$$\cos(3\Phi) = \frac{\sqrt{6} J_3}{J_2^{3/2}}$$

3. Etat de contraintes planes – représentation géométrique

Un état de contrainte en un point est dit plane si l'on trouve une facette sur laquelle ne s'exerce aucune contrainte, alors cette facette est nécessairement principale (pas de contraintes tangentielles). En prenant la normale à cette facette pour axe $P x_3$, le tenseur σ s'écrit :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit \vec{j}_1 et \vec{j}_2 les directions principales des contraintes du plan des contraintes, et σ_I et σ_{II} les contraintes principales associées respectivement. On peut faire le choix suivant :

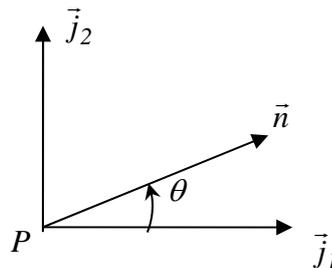
$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \text{ et } \vec{j}_2 \text{ directement orthogonal à } \vec{j}_1$$

Soit \vec{n} un vecteur unitaire. Nous cherchons une représentation géométrique de l'évolution du vecteur de contrainte $\vec{\sigma}_n$ lorsque \vec{n} décrit toutes les directions du plan des contraintes. Pour cela, on cherche le lieu géométrique du point M tel que :

$$\overrightarrow{PM} = \vec{\sigma}_n = \sigma_{nn} \cdot \vec{n} + \sigma_{nt} \cdot \vec{t}$$

où \vec{t} est le vecteur directement orthogonal à \vec{n} .

Soit θ l'angle que fait \vec{n} avec la première direction principale de contraintes between the first principal direction and : $\theta = (\vec{j}_1, \vec{n})$.



Nous avons alors dans le repère orthonormé direct $(P, \vec{j}_1, \vec{j}_2)$:

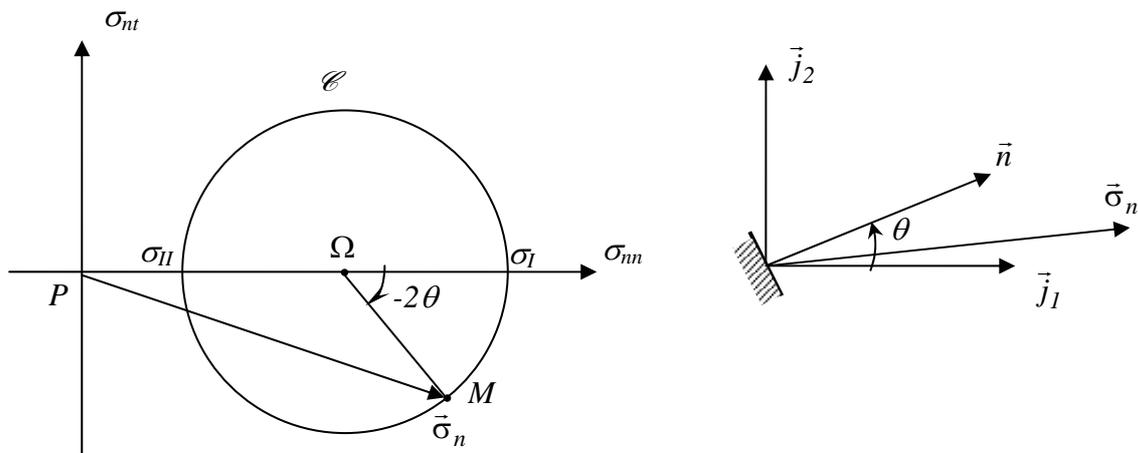
$$\vec{n} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \text{ and } \vec{t} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ et } \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 \\ 0 & \sigma_{II} \end{bmatrix}.$$

Alors :

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot (\sigma \cdot \vec{n}) = \sigma_I \cos^2(\theta) + \sigma_{II} \sin^2(\theta) \\ \sigma_{nt} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{t} = \vec{t} \cdot (\sigma \cdot \vec{n}) = -\sigma_I \cos(\theta) \sin(\theta) + \sigma_{II} \sin(\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

$$\text{ou encore } \begin{cases} \sigma_{nn} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cos(-2\theta) \\ \sigma_{nt} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin(-2\theta) \end{cases}$$

Lorsque \vec{n} décrit toutes les directions du plan, le point $M(\sigma_{nn}, \sigma_{nt})$ décrit dans le repère tournant (P, \vec{n}, \vec{t}) un cercle appelé cercle de Mohr \mathcal{C} de centre $\Omega(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}, 0)$, et rayon $\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$.



Lorsque \vec{n} tourne d'un angle θ dans le plan physique, le point M tourne d'un angle -2θ sur le cercle de Mohr.

4. Equations d'équilibre

On considère ici un milieu continu \mathcal{M} en équilibre statique. Soit m une masse de ce milieu occupant un volume V limitée par la surface S . Les efforts agissants sur cette masse sont les forces de contact induites par le tenseur des contraintes σ et les forces à distance par unité de masse représentées par le vecteur \vec{b} . L'équilibre de cette masse s'exprime ainsi :

$$\int_S \vec{\sigma} d\vec{S} + \int_V \rho \vec{b} dV = \vec{0}$$

ou en coordonnées cartésiennes par :

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_V \rho b_i dV = 0, \quad i \in \{1,2,3\}$$

L'intégrale de surface peut se transformer en intégrale de volume en utilisant le théorème de la divergence (théorème d'Ostrogradski) et l'équilibre prend la forme suivante :

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) dV = 0, \quad i \in \{1,2,3\}$$

pour un volume arbitraire V . Par conséquent, en tout point du milieu \mathcal{M} , on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0, \quad i \in \{1,2,3\}$$

qui expriment les équations indéfinies de l'équilibre.

La forme générale de ces équations d'équilibre est :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \vec{b} = \vec{0}$$

TD1 : Eléments de calcul tensoriel

Exercice 1

Donner la signification des symboles des tenseurs cartésiens suivant :

$$A_{ii} \quad ; \quad B_{ijj} \quad ; \quad R_{ij} \quad ; \quad a_i T_{ij} \quad ; \quad a_i b_j \delta_{ij}$$

Exercice 2

Evaluer les expressions suivantes :

a- δ_{ii}

b- $\delta_{ij} \delta_{ij}$

c- $\delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} \quad (i,j,k) \in \{1,2,3\}^3$

d- $\delta_{ij} \delta_{jk}$

e- $\delta_{ij} A_{jk}$

Exercice 3

Montrer que :

a- $\epsilon_{ijk} \epsilon_{kij} = 6$

b- $\epsilon_{ijk} a_i a_k = 0$

Exercice 4

Déterminer les composantes f_2 du tenseur d'ordre 1 sur \mathbb{R}^3 dont l'expression est donnée par :

a- $f_i = \epsilon_{ijk} T_{jk}$

b- $f_i = C_{ij} b_j - C_{ji} b_j$

Exercice 5

Développer puis simplifier où c'est possible l'expression $D_{ij} x_i x_j$ pour:

a- $D_{ij} = D_{ji}$

b- $D_{ij} = -D_{ji}$

Exercice 6

Montrer que le tenseur $B_{ik} = \epsilon_{ijk} a_j$ est antisymétrique.

TD2 : Cinématique des Milieux Continues

Exercice 1

Déterminer pour chacune des transformations linéaires planes décrites par la figure 1 :

- 1- Les expressions de la transformation \mathcal{F} .
- 2- Le gradient de la transformation \mathbf{F} .
- 3- Le *Jacobien* de la transformation et dire si la transformation est isochore, avec augmentation de volume ou avec diminution de volume.
- 4- Le champ des déplacements \mathbf{u}
- 5- Le gradient du champ des déplacements \mathbf{H} .

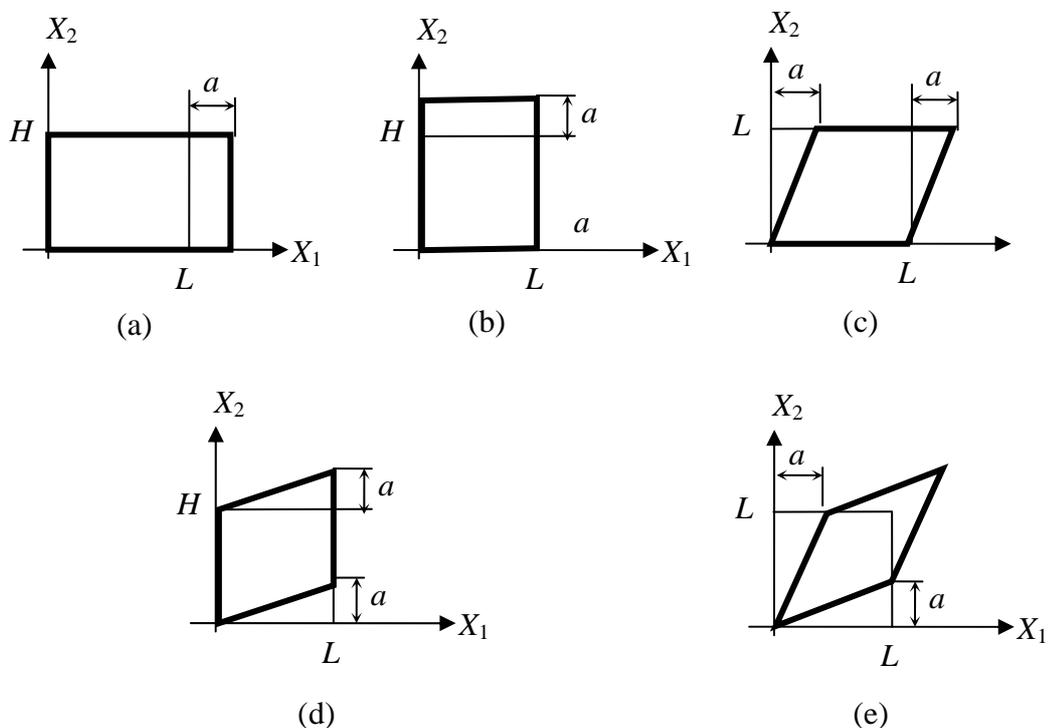
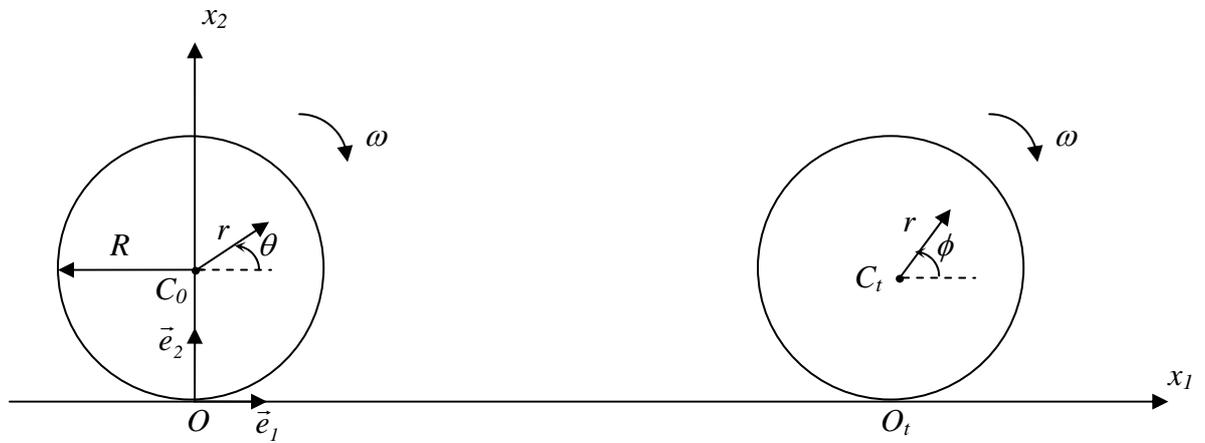


Figure 1 : Transformations linéaires planes

Exercice 2

Un disque rigide roule sans glisser selon l'axe (Ox_1) comme l'indique la figure 2.



- 1- En adoptant un point de vue lagrangien, déterminer la position, la vitesse et l'accélération d'une particule du disque.
- 2- Déterminer les champs des vitesses et des accélérations en fonction des variables d'Euler x_1 et x_2 .
- 3- Déterminer les trajectoires de quelques particules du disque.

TD3 : Déformations

Problème 1

On donne, dans le plan physique \mathbb{R}^3 rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la transformation linéaire suivante

$$\begin{cases} x_1 = \left(1 - \frac{\alpha t}{2}\right) X_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha t X_2 \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha t X_1 + \left(1 - \frac{\alpha t}{2}\right) X_2 \\ x_3 = (1 + \alpha t) X_3 \end{cases}$$

où t désigne la variable temps, $\alpha > 0$ une constante donnée et où X_1 , X_2 et X_3 désignent les coordonnées de la particule P à l'instant de référence $t=0$. Enfin l'on pourra, dans tout le problème et afin d'alléger l'écriture, poser $\tau = \alpha t$.

- 1- Déterminer la nature des trajectoires des particules ainsi que la vitesse de celles-ci exprimée en variables de Lagrange.
- 2- On s'intéresse aux courbes matérielles constituées, à l'instant $t=0$, par les droites du plan $X_3 = d$ (où d est une constante) passant par l'origine de ce plan. Que deviennent-elles à l'instant t ?
- 3- Reprendre la question 2- en considérant les courbes matérielles constituées, à l'instant $t=0$, par les cercles du plan $X_3 = d$ centrés sur l'origine de ce plan.
- 4- Donner la transformation linéaire tangente \mathbf{F} puis en déduire l'expression des tenseurs de Cauchy à droite \mathbf{C} et de Green-Lagrange \mathbf{L} . En déduire alors les directions principales de déformation.
- 5- Donner l'expression de la masse volumique ρ à l'instant t en supposant celle-ci uniforme et égale à ρ_0 à l'instant de référence $t=0$.
- 6- Soit $\vec{N} = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2$ où θ est une constante donnée, et soit ε_{NN} la dilatation linéique dans la direction \vec{N} .
 - a- Donner l'expression de ε_{NN} et montrer qu'elle admet un minimum pour $t = \frac{1}{2\alpha}$ que l'on déterminera.
 - b- Déterminer la valeur de t pour laquelle il y'a conservation de la longueur dans la direction \vec{N} .
 - c- Représenter sommairement les variations de ε_{NN} au cours du temps.
 - d- Indiquer pour quelles valeurs de t la dilatation dans la direction \vec{N} correspond à un raccourcissement et pour quelles valeurs elle correspond à un allongement.

Problème 2

Une éprouvette prismatique, d'axe OX_1 , de longueur L et de section carrée de côté $2a$, est soumise à la transformation infinitésimale suivante:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - \frac{\alpha}{a} X_1 - \frac{\beta}{a^2} X_1 X_2 \\ x_2 = X_2 + \frac{\alpha}{a} \nu X_2 + \frac{\beta}{2a^2} (X_1^2 + \nu X_2^2 - \nu X_3^2) \\ x_3 = X_3 + \frac{\alpha}{a} \nu X_3 + \frac{\beta}{a^2} \nu X_3 X_2 \end{cases} \quad (1)$$

où α et β et ν sont des constantes positives.

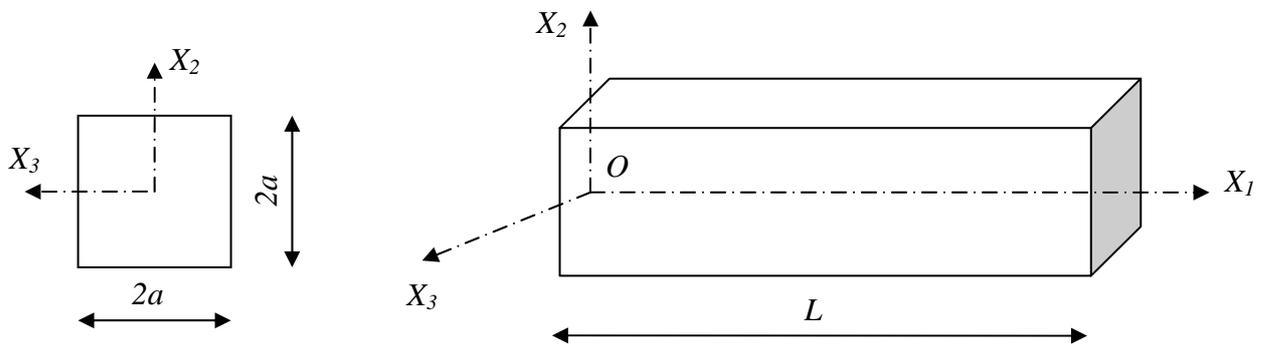


Figure 1

1/ Déterminer Le champs des déplacements correspondant à cette transformation.

2/ Déterminer le tenseur de déformation linéarisé \mathcal{E} en tout point. Quelles sont les directions principales de déformations?

3/ Donner l'expression de la dilatation volumique θ_v en tout point. En déduire, en intégrant l'expression de θ_v sur le volume initial, la variation total de volume de l'éprouvette après transformation.

Problème 3

En un point P d'une plaque soumise à un état de déformation plane, on colle une rosette à trois jauges qui mesurent les dilatations dans trois directions PA , PB et PC contenue dans le plan des déformations (voir figure1). Les mesures obtenues sont respectivement $\varepsilon_A=200 \mu\text{def}$, $\varepsilon_B=100 \mu\text{def}$, $\varepsilon_C=150 \mu\text{def}$. (On rappelle que $1\mu\text{def}=10^{-6}\text{m/m}$).

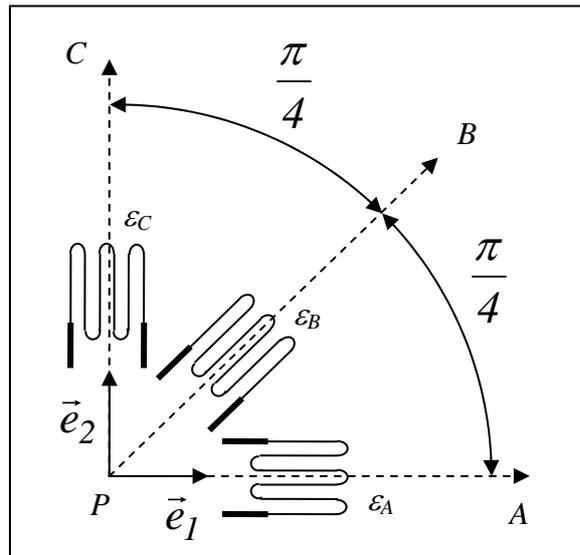


Figure 1 : Rosette à trois jauges collée dans le plan de déformation

- 1- Déterminer le tenseur linéarisé $\boldsymbol{\varepsilon}$ des petites déformations relativement au repère orthonormé direct $(P, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
- 2- Déterminer les déformations principales et les directions principales de déformations :
 - a- Par un calcul algébrique
 - b- En utilisant le cercle de Mohr

TD4 : Contraintes

Exercice

On considère l'état de contraintes planes : $\sigma_{11} = 100\text{MPa}$; $\sigma_{22} = \sigma_{21} = -50\text{MPa}$.

- 1- Déterminer les contraintes principales et les directions principales de contrainte associées :
 - a- par un calcul algébrique.
 - b- en utilisant le cercle de Mohr.
- 2- Une plaque fissurée sera soumise à l'état de contrainte précédent. Indiquer comment il faut orienter la fissure afin de minimiser son effet..

Problème 1

Dans un solide, de masse volumique ρ , soumis à une distribution de force volumique \vec{b} , le tenseur des contraintes de Cauchy exprimé relativement au système de coordonnées cartésien (x_1, x_2, x_3) a pour expression :

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 & (a^2 - x_2^2)x_1 & 0 \\ (a^2 - x_2^2)x_1 & \frac{1}{3}x_2^3 - a^2 x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2ax_3^2 \end{pmatrix}$$

où a est une constante positive.

- 3- Déterminer, en fonction de a et de ρ , la distribution des forces volumiques qui satisfont les équations indéfinies du mouvement en supposant que le solide est au repos.
- 4- Déterminer l'ensemble des points aux quels les directions \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont des directions principales de contraintes.
- 5- Déterminer, au point $P(a, 3a, a)$, les contraintes principales en fonction de a , puis les directions principales de contrainte associées :
 - c- par un calcul algébrique.
 - d- en utilisant le cercle de Mohr.
- 6- Déterminer la contrainte tangentielle maximale en tout point $M(x_1, x_2, x_3)$ puis au point $P(a, 3a, a)$.
- 7- On considère le repère des directions principales de contraintes $R_\sigma = (O, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$. En tirant parti des résultats de la question 2, écrire le tenseur des contraintes au point $P(a, 3a, a)$ dans le repère R_σ .

Problème 2

En chaque point d'un cylindre de révolution d'axe (O, \vec{e}_3) , de rayon a , limité par les plans $x_3 = 0, x_3 = h$, avec $h > 0$, le tenseur des contraintes est de la forme:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \sigma_{13} = -p(7x_1^2 + x_2^2 - m_1 a^2) \\ \sigma_{23} = -6px_1x_2 \\ \sigma_{33} = -m_2 p(h - x_3)x_1 \end{cases}$$

où p est une constante positive donnée, et m_1 et m_2 deux constantes à déterminer.

- 1- Déterminer m_1 et m_2 sachant que le cylindre est en équilibre statique, que l'on néglige les forces de volume et que la surface latérale n'est soumise à aucune force.
- 2- On considère la base $x_3 = h$. Ecrire en chaque point (x_1, x_2, h) de cette base les composantes des efforts surfaciques appliquées. Déterminer la résultante de ces efforts ainsi leur moment résultant par rapport à l'axe (O, \vec{e}_3) .
- 3- Déterminer la résultante des efforts appliqués à la base $x_3 = 0$ ainsi leur moment résultant par rapport à l'axe (O, \vec{e}_3) .

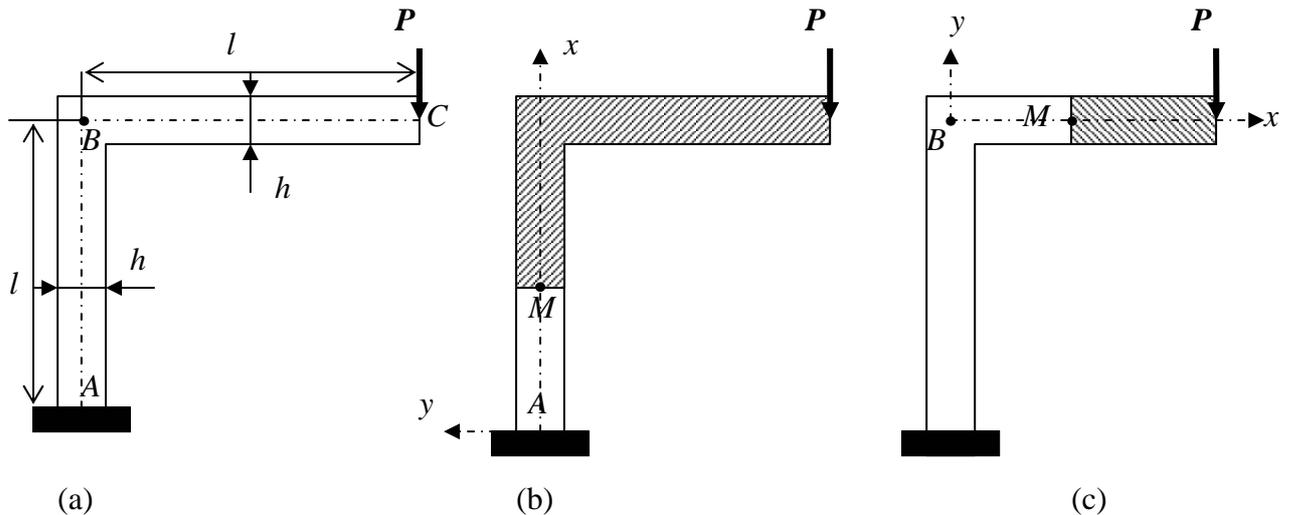
Problème 3

Une poutre en potence est soumise à un chargement vertical P comme l'illustre la figure (a) et l'on admettra qu'en tout point des sections droites suffisamment éloignées des singularités géométriques (pointa A et B) ainsi que du lieu d'application du chargement (point C) ce chargement induit un état de contrainte plane par rapport au plan de la figure.

On se propose alors d'exprimer le tenseur de contrainte plane σ au droit de ces sections relativement au système de coordonnées (x, y) où l'axe des x a pour direction la fibre moyenne et où celui des y lui est directement orthogonal (cf. figure). L'origine de ces axes sera prise au point A pour les sections droites du poteau (figure b) et au point B pour celles de la potence (figure c). On admettra par ailleurs que l'expression de σ relativement à ces axes est de la forme

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \sigma_{xx} = \alpha(x) + \beta(x) y$$

où α et β sont deux fonctions de la variable x à déterminer. Enfin l'on désignera par b la largeur des sections droites rectangulaire de la poutre (i.e. leur dimension dans la direction orthogonale au plan de contrainte), par $S = bh$ leur aire et par $I = bh^3/12$ leur moment d'inertie par rapport au plan contenant l'axe des x et perpendiculaire à celui des y .



- 1- **Etude du poteau.** On s'intéresse ici aux sections droites du poteau suffisamment éloignées des points A et B.
 - a- Dédire de l'équilibre vertical de la partie de poutre hachurée sur la figure (b) l'expression de $\alpha(x)$ puis déterminer $\beta(x)$ en exprimant son équilibre en moment au point M (figure b)
 - b- Montrer en tirant partie des équations indéfinies de l'équilibre ainsi que des conditions aux limite en $y = \pm h/2$, que l'on a $\sigma_{xy} = 0$. Cette solution est elle compatible avec l'équilibre horizontal de la partie de poutre considérée à la question 1a ?

- 2- **Etude la potence.** On s'intéresse à présent aux sections droites de la poutre suffisamment éloignées des points B et C.
 - a- Montrer que l'équilibre horizontal de la partie de poutre hachurée sur la figure (c) impose $\alpha(x) = 0$ puis déduire de son équilibre en moment au point M (figure c) l'expression de $\beta(x)$.
 - b- Montrer, en s'inspirant de la question 1b, que σ_{xy} est solution d'une équation aux dérivées partielles que l'on intégrera.
 - c- Vérifier que la solution obtenue à la question 2b satisfait l'équilibre vertical de la partie de poutre considérée à la question 2a.

Références

- Frederick, D., Chang, T.S., "Continuum Mechanics", Scientific Publishers, 1972.
- Malvern, L.E., "Introduction to Mechanics of a Continuous Medium", Prentice Hall, 1997.
- Mase, G.E., "Continuum Mechanics", Schaum's outlines, Mc Graw Hills, 1970.
- Royis, P., "Mécanique des milieux continues", Cours de l'ENTPE, 2001.