Analyse Numérique

K.GHENIA

GC201-GM203

Cours et Exercices

Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue

TABLE DES MATIERES

RESOLUTION D'UNE EQUATION ALGEBRIQUE

La résolution de beaucoup de problèmes nécessite la résolution de l'équation : **f(x) = 0**
où f(x) est une fonction algébrique. Dans les cas simples on trouve facilement les racines exactes :

$$ax + b = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-b}{a}$$

où

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Souvent les équations de 3^{-eme} degré peuvent être transformées de façon qu'on trouve la solution exacte :

- ❑ $2x^3 - x^2 = 0 \longrightarrow x^2(2x - 1)$
- ❑ $x^3 - 4x^2 + x = 0 \longrightarrow x(x^2 - 4x + 1)$
- ❑ $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0 \longrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 2x^2 + x + 3x - 1 = 0$

$$2x^2(x - 1) - 3x(x - 1) + (x - 1) = 0 \longrightarrow (x - 1)(2x^2 - 3x + 1) = 0$$

Cependant il existe des équations dont il est impossible de trouver les racines exactes. Alors on cherche des méthodes mathématiques à se rapprocher au maximum vers les racines.
La partie des mathématiques qui fais se recherche s'appelle « **Analyse numérique** ». Dans cette recherche il existe deux étapes :

1. Localiser l'intervalle où se trouve la racine ;

2. Se rapprocher vers la racine avec une certaine précision.

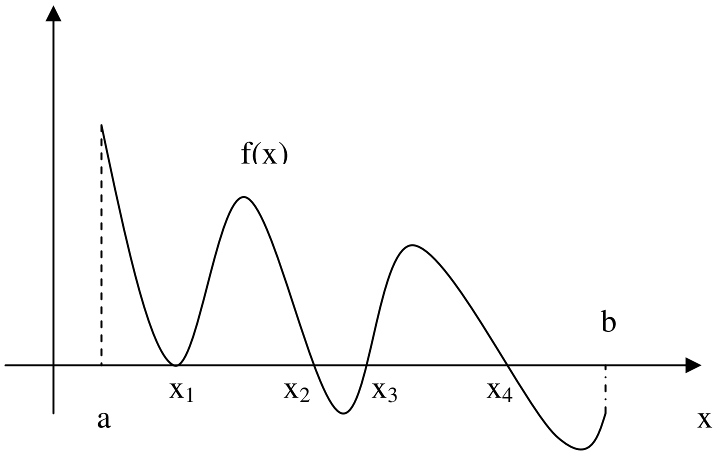


Figure 1

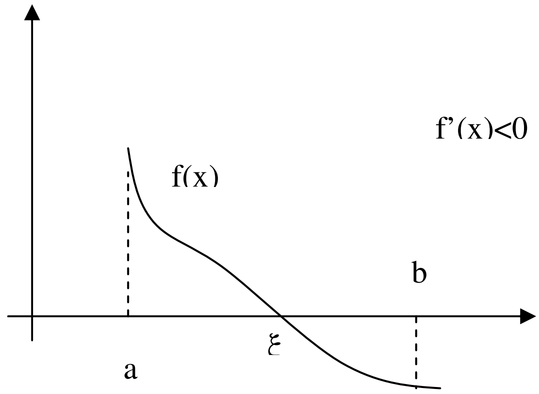


Figure 2

Soit la fonction f(x) et respectivement l'équation f(x) = 0. Cette fonction est déterminée et continue dans l'intervalle fermé [a,b] *(voir figure 1)* Graphiquement la solution représente l'intersection de la courbe f(x) avec l'axe Ox.

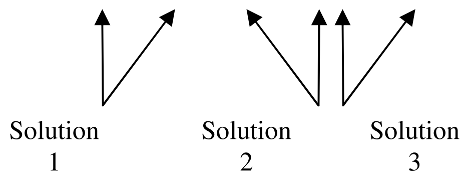
Théorème : *Si la fonction f(x) est définie et continue dans l'intervalle fermé [a,b] et si f(a).f(b) < 0, alors dans cette intervalle il existe au moins un racine ξ, $\xi \in [a, b]$ tel que $f(\xi) = 0$*

Rem. Le racine est unique si dans l'intervalle [a, b] f '(x) > 0 où f '(x) < 0 (fig. 2).

Pour déterminer les racines il faut diviser l'intervalle [a, b] en 2 et déterminer le signe de f(x) dans chaque partie. On répète cette opération plusieurs fois jusque le racine est bien encadré.

Exemple : $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$

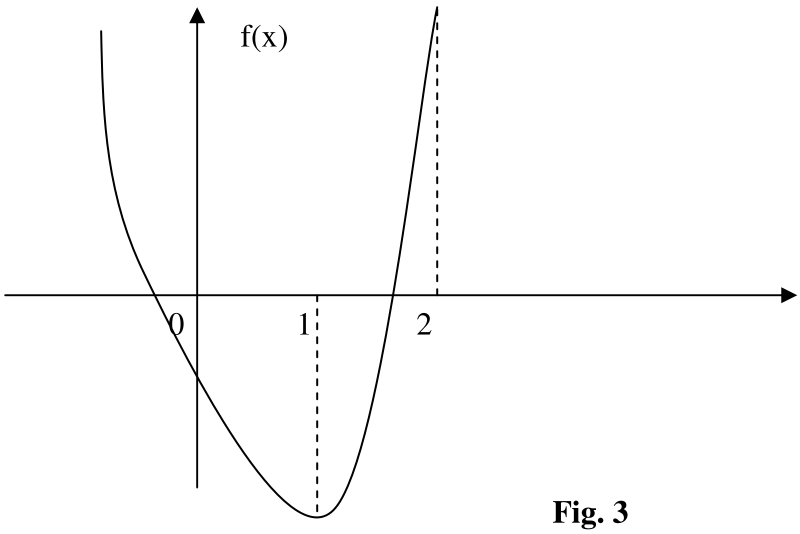
x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
f(x)	-	-	+	+	-	+	+



Exemple : $2x^4 - 8x - 3 = 0$ $f'(x) = 8x^3 - 8 = 8(x^3 - 1)$

La fonction admet une min en x = 1

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$\searrow$	Min - 9	$\nearrow$



$f(0) = -3 < 0 \rightarrow f(2) = 13 > 0$

$f(1) = -9 \rightarrow f(2) = 13$

$f(1,5) = -0,875 \rightarrow f(2) = 13$

$f(1,5) = -0,875 \rightarrow f(1,75) = 5,57$

Alors l'intervalle (1,5 1,75) contient la racine

Fig. 3

<u>METHODE D'ITERATION</u>
<u>METHODE DU POINT FIXE</u>

Cette méthode nous aide à s'approcher pas à pas vers la racine d'une équation.

Soit l'équation f(x) = 0 où f(x) est définie et contenue dans un intervalle (a,b). On peut transformer cette équation en une autre équation équivalente :

$x = \varphi(x)$ où $\varphi(x) = x + C.f(x)$ ***C*** est une constante.

$x = x + C.f(x)$ 

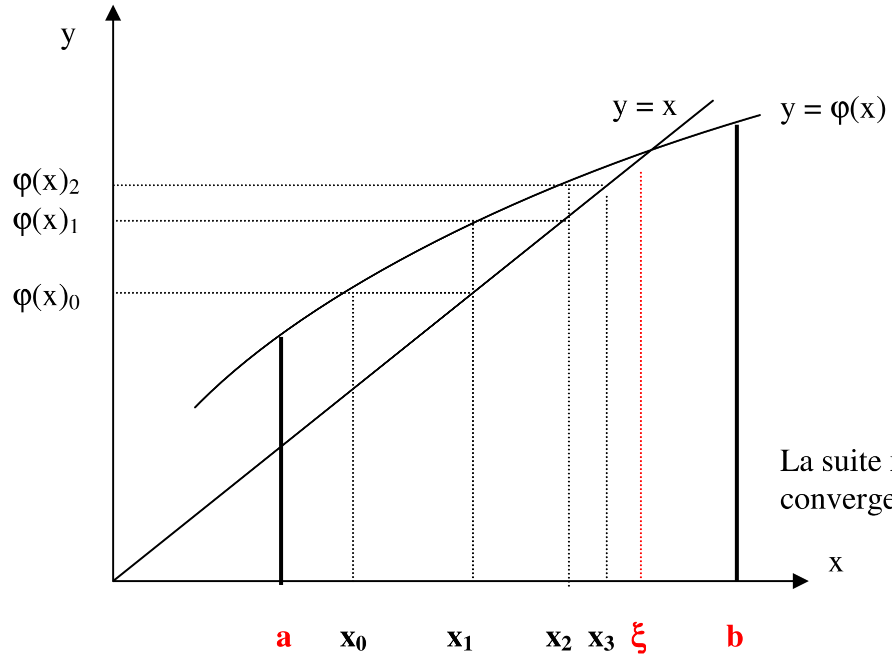
Soit x_0 la première approche vers la racine ξ. Evidement on choisi x_0 dans l'intervalle (a,b). Sa valeur est obtenue par des réflexions physiques où par des méthodes graphiques. Pour calculer la valeur de x_1, on remplace x_0 dans l'équation : $x = \varphi(x)$

$x_1 = \varphi(x_0)$

On obtient une suite x_1 , x_2 ; x_3 , …. Si cette suite est convergeant alors elle tend vers ξ.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi$$

Voilà la présentation graphique dans le cas **$\varphi'(x) < 1$** et la suite des valeurs x_1 , x_2 , x_3….. est convergente. On voit qu'elles se rapprochent vers ξ. (fig. 4)



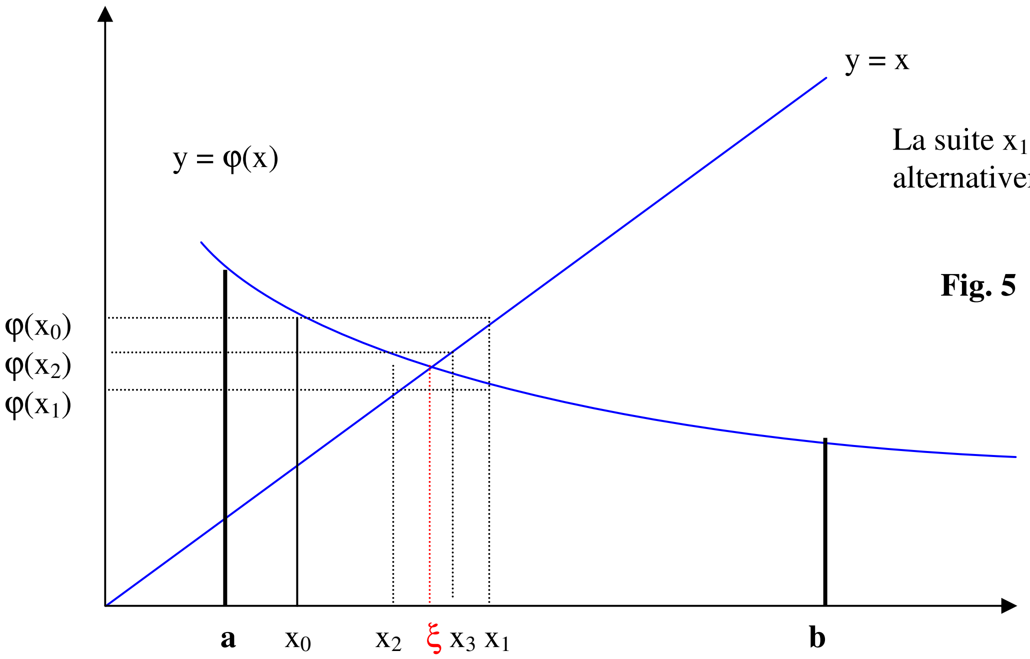
$x = \varphi(x)$

$x_1 = \varphi(x_0)$

La suite x_1 , x_2 , x_3 …. est convergeant .

Fig. 4

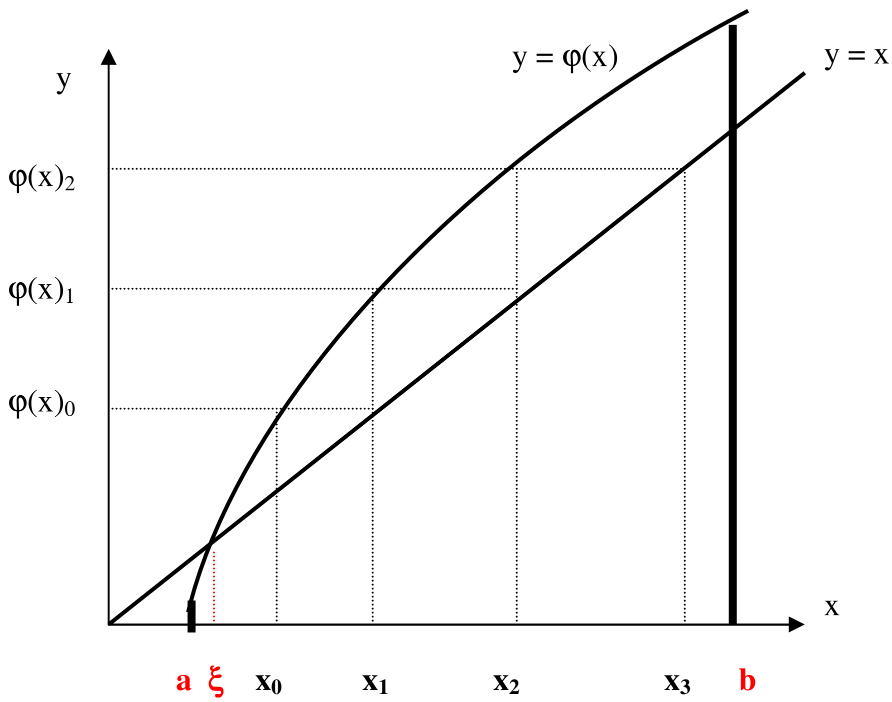
En bas on voit la représentation graphique dans le cas **$\varphi'(x) > -1$** et la suite des valeurs x_1 , x_2 , x_3….. est convergente . On aperçoit qu'elles se rapprochent vers ξ alternativement de deux côtés de ξ. (fig. 5)



La suite x_1 , x_2 , x_3 …. est alternativement convergeant .

Fig. 5

Dans le schéma ci-dessous. **$\varphi'(x) > 1$** et la suite des valeurs x_1 , x_2 , x_3….. est divergente (fig.6):



La suite x_1 , x_2 , x_3 …. est divergente .

Fig. 6

Dans le schéma ci-dessous. **$\varphi'(x) < -1$** et la suite des valeurs x_1 , x_2 , x_3….. est divergente (fig.7). On aperçoit qu'elles se éloigne de ξ alternativement de deux côtés de ξ :

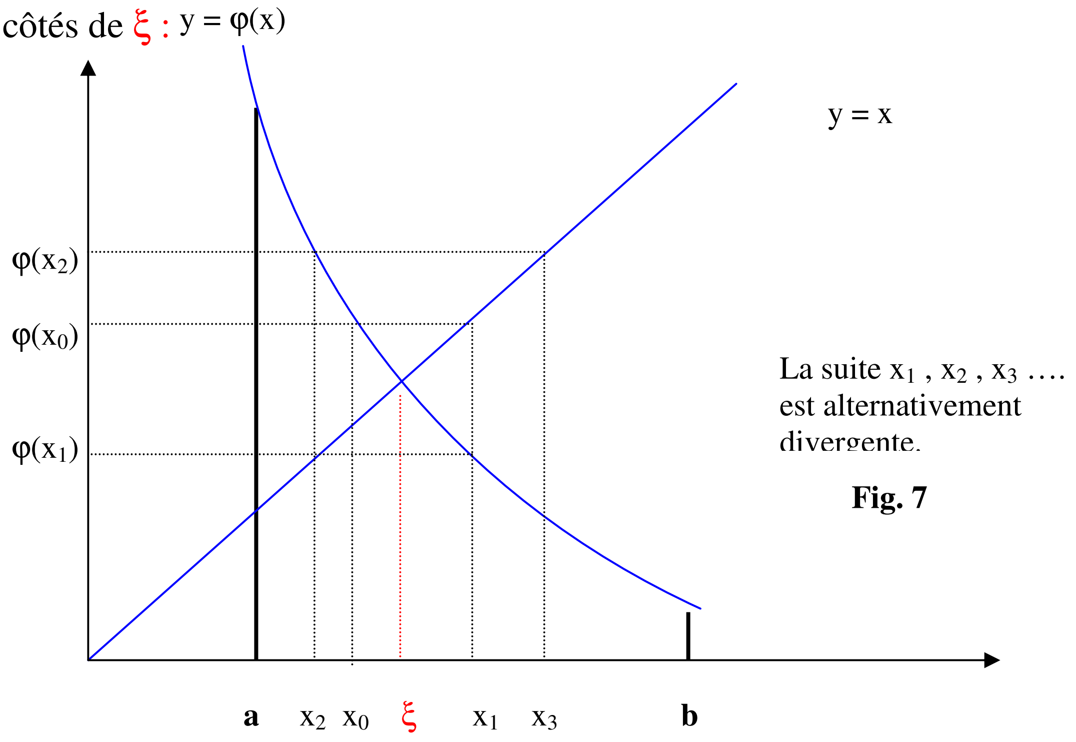


Fig. 7

Alors on peut annoncer le théorème suivant :

Théorème : *Soit la fonction $\varphi(x)$ déterminer et dérivable dans l'intervalle (a,b) et $\varphi(x) \in [a,b]$. Si pour tout $x \in (a,b)$ on a*

$$|\varphi'(x)| \leq q \leq 1$$

L'itération $x_n = \varphi(x_{n-1})$ est convergente quelque soit la valeur de $x_0 \in (a,b)$ et

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi$$

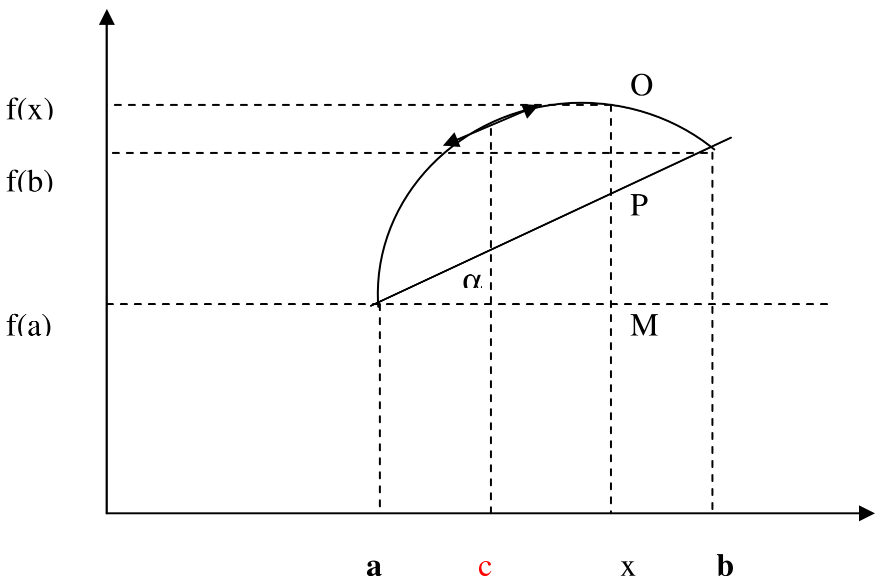
où ξ est la seule racine de l'équation $x = \varphi(x)$ dans l'intervalle (a,b).

Avant de commencer la démonstration on va se rappeler la formule de Lagrange pour les accroissements finis

FORMULES DES ACCROISSEMENTS FINIS

Théorème : *Supposons que la fonction f(x) est définie et continue dans l'intervalle fermé [a,b]. Dans ces conditions il existe au moins une valeur c ∈] a,b [tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a).f'(c)$$



INTERPRETATION GRAPHIQUE DE CETTE FORMULE

Démonstration : Considérons la fonction φ'x) = PQ . On va chercher l'expression de cette fonction :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \longrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{PM}}{x-a}$$

$$\frac{\overline{PM}}{x-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \overline{PM} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)$$

$$f(x)-f(a)=\overline{QM} \Rightarrow \overline{QP}=\overline{QM}-\overline{PM}$$

$$\varphi(x)=\overline{QP}=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

On remarque que :

$\varphi(a) = 0$
$\varphi(b) = 0$

D'après le théorème de Rolle si une fonction vérifie ces conditions il existe un point ***c*** $c \in (a,b)$ où

$\varphi'(c) = 0$

Cela signifie que la tangente à la courbe $\varphi(x)$ au point $A[\varphi(c) , \boldsymbol{c}]$ est parallèle à l'axe Ox. (fig. 9)

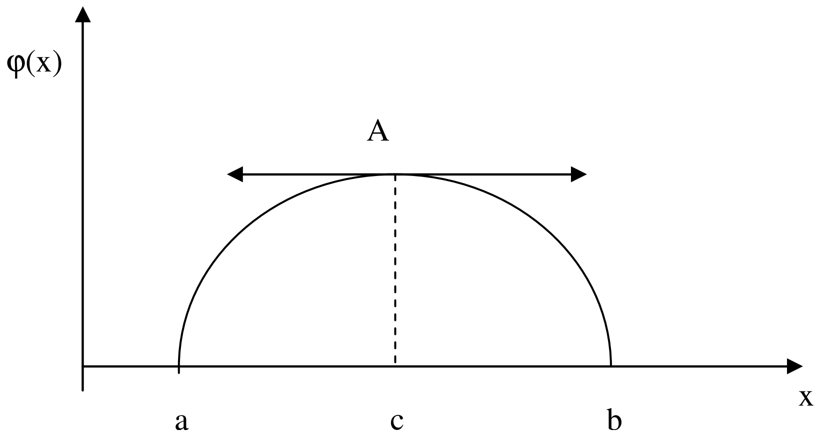


Fig. 9

$$\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

On revient sur la formule de notre cours :

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)}$$

C'est la formule **de Lagrange** pour les accroissements finis qu'on va utiliser dans notre démonstration.

Démonstration : Alors ce qu'on va démontrer est que si

$$\left| \boldsymbol{\varphi'(x)} \right| \boldsymbol{\leq q \leq 1} \text{ **et** } x \in (a,b) \text{ alors}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \quad \text{et l'itération est convergente.}$$

On a : $\begin{cases} \xi = \varphi(\xi) \\ x_n = \varphi(x_n\text{-}1) \end{cases}$ On soustrait les deux équations :

$(\boldsymbol{\xi - x_n}) = \boldsymbol{\varphi(\xi) - \varphi(x_n\text{-}1)}$ (1)

La formule de Lagrange donne

$$\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1}) = \varphi'(\mu)(\xi - x_{n-1})$$

Où $\mu \in [\xi, x_{n-1}]$ On sait que $|\varphi(\xi)| \leq q$ et alors

$$|\varphi'(\mu)| = \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1})|}{|\xi - x_{n-1}|} \leq q$$

$|\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1})| \leq q\ |\xi - x_{n-1}|$

D'après la formule (1) on a $\varphi(\xi) - \varphi(x_n\text{-}1) = (\xi - x_n)$ donc

$|\xi - x_n| \leq q\ |\xi - x_{n-1}|$

$|\xi - x_1| \leq q\ |\xi - x_0|$

$|\xi - x_2| \leq q\ |\xi - x_1| \leq q^2\ |\xi - x_0|$

…………………………..

$|\xi - x_n| \leq q\ |\xi - x_{n-1}| \leq q^n\ |\xi - x_0|$

$\boldsymbol{|\xi - x_n| \leq q^n\ |\xi - x_0|}$

Si $n \to \infty$ $q^n \to 0$ car $q < 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} |\xi - x_n| = 0$ et

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ et l'itération est convergente !

LA PRECISION DES CALCULS

Soit ε un nombre positif assez petit, par exemple $\varepsilon = 10^{-6}$
On veut que
$|\xi - x_n| < \varepsilon$

On a l'inégalité $|\xi - x_n| \leq q\ |\xi - x_{n-1}|$ qui peut être transformée de façon suivante :
$|\xi - x_n| \leq q\ |x_n - x_{n-1}| + q\,|\xi - x_n|$

$|\xi - x_n|\,(1 - q) \leq q\ |x_n - x_{n-1}|$ ce qui donne :

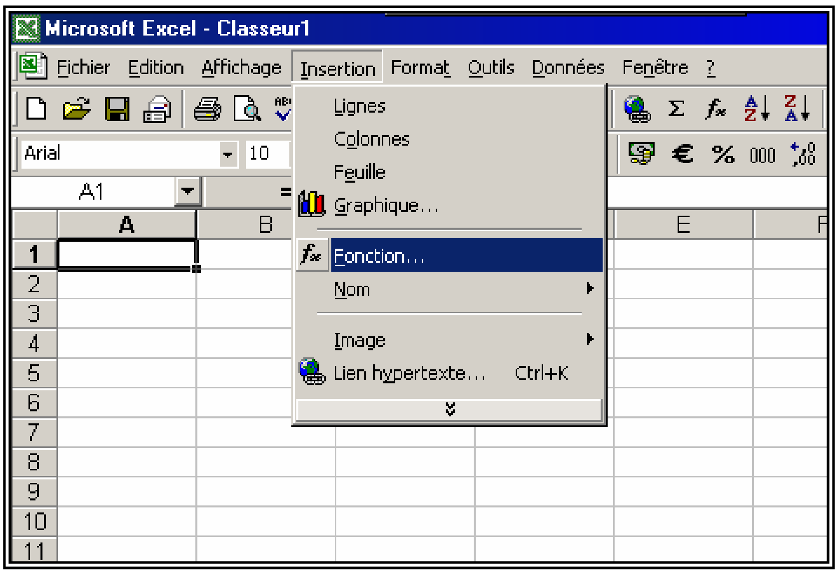
$|\xi - x_n| \leq \dfrac{q|x_n - x_{n-1}|}{1-q}$ et si on pose q = ½, on arrive à l'expression finale :
$|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|$
Alors si $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \rightarrow |\xi - x_n| < \varepsilon$ et x est calculé à ε près. Donc on fait itération après itération et on s'arrête si

$$\boxed{|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon}$$

La formule ci dessus est le critère de la précision !

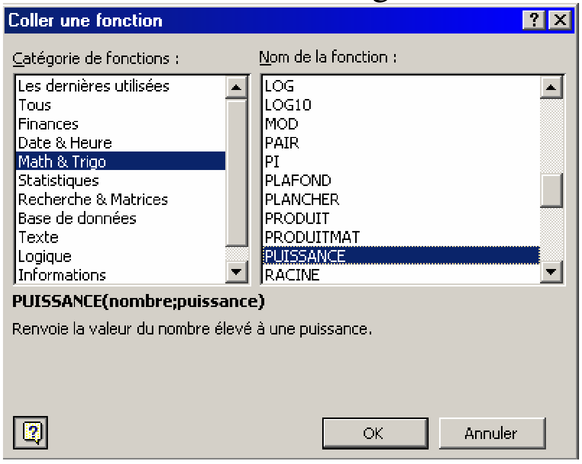
EXCEL ET L'ANALYSE NUMERIQUE

Excel est un logiciel de MicroSoft qui représente in outil très puissant dans les calculs répétitifs. Chaque ordinateur est équipé de ce logiciel et il est plus facile à manipuler que des logiciels de Turbo Pascal et Visuel Basic.



Excel nous propose un très grand nombre de fonctions classées dans différentes catégories. Voilà

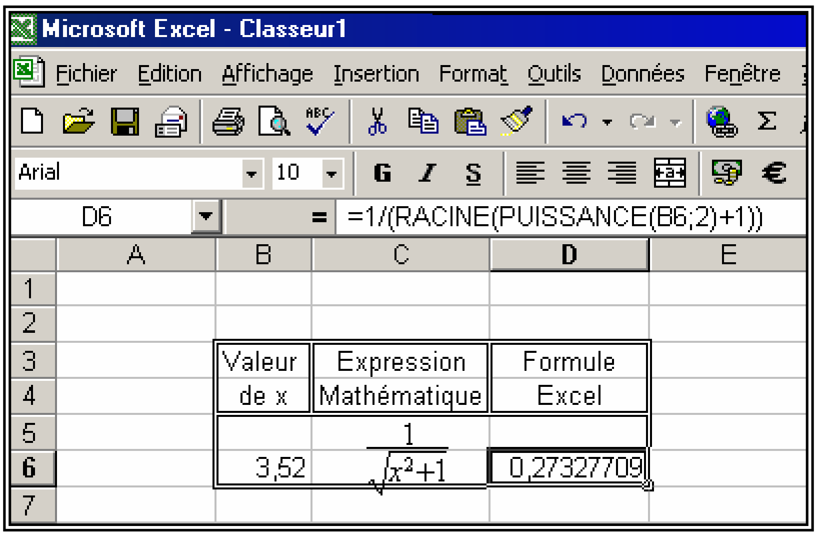
l’accès vers ses fonctions :
Dans cette boîte de dialogue, on choisie la **catégorie** et le **nom** d’une fonction.



La facilité de l’application des fonctions et la rapidité de la méthode copier – coller donne d’excellents résultats – 2000 itérations par second. Ci dessous le tableau contient quelques fonctions Excel :

N	Expression mathématique	Fonction Excel
1	2^3	=puissance(2 ;3)
2	$\sqrt{5}$	=racine(5)
3	$\sqrt[3]{15}$	=puissance(15 ;1/3)
4	$\|-7\|$	=abs(-7)
5	e^{-3}	=exp(-3)
6	6 !	=fact(6)
7	ln(5)	=ln(5)
8	Log (15)	=log10(15)
9	5+9+6+3	=somme(5;9;6;3)

Exemple de calcul :



La cellule **B6** contient la valeur de **x** et dans la cellule **D6** on tape la formule visible dans la barre de formules. Le résultat de calcul s’affiche dans **D6**

Exercice : Soit l'équation **$x^2 - 2x - 3 = 0$**
le choix des trois fonctions $\varphi_i(x)$

	A	B	Formule Excel
1	x_0	4	
2	x_1	3,31662479	=Racine (2*B1+3)
3	x_2	3,10374767	
4	x_3	3,0343855	Copier – Coller
5	x_4	3,01144002	
6	x_5	3,00381092	$\varphi_1(x) = \sqrt{2x+3}$
7	x_6	3,00127004	
8	x_7	3,00042332	
9	x_8	3,0001411	
10	x_9	3,00004703	
11	x_{10}	3,00001568	

x_i tend vers 3

	A	B	Formule Excel
1	x_0	4	
2	x_1	1,5	=3/ (B1-2)
3	x_2	-6	
4	x_3	-0,375	Copier - Coller
5	x_4	-1,26315789	
6	x_5	-0,91935484	$\varphi_2(x) = \frac{3}{x-2}$
7	x_6	-1,02762431	
8	x_7	-0,99087591	
9	x_8	-1,00305064	
10	x_9	-0,99898415	
11	x_{10}	-1,00033873	

x_i tend vers -1

	A	B	Formule Excel
1	x_0	4	
2	x_1	6,5	**=(puissance(B1 ;2)-3)/2**
3	x_2	19,625	Copier - Coller
4	x_3	191,070313	
5	x_4	18252,4322	$\varphi_3(x) = \frac{x^2-3}{2}$
6	x_5	166575638	

x_i tend vers infine

Cet exemple montre que selon le choix de la fonction itérative $\varphi(x)$, x_n tend vers l'une où vers l'autre racine et peut même diverger. Voyons ce qui se passe avec $\varphi_i'(x)$:

$$\varphi_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \qquad \varphi_2'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} \qquad \varphi_3'(x) = x$$

On dresse le tableau suivant :

	$\xi_1 = 3$	$\xi_2 = -1$
$\varphi_1'(\xi)$	0,333	1

	A	B	Formule Excel
1	x_0	-0,9	
2	x_1	-1,095	**=(puissance(B1 ;2)-3)/2**
3	x_2	-0,9004875	Copier - Coller
4	x_3	-1,09456113	
5	x_4	-0,90096797	
6	x_5	-1,09412836	
7	x_6	-0,90144156	
8	x_7	-1,09370155	
9	x_8	-0,90190845	
10	x_9	-1,09328057	
11	x_{10}	-0,9023688	
12	x_{11}	-1,09286528	
13	x_{12}	-0,90282274	

$\varphi_2'(\xi)$	-3	- 0,333
$\varphi_3'(\xi)$	3	- 1

La méthode du point fixe appliquée à $\varphi_1(x)$ converge vers $\xi_1 = 3$, car $\varphi_1'(3) < 1$.

Pour $\varphi_2(x)$ ne peut pas converger vers 3 car $|\varphi_2'(3)| > 1$ Les itérations ignorons $\xi_1=3$ et converge vers $\xi_2 = -1$ car $|\varphi_2'(-1)| < 1$

Pour $\varphi_3(x)$ l'étude est plus intéressante. En effet $|\varphi_2'(-1)| = -1$. A gauche de ξ_2 $|\varphi_3'(x)| < -1$ et à droite $|\varphi_3'(x)| > -1$ La dérivée est négative ce qui signifie que la méthode oscillera de part et d'autre du racine (si on prend $|x_0| < 1$). Faisons quelque calcules avec $x_0 = -0,9$ et .

$$\varphi(x)_3 = \frac{x^2-3}{2}$$

L'itération est très lente car $|\varphi_2'(-0,9)| = 0,9$ est proche de 1. A retenir :

La méthode de points fixes appliquée à $\varphi_1(x)$ converge vers $\xi_1 = 3$, car $\varphi_1'(3) < 1$.

Pour $\varphi_2(x)$ ne peut pas converger vers 3 car $|\varphi_2'(3)| > 1$ Les itérations ignorons $\xi_1 = 3$ et converge vers $\xi_2 = -1$ car $|\varphi_2'(-1)| < 1$

Pour $\varphi_3(x)$ l'étude est plus intéressante. En effet $|\varphi_2'(-1)| = -1$. A gauche de ξ_2 $|\varphi_3'(x)| < -1$ et à droite $|\varphi_3'(x)| > -1$ La dérivée est négative ce qui signifie que la méthode oscillera de part et d'autre du racine (si on prend $|x_0| < 1$). Faisons quelque calculs avec $x_0 = -0{,}9$ et .

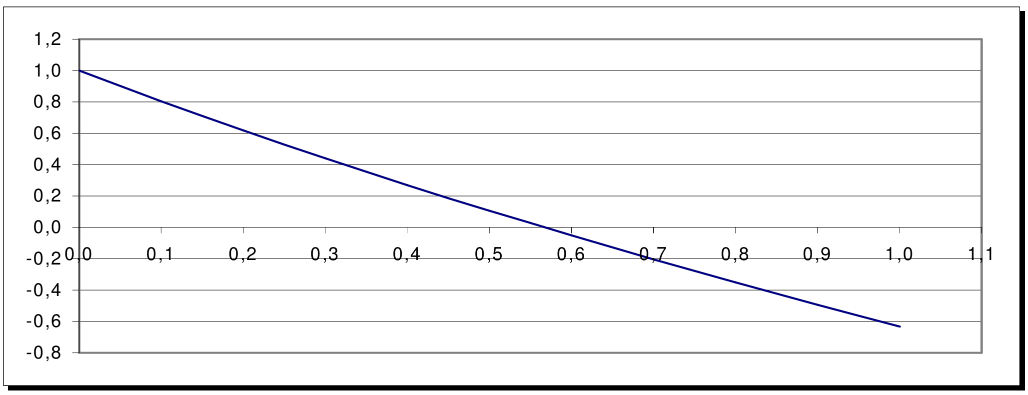
$$\varphi(x)_3 = \frac{x^2 - 3}{2}$$

L'itération est très lente car $|\varphi_2'(-0{,}9)| = 0{,}9$ est proche de 1. A retenir :

Théorème : Plus $|\varphi_2'(x)|$ est proche de 1 plus l'itération est lente**.**

Dans l'exemple précédent si on prend $x_0 = -0{,}95$ alors $x_{10000} = -0{,}98636$ ce qui montre que la convergence est extrêmement lente.

Exercice : $f(x) = e^{-x} - x = 0$



On choisit la fonction $\varphi(x)$:

$x = e^{-x} = \varphi(x) \quad \rightarrow \quad \varphi'(x) = -e^{-x}$

On prend $x_0 = 0{,}58 \rightarrow \varphi'(0{,}58) = 0{,}02 < 1$ *Formule Excel* : **=exp(-B1)**

	A	B
1	x_0	0,58
2	x_1	0,55989837
3	x_2	0,57126712
4	x_3	0,56480930
5	x_4	0,56846854
6	x_5	0,56639218
7	x_6	0,56756944
8	x_7	0,56690166
9	x_8	0,56728035
10	x_9	0,56706556
11	x_{10}	0,56718737

x_{11}	0,56711829	x_{22}	0,56714334
x_{12}	0,56715747	x_{23}	0,56714326
x_{13}	0,56713525	x_{24}	0,56714331
x_{14}	0,56714785	x_{25}	0,56714328
x_{15}	0,56714070	x_{26}	0,56714330
x_{16}	0,56714476	x_{27}	0,56714329
x_{17}	0,56714246	x_{28}	0,56714329
x_{18}	0,56714376		
x_{19}	0,56714302		
x_{20}	0,56714344		
x_{21}	0,56714320		

Rem. : *La solution avec MS Excel est très rapide même s'il faudrait faire mille itérations. Ceux qui aiment la programmation peuvent écrire un petit programme en* ***Pascal Turbo*** *mais cela prendra beaucoup plus de temps*

```
Program Iter;
Uses wincrt;
var i : integer ; x , a : real ;

Begin
Writeln('L équation algebrique est : x= e-x');
Writeln('Donner x0 = '); read (x) ;

Repeat
i:=i+1;a:=x ;x:=exp(-x); Writeln ('x', i ,' = ',x:2:7);
until abs(x-a)<0.00000001

end.
```

Voilà les résultats :

```
(Inactive C:\TPW\ITERATI2.EXE)
L équation algebrique est : x= e-x
Donner x0 =
0
    x1 = 1.00000000
    x2 = 0.36787944
    x3 = 0.69220063
    x4 = 0.50047350
    x5 = 0.60624354
    x6 = 0.54539579
    x7 = 0.57961234
    x8 = 0.56011546
    x9 = 0.57114312
    x10 = 0.56487935
    x11 = 0.56842873
    x12 = 0.56641473
    x13 = 0.56755664
    x14 = 0.5669089
    x15 = 0.5672762
    x16 = 0.5670679
    x17 = 0.5671861
    x18 = 0.5671190
    x19 = 0.5671570
    x20 = 0.5671355
    x21 = 0.5671477
    x22 = 0.5671408
    x23 = 0.5671447
    x24 = 0.5671425
    x25 = 0.5671437
    x26 = 0.5671430
    x27 = 0.5671434
    x28 = 0.5671432
    x29 = 0.5671433
    x30 = 0.5671433
    x31 = 0.5671433
    x32 = 0.5671433
    x33 = 0.5671433
    x34 = 0.5671433
```

Exercice : Calculer les racines de l'équation $\mathbf{f(x) = 2x^3 - 25x + 1 = 0}$ avec une précision $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-6}}$

On peut transformer cette équation de différent façon en fin d'obtenir la fonction φ(x).

1. $x = x + f(x) \rightarrow x = 2x^3 - 24x + 1$ avec $\varphi(x) = 2x^3 - 24x + 1$
2. $x = \sqrt[3]{\dfrac{25x-1}{2}}$ avec $\varphi(x) = \sqrt[3]{\dfrac{25x-1}{2}}$
3. $x = \dfrac{2x^3+1}{25}$ avec $\varphi(x) = \dfrac{2x^3+1}{25}$
4. $x = \dfrac{-1}{2x^2-25}$ avec $\varphi(x) = \dfrac{-1}{2x^2-25}$

Faisons une petite étude de la fonction f(x) enfin de localiser les racines.

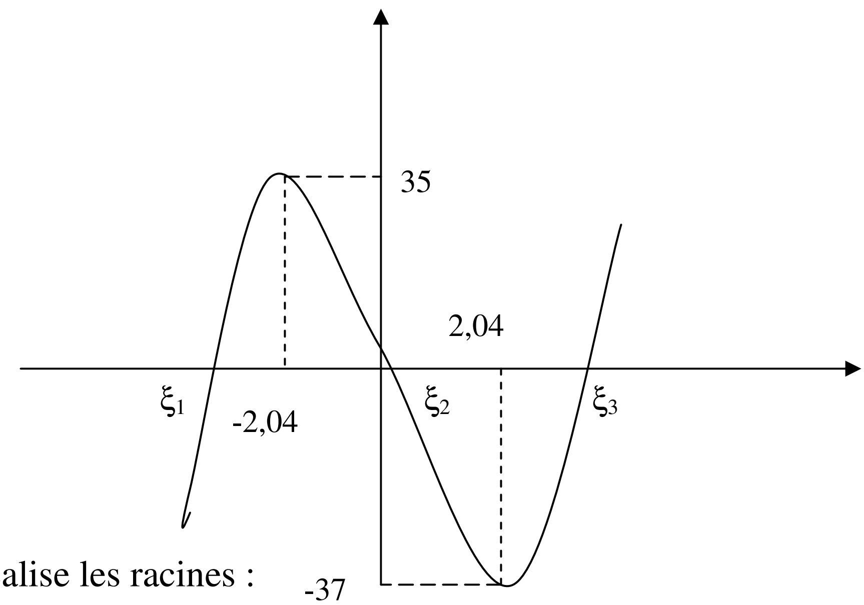
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

f '(x) = $6x^2 - 25$ La fonction dérivée s'annule f '(x) = 0

si $x_1 = -2{,}04$
$x_2 = 2{,}04$
On dresse le tableau de variation :

x	- ∞	- 2,04		2,04	+ ∞
f '(x)	+	0	-	0	
f(x)	↗	Max = 35	↘	Min = -37	↗

Voila approximativement la courbe de la fonction :



On localise les racines :

$\xi_1 \in (-3{,}8 ; -3)$ car $f(-3{,}8) < 0$ et $f(-3) > 0$ $\Rightarrow$ $x_{01} = -3{,}4$

$\xi_2 \in (0 ; 0{,}1)$ car $f(0) > 0$ et $f(0{,}1) < 0$ $\Rightarrow$ $x_{02} = 0{,}05$

$\xi_1 \in (3{,}4 ; 3{,}6)$ car $f(3{,}4) < 0$ et $f(3{,}6) > 0$ $\Rightarrow$ $x_{03} = 3{,}5$

Le problème qui se pose maintenant est le choix de la fonction itérative. La bonne fonction est celle là dont la valeur absolue de sa dérivée est inférieure à 1 :

On cherche d'abord ξ_2 dans l'intervalle (-3,8 ; -3) avec $x_{01} = -3{,}4$:
$|\varphi'(x)| < 1$

1. $\varphi_1\,'(x) = 6x^2 - 24 \Rightarrow$ $\varphi_1\,'(-3{,}4) = 45{,}36$ Non
$\varphi_1\,'(0{,}05) = -23{,}985$ Non
$\varphi_1\,'(3{,}5) = 49{,}5$ Non

2. $\varphi_2'(x) = \dfrac{25}{6\sqrt[3]{\left(\dfrac{25x-1}{2}\right)^2}}$ $\varphi_2\,'(-3{,}4) = 0{,}339$ **Oui**
$\varphi_2\,'(0{,}05) = 16{,}66$ Non
$\varphi_2\,'(3{,}5) = 0{,}338$ **Oui**

3. $\varphi_3' = \dfrac{6x^2}{25}$ $\varphi_3\,'(-3{,}4) = 2{,}77$ Non
$\varphi_3\,'(0{,}05) = 0{,}0006$ **Oui**
$\varphi_3\,'(3{,}5) = 2{,}94$ Non

4. $\varphi_4' = \dfrac{4x}{(2x^2-25)}$ $\varphi_4\,'(-3{,}4) = -3{,}847$ Non
$\varphi_4\,'(0{,}05) = 0{,}00032$ **Oui**
$\varphi_4\,'(3{,}5) = 56$ Non

On prend la quatrième expression pour calculer la deuxième racine et la deuxième expression pour calculer les racines 1 et 3 .

$$\varphi(x) = \frac{-1}{2x^2-25}$$

	A	B	Formule Excel
1	x_0	0,05	=-1/(2*puissance(B1 ;2)-25)
2	x_1	0,04001	Copier - Coller
3	x_2	0,040005124	
4	x_3	0,040005122	
5	x_4	0,040005122	
6	x_5	0,040005122	
7	x_6	0,040005122	

$x_4 - x_3 = 0,040005122 - 0,040005124 = 0,28.10^{-7} < 10^{-6}$. Donc on s'arrête à la 4eme itération. Pour déterminer à quelle itération faut – il s'arrêter on applique une formule logique d'Excel :

=Si(B2-B1>puissance(1 ;-6) ;'Continuer' ; 'Stop')

Cela signifie que dans la cellule où est appliquée la formule il s'affichera :

- Continuer - si $x_i - x_{i-1} > 10^{-6}$
- Stop - si $x_i - x_{i-1} < 10^{-6}$

	A	B	Formule Excel
1	x_0	0,05	
2	x_1	0,04001	Continuer
3	x_2	0,040005124	Continuer
4	x_3	0,040005122	Stop
5	x_4	0,040005122	
6	x_5	0,040005122	
7	x_6	0,040005122	

ξ_2 = 0,040005

Maintenant on va chercher les racines ξ_1 , ξ_3 avec la fonction itérative $\varphi_2(x)$:

$\varphi_2(x) = \sqrt[3]{\dfrac{25x-1}{2}}$ En Excel cela donne : **=puissance((25*B1-1)/2 ;1/3)**

	A	B		
1	x_0	-3,4	x_9	-3,55535942
2	x_1	-3,50339806	x_{10}	-3,55536431
3	x_2	-3,53815335	x_{11}	-3,55536592
4	x_3	-3,54968368	x_{12}	-3,55536645
5	x_4	-3,55349246	x_{13}	-3,55536663
6	x_5	-3,5547488	x_{14}	-3,55536669
7	x_6	-3,55516302	x_{15}	-3,5553667
8	x_7	-3,55529957	x_{16}	-3,55536671
9	x_8	-3,55534458	x_{17}	-3,55536671

On s'arrête à la 16 ème itération avec ξ_1 = **-3,55536671.**

Pour la racine ξ_3 on utilise la même fonction itérative et $\mathbf{x_0 = 3,5}$.

	A	B		
1	x_0	3,5	x_9	3,51536072
2	x_1	3,51017448	x_{10}	3,51536138
3	x_2	3,51361178	x_{11}	3,51536149
4	x_3	3,51477151	x_{12}	3,51536156
5	x_4	3,51516262	x_{13}	3,51536158
6	x_5	3,5152945	x_{14}	3,51536159
7	x_6	3,51533897	x_{15}	3,51536159
8	x_7	3,51535396	x_{16}	3,51536159
9	x_8	3,51535902	x_{17}	3,51536159

On s'arrête à la 14 ème itération avec ξ_3 = **3,51536159.** Remarquez que $\varepsilon = 10^{-8}$

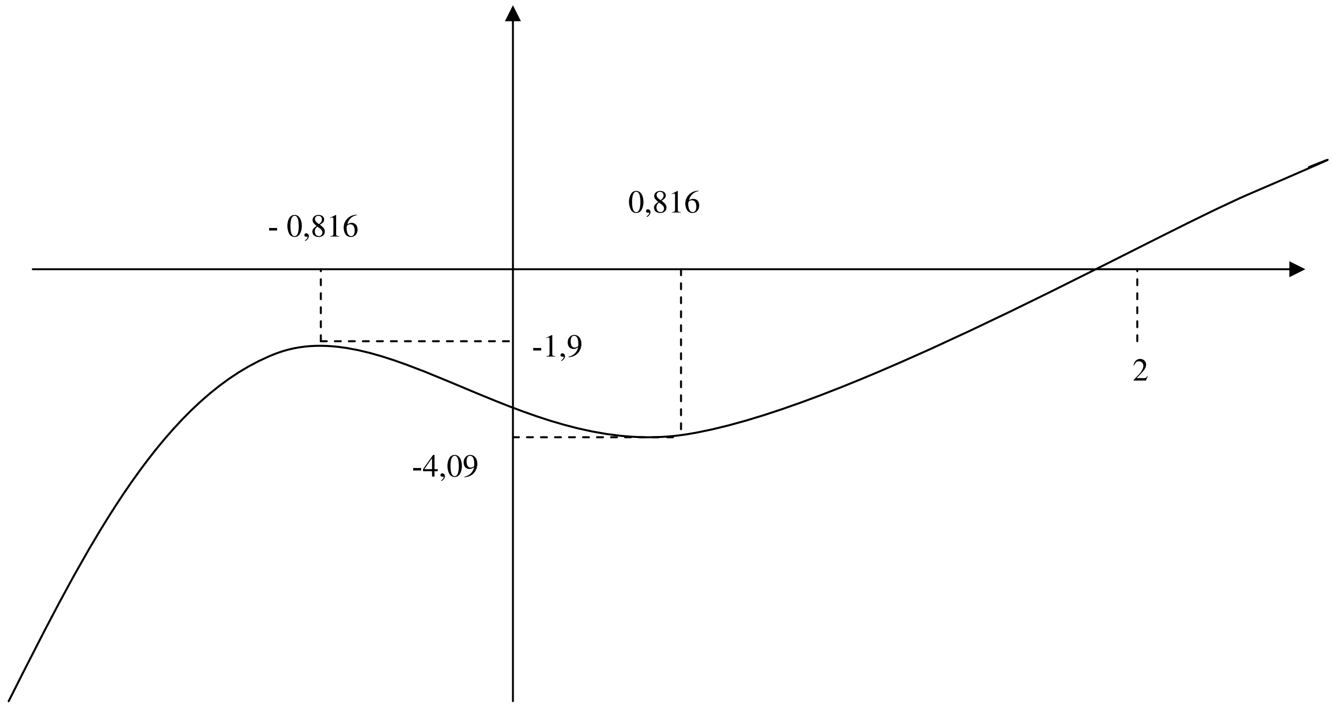
Exercice : Soit l'équation f(x) = 0 avec f**(x) = x^3 - 2x – 3.** Calculer l'approche x_n de la racine ξ avec une précision $\varepsilon = 10^{-8}$.

On va chercher les différentes fonctions itératives $\varphi_i(x)$.

Faisons une brève étude de la variations de la fonction f(x).

f '(x) = $3x^2 - 2$ $\rightarrow$ f ' (x) = 0 $\rightarrow$ $3x^2 - 2 = 0$ $\rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

$x_1 = 0{,}816$ $x_2 = -\ 0816$
$f_{min} = -\ 4{,}09$ $f_{max} = -1{,}9$



Dans l'intervalle (1,2) l'équation a une seule solution, car f(1) = -4 et f(2) = 1.
Maintenant on va choisir la fonction itérative sachant que $|\varphi'_i(x)| < 1$

Fonction itérative	**Fonction dérivée**	**$\varphi_i(x_i)$**
$\varphi_1(x) = x^3 - x - 3$	$\varphi'_1(x) = 3x^2 - 1$	66,5
$\varphi_2(x) = \frac{x^3 - 3}{2}$	$\varphi'_2(x) = \frac{3x^2}{2}$	3,375
$\varphi_3(x) = \sqrt[3]{2x+3}$	$\varphi'_3(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$	**0,202**
$\varphi_4(x) = \frac{3}{x^2 - 2}$	$\varphi'_4(x) = \frac{-6x}{(x^2-2)^2}$	-144
$\varphi_5(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{x}}$	$\varphi'_5(x) = \frac{3}{2x^2\sqrt{\frac{2x+3}{x}}}$	0,333
$\varphi_6(x) = \frac{2x+3}{x^2}$	$\varphi'_6(x) = \frac{-2(x+3)}{x^3}$	2,66

Notre fonction itérative est :

$$\varphi_3(x) = \sqrt[3]{2x+3}$$

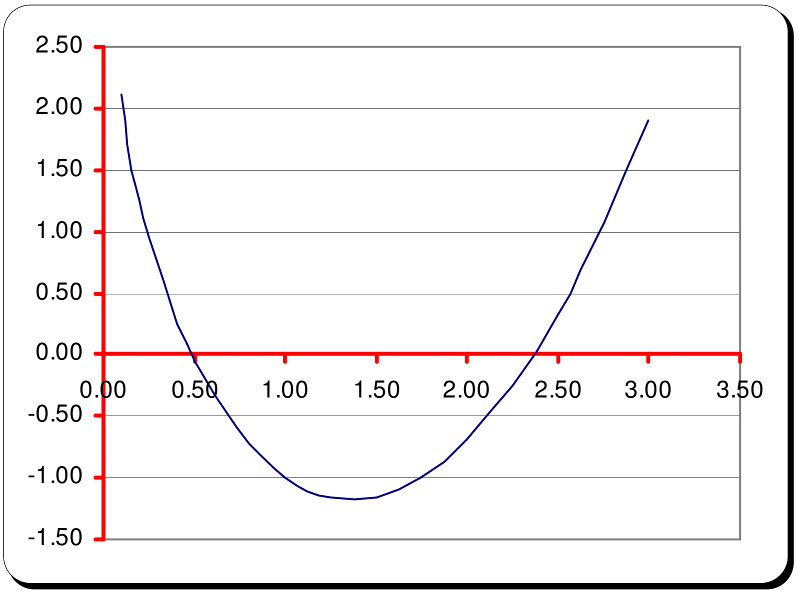
On choisie $x_0 = 1{,}5$, le milieux de l'intervalle (1 , 2).

x_0	1,5	x_7	1,89328601
x_1	1,81712059	x_8	1,8932886
x_2	1,87901574	x_9	1,89328909
x_3	1,89063084	x_{10}	1,89328918
x_4	1,89279466	x_{11}	1,89328919
x_5	1,89319722	x_{12}	1,8932892
x_6	1,89327209	x_{13}	1,8932892

La racine ξ = 1,8932892 avec une précision $\varepsilon = 10^{-7}$.

Exercice : Calculer la racine de l'équation f(x) = x^2 - ln(x) - 2x = 0 par la méthode des points fixes.

On trace la courbe de la fonction avec Excel et précise les deux racines x_{01}= 0,5 et x_{02} = 2,25. Puis on dresse le tableau des fonctions itératives, leurs dérivées et leurs valeurs dans x_{01} et x_{02}. Alors on calcule la première racine ξ_1 avec $\varphi_2(x)$ et ξ_2 avec $\varphi_1(x)$.



Fonction itérative	Fonction dérivée	φ'(x_{01})	φ'(x_{02})
$\varphi_1(x)=\sqrt{\ln(x)+2x}$	$\varphi_1'(x)=\dfrac{\frac{\log(e)}{x}+2}{2\sqrt{\ln(x)+2x}}$	2,589	**0,279**
$\varphi_2(x)=\dfrac{x^2-\ln(x)}{2}$	$\varphi_2'(x)=x-\dfrac{\log(e)}{2x}$	**0,065**	2,153

Dans le tableau ci-dessous sont affichés les résultats des calculs avec Excel.

Voilà les fonctions collées dans les cellules B3 , C3 , D3.

Dans B3 : =RACINE(LN(B2)+2*B2)

Dans C3 : = B3-B2

Dans D3 : = SI(C3<0,000001;"Stop";"Continuer")

Ces formules sont collées respectivement dans les cellules de chaque colonne par la méthode glisser copier - coller. La colonne "Action" nous indict a quelle itération fout-il s'arrêter. Dans notre exercice la précision est 0,000001 et on s'arrête à 18 itérations.

	A	B	C	D				
1	**N**	**x**	**x_i - x_{i-1}**	**Action**	**N**	**x**	**x_i - x_{i-1}**	**Action**
2	0	2,25			10	2,363791	0,000140	'Continuer'
3	1	2,304546	0,054546	'Continuer'	11	2,363863	0,000072	'Continuer'
4	2	2,333233	0,028687	'Continuer'	12	2,363900	0,000037	'Continuer'
5	3	2,348131	0,014899	'Continuer'	13	2,363919	0,000019	'Continuer'
6	4	2,355819	0,007688	'Continuer'	14	2,363929	0,000010	'Continuer'
7	5	2,359772	0,003954	'Continuer'	15	2,363934	0,000005	'Continuer'
8	6	2,361802	0,002030	'Continuer'	16	2,363936	0,000003	'Continuer'
9	7	2,362844	0,001041	'Continuer'	17	2,363938	0,000001	'Continuer'
10	8	2,363377	0,000534	'Continuer'	18	2,363938	0,000001	'Stop'
11	9	2,363651	0,000274	'Continuer'				

EXTRAPOLATION D' EITIKEN

Soit la fonction f(x) et l'équation f(x) = 0. La fonction φ(x) représente la fonction itérative. On a

$\xi = \varphi(\xi)$

Soit e_n l'erreur qu'on commet au n ^{ème} itération.

$$e_n = x_n - \xi$$

$e_{n+1} = x_{n+1} - \xi$

On sait que $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ et que $\xi = \varphi(\xi)$ ce qui donne :

$$e_{n+1} = \varphi(x_n) - \varphi(\xi) \qquad (1)$$

On remplace $x_n = \xi - e_n$ dans l'expression (1)

$$e_{n+1} = \varphi(\xi - e_n) - \varphi(\xi) \qquad (2)$$

On fait le développement de Taylor pour la fonction $\varphi(\xi - e_n)$, sachant que l'erreur e_n est très faible.

$$\varphi(\xi - e_n) = \varphi(\xi) + \varphi^{'}(\xi)e_n + \frac{\varphi^{''}(\xi)e_n^2}{2!} + \frac{\varphi^{'''}(\xi)e_n^3}{3!}$$

Sachant que la valeur de e_n est très faible on peut négliger e_n^2, e_n^3, e_n^3...... et l'expression (2) donne :

$e_{n+1} = \varphi(\xi) + \varphi'(\xi)\, e_n - \varphi(\xi) \rightarrow e_{n+1} = \varphi'(\xi)\, e_n \qquad (3)$

Cette formule montre encore une fois que si $\varphi'(\xi) < 1 \rightarrow e_{n+1} < e_n$ et alors n+1 erreur est plis faible que la n ^{ième}. Ce que signifie que l'itération est convergent.

Revenons vers l'extrapolation d'Eitiken en utilisant l'expression (3) :

$e_2 \cong \varphi'(\xi)e_1$
$e_1 \cong \varphi'(\xi)e_0$

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{e_1}{e_0} \Leftrightarrow \frac{x_2 - \xi}{x_1 - \xi} = \frac{x_1 - \xi}{x_0 - \xi}$$

$(x_2 - \xi)(x_0 - \xi) = (x_1 - \xi)^2 \rightarrow x_2x_0 - \xi x_2 - \xi x_0 + \xi^2 = x_1^2 - 2\xi x_1 + \xi^2$

On exprime ξ :

$$\xi = \frac{x_0 x_2 - x_1^2}{x_0 - 2x_1 + x_2} \qquad (4)$$

On peut donner à cette expression une forme plis agréable. On transforme la formule (4) de façon suivante :

$$\xi = \frac{(x_0^2 - x_0^2) + (2x_0 x_1 - 2x_0 x_1) + x_0 x_2 - x_1^2}{x_0 - 2x_1 + x_2}$$

$$\xi = \frac{x_0^2 - 2x_0 x_1 + x_0 x_2 - (x_0 - x_1)^2}{x_0 - 2x_1 + x_2} \qquad \xi = \frac{x_0(x_0 - 2x_1 + x_2) - (x_0 - x_1)^2}{x_0 - 2x_1 + x_2}$$

$$\boxed{\xi = x_0 - \frac{(x_0 - x_1)^2}{x_0 - 2x_1 + x_2}}$$

C'est la formule d'Eitiken. Elle permet d'obtenir une meilleur approximation à partir de x_0 , x_1 et x_2 a calculés par une formule itérative $\varphi(x)$ déterminée auparavant.

ALGORITHME DE STEPHENSON

Stephenson utilise la formule d'Eitiken pour développer une méthode d'itération.

1. On choisi la valeur de x_0 ;
2. On détermine la fonction itérative $\varphi(x)$;
3. On calcule $x_1 = \varphi(x_0)$;
4. On calcule $x_2 = \varphi(x_1)$;
5. On applique la formule d'Eitiken $$\boxed{\xi = x_0 - \frac{(x_0 - x_1)^2}{x_0 - 2x_1 + x_2}}$$

Exercice : On reprend l'exercice $f(x) = e^{-x} - x = 0$ avec $\varphi(x) = e^{-x}$ et $x_0 = 0$.

La formule de calcul est :

$\varphi(x_{n+1}) = e^{-X_n}$

$x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0,3678794$

$$\xi_1 = 0 - \frac{(0-1)^2}{0 - 2.1 + 0,3678794} = 0,61269984.$$

On reprend ce résultat comme x_0 et on réalise encore une itération.

$x_0 = 0,61269984$, $x_1 = e^{-0,61269984} = 0,54188589$, $x_2 = e^{-0,54188589} = 0,58165029$

$$\xi_2 = 0,61269984 - \frac{(0,61269984 - 0,54188589)^2}{0,61269984 - 2.0,54188589 + 0,58165029} = 0,56735086$$

Après la deuxième itération on arrive au résultat suivant :

ξ = 0,56735086

Rappelons nous maintenant les résultats obtenus avec l'itération simple des points fixes.

x_0	0	x_{11}	0,56842873	x_{22}	0,56714078
x_1	1	x_{12}	0,56641473	x_{23}	0,56714471
x_2	0,36787944	x_{13}	0,56755664	x_{24}	0,56714248
x_3	0,69220063	x_{14}	0,56690891	x_{25}	0,56714375
x_4	0,5004735	**x_{15}**	**0,56727623**	x_{26}	0,56714303
x_5	0,60624354	x_{16}	0,5670679	x_{27}	0,56714344
x_6	0,54539579	x_{17}	0,56718605	x_{28}	0,56714321
x_7	0,57961234	x_{18}	0,56711904	x_{29}	0,56714334
x_8	0,56011546	x_{19}	0,56715704	x_{30}	0,56714326
x_9	0,57114312	x_{20}	0,56713549	x_{31}	0,56714331
x_{10}	0,56487935	x_{21}	0,56714771	x_{32}	0,56714328

On voit bien que ce résultat est obtenu à la 15 ème itération.

AMELIORATION DE LA METHODE D'ITERATION

On dit qu'une méthode d'itération est plus rapide qu'une autre, si la méthode obtient le même résultat avec moins d'itérations. Evidement avec les même conditions aux départ (même approche de x_0 vers ξ). On dit aussi que la vitesse d'itération est plus grande.

Au lieu d'utiliser la formule classique :

$x_{n+1} = x_n + \Delta x$

où $\Delta x = x_{n+1} - x_n$ est la correction, on peut utiliser la formule :

$x_{n+1} = x_n + k\Delta x$

Comment choisir le coefficient k ? on suppose que la meilleur valeur de k est celle qui donne :

$x_{n+1} = \xi$

Cela signifie que à la n+1 itération on obtient le résultat final – la racine ξ.

Réfléchissons sur le schéma ci-dessous (fig. 10):

AMELIORATION DE LA METHODE DU POINT FIXE

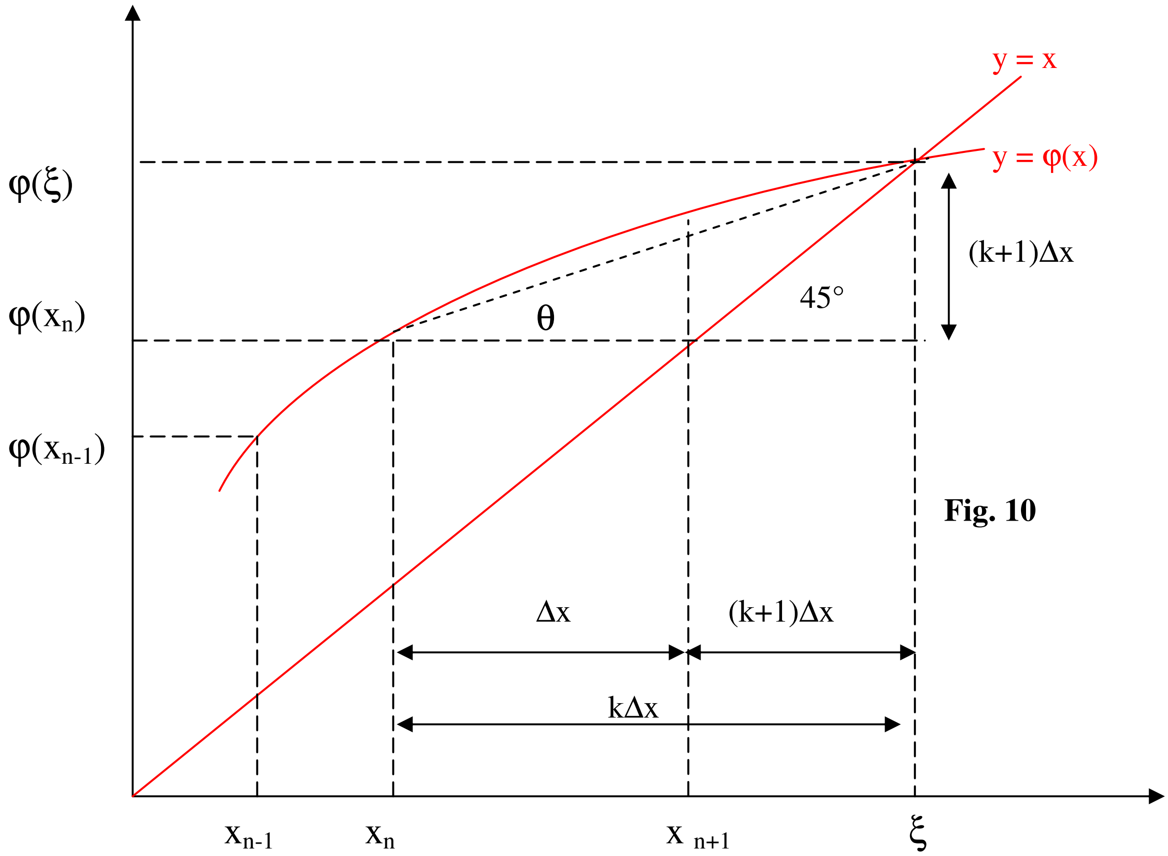


Fig. 10

$$\mathrm{tg}(\theta)\frac{(k-1)\,\Delta x}{k\Delta} = \frac{k-1}{k} \qquad (1) \qquad\qquad \mathrm{tg}(\theta) = \frac{\varphi(\xi) - \varphi(x_n)}{\xi - x_n} \qquad (2)$$

Le théorème de Lagrange appliqué à l'expression (2) donne :

$$\mathrm{tg}\,(\theta) = \frac{\varphi'(\mu)(\xi - x_n)}{\xi - x_n} = \varphi'(\mu) \qquad (3)$$

Les formules (1) et (3) donnent : $x_n \leq \mu \leq \xi$

$$\frac{k-1}{k} = \varphi'(\mu) \Rightarrow k = \frac{1}{1-\varphi'(\mu)}$$

$$\boxed{k = \frac{1}{1-\varphi'(\mu)}} \qquad (4)$$

Ici μ est inconnu mais on peut faire une approche : $x_n \cong \xi$

$$\varphi'(\mu) = \frac{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \qquad \boxed{\varphi'(\mu) = \frac{\varphi(x_n) - x_n}{x_n - x_{n-1}}} \qquad (5)$$

Alors on calcule $\varphi'(\mu)$ de la formule (5) et k de la formule (4). Ce méthode est plus rapide, car $\theta < 45°$ tg (θ) < 1 et respectivement $\varphi'(\mu) < 1$. Alors

$k = \dfrac{1}{1-\varphi'(\mu)} > 1$ et l'itération est plus rapide. La formule d'itération devienne :

$x_{n+1} = x_n + \Delta x$
$x_{n+1} = x_n + k\Delta x$

$\Delta x = x_{n+1} - x_n$ et $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + k\,(\varphi(x_n) - x_n)} \qquad (6)$$

METHODE DE NEWTON

Cette méthode est une modification da la méthode d'itération des points fixes. Ile est connu aussi sous le nom de Newton – Raphson. Dans cette méthode on remplace la formule de k formule (4) dans la formule (6)

$$k = \frac{1}{1-\varphi'(\mu)} \qquad x_{n+1} = x_n + k\,(\varphi(x_n) - x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\varphi(x_n) - x_n}{1-\varphi'_n(x_n)} = \frac{x_n - x_n\,\varphi'_n(x_n) + \varphi(x_n) - x_n}{1-\varphi'_n(x_n)}$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{\varphi(x_n) - x_n\,\varphi'_n(x_n)}{1-\varphi'_n(x_n)}} \qquad \textbf{(1)}$$

Ceci est la nouvelle formule d'itération. Elle est équivalente à la simple méthode d'itération :

$$x_{n+1} = \tau(x_n) \quad \text{où} \quad \tau(x_n) = \frac{\varphi(x_n) - x_n\,\varphi'_n(x_n)}{1-\varphi'_n(x_n)}$$

On a déjà démontré que l'itération est convergente si :

$$|\tau'(x_n)| < 1$$

Voyons quelles sont les conditions nécessaires pour que l'inégalité ci-dessus est vérifiée.

$$\tau'(x) = \frac{[\varphi'(x) - \varphi'(x) - x\varphi''(x)]\,[1-\varphi'(x)]}{[1-\varphi'(x)]^2} + \frac{[\varphi(x) - x\varphi'(x)]\varphi''(x)}{[1-\varphi'(x)]^2}$$

On développe :

$$\tau^{'}(x) = \frac{-x\varphi^{''}(x) + x\varphi^{'}(x)\varphi^{''}(x) + \varphi(x)\varphi^{''}(x) - x\varphi^{'}(x)\varphi^{''}(x)}{\left[1-\varphi^{'}(x)\right]^2}$$

$$\tau^{'}(x) = \frac{\varphi^{''}(x)\left[\varphi(x) - x\right]}{\left[1-\varphi^{'}(x)\right]^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Cette expression est < 1 si :

1. x_0 est assai près de ξ . dans ce cas x ≈ φ(x) ;
2. La dérivée seconde φ''(x) est limité à droite ;
3. La dérivée φ'(x) n'est pas très près de 1 .

La formule (2) peut être donné par l'expression :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}} \qquad \textbf{(3)}$$

où la fonction f(x) = φ(x) – x . Cette expression est connue sous le nom de formule de Newton. En faite les formules (1) et (3) sont équivalentes. Il suffit de remplacer f(x) et f '(x) dans (3) et on retrouve l'expression (1)

f(x) = φ(x) – x

f '(x) = φ'(x) – 1

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x) - x}{\varphi^{'}(x) - 1}$$

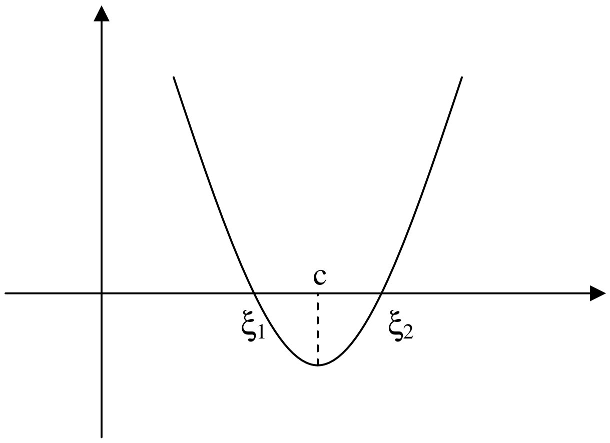
On met le même dénominateur et on trouve l'expression (1):

$$x_{n+1} = \frac{\varphi(x_n) - x_n\,\varphi_n'(x_n)}{1 - \varphi_n'(x_n)}$$

Pour que l'itération avec la formule de Newton donne de résultats convergente il faut que :

1. x_0 est choisi assai près de la racine ξ de l'équation $f(x) = 0$ ce qui fait que la valeur de $f(x_n)$ est très petite.
2. $f'(x_0)$ n'est pas très proche de 0. Cela signifie que les racines ξ_1 et ξ_2 ne doivent pas être proches l'une de l'autre. Par exemple :

Si ξ_1 et ξ_2 sont proches, l'intervalle $[\xi_1 \;\; \xi_2]$ est petit et on risque de choisir la valeur de x_0 proche du point c, là où la fonction a un extremum et $f'(c) = 0$. Dans ce cas $f'(x_0) \approx 0$ et l'expression $\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ tend vers l'infinie.



La formule de Newton peut être démontrée d'une autre façon. Soit l'équation $f(x) = 0$ et x_0 une première approche vers la racine ξ.

Soit δx une correction assai petite tel que

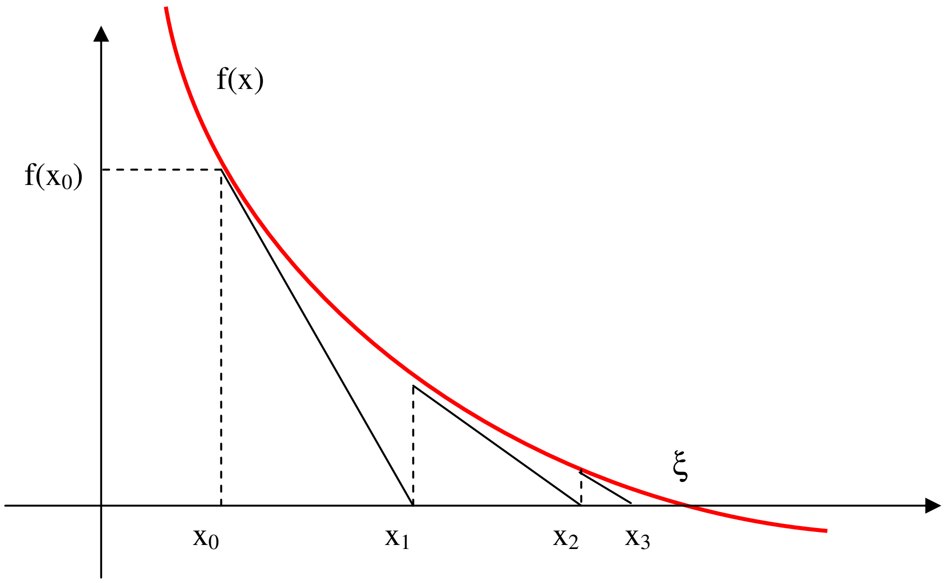
$f(x_0 + \delta x) = 0$

En faisant un développement de Taylor sur cette fonction on arrive aux résultats suivants :

$$f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\delta x + \frac{f''(x_0)\delta x^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)\delta x^3}{3!} + ... = 0$$

Il suffit de négliger les terme qui contient δx^2, δx^3 , δx^4 ….. qui sont négligeables et on trouve :

$$f(x_0)+f'(x_0)\delta x=0 \qquad \delta x=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



$x_1 = x_0 + \delta x$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$\Rightarrow$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

C'est la formule de Newton.

INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE LA METHODE DE NEWTON

On représente la courbe de la fonction f(x) et le point $[x_0,f(x_0)]$. La tangente vers la courbe à ce point a l'expression :

$y=f(x_0)+f\,'(x_0)(x-x_0)$

Elle coupe l'axe Ox au point (x_1 , 0)
On remplace ses coordonnées dans l'équation de la tangente

$0 = f(x_0) + f\,'(x_0)(x_1-x_0) \rightarrow\ x_1 - x_0 = -\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}\quad x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Donc en calculant x_1 avec la formule $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ on ne fait que trouver l'intersection de la tangente vers la courbe de la fonction f(x) au point $[x_0,f(x_0)]$ avec l'axe Ox.

Exercice : On reprend l'exemple $f(x) = e^{-x} - x = 0$

$f(x) = e^{-x} - x$
$f'(x) = -e^{-x} - 1$
$x_0 = 0$

$$x_1 = 0 - \frac{e^0 - 0}{-e^0 - 1} = 0{,}5 \qquad\qquad x_2 = 0{,}5 - \frac{e^{-0,5} - 0{,}5}{-e^{-0,5} - 1} = 0{,}5663110$$

$$x_3 = 0{,}5663110 - \frac{e^{-0,5663110} - 0{,}5663110}{-e^{-0,5663110} - 1} = 0{,}5671432$$

On remarque que la convergence est très rapide. Avec la méthode des points fixes ce résultat a été obtenu à la 28 ème itération

$x_{28} = 0,56714321$

Exercice : On doit calculer √2 en résolvant l'équation :

$f(x) = x^2 - 2 = 0$ et $f'(x) = 2x$

On applique la formule de Newton : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Avec $x_0 = 2$

$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - 2/4 = 1$ De même façon on calcule x_2 , x_3 , x_4 ……

x_0	2
x_1	1,5
x_2	1,41666
x_3	1,41442157
x_4	1,4142136

METHODE DES SECANTES

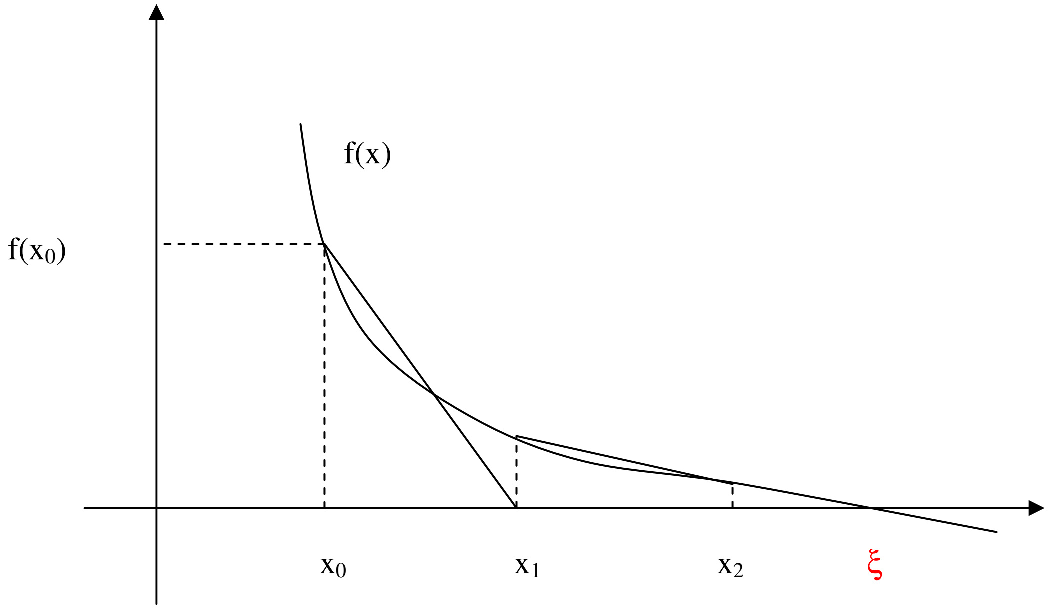
La méthode de Newton possède de plusieurs avantages, mais elle nécessite le calcul de la dérivée de la fonction f(x). Si la fonction est complexe sa dérivée peut être difficile à évaluer. Pour contourner cette difficulté on remplace la remplace dans la formule de Newton par l'expression :

$$f^{'}(x) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \qquad \rightarrow \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

Dans l'interprétation géométrique on remplace la tangente vers le point $[x_0,f(x_0)]$

par la sécante tracée avec les points $[x_0,f(x_0)]$ et $[x_1,f(x_1)]$. Cela signifie qu'au départ il faut choisir deux points : x_0 et x_1 .



Prenons toujours le même exemple $f(x) = e^{-x} - x = 0$ avec $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$

x_0	0	x_5	0,56714331
x_1	1	x_6	0,56714329
x_2	0,61269984	x_7	0,56714329
x_3	0,56383839	x_8	0,56714329
x_4	0,56717036		

LES RACINES D'UNE EQUATION ALGEBRIQUE

Soit l'équation algébrique d'ordre m, $f(x) = 0$ où

$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + a_3x^{m-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{m-1}x + a_m$

Où les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$ sont des réels. Dans cette étude on va appliquer la formule de Newton : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Les calculs de f(x) et de f '(x) vont se faire par la règle de Hörner.

On pose : $b_0 = a_0$ **(1)**

$b_j = a_j + b_{j-1}x_n$ avec $j = 1, 2, 3, \ldots\ldots m-1$

On vas montrer que $f(x_n) = b_m$

Pour faciliter la démonstration on pose $m = 3$.

$b_0 = a_0 \rightarrow a_0 = b_0$

$b_1 = a_1 + b_0x_n \rightarrow a_1 = b_1 - b_0x_n$

$b_2 = a_2 + b_1x_n \rightarrow a_2 = b_2 - b_1x_n$

$b_3 = a_3 + b_2x_n \rightarrow a_3 = b_3 - b_2x_n$

On remplace les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 dans l'expression :

$f(x_n) = a_0x_n^{3} + a_1x_n^{2} + a_2x_n + a_3$

$f(x_n) = b_0x_n^{m} + (b_1 - b_0x_n)\, x_n^{m-1} + (b_2 - b_1x_n)\, x_n^{m-2} + (b_3 - b_2x_n)x_n^{m-3}$

On développe:

$f(x_n) = b_0x_n^{3} + b_1x_n^{2} - b_0x_n^{3} + b_2x_n - b_1x_n^{2} + b_3 - b_2x_n = b_3$

$f(x_n) = b_3 \rightarrow f(x_n) = b_m$

Maintenant on doit répéter les mêmes démarches pour exprimer f ''xn avec une formule simple'

L'équation: $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + a_3x^{m-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{m-1}x + a_m$

Peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{f(x) = (x - x_n)\ \varphi(x) + b_m}$$

où $\varphi(x) = b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + b_2x^{m-3} + \ldots ..b_{m-1}$

Démonstration : Pour faciliter la démonstration on pose m = 3

$\varphi(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2$

$f(x) = b_0x^3 + (b_1 - b_0x_n)\ x^2 + (b_2 - b_1x_n)\ x + (b_3 - b_2x_n)$

On développe :

$f(x) = (b_0x^2 + b_1x + b_2)\ x + b_3 - (b_0x^2 + b_1x + b_2)x_n$

$f(x) = (x - x_n)\ (b_0x^2 + b_1x + b_2) + b_3 = (x - x_n)\ \varphi(x) + b_3$

A partir de cette dernière expression il est facile de déterminer la fonction dérivée de f(x) :

$f'(x) = (x - x_n)\ \varphi'(x) + \varphi(x)$ Alors $f'(x_n) = \varphi(x_n)$ un polynôme de (m-1) degré.
On fait recours encore une fois aux formules de Horner :

$c_0 = b_0$ **(2)**
$c_j = b_j + c_{j-1}\ x_n$

De même façon on peut démontrer que

$\varphi(x_n) = c_{m-1} = f'(x)$ et

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{b_m}{c_{m-1}}$ où b_m et c_{m-1} sont calculés respectivement par les formules (1) et (2).

Exercice : $x^3 - x - 1 = 0$ On prend $x_0 = 1,3$

$a_0 = 1$	$b_0 = a_0 = 1$	
$a_1 = 0$	$b_1 = a_1 + b_0x_0$	$c_0 = b_0 = 1$
$a_2 = -1$	$b_2 = a_2 + b_1x_0$	$c_1 = b_1 + c_0x_0$
$a_3 = -1$	$b_3 = a_3 + b_2x_0$	$c_2 = b_2 + c_1x_0$

On calcule x_1 par la formule :

$$x_1 = x_0 - \frac{b_3}{c_2}$$

- ✓ Voila le tableau des résultants après la première itération:

x_0	1,3						
a_0	1	b_0	1,000				
a_1	0	b_1	1,300	c_0	1		
a_2	-1	b_2	0,690	c_1	2,600		
a_3	-1	b_3	-0,103	c_2	4,070	**x_1**	**1,325307**

- ✓ On fait une deuxième itération :

$a_0 = 1$	$b_0 = a_0 = 1$	
$a_1 = 0$	$b_1 = a_1 + b_0x_1$	$c_0 = b_0 = 1$
$a_2 = -1$	$b_2 = a_2 + b_1x_1$	$c_1 = b_1 + c_0x_1$
$a_3 = -1$	$b_3 = a_3 + b_2x_1$	$c_2 = b_2 + c_1x_1$

Après les calcules on obtient les résultants suivants :

x_0	1,3						
a_0	1	b_0	1,000				
a_1	0	b_1	1,325	c_0	1		
a_2	-1	b_2	0,755625	c_1	2,65		
a_3	-1	b_3	0,001203	c_2	-4,267	**X_2**	**1,3247181**

- ✓ Une troisième itération donne les résultats suivants

x_0	1,3						
a_0	1	b_0	1,000				
a_1	0	b_1	1,3247181	c_0	1		
a_2	-1	b_2	0,754878	c_1	2,649436		
a_3	-1	b_3	$5,5.10^{-7}$	c_2	4,264634	**X_3**	**1,3247179**

Après cette itération on s'arrête car la précision 10^{-6}, est vérifiée.
$| x_3 - x_2 | = | \mathbf{1,3247179 - 1,3247181} | = 0,12.10^{-6} < 10^{-6}$

RESOLUTION DE SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES

L'une des méthodes le plus utilisé pour la résolution d'un système d'équations linéaire est la méthode de Gausse. Elles consistent à l'élimination consécutive des inconnus. Pour faciliter l'exposé on prend un exemple d'un système de 4 inconnus et 4 équations.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}$$
$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}$$

On devise l'équation (1) par a_{11} (les éléments a_{ii} sont appelés éléments principaux) pour obtenir :

$$x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4 = c_{15} \qquad \textbf{(1)}$$

où le coefficient $c_{ij} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$.

A la suite on multiple l'équation (1) consécutivement par a_{21} , a_{31} , a_{41} afin de la soustraire des équations (2) , (3) , (4) du système. On obtient au système suivant :

$$\left| \begin{array}{l} a_{21}x_1 + a_{21}c_{12}x_2 + a_{21}c_{13}x_3 + a_{21}c_{14}x_4 = a_{21}c_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \end{array} \right.$$

$$(a_{22} - a_{21}c_{12})\, x_2 + (a_{23} - a_{21}c_{13})x_3 + (a_{24} - a_{21}c_{14})x_4 + (a_{24} - a_{21}c_{14})\, x_4 = a_{25} - a_{21}c_{15}$$

On pose $a^1_{22} = (a_{22} - a_{21}c_{12})$ $\qquad a^1_{25} = (a_{25} - a_{21}c_{15})$

$a^1_{23} = (a_{23} - a_{21}c_{13})$ $\qquad a^1_{24} = (a_{24} - a_{21}c_{14})$

La première équation devienne : $a_{22}^{1}\,x_2 + a_{23}^{1}x_3 + a_{24}^{1}\,x_4 = a_{25}^{1}$ On fait de même avec les autres équations et le système est réduit à 3 inconnus et 3 équations :

$$\begin{aligned} a_{22}^{1}\,x_2 + a_{23}^{1}x_3 + a_{24}^{1}\,x_4 &= a_{25}^{1} \\ a_{32}^{1}x_2 + a_{33}^{1}x_3 + a_{34}^{1}x_4 &= a_{35}^{1} \\ a_{42}^{1}\,x_2 + a_{43}^{1}x_3 + a_{44}\,x_4 &= a_{45}^{1} \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

De même façon on devise l'équation (2) par a_{22}^{1} :

$$x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}\,x_4 = c_{25} \qquad \text{où} \qquad \textbf{(2)}$$

$$c_{23} = \frac{a_{23}^{1}}{a_{22}} \quad \text{En générale} \quad c_{2j} = \frac{a_{2j}^{1}}{a_{22}^{1}}$$

A la suite on multiple l'équation (2) consécutivement par a_{32}^{1} a_{42}^{1} afin de la soustraire des équations (3) , (4) du système. On obtient au système suivant :

$$\begin{aligned} a_{33}^{2}x_3 + a_{34}^{2}x_4 &= a_{35}^{2} \qquad \textbf{(3)} \\ a_{43}^{2}x_3 + a_{44}^{2}\,x_4 &= a_{45}^{2} \qquad \textbf{(4)} \end{aligned}$$

où $a_{33}^{2} = a_{33}^{1} - a_{32}^{1}c_{23}$

et en général $a_{ij}^{2} = a_{ij}^{1} - a_{i2}^{1}c_{2j}$

Ce système est déjà de 2 inconnus et 2 équations. Il faut répéter cette opération encore une fois pour rester avec un seul inconnu x_4. Pour cette raison on devise l'équation (3) par a_{33}^{2} (élément principal) et on la multiplie par a_{43}^{2} . Cette équation devient :

$$a_{43}^{2}x_3 + a_{43}^{2}c_{34}x_4 = a_{43}^{2}c_{35} \quad \textbf{(5)}$$

où $c_{34} = \dfrac{a_{34}^{2}}{a_{33}^{2}}$ et en générale $c_{3j} = \dfrac{a_{3j}^{2}}{a_{33}^{2}}$. On fait la soustraction des équations (5) et (4)

$$a_{43}^{2}x_3 + a_{43}^{2}c_{34}x_4 = a_{43}^{2}c_{35}$$
$$a_{43}^{2}x_3 + a_{44}^{2}x_4 = a_{45}^{2}$$

Enfin on obtient l'expression de x_4 :

$$(a_{44}^{2} - a_{43}^{2}c_{34})\,x_4 = (a_{45}^{2} - a_{43}^{2}c_{35})$$

On pose $a_{44}^{3} = (a_{44}^{2} - a_{43}^{2}c_{34})$ et $a_{45}^{3} = (a_{45}^{2} - a_{43}^{2}c_{35})$

$$x_4 = \frac{a_{45}^{3}}{a_{44}^{3}} = c_{45}$$

On obtient le système triangular :

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4 &= c_{15} \\ x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 &= c_{25} \\ x_3 + c_{34}x_4 &= c_{35} \\ x_4 &= c_{45} \end{aligned} \qquad \text{où} \qquad \begin{aligned} &x_4 = c_{45} \\ &x_3 + c_{34}x_4 = c_{35} \\ &x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 = c_{25} \\ &x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4 = c_{15} \end{aligned}$$

Dans ce méthode on suppose que les éléments principaux sont différents de zéro

$$a_{ii}^{i-1} \neq 0$$

Pour donner aux calculs une forme plus agréable et compréhensive, on dresse le tableau suivant :

	x_1	x_2	x_3	x_4	CI
Etape 1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
	1	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
Etape 2		a^1_{22}	a^1_{23}	a^1_{24}	a^1_{25}
		a^1_{32}	a^1_{33}	a^1_{34}	a^1_{35}
		a^1_{42}	a^1_{43}	a^1_{44}	a^1_{45}
		1	c_{23}	c_{24}	c_{25}
Etape 3			a^2_{33}	a^2_{34}	a^2_{35}
			a^2_{43}	a^2_{44}	a^2_{45}
			1	c_{34}	c_{35}
Etape 4				a^3_{44}	a^3_{45}
				1	c_{45}

7,9	5,6	5,7	-7,2	6,68
8,5	-4,8	0,8	3,5	9,95
4,3	4,2	-3,2	9,3	8,6
3,2	-1,4	-8,9	3,3	1
1	0,708861	0,721519	-0,9114	0,84557
	-10,82532	-5,33291	11,2468	2,762658
	1,151899	-6,30253	13,219	4,964051
	-3,668354	-11,2089	6,21646	-1,70582
	1	0,492633	-1,0389	-0,2552
		-6,87	14,4157	5,258019
		-9,40171	2,40526	-2,642
		1	-2,0984	-0,76536
			-17,323	-9,83769
			1	0,5679

Exercice : Prenons l'exemple suivant :

$$7,9x_1 + 5,6x_2 + 5,7x_3 - 7,2x_4 = 6,68$$
$$8,5x_1 - 4,8x_2 + 0,8x_3 + 3,5x_4 = 9,95$$
$$4,3x_1 + 4,2x_2 - 3,2x_3 + 9,3x_4 = 8,6$$
$$3,2x_1 - 1,4x_2 - 8,9x_3 + 3,3x_4 = 1$$

Cet exemple suppose beaucoup de calcul et si le nombre d'inconnus est grande et on doit avoir recours à l'ordinateur. On peut utiliser l'Excel de Microsoft. Les résultats sont affichés dans le tableau droit ci-dessus.

LA METHODE D'ITERATION

La méthode de Gausse donne des racines exactes, mais si le nombre d'équations est très grand les calcules deviennent longues et compliqués. En plus souvent on arrondi les calcules et les résultats diffèrent des racines exactes. Dans ce cas il est plus facile de faire des calcules approximatives et de s'approcher vers la valeur exacte pas à pas.

Soit le système de n inconnus et n équations :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \qquad \textbf{(1)}$$

On suppose que les coefficient sur le diagonale $a_{ii} \neq 0$ (i = 1, 2, 3, …..n)
On exprime x_1 dans le première équation, x_2 dans la deuxième et ainsi de suite…

$$\begin{array}{l} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots\ldots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots\ldots + \alpha_{2n}x_n \\ x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_2 + \alpha_{32}x_2 + \ldots\ldots + \alpha_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots\ldots + \alpha_{n\,n-1}x_{n-1} \end{array}$$

où $\beta_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$, $\beta_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}}$, $\beta_3 = \dfrac{b_3}{a_{33}}$ …… $\beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$ et

$$\alpha_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \quad , \quad \alpha_{13} = -\frac{a_{13}}{a_{11}} \qquad \alpha_{ij} - = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$

On pose

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{Vmatrix} \qquad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{vmatrix} \qquad \beta = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ \beta_n \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & . & \alpha_{nn} \end{Vmatrix}$$

Dans ce cas on a **A.X = b** et **X = β - αX .**

Au début on choisie une approche vers les racines :

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0 ......x_n^0)$$

On remplace ces valeurs dans l'équation **X = β - α**X et on obtient la première approximation :

$$X^1 = \beta - \alpha X^0$$
$$X^2 = \beta - \alpha X^1$$
$$X^3 = \beta - \alpha X^2$$
……………
$$X^k = \beta - \alpha X^{k-1}$$

On obtient une suite $X^0, X^1, X^3, ... X^u$ Si cette suite est convergente on a :

$$\lim_{k \to \infty} X^k = X$$

Maintenant on va annoncer un théorème suivant sans démonstration :

Si les coefficients du système (1) satisfait une des conditions

1. $\sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| \prec 1$ (j = 1, 2, 3, ...n)

2. $\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| \prec 1$ (i = 1, 2, 3, ...n)

3. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right|^{2} \prec 1$

Alors la suite $X^0, X^1, X^3, ... X^u$ *est convergente et sa limite est la solution unique du système.*

Exercice : Trouver la solution du système par la méthode d'itération :

$$\begin{aligned}
4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}16x_4 &= 8\\
0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 - 0{,}12x_4 &= 9\\
0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 + 0{,}06x_4 &= 20\\
0{,}02x_1 + 0{,}06x_2 + 0{,}04x_3 - 10x_4 &= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2 - 0{,}06x_2 + 0{,}02x_3 - 0{,}04x_4\\
x_2 &= 3 - 0{,}03x_1 + 0{,}05x_3 + 0{,}04x_4\\
x_3 &= 5 - 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2 - 0{,}015x_4\\
x_4 &= 0{,}1 + 0{,}002x_1 + 0{,}006x_2 - 0{,}004x_3
\end{aligned}$$

On applique le théorème pour vérifier si la suite x_1, x_2, x_3, x_4 est convergente.

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} &= 0{,}06 + 0{,}02 + 0{,}04 = 0{,}12 < 1\\
\alpha_{21} + \alpha_{23} + \alpha_{24} &= 0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}04 = 0{,}12 < 1\\
\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{34} &= 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}015 = 0{,}045 < 1\\
\alpha_{41} + \alpha_{42} + \alpha_{43} &= 0{,}002 + 0{,}006 + 0{,}004 = 0{,}012 < 1
\end{aligned}$$

Le théorème est vérifié et on commence les calcules en choisissant la première approche les coefficients libres βi

$x_1^0 = 2$ $x_2^0 = 3$ $x_3^0 = 5$ $x_4^0 = 0{,}1$

$x_1 = 2 - 0{,}06\,(3) + 0{,}02\,(5) - 0{,}04\,(0{,}1) = \mathbf{1{,}916}$

$x_2 = 3 - 0{,}03\,(2) + 0{,}05\,(5) + 0{,}04\,(0{,}1) = \mathbf{3{,}186}$

$$x_3 = 5 - 0{,}01\ (2)\ + 0{,}02\ (3)\ - 0{,}015\ (0{,}1) = \mathbf{5{,}0385}$$
$$x_4 = 0{,}1 + 0{,}002\ (2) + 0{,}006\ (3)\ - 0{,}004\ (5) = \mathbf{0{,}142}$$

Deuxième itération :

$$x_1 = 2 - 0{,}06\ (3{,}186) + 0{,}02\ (5{,}0385)\ - 0{,}04\ (0{,}142)\ = \mathbf{1{,}9039}$$
$$x_2 = 3 - 0{,}03\ (1{,}916) + 0{,}05\ (5{,}0358)\ + 0{,}04\ (0{,}142) = \mathbf{3{,}188}$$
$$x_3 = 5 - 0{,}01\ (1{,}916)\ + 0{,}02\ (3{,}186)\ - 0{,}015\ (0{,}142) = \mathbf{5{,}0424}$$
$$x_4 = 0{,}1 + 0{,}002\ (1{,}916) + 0{,}006\ (3{,}186)\ - 0{,}004\ (5{,}0385) = \mathbf{0{,}1431}$$

Troisième itération :

$$x_1 = 2 - 0{,}06\ (3{,}188) + 0{,}02\ (5{,}0424)\ - 0{,}04\ (0{,}1431)\ = \mathbf{1{,}9038}$$
$$x_2 = 3 - 0{,}03\ (1{,}9039) + 0{,}05\ (5{,}0424)\ + 0{,}04\ (0{,}1431) = \mathbf{3{,}1893}$$
$$x_3 = 5 - 0{,}01\ (1{,}9039)\ + 0{,}02\ (3{,}188)\ - 0{,}015\ (0{,}1431) = \mathbf{5{,}0425}$$
$$x_4 = 0{,}1 + 0{,}002\ (1{,}9039) + 0{,}006\ (3{,}188)\ - 0{,}004\ (5{,}0424) = \mathbf{0{,}1431}$$

On peut continuer ou s'arrêter selon la précision demandée. D'un autre coté on peut tester les résultats dans la système d'‘équation. Ces résultats sont obtenus à l'aide d'une calculatrice. Avec l'ordinateur on arrive à des résultats beaucoup plus précis rapidement. Voilà ce qui donne l'ordinateur :

	0	1	2	3
x_1	2	1,916	1,90345	1,9031183
x_2	3	3,194	3,200125	3,200752
x_3	5	5,0385	5,04259	5,04282075
x_4	0,1	0,142	0,14315	0,14317801

4	5	6	7	8
1,903084	1,903083	1,9030829	1,9030829	1,9030829
3,200775	3,2007766	3,2007766	3,2007766	3,2007766
5,042836	5,0428369	5,042837	5,042837	5,042837
0,143182	0,1431822	0,1431822	0,1431822	0,1431822

RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS NON LINAIRES

Soit le système non linéaire :

F(x,y) = 0
Φ(x,y) = 0

On suppose qu'une approche x_0 , y_0 vers la solution est connue. Soient h et k les corrections respectivement de x_0 et de y_0 tel que

$x = x_0 + h$ et $y = y_0 + k$

où x et y sont des racines exactes du système. Alors on a :

$F(x_0 + h , y_0 + k) = 0$

$$\Phi(x_0 + h , y_0 + k) = 0$$

On va faire le développement de Taylor pour les fonction F et Φ. On rappelle la formule de Taylor : Si une fonction f(x) est définie et continue sur l'intervalle fermé [a, b] ainsi que ses n premières dérivées, on peut écrire :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f^{'}(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{n}(a)$$

On pose : h = (b - a) et b = a + h et on remplace dans la formule ci-dessus :

$$f(a+h) = f(a) + h.f^{'}(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{h^n}{n!} f^{n}(a)$$

On revient vers notre démonstration.

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = F(x_0, y_0) + hF_n^{'}(x_0, y_0) + kF_y^{'}(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2!} F_x^{''}(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{k^2}{2!} F_y^{''}(x_0, y_0)$$

$$\Phi(x_0 + h, y_0 + k) = \Phi(x_0, y_0) + h\Phi_n^{'}(x_0, y_0) + k\Phi_y^{'}(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2!} \Phi_x^{''}(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{k^2}{2!} \Phi_y^{''}(x_0, y_0)$$

Les correction h et k étant assai petits on néglige h^2 , k^2 , h^3 , k^3 , ….. Le développement des fonctions F et Φ devient :

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = F(x_0, y_0) + hF_n^{'}(x_0, y_0) + kF_y^{'}(x_0, y_0)$$

$$\Phi(x_0 + h, y_0 + k) = \Phi(x_0, y_0) + h\Phi_n^{'}(x_0, y_0) + k\Phi_y^{'}(x_0, y_0)$$

On arrive à un système de deux inconnus h et k et deux équations :

$$\begin{array}{l|l} \Phi(x_0, y_0) + & h\Phi_n^{'}(x_0, y_0) + k\Phi_y^{'}(x_0, y_0) = 0 \\ F(x_0, y_0) + & hF_n^{'}(x_0, y_0) + kF_y^{'}(x_0, y_0) = 0 \end{array}$$

Ce système a une solution seulement et si seulement la discriminante :

$$\Delta = \begin{Vmatrix} F_x^{'}(x_0, y_0) & F_y^{'}(x_0, y_0) \\ \Phi_x^{'}(x_0, y_0) & \Phi_y^{'}(x_0, y_0) \end{Vmatrix} = 0$$

A partir de ce système on calcule h_1 et k_1 et puis on détermine x_1 et y_1 par les formules :

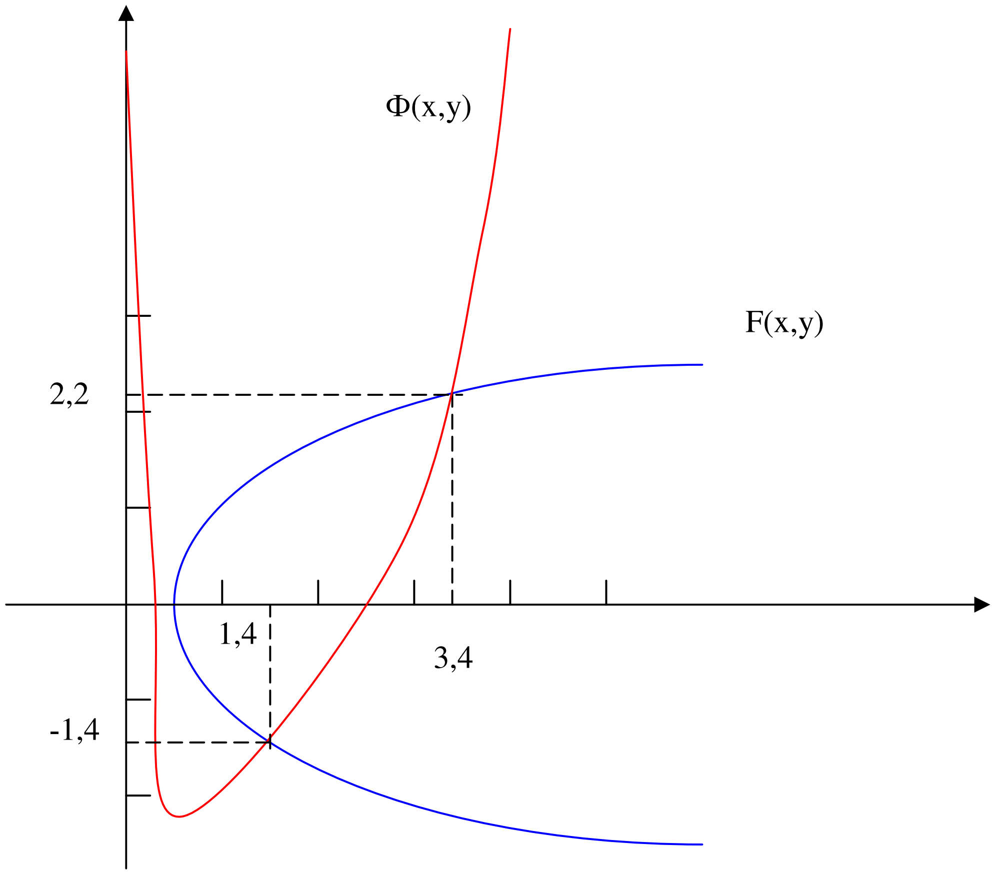
$x_1 = x_0 + h_1$ et $y_1 = y_0 + k_1$

D'une façon identique on détermine x_2 et y_2, x_3 et y_3 ….. x_k et y_k

Exercice : Déterminer la solution du système :

$$\left. \begin{array}{l} x + 3.\lg(x) - y^2 = 0 \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \end{array} \right|$$

Pour déterminer une première approche x_0, y_0 vers les racines on trace les courbes approximatives des deux fonctions :



$$y_1 = \sqrt{x + 3.\lg(x)}$$

$$y_2 = 2x - 5 + \frac{1}{x}$$

A partir des courbes on peut déterminer approximativement la coordonnée du point d'intersection qui représente pour nous la première approche vers la solution du système.

$x_0 = 3{,}4$
$y_0 = 2{,}2$
On calcule la valeur de chaque fonction et ses dérivée premiers en ce point :

$F(x_0,y_0) = x_0 + 3.\lg(x_0) - y_0^2$
$\Phi(x_0,y_0) = 2x_0^2 - x_0y_0 - 5x_0 + 1 = 0$

$F(x_0,y_0) = 3{,}4 + 3.\lg(3{,}4) - (2{,}2)^2 = \mathbf{0{,}1545}$
$\Phi(x_0,y_0) = 2(3{,}4)^2 - (3{,}4).(2{,}2) - 5(3{,}4) + 1 = \mathbf{0{,}3600}$

$$F'_x(x_0, y_0) = 1 + 3\frac{1}{x_0.\ln(10)} \qquad \Phi'_x(x_0, y_0) = 4x_0 - y_0 - 5$$

$$F'_y(x_0, y_0) = -2y \qquad \Phi'_y(x_0, y_0) = -x_0$$

$F(x_0,y_0) = = \mathbf{0{,}1545}$
$\Phi(x_0,y_0) = = \mathbf{0{,}3600}$

$$F'_x(x_0, y_0) = 1{,}3832 \qquad \Phi'_x(x_0, y_0) = 6{,}400$$

$$F'_y(x_0, y_0) = -4{,}400 \qquad \Phi'_y(x_0, y_0) = -3{,}400$$

On remplace ses valeurs dans le système et on le résout par la méthode de substitution :

$$F(x_0, y_0) + hF'_n(x_0, y_0) + kF'_y(x_0, y_0) = 0$$
$$\Phi(x_0, y_0) + h\Phi'_n(x_0, y_0) + k\Phi'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$1{,}3832h_1 - 4{,}4k_1 = -0{,}1545$$
$$6{,}4h_1 - 3{,}4k_1 = 0{,}36$$

$$h_1 = \frac{-0{,}1545 + 4{,}4k_1}{1{,}3832} \qquad 6{,}4\left(\frac{-0{,}1545 + 4{,}4k_1}{1{,}3832}\right) - 3{,}4k_1 = 0{,}36$$

$$\boxed{\mathbf{k_1 = 0{,}063 \quad h_1 = 0{,}089}}$$

$x_1 = x_0 + h_1$ et $y_1 = y_0 + k_1$ $\Rightarrow$ $x_1 = 3{,}4 + 0{,}089 = 3{,}489$ et $y_1 = 2{,}2 + 0{,}063 = 2{,}263$

$$\mathbf{x_1 = 3{,}489}$$
$$\mathbf{y_1 = 2{,}263}$$

La deuxième approche k_2 et h_2 est calculée de la même façon et les résultats sont affichés dans le tableau ci-dessous :

$F(x_1,y_1) =$ -0,0041	$\Phi(x_1,y_1) =$ 0,0056
$F'_x(x_1,y_1) =$ 1,3734	$\Phi'_x(x_1,y_1) =$ 6,6930
$F_y'(x_1,y_1) =$ - 4,526	$\Phi_y'(x_1,y_1) =$ -3,489

$$1{,}3734h_2 - 4{,}526k_2 = 0{,}0041$$
$$6{,}6930h_2 - 3{,}489k_2 = -0{,}0056$$

La solution de ce système des racines :

$$\boxed{\mathbf{k_2 = -0{,}0014 \quad h_2 = -0{,}016}}$$

$x_2 = x_0 + h_2$ et $\Rightarrow$ $x_2 = 3{,}489 - 0{,}016 = 3{,}4874$ et

$y_2 = y_0 + k_2$ $y_2 = 2{,}263 - 0{,}0014 = 2{,}2616$

$$\mathbf{x_1 = 3{,}4874}$$
$$\mathbf{y_1 = 2{,}2616}$$

Si c'est nécessaire, on continue…….

Méthode d'itérations

Soit le système d'équations :

$x_i = \varphi_i (x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots x_n)$ avec $i = 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots n$

et φ_i sont des fonctions réel et continues au voisinage de leurs racines ξi
$i = 1 , 2 , \ldots.. n$. On considère l'ensemble des points $x_i^{(0)}$ qui appartient au voisinage des racines ξi $i = 1 , 2 , \ldots.. n$. La première approche donne :

$$x_i^1 = \varphi_i \, (x_i^{(0)}, x_i^{(0)}, x_3^{(0)} \ldots\ldots\ldots \; x_n^{(0)})$$

Puis on fait une deuxième approche :

$$x_i^2 = \varphi_i \, (x_i^{(1)}, x_i^{(1)}, x_3^{(1)} \ldots\ldots\ldots \; x_n^{(1)})$$

…………………………………………

$$x_i^{k+1} = \varphi_i \, (x_i^{(k)}, x_i^{(k)}, x_3^{(k)} \ldots\ldots\ldots \; x_n^{(k)})$$

Pour que l'itération soit convergente il faut que les conditions suivantes soient accomplies :

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{d\varphi_i(x_1,x_2,......x_n)}{dx_j}\right| \prec 1 \Rightarrow (i=1,2,3,......n)$$

Exercice : On va résoudre le même système par la méthode d'itération :

$$\begin{cases} x + 3.\lg(x) - y^2 = 0 \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \end{cases}$$

On présente le système sous la forme :

$x = \varphi_1(x,y)$ $\quad x + 3.\lg(x) - y^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -3.\lg(x) + y^2 = \varphi_1(x,y)$

$y = \varphi_2(x,y)$ $\quad 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad y = 2x - 1/x - 5x = \varphi_2(x,y)$

Maintenant o, va vérifier si les deux fonctions $\varphi_1(x,y)$ et $\varphi_2(x,y)$ donnent des résultats convergentes et pour cela on examine la condition (1) :

$$\left|\frac{d\varphi_1(x,y)}{dx}\right| + \left|\frac{d\varphi_1(x,y)}{dy}\right| \prec 1$$

$$\left|\frac{d\varphi_2(x,y)}{dx}\right| + \left|\frac{d\varphi_2(x,y)}{dy}\right| \prec 1$$

avec $x_0 = 3{,}4$ et $y_0 = 2{,}2$. Avant de commencer les calculs la fonction dérivée d'une fonction logarithmique :

log(x) ou **lg(x)** sont des symboles de logarithme décimale (base 10) ;
Log(x) ou **ln(x)** sont des symboles de logarithme népérienne (base e)

$$[\log(x)]' = \frac{1}{xLog(10)} = \frac{\log(e)}{x}$$

$$[Log(x)]' = \frac{1}{x}$$

Rem. $[\log(x)] = \frac{Log(x)}{Log(10)} = Log(x).\log(e)$

$$\left|\frac{d\varphi_1(x,y)}{dx}\right| = -\frac{3.\log(e)}{x} \qquad \left|\frac{d\varphi_1(x,y)}{dy}\right| = 2y$$

$$\left|\frac{d\varphi_1(x,y)}{dy}\right| = 2y \qquad \left|\frac{d\varphi_1(x,y)}{dy}\right| = 0$$

Remplaçons dans ses expressions les valeurs de x_0 et y_0.

$$\left|\frac{d\varphi_1(x,y)}{dy}\right| = 4{,}4 \qquad \left|\frac{d\varphi_2(x,y)}{dx}\right| = 1{,}9$$

Il ne guère nécessaire de calculer d'avantage car ces deux dérivées dépasse largement 1.

$y = \varphi_2(x,y) \quad \rightarrow \quad 2x^2 - xy - 5x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}} = \varphi_1(x,y)$

$x = \varphi_1(x,y) \quad \rightarrow \quad x + 3.\lg(x) - y^2 = 0 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{x+3.\log(x)} = \varphi_2(x,y)$

Calculons les dérivées :

$$\left|\frac{d\varphi_1(x,y)}{dx}\right| = \frac{5+y}{4.\sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}}} \qquad \left|\frac{d\varphi_1(x,y)}{dy}\right| = \frac{x}{4.\sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}}}$$

$$\left|\frac{d\varphi_2(x,y)}{dx}\right| = \frac{1+\frac{3.\log(e)}{x}}{2.\sqrt{x+3.\log(x)}} \qquad \left|\frac{d\varphi_2(x,y)}{dy}\right| = 0$$

On vérifie la condition (1)

$$\left|\frac{d\varphi_1(x,y)}{dx}\right|=0,525 \qquad \left|\frac{d\varphi_1(x,y)}{dy}\right|=0,248$$

$$\left|\frac{d\varphi_2(x,y)}{dx}\right|=0,309 \qquad \left|\frac{d\varphi_2(x,y)}{dy}\right|=0$$

$$\left|\frac{d\varphi_1(x,y)}{dx}\right|+\left|\frac{d\varphi_1(x,y)}{dy}\right|=0,525+0,248=0,777\prec 1$$

$$\left|\frac{d\varphi_2(x,y)}{dx}\right|+\left|\frac{d\varphi_2(x,y)}{dy}\right|=0,309+0=0,309\prec 1$$

Alors l'itération avec ces deux nouvelle fonction va être convergente. Il nous reste à faire les calculs :

$$x_1=\sqrt{\frac{x_0(y_0+5)-1}{2}}=\sqrt{\frac{3,4(2,2+5)-1}{2}}=3,426368$$

$$y_1=\sqrt{x_0+3.\log(x_0)}=\sqrt{3,4+3.\log(3,4)}=2,234823$$

Une deuxième itération donne :

$$x_2=\sqrt{\frac{x_1(y_1+5)-1}{2}}=3,448852$$

$$y_2=\sqrt{x_1+3.\log(x_1)}=2,242960$$

INTERPOLATION DES FONCTIONS POLYNOMIALES

Soit l'intervalle [a,b] et des points x_0 , x_1 , x_3 , ……..x_n dans cet intervalle appelés des nœuds d'interpolation ou points d'allocation.
Soit la fonction f(x) dons la valeur dans ces nœuds est connues. On pose

$f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, ……..$f(x_n) = y_n$.

On cherche la fonction d'interpolation φ(x) tel qu'elle a la même valeur que f (x) dans les points de colocations :

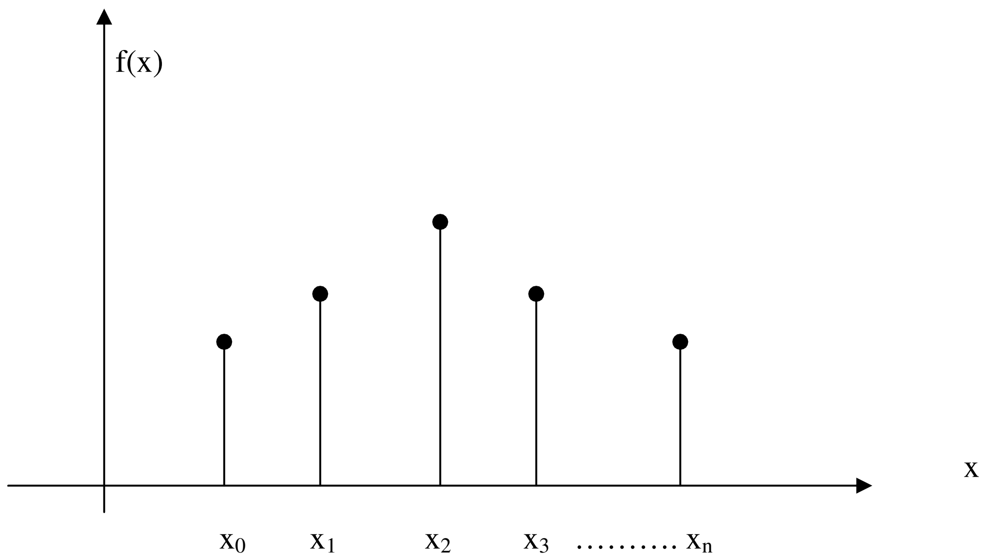
$\varphi(x_i) = f(x_i)$ (i = 1 , 2 , 3 , ….. n)

Ce problème aura une seul solution si au lieu de chercher une fonctiona on cherche un polynôme Pn(x) tel que

$P_n(x_i) = y_i = f(x_i)$

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n$

La formule y = φ(x) qu'on cherche s'appelle la formule d'interpolation et elle va nous servir pour calculer la valeur de f(x) pour $x \neq x_k$ (valeur de x différent de nœud).



Par exemple on connaît la valeur de $f(x) = \sin(x)$ dans les points $x = 5°$, $x = 7°$, $x = 9°$, mais on veut calculer sa valeur au point $x = 6° \rightarrow \sin 6° = ?$

Exercice : Calculer le polynôme passant par les points (0,1) (1,2) (2,9) (3,28)

$x_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = 1$

$x_1 = 1 \rightarrow f(x_1) = 2$

$x_2 = 2 \rightarrow f(x_2) = 9$

$x_3 = 3 \rightarrow f(x_3) = 28$

Etant donnés quatre points le polynôme recherché est tout au plus de degré 3.

$$a_0 + a_1.0 + a_2.0^2 + a_3.0^3 = 1$$

$$a_0 + a_1.1 + a_2.1^2 + a_3.01^3 = 2$$

$$a_0 + a_1.2 + a_2.2^2 + a_3.2^3 = 9$$

$$a_0 + a_1.3 + a_2.3^2 + a_3.3^3 = 28$$

On présente ce système sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 28 \end{bmatrix}$$

On va appliquer la méthode de Gauss pour résoudre ce système.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Le but est de transformer la matrice à gauche en matrice unitaire. On fait la soustraction (ligne 2 - ligne 1) , (ligne 3 - ligne 1) , (ligne 3 - ligne 1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \\ 27 \end{bmatrix} \text{ Puis (ligne 3) - (ligne 2).2 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 28 \end{bmatrix}$$

On divise ligne 3 par (2) et ligne 4 par (4).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ Maintenant : (ligne 2 - ligne 3) , (ligne 4 - ligne 3)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dernière opération: (ligne 3 - ligne 4.(3)) , (ligne 2 + ligne 4.(2)). La rernière matrice donne :

$a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$

Le polynôme est : $P_3(x) = 1 + x^3$ Avec ce polynôme de Lagrange on peut évaluer la valeur de la fonction f(x) en dehors des points de collocations:

$x_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = 1$

$x_1 = 1 \rightarrow f(x_1) = 2$

$x_2 = 2 \rightarrow f(x_2) = 9$

$x_3 = 3 \rightarrow f(x_3) = 28$

Exemple : $f(1,5) = 1 + (1,5)^3 = 4,375$

INTERPOLATION DE LAGRANGE

L'interpolation de Lagrange est une façon simple de construire un polynôme de collocation. Etant donnés (n + 1) points $[x_i , f(x_i)]$pour i = 1 , 2 , 3 , ……n on doit construire (n + 1) polynômes $L_i(x)$ de degré n satisfaisant les conditions suivantes.

$L_i(x_i) = 1$ pour chaque i
$L_i(x_j) = 0$ pour chaque $i \neq j$

Cela signifie que le polynôme $L_i(x)$ de degré n prend la valeur 1 en xi et s'annule en tous les autres points de collocation. La fonction L(x) définie par :

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i).L_i(x)$$

passe par tous les poins de collocation. Exemple :

$$L(x_j) = f(x_j)L_j(x_j) + \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} f(x_i).L_i(x_i)$$

Sachant que $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$ et $L_i(x_j) = 1$ si $i = j$, alors on a :

$$L(x_j) = f(x_j)$$

POLYNOME DE DEGRE 1

$$L_0(x_0) = 1 \qquad L_1(x_0) = 0$$
$$L_0(x_1) = 0 \qquad L_1(x_1) = 1$$

Maintenant on va chercher l'expression de ces polynômes.

$L_0(x)$ s'annule en x_1 alors son expression peut s'écrire de façon suivante :

$L_0(x) = (x - x_1)$

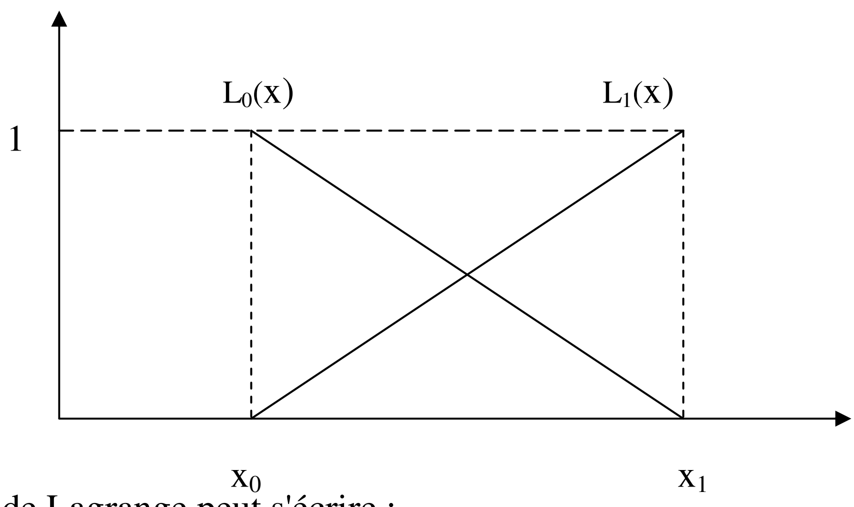
D'un autre côté $L_0(x)$ est égale à 1 en x_0 et alors son expression peut s'écrire de façon suivante :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{x_0 - x_1)}$$

Avec les mêmes réflexions on déduit les expressions de $L_1(x)$:

$L_1(x) = (x - x_0)$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$



La fonction de Lagrange peut s'écrire :

$$L(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$$
$$L(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Exemple : Donner le polynôme d'interpolation déterminé par les points :

(2,3) et (5,-6). On dresse le petit tableau :

	x_0	x_1
x	2	5
f(x)	3	-6

$$L(x) = 3\frac{x-5}{-3} - 6\frac{x-2}{3} = -x + 5 - 2x + 4 = -3x + 9$$

$$L(x) = -3x + 9$$

On peut calculer la valeur de P(x) aux points différents de x_0 et x_1. Par exemple L(3) = 0

POLYNOME DE DEGRE 2

On cherche un polynôme L(x) passant par les trois points $[x_0 , f(x_0)]$, $[x_1 , f(x_1)]$, $[x_2 , f(x_2)]$. En appliquant la même résonnement que pour le polynôme de premier degré

$$L(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

Le problème ici est de trouver l'expression de $L_i(x)$

$L_0(x)$ s'annule en x_1 et x_2 alors son expression peut s'écrire de façon suivante :

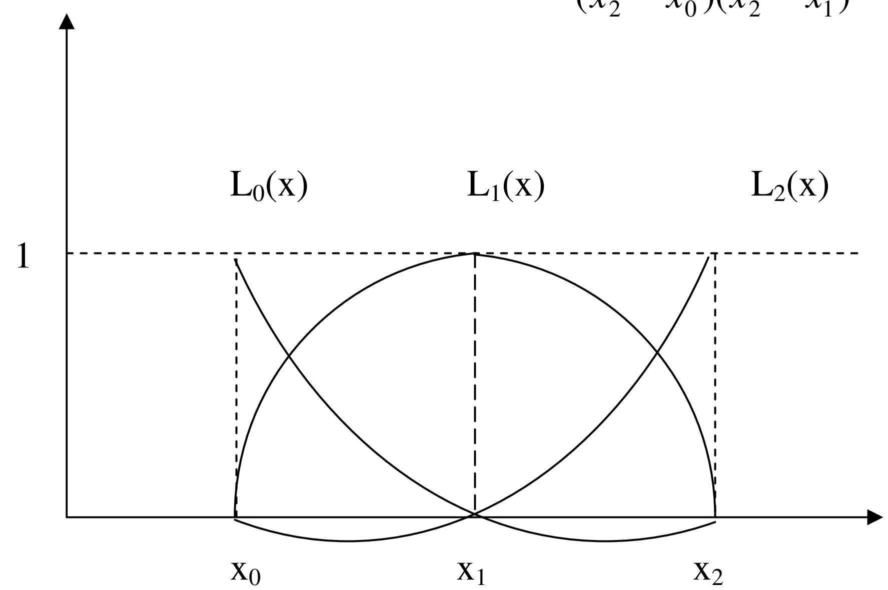
$$L_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

D'un autre côté $L_0(x)$ est égale à 1 en x_0 et alors son expression peut s'écrire de façon suivante :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

De même manière on a : $L_1(x) = \dfrac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$



$$L(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

$$L(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Exemple : Donner le polynôme $L_2(x)$ passant par les points : (1,2), (3,7) , (4,- 1)

x	1	3	4
f(x)	2	7	-1

$$L(x) = 2.\frac{(x-3)(x-4)}{(-2)(-3)} - 7.\frac{(x-1)(x-4)}{(2)(-1)} - 1.\frac{(x-1)(x-3)}{(3)(1)}$$

$$L(x) = \frac{x^2-7x+12}{3} - 7.\frac{(x^2-5x+4)}{2} - \frac{(x^2-4x+3)}{3}$$

$$L(x) = \frac{2x^2-14x+24-21x^2+105x-84-2x^2+8x-6}{6}$$

$$L(x) = \frac{-21x^2+99x-66}{6} = -3,5x^2+16,5x-11$$

On peut calculer cette fonction au point x = 2 qui n'est pas un point de collocation.

P(2) = -3,5. (4) + 16,5. (2) – 11 = 8.

POLYNOME DE DEGRE N

$L_0(x)$ s'annule en tous les points (x_1, x_2 , …….x_n) sauf en x_0 où il est égale à 1 Alors il s'écrit sous la forme :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)............(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)........(x_0 - x_n)}$$

Avec la même réflexion on trouve l'expression de $L_1(x)$ sachant qu'il s'annule en tous les points (x_0, ..x_2 , …….x_n) sauf en x_1 où il est égale à 1. Alors il s'écrit sous la forme :

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)............(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)........(x_1 - x_n)}$$

………………………………………………

$$L_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})......(x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)..(x_i - x_{i-1})(x - x_{i+1}).....(x_i - x_n)}$$

POLYNOMES DE LAGRANGE

Etant donné (n+1) points d'interpolations [x, f (x)] i = 0 , 1 , 2 , ……..n l'unique polynôme d'interpolation de degré n passant par tous les points peut s'écrire :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i).L_i(x)$$

Exemple :

On reprend le même exercice dont les points de collocation étaient

(0,1), (1,2), (2,9), (3,28). Le polynôme qu'on cherche est unique et on doit trouver la même réponse :

$P_3(x) = x^3 - 1$

$$P_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(x-3)}.1 + \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-x2)(1-3)}.2 +$$

$$+\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}.9 + \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}28$$

$$P_3(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6} - x(x-2)(x-3) - \frac{x(x-1)(x-3)}{2}.9 + \frac{14x(x-1)(x-2)}{3}$$

$$P_3(x) = \frac{(x-2)(x-3)(-x+1+6x)}{6} + \frac{x(x-1)[28(x-2)-27(x-3)]}{6}$$

$$P_3(x) = \frac{(5x+1)(x-2)(x-3)}{6} + \frac{x(x-1)(x+25)}{6}$$

$$P_3(x) = \frac{5x^3 + x^2 - 25x^2 - 5x + 30x + 6 + x^3 + 25x^2 - x^2 - 25x}{6}$$

$$P_3(x) = \frac{6x^3+6}{6} = x^3 + 1$$

LA VARIATION DE LA FONCTION Y = F(X)

Soient les nœuds équidistants x_0 , x_1 , x_2 , ….x_k tel que :

$x_1 - x_0 = h$, $x_2 - x_1 = h$, $x_3 - x_2 = h$ …….. et

$x_1 = x_0 + h$ $x_2 = x_0 + 2h$ $x_3 = x_0 + 3h$ …… $x_k = x_0 + kh$

Les variations de premier degré de la fonction sont :

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

Les variations des variations de premier degré sont appelées variations de second degré et elles sont données par l'expression :

$$\mathbf{\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i}$$

De la même façon on peut trouver les variations de n+1 degré :

$$\mathbf{\Delta^{n+1} y_i = \Delta^n{}_{yi+1} - \Delta^n y_i}$$

On peut présenter ses variations dans un tableau :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0	Δy_0			
$x_0 + h$	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	
$x_0 + 2h$	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$
$x_0 + 3h$	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_1$
$x_0 + 4h$	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_3$		
$x_0 + 5h$	y_5				

On va exprimer ses variations avec les valeurs de la fonction $f(x_i) = y_i$

$\Delta y_0 = y_1 - y_0 \qquad \Delta y_1 = y_2 - y_1$

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 \quad \to (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$

$$\boxed{\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0}$$

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 \quad \to (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1$

$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$

$$\boxed{\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}$$

et par déduction :

$$\boxed{\Delta^4 y_0 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1}$$

Avec le même résonnement on déduit l'expression de $\Delta^4 y_0$:
$\Delta^4 y_0 = \Delta^4 y_0 - \Delta^3 y_0 = (y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1) - (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)$

$$\boxed{\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 4y_2 - 4y_1 + y_0}$$

Par déduction on arriva à la formule générale :

$$\boxed{\Delta^k y_0 = y_k - \binom{k}{1} y_{k-1} + \binom{k}{2} y_{k-2} - \dots\dots\dots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1} y_1 + (-1)^k y_0}$$

Propriétés des variations :

Si $f(x) = u(x) + v(x) \ \to \ \Delta f(x) = \Delta u(x) + \Delta v(x)$
Si $f(x) = C.u(x)$ (C – Const) $\to \ \Delta f(x) = C.\Delta u(x)$
Si $y = P(x)$ est un polynôme de degré n
$\to \Delta P(x)$ est un polynôme de degré n -1
$\to \Delta^2 P(x)$ est un polynôme de degré n –2
……………………………………………………
$\to \Delta^n P(x) =$ Constante
$\to \Delta^{n+1} P(x) = 0$

FORMULES D'INTERPOLATION DE NEWTON

Soit $y = f(x)$ et $y_i = f(x_i)$ $xi = x_0 + ih$. On cherche le polynôme $P_n(x)$ tel que:

$P_n(x_i) = y_i$

On va chercher ce polynôme sous la forme :

$P_n(x) = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0) (x - x_1) + c_3 (x - x_0) (x - x_1) (x - x_2) + \ldots\ldots\ldots$

$+ c_3 (x - x_0) (x - x_1) (x - x_2)\ldots\ldots (x - x_{n-1})$

Le problème st de déterminer tous les coefficients c_i et pour cela on pose $x = x_0$ et on trouve :

$P_n(x_0) = c_0 = y_0$

Puis on pose $x = x1$ et on le remplace dans le polynôme P(x) :

$P_n(x_1) = c_0 + c_1 (x_1 - x_0) = c_0 + c_1 h \rightarrow$ $\boxed{c_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}}$

On continue de la même façon en posant $x = x_2$

$P_n(x_2) = c_0 + c_1 (x_2 - x_0) + c_2 (x_2 - x_0) (x_2 - x_1) = y_2$

$$P_n(x_2) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}.2h + c_2.2h.h = y_0 + 2\Delta y_0 + c_2.2h.^2 = y_2$$

$$c_2 = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2(y_1 - y_0)}{2h^2} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

$$\boxed{c_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}}$$

On pose $x = x_3$

$P_n(x_3) = c_0 + c_1 (x_3 - x_0) + c_2 (x_3 - x_0) (x_3 - x_1) + c_3 (x_3 - x_0) (x_3 - x_1) (x_3 - x_2) = y_3$

$$P_n(x_3) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}.3h + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}3h.2h + c_3.3h.2h.h = y_3$$

$$P_n(x_3) = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + c_3.3!h^3 = y_3$$

$$c_3 = \frac{y_3 - y_0 - 3\Delta y_0 - 3\Delta^2 y_0}{3!h^3} = \frac{y_3 - y_0 - 3(y_1 - y_0) - 3(y_2 - 2y_1 + y_0)}{3!h^3}$$

$$c_3 = \frac{y_3 - y_0 - 3y_1 + 3y_0 - 3y_2 + 6y_1 - 3y_0}{3!h^3}$$

$$c_3 = \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{3!h^3}$$

$$\boxed{c_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}}$$

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots.$$

$$\ldots\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_{n-1})$$

Ceci représente la formule de Newton. On peut simplifier cette expression en posant :

$$t = \frac{x - x_0}{h} \Leftrightarrow x = x_0 + th \qquad\qquad \frac{x - x_i}{h} = \frac{x - x_0 - it}{h} = t - i$$

La formule finale devienne :

$$P_n(x) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots\ldots\ldots + \frac{t(t-1)(t-2)\ldots.(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Exercice : Prenons l'exemple f(x) = sin (x). Dans le tableau ci-dessous sont affichés les nœuds (valeurs fixes de x) et les valeurs de f (x).

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
5	0,087156	-0,034713			
7	0,121869	-0,034565	-0,000148	-0,000042	
9	0,156436	-0,034376	-0,000190	-0,000043	-0,000001
11	0,190809	-0,034142	-0,000233	-0,000041	0,000002
13	0,224951	0,033868	-0,000274		
15	0,258819				

On constate qu'à partir de $\Delta^3 y$ les variations sont pratiquement constantes. On va calculer sin (6°) en choisissant x_0 = 5°

$$t = \frac{x - x_0}{n} = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2}$$

sin (5°) = 0,087156

$t.\Delta y_0$ = (0,5). (0,03473) = 0,0073565

$$\frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 = -\frac{1}{8}(-0{,}000148) = 0{,}0000185$$

$$\frac{t(t-1)(t-2)}{6}\Delta^3 y_0 = \frac{1}{16}(-0{,}000042) = -0{,}0000026$$

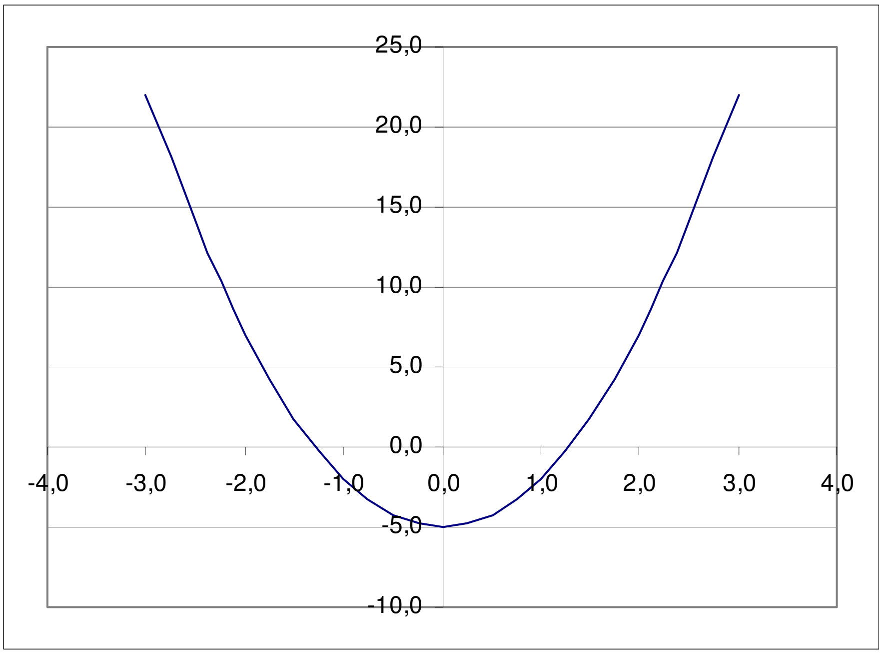
$P_3(6)$ = 0,087156 + 0,0073565 + 0,0000185 - 0,0000026 = 0,104528

$$\boxed{P_3(6) = f\,(6) = 0{,}104528}$$

CALCUL D'INTEGRAL

Soit la fonction *$f(x) = 3x^2 - 5$*, le tableau de valeurs et sa courbe.

x	-3,0	2,0	1,0	0,0	1,0	2,0	3,0
f(x)	22,0	7,0	2,0	5,0	2,0	7,0	22,0



On se propose de calculer l'integrale suivante $\int_1^2 f(x)dx$

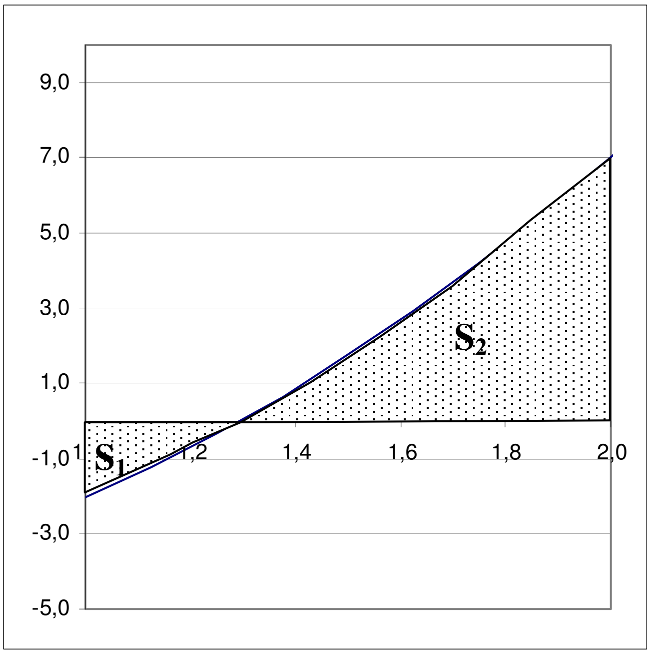
Avec f(x) = $3x^2 - 5$ et $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ .On connaît d'avance le résultat final : 2

Voyons ce que vont donner les calculs

On va développer deux méthodes de calcul :

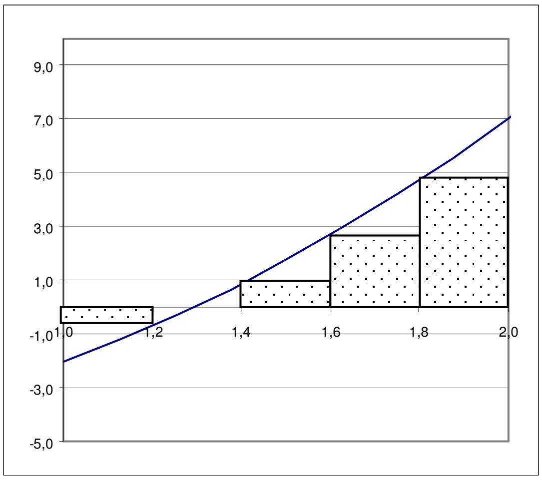
- des rectangles et
- des trapèzes.

L'intégrale représente la surface formée par la courbe et l'axe Ox. Voir la figure ci-dessous.



$$\int_1^2 (3x^2 - 5)dx = -S_1 + S_2$$

Cette surface peut être évaluée approximent par le calcul, soit des rectangles formés fig. 1, soit par des trapèzes fig. 2



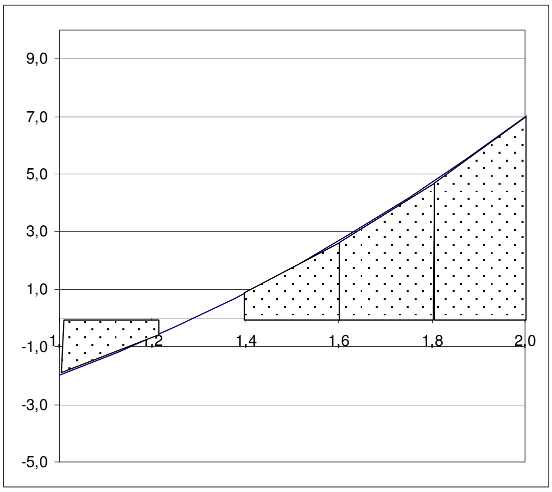
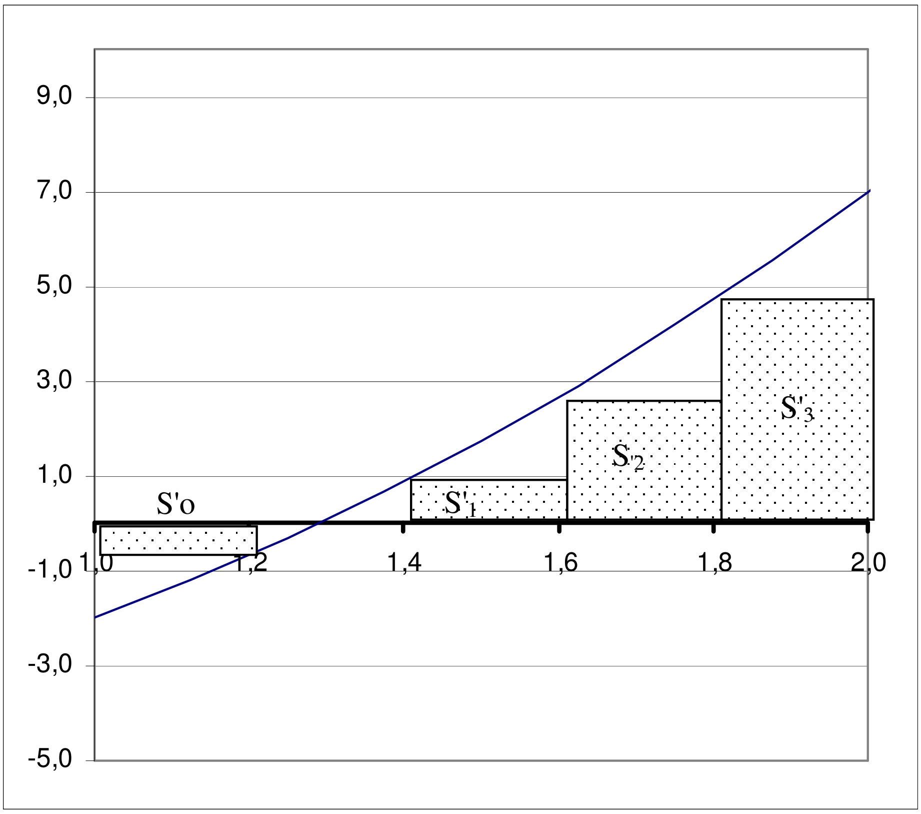


Fig 1 **Fig 2**

Evidement la deuxième méthode donne des meilleurs résultats car la surface calculées et plus proche de la surface d'intégrale.

Avec la méthode des rectangle on fait la somme de l'aire des rectangles - S_0 + S_1 + S_2 + S_3 . Ici l'aire de S_1 est négative. Plus les intervalles sont petits, plus les calculs se rapprochent vers la vraie valeur de l'intégrale. On obtient cela ci le nombre d'intervalles n tant vers l'infinie.



$S_1 = f(x_3).\,(x_4 - x_3)$

$S_1 = 0{,}88.\,(1{,}6 - 1{,}4)$

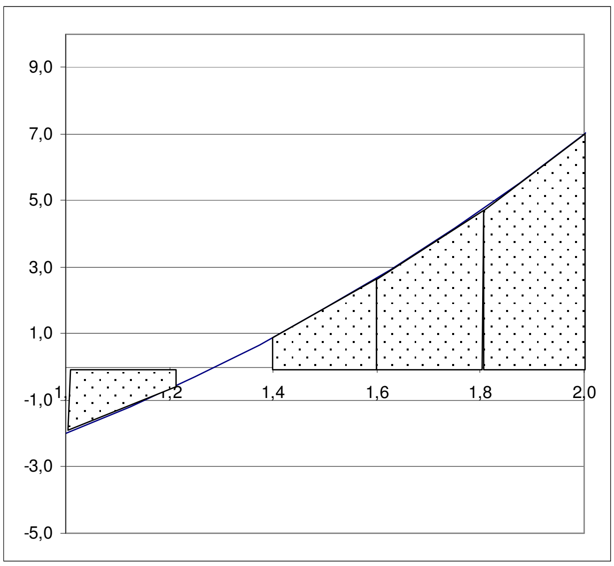
Les résultats des calculs avec Excel sont montrés dans le tableau ci-dessous :

x	f(x)	Si
1,00	-2	-0,1
1,05	-1,6925	-0,084625
1,10	-1,37	-0,0685
1,15	-1,0325	-0,051625
1,20	-0,68	-0,034
1,25	-0,3125	-0,015625
1,30	0,07	0,0035
1,35	0,4675	0,023375
1,40	0,88	0,044
1,45	1,3075	0,065375
1,50	1,75	0,0875
1,55	2,2075	0,110375
1,60	2,68	0,134
1,65	3,1675	0,158375
1,70	3,67	0,1835
1,75	4,1875	0,209375
1,80	4,72	0,236
1,85	5,2675	0,263375
1,90	5,83	0,2915
1,95	6,4075	0,320375
2,00	7	**1,7763**

Ici A32 = 1,05   A31 = 1   B32 = - 2

C'est le résultat appositif des calculs

Cette méthode n'est pas assez précise. 1,77 est très loin de 2. Cependant plus le nombre d'intervalle est grand plus le résultat ce rapproche vers la valeur exacte.



Méthodes des Trapèzes

Cette méthode est beaucoup plus précise. L'aire calculée se rapproche de celle de l'intégrale. L'aire d'un trapèze est donnée par la formule :
S = (a + b)/2*h
où a et b sont respectivement la grande et la petite base du trapèze et h son hauteur
Cette formule s'écrit avec Excel – voir le cadre ci-dessous – où
E31 = x_1 , E32 = x_2 , F31 = $f(x_1)$,

F32 = f(x_2)

x	f(x)	Si
1	-2	0,0923125
1,05	-1,6925	0,0765625
1,1	-1,37	0,0600625
1,15	-1,0325	0,0428125
1,2	-0,68	0,0248125
1,25	-0,3125	0,0060625
1,3	0,07	0,0134375
1,35	0,4675	0,0336875
1,4	0,88	0,0546875
1,45	1,3075	0,0764375
1,5	1,75	0,0989375
1,55	2,2075	0,1221875
1,6	2,68	0,1461875
1,65	3,1675	0,1709375
1,7	3,67	0,1964375
1,75	4,1875	0,2226875
1,8	4,72	0,2496875
1,85	5,2675	0,2774375
1,9	5,83	0,3059375
1,95	6,4075	0,3351875
2	7	**2,0013**

=(E32-E31)*(F32+F31)/2

$$S_1 = \frac{(f(1{,}05)+f(1))}{2}*(1;05-1)$$

$$S_i = \frac{(f(i)+f(i+1))}{2}*(x_{i+1}-x_i)$$

Ce résultat est beaucoup plus proche de la valeur d'intégrale

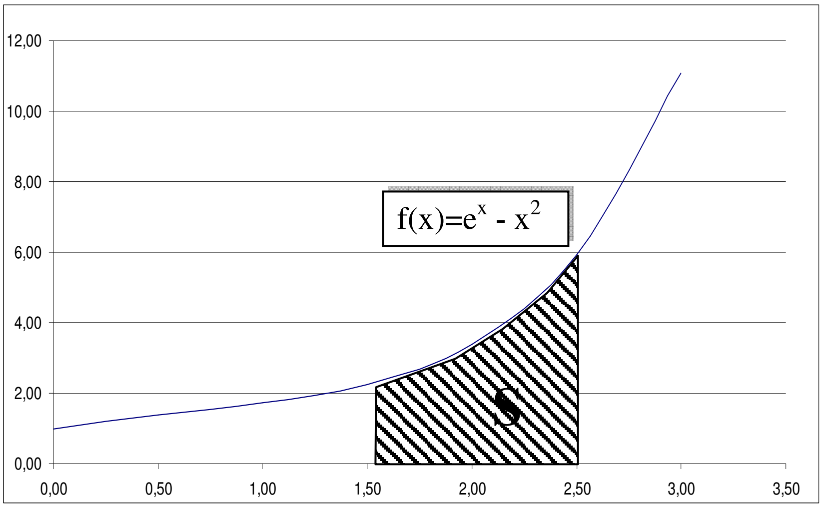
L'exemple montre qu'avec peu d'intervalle assez grand 0,05. Excel permet d'aller jusqu'à 1000 intervalles pour très peu de temps. Par exemple si l'intervalle est 0,01 les résultats deviennent **1,95505** avec la méthode des rectangles et **2,00005** avec celle des trapèzes.

Exercice :

Calculer $\int_{1,5}^{2,5}(e^x - x^2)dx$ par la méthode des trapèzes.

La graphique ci-dessous montre la surface. On choisie un intervalle de 0,05. Voir les résultats dans le tableau suivant :

	x	f(x)	S_i
1	1,500	2,23	0,113516
2	1,550	2,31	0,117550
3	1,600	2,39	0,121938
4	1,650	2,48	0,126711
5	1,700	2,58	0,131901
6	1,750	2,69	0,137544
7	1,800	2,81	0,143674
8	1,850	2,94	0,150330
9	1,900	3,08	0,157552
10	1,950	3,23	0,165381
11	2,000	3,39	0,173861
12	2,050	3,57	0,183039
13	2,100	3,76	0,192963
14	2,150	3,96	0,203684
15	2,200	4,19	0,215256
16	2,250	4,43	0,227735
17	2,300	4,68	0,241181
18	2,350	4,96	0,255656
19	2,400	5,26	0,271226
20	2,450	5,59	
La somme			**3,330701**



Dans cet exemple l'intervalle [1,5 ; 2,5] est divisé à des petits sous intervalles de longueur 0,05. Le résultat est **3,330701**. Si l'intervalle devient 0,01 le résultat est **3,617519.**

Exercices :

Calculer :

1. $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{x^3} dx = \frac{1}{2}(e^2 + 1)$
2. $\int_{-1}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \ln(\sqrt{2} - 1)$
3. $\int_{1/4}^{3/4} \frac{(x+1)dx}{x^2(x-1)} = 4\ln\frac{1}{3} - \frac{8}{3}$