Cours de

Géométrie pour l'architecte

Conçu et élaboré par

Marie Bouazzi

Marie BOUAZZI
Ecole Nationale d'Architecture et d'Urbanisme & Université Virtuelle de Tunis

Dernière mise à jour : 11 05 2007

Accueil

LA SYMÉTRIE PLANE

La symétrie
Idées et vocabulaire

Exemples de symétrie

Un exemple de symétrie bilatérale
- Expressions
- Symétrie exacte, symétrie approximative
- Figure et axe : définition par le dessin
- Définitions mathématiques
- Mathématiques-dessin : aller/retour

Autres exemples
- Axes en mathématiques, axes en architecture
- Dissymétrie, asymétrie

Début de généralisation mathématique

Groupe de symétrie d'une figure

Définition

Pourquoi des similitudes ?

Groupes de symétrie et types de régularité

Pourquoi des isométries ?

EXERCICES
- Page 1
- Page 2

Page suivante

LA SYMÉTRIE PLANE

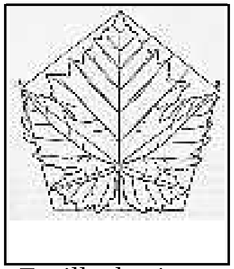
La symétrie

Dessin de Viollet-le-Duc

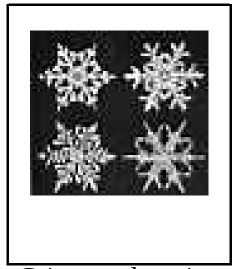
Ce n'est pas un hasard si nous avons choisi de mettre au programme de mathématiques pour l'architecte *la symétrie*.

D'une part en effet l'étude de *la symétrie*, qui est un exercice de manipulation des figures et des transformations géométriques pouvant se faire sans beaucoup de connaissances ni d'expérience, permet particulièrement bien de comprendre quels objets concrets et quelles opérations concrètes sont représentés par les opérations et les objets mathématiques.

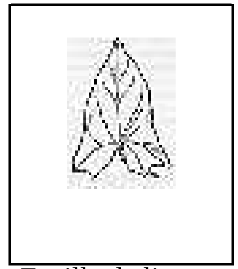
D'autre part, l'étude de *la symétrie* est en elle-même d'un très grand intérêt. Car le monde est rempli de formes *symétriques.*



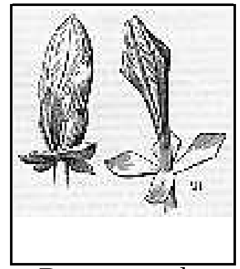
Feuille de vigne inscrite dans un pentagone régulier



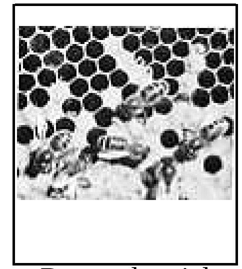
Cristaux de neige



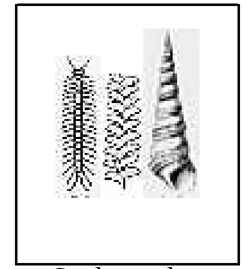
Feuille de liseron



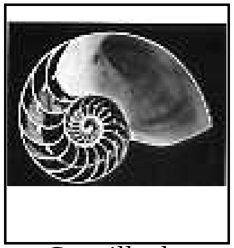
Bourgeons de maronnier



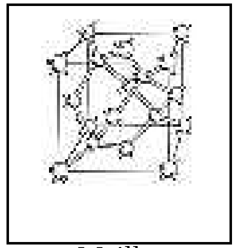
Rayon de miel



Scolopendre, pousse d'Angroecum et coquille de turitelle



Coquille de Nautile



Maille élémentaire d'un réseau cristallin cubique à faces centrées

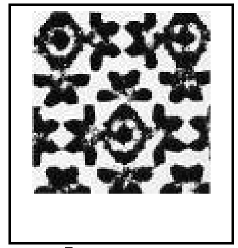
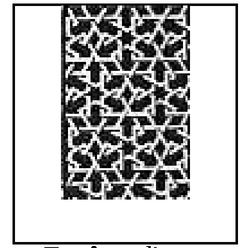
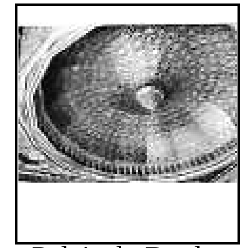


Image au microscope électronique d'un cristal organique

Chapeau de paille tressée



Fenêtre d'une mosquée du Caire



Palais du Bardo Tunis

Monde de la nature, monde des techniques, monde des arts, partout apparaît, à des degrés plus ou moins grands, *la symétrie*. Il ne s'agit pas ici seulement de la symétrie bilatérale, qui se traduit en géométrie dans l'espace par un plan de symétrie et en géométrie plane par un axe. En français littéraire, le mot *symétrie* possède un sens large d'harmonie des proportions, d'équilibre, de régularité, et c'est de cette notion générale assez vague que nous allons traiter. Bien sûr la feuille de liseron, représentée ci-dessus, est *symétrique*. Mais, au sens littéraire, tous les objets qui illustrent cette page *le sont aussi*.

Nous allons voir que l'idée générale de symétrie, au sens littéraire vague, peut se traduire d'une manière précise au moyen d'*un concept mathématique général de symétrie* qui contient, comme cas particulier, la symétrie bilatérale, et qui permet de décrire d'une manière exacte *chaque type de régularité*.

Accueil **Suite**

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page suivante

LA SYMÉTRIE PLANE

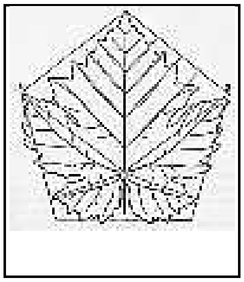
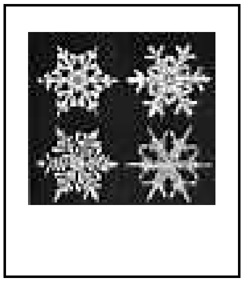
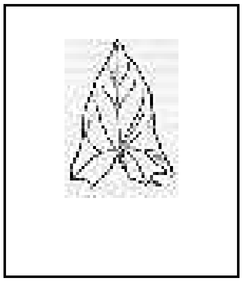
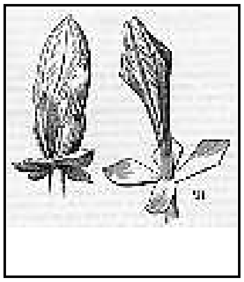
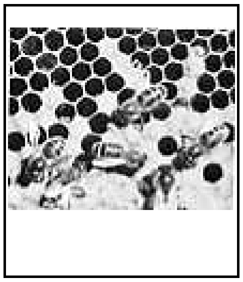
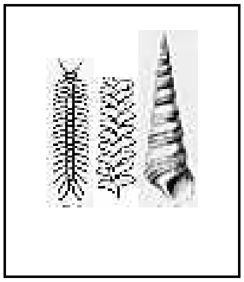
La symétrie

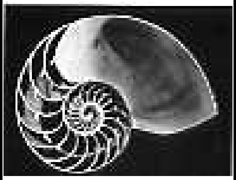
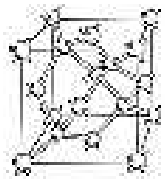
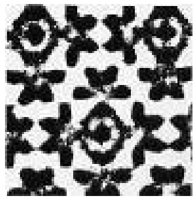
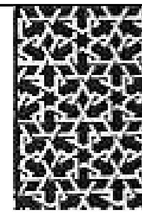
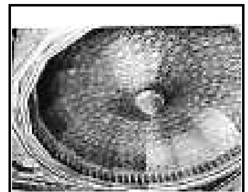
Dessin de Viollet-le-Duc

Ce n'est pas un hasard si nous avons choisi de mettre au programme de mathématiques pour l'architecte *la symétrie*.

D'une part en effet l'étude de *la symétrie*, qui est un exercice de manipulation des figures et des transformations géométriques pouvant se faire sans beaucoup de connaissances ni d'expérience, permet particulièrement bien de comprendre quels objets concrets et quelles opérations concrètes sont représentés par les opérations et les objets mathématiques.

D'autre part, l'étude de *la symétrie* est en elle-même d'un très grand intérêt. Car le monde est rempli de formes *symétriques.*

Feuille de vigne inscrite dans un pentagone régulier	Cristaux de neige	Feuille de liseron	Bourgeons de maronnier	Rayon de miel	Scolopendre, pousse d'Angroecum et coquille de turitelle
					
Coquille de Nautile	Maille élémentaire d'un réseau cristallin cubique à faces centrées	Image au microscope électronique d'un cristal organique	Chapeau de paille tressée	Fenêtre d'une mosquée du Caire	Palais du Bardo Tunis

Monde de la nature, monde des techniques, monde des arts, partout apparaît, à des degrés plus ou moins grands, *la symétrie*. Il ne s'agit pas ici seulement de la symétrie bilatérale, qui se traduit en géométrie dans l'espace par un plan de symétrie et en géométrie plane par un axe. En français littéraire, le mot *symétrie* possède un sens large d'harmonie des proportions, d'équilibre, de régularité, et c'est de cette notion générale assez vague que nous allons traiter. Bien sûr la feuille de liseron, représentée ci-dessus, est *symétrique.* Mais, au sens littéraire, tous les objets qui illustrent cette page *le sont aussi*.

Nous allons voir que l'idée générale de symétrie, au sens littéraire vague, peut se traduire d'une manière précise au moyen d'*un concept mathématique général de symétrie* qui contient, comme cas particulier, la symétrie bilatérale, et qui permet de décrire d'une manière exacte *chaque type de régularité*.

Accueil **Suite**

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Idées et vocabulaire

En arabe, à l'heure actuelle, le vocabulaire mathématique exprimant l'idée de symétrie n'est pas unifié. *Symétrie* se dit ÇáÊäÇÙÑ dans l'enseignement primaire tunisien, ÇáÊãÇËá dans l'enseignement primaire et secondaire marocain et dans certains documents tunisiens, ÇáÇäÚßÇÓ en Egypte. Or, aucun de ces trois mots n'exprime ni l'idée générale de rapport harmonieux des parties d'un tout, ni l'idée mathématique générale. Contemplons par exemple une coupe plane de coquille de nautile.

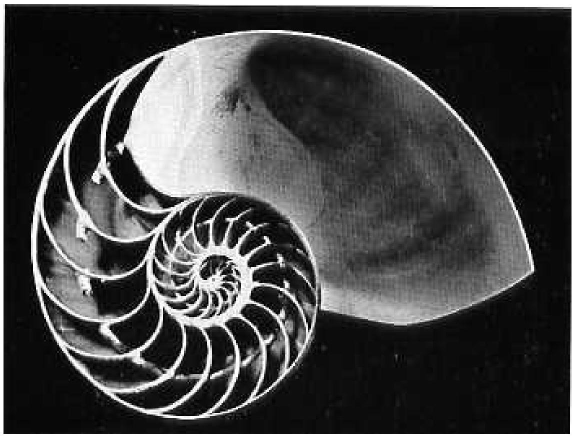


Figure extraite de [*WEYL H.*, Symétrie et mathématique moderne], *Flammarion, Paris, 1964*

On peut dire, en français littéraire, que cette spirale avec ses cloisonnements "présente une belle symétrie", qu'elle est régulière, que ses proportions sont harmonieusement équilibrées, et cette idée s'exprime en termes de symétrie mathématique (comme Hermann Weyl l'explique dans son livre, et comme nous allons le faire, nous aussi, dans les pages suivantes).

Pourtant, il est évident que cette spirale cloisonnée n'est pas " ãÊäÇÙÑ " (l'idée de vis-à-vis correspond à une symétrie bilatérale, et ce n'est pas de ce type de symétrie qu'il s'agit ici). Elle n'est pas non plus " ãäÚßÓ " (l'idée de reflet optique, d'objet et d'image inversée comme par une réflexion dans un miroir, n'a rien à voir avec la régularité de la spirale). L'idée de " ÊãÇËá " ne convient pas non plus, car s'il est vrai que la spirale est cloisonnée en une série de compartiments semblables, ce n'est pas la similitude des compartiments répétés qui crée la symétrie, mais la régularité de la répétition.

Quels termes arabes expriment alors l'idée générale de symétrie ? Certains auteurs scientifiques modernes emploient le mot ÓíãÊÑíÉ . Mais, puisque l'idée – ainsi que ses noms anglais et français *symmetry/symétrie* – remonte à l'antiquité grecque, on peut chercher dans les textes arabes anciens quels mots ont été employés pour exprimer ce concept. ÇáÜÜÜÊäÇÓÈ et ÇáÅÚÜÊÏÇá par exemple. On peut lire en effet dans le livre d'optique d'Ibn El Haïthem des phrases telles que " ÈÜá ÇáÜÜÊÜÜäÜÜÜÜÇÓÜÜÜÜÜÈ ÝÜÜÜÞÜÜØ ÞÜÜÏ íÜÜÝÜÜÜÚÜÜÜÜá ÇáÜÍÜÜÜÜÓÜÜÜÜÜÜä ", ou encore que " áÃä ÇáÜßÜÜÑÉ ÃÚÏá

ÇáÃÔßÜÇá ÇáãÌÓøãÉ " qui expriment parfaitement bien deux idées fondamentales de l'école pythagoricienne : "c'est la symétrie qui fait la beauté" et "la sphère est la plus symétrique des figures de l'espace".

On peut donc définir ainsi l'objet de notre travail : **étudier la symétrie, c'est-à-dire ÇáÅÚÊÏÇá , au moyen des mathématiques** (en géométrie plane pour commencer).

Bien entendu notre étude n'est pas une prise de position d'ordre esthétique, pour ou contre la symétrie en architecture ni dans les arts en général. Il s'agit seulement de se donner les moyens d'utiliser la symétrie, d'une manière variée et éventuellement complexe, ou au contraire de l'éviter d'une manière consciente.

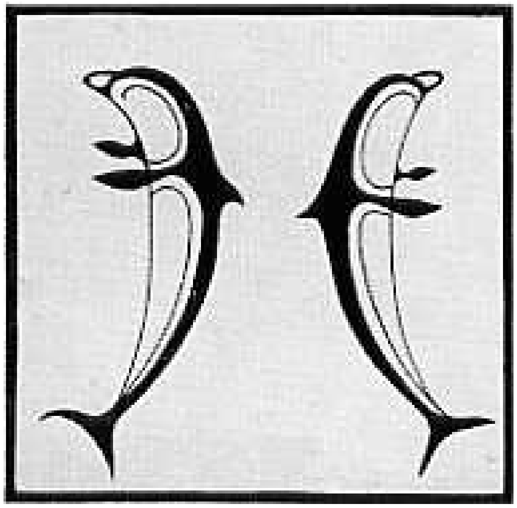
Accueil Suite

Page précédente Page suivante

Exemples de symétrie

Ce chapitre est constitué d'exercices. Pour chaque figure, donnée par un dessin, on essaye d'expliquer ce qui fait la "symétrie" de la figure, en utilisant des objets mathématiques connus, que l'on associe à la figure.

Un exemple de symétrie bilatérale



Carrelage mycénien, XIIe siècle avant J.-C.

Expressions

Comment cette figure est-elle symétrique ?
La réponse est évidente :
(1) La figure possède un axe de symétrie.

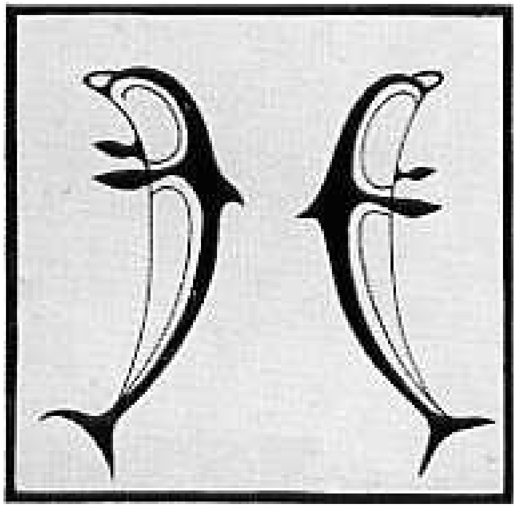
Cette propriété peut s'exprimer de plusieurs manières différentes. On peut dire aussi par exemple que :
(2) La figure est symétrique par rapport à une droite.
Ou encore que :
(3) La réflexion par rapport à cette droite envoie le dauphin de gauche sur le dauphin de droite, et le dauphin de droite sur le dauphin de gauche.

Ce qui montre clairement que la propriété s'exprime aussi de la manière suivante :
(4) La figure est globalement invariante par la réflexion par rapport à cette droite.

Accueil Suite

Page précédente Page suivante

Un exemple de symétrie bilatérale



Symétrie exacte, symétrie approximative

On remarque immédiatement que la figure n'est pas exactement symétrique par rapport à la droite, mais seulement approximativement : aucun des traits en vis-à-vis de chaque côté de l'axe de symétrie ne sont vraiment à leur place ; ni les nageoires dorsales, ni les queues, ni ... rien, si on y regarde d'un peu près. (Imprimer la figure, prendre un papier calque, reproduire exactement les deux dauphins et le cadre, tracer l'axe de symétrie, plier suivant cet axe, constater.)

Il faut donc ici s'entendre sur le sens des mots. Si on comprend symétrique au sens mathématique d'*exactement symétrique*, la figure n'est pas symétrique. Mais si on veut rendre compte de l'impression globale produite par la figure, la figure est symétrique, puisqu'elle l'est *approximativement*, c'est-à-dire qu'il existe une règle mathématique (l'axe de symétrie) présente dans le dessin malgré l'à-peu-près. Il serait donc faux de croire que l'analyse, même *mathématique*, de la figure se borne à dire que la figure n'est pas symétrique : cette seule affirmation ferait croire à l'absence totale de règle.

Accueil Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Exemples de symétrie

Page précédente

Page suivante

Un exemple de symétrie bilatérale

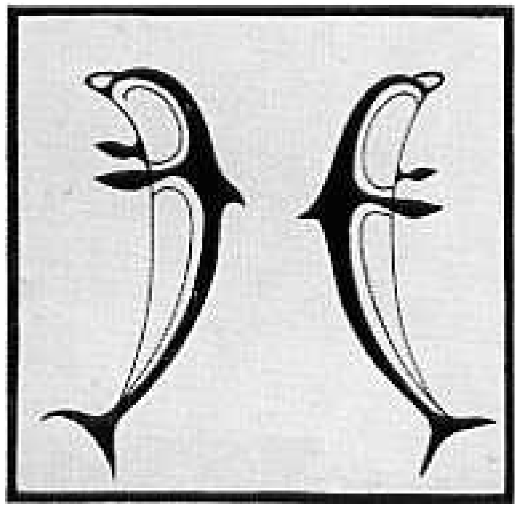
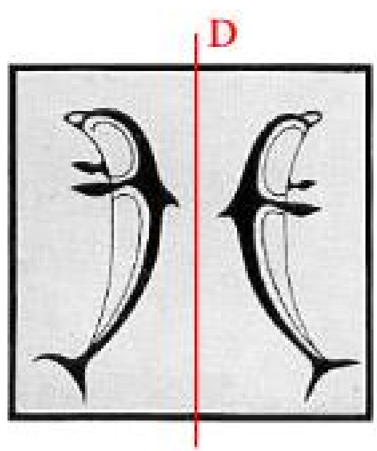


Figure et axe : définition par le dessin

Remarquons que nous employons le mot *figure* d'une manière équivoque. La figure est une figure mathématique, partie du plan affine euclidien, que l'on peut appliquer sur elle-même par une transformation mathématique : une symétrie affine orthogonale. Mais cette figure n'a pas de définition mathématique ; les deux dauphins ne sont donnés que par un dessin, et la figure n'est constituée que par des surfaces de papier recouvertes d'encre noire (ou des parties de mosaïques foncées, sur le sol de Mycènes). Le mot *figure*, par son double sens, fait le lien entre les mathématiques abstraites et le dessin concret de la mosaïque.

On comprend donc que si on veut préciser quelle droite est l'axe de symétrie de la figure, on ne peut pas rester enfermé à l'intérieur des mathématiques et situer l'axe par une définition mathématique de sa position. Il faut *sortir* des mathématiques pour les *associer* à la figure concrète, en *dessinant* la droite *sur la figure concrète*.



La figure est globalement invariante par la réflexion d'axe D, où D est, *par définition*, la droite *dessinée* sur la figure.

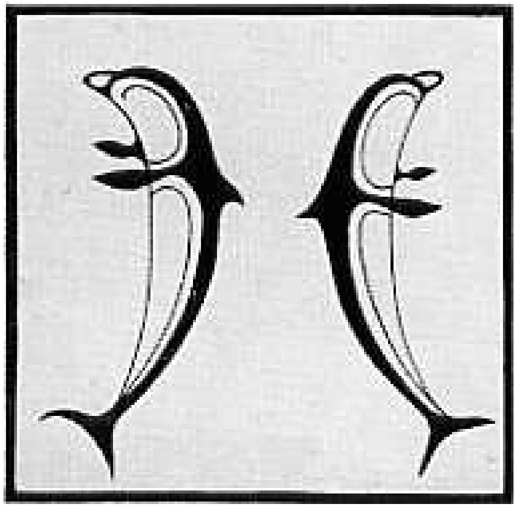
[Accueil](#) [Suite](#)

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Exemples de symétrie

Page précédente Page suivante

Un exemple de symétrie bilatérale



Définitions mathématiques

Soit E le plan affine euclidien.

Définition
Une *figure* / Ôßá de E est une partie de E.

Définitions
Soit f une application de E dans E.
Une figure X de E est dite *globalement invariante par f* áÇ ãÊÛíÑ ÅÌãÇáíÇ ÈÜ si $f(X) = X$.
Une figure X de E est dite *invariante point par point par f* si chaque point de X est un point fixe de f.

> Par exemple, lorsqu'on applique la réflexion par rapport à l'axe de symétrie de la figure - constituée des deux dauphins et du cadre - seuls les points d'intersection de l'axe avec le cadre (deux petits segments) restent fixes ; tous les autres points de la figure (en particulier ceux des dauphins) changent de place ; mais, globalement, l'image de la figure par la réflexion coïncide avec la figure. La figure est globalement invariante par la réflexion, mais pas point par point.

Propriété
Si X est invariante point par point par f, alors X est globalement invariante par f. La réciproque est fausse.

Remarque
L'expression "la figure X est *invariante par f*" s'emploie souvent au lieu de " la figure est globalement invariante par f".

Les quatre phrases que nous avons données pour exprimer la symétrie de la figure sont des expressions de plus en plus abstraites de la propriété. Les phrases (1) et (2) sont compréhensibles par un élève de l'école primaire. L'expression (4) relève de l'enseignement secondaire ; elle suppose que l'on ait une idée des notions d'application, d'objet, d'image, et de surjectivité.

Définitions

Soit $f : E \to E$ une application du plan affine euclidien dans lui-même. Soient X et Y deux parties de E.

On dit que f applique X *dans* / Ýí Y si $f(X) \subset Y$.

On dit que f applique X *sur* / Úáì Y si $f(X) = Y$. Dans ce cas on dit aussi que $f|_X$ (f restreinte à X) est *surjective* de X sur Y.

Vocabulaire

Lorsque f applique X sur elle-même, on dit aussi que f *applique globalement* X sur elle-même.

Lorsque f laisse fixe chaque point de X, on dit que f *applique point par point* X sur elle-même.

Remarques

"La figure X est globalement invariante par l'application f " signifie que f applique globalement X sur elle-même.

"La figure X est invariante point par point par f " signifie que f applique point par point X sur elle-même.

Propriétés

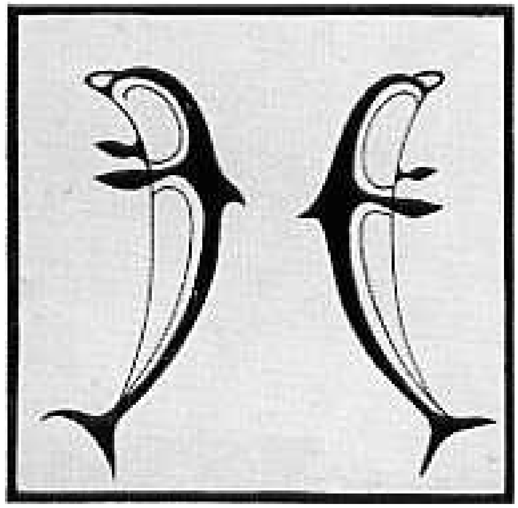
Si f applique X sur Y, alors f applique X dans Y. La réciproque est fausse.

Si f applique point par point une figure sur elle-même, alors f applique globalement la figure sur elle-même. La réciproque est fausse.

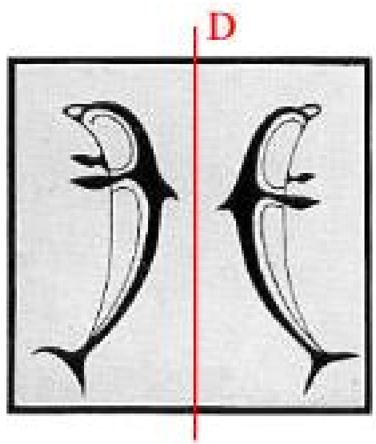
Accueil **Suite**

Page précédente Page suivante

Un exemple de symétrie bilatérale



Mathématiques-dessin : aller/retour



Exprimons-nous d'une manière précise.

Notons F la figure constituée des deux dauphins et du cadre, et s_D la réflexion définie en dessinant son axe sur F. La propriété mathématique qui exprime la symétrie de la figure s'écrit :

$$s_D(F) = F,$$

ce qui se lit :

(4) La figure F est globalement invariante par la réflexion s_D.

C'est cette expression, la plus abstraite, que nous généraliserons pour étendre la symétrie mathématique à d'autres types de régularité.

Accueil Suite

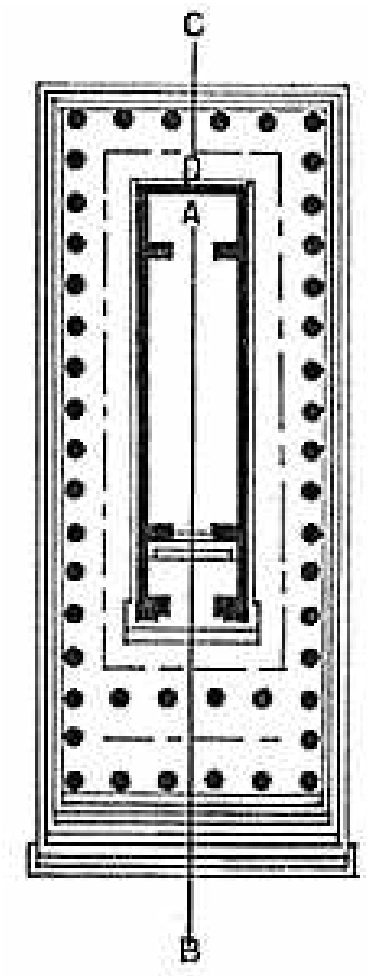
Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente

Page suivante

Autres exemples

Axes en mathématiques, axes en architecture



Plan de bâtiment extrait d'un livre d'architecture.

L'axe a été tracé par l'architecte.

L'architecte a dessiné l'axe de symétrie de la figure. Il l'a noté CDAB, ce qui est inhabituel en mathématiques, et il l'a interrompu entre D et A, ce qui n'a aucun sens mathématique.

En effet cet axe est un axe géométrique, c'est-à-dire un axe de symétrie lié à la structure régulière du plan de bâtiment, mais c'est aussi un axe architectural c'est-à-dire qu'il a, pour l'architecte, d'autres significations que sa seule signification mathématique.

Nous n'étudions dans ce cours que l'aspect mathématique. Nous n'étudierons donc pas la signification de l'interruption, mais nous exprimerons la symétrie bilatérale en disant que :

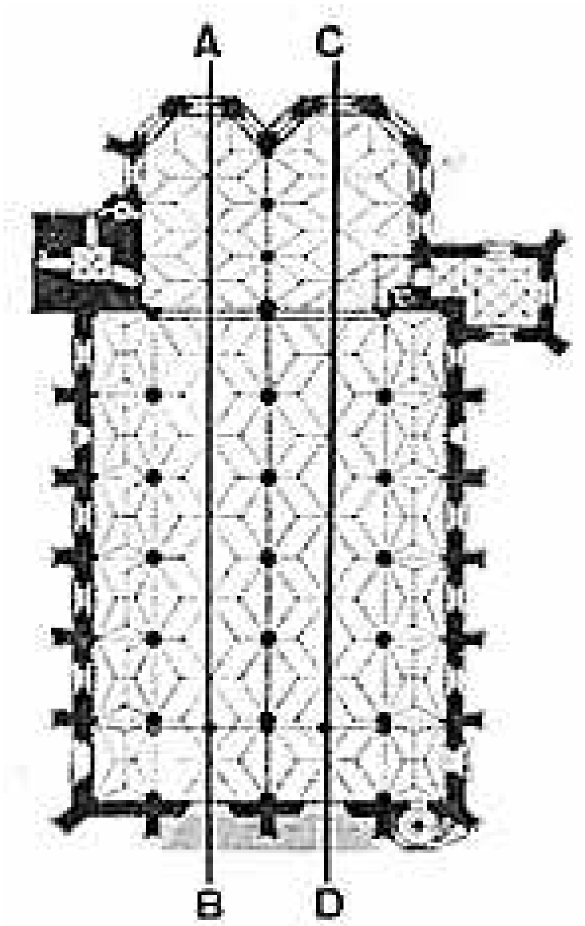
La figure est globalement invariante par la réflexion d'axe CDAB.

Accueil

Suite

Autres exemples

Dissymétrie, asymétrie



Plan de bâtiment extrait d'un cours d'architecture

Les axes ont été tracés par l'architecte.

Les axes CD et AB sont les axes de symétrie de deux parties de la figure. La figure entière est elle-même symétrique (approximativement) par rapport à un axe central que l'architecte n'a pas dessiné (pour des raisons qui n'entrent pas dans le champ d'étude du cours de géométrie).

Remarquons qu'ici la manière approximative dont la règle de symétrie est suivie est différente de celle des dauphins mycéniens. Il ne s'agit pas ici d'un flou général, mais de trois ruptures précises de la règle : les deux annexes du bâtiment, à gauche et à droite vers le fond, et l'escalier en colimaçon, à côté de l'entrée à droite. Ces ruptures de la règle s'appèlent des dissymétries de la figure.

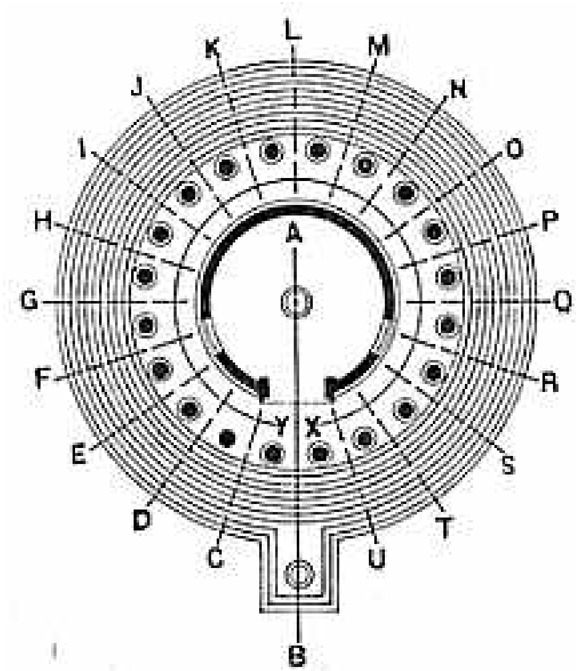
On peut parler aussi de la dissymétrie de la figure entière, prise dans son ensemble. Une figure *dissymétrique* est une figure où on voit une règle de symétrie imparfaitement suivie ; c'est une figure approximativement symétrique. Mais l'expression "approximativement symétrique" met en valeur la symétrie, alors que le terme "dissymétrique" met en valeur les défauts.

Dans le langage courant, il arrive souvent que l'on confonde les termes *dissymétrique* et *asymétrique*. Pourtant ces deux termes ne sont pas synonymes, puisqu'une figure asymétrique est une figure où on ne distingue aucune règle de symétrie, alors que dans une figure dissymétrique on en voit une (malgré les défauts). On peut dire par exemple que le corps humain présente une dissymétrie gauche/droite (la symétrie bilatérale gauche/droite n'est jamais exacte) tandis que suivant l'axe haut/bas (ou avant/arrère), il est asymétrique.

Accueil **Suite**

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

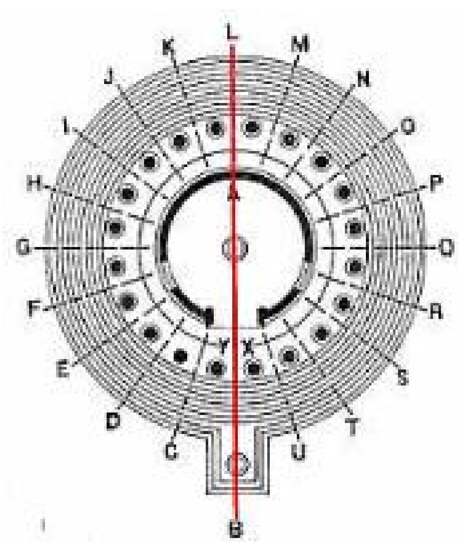
Début de généralisation mathématique



Plan de bâtiment extrait d'un livre d'architecture.

Les axes ont été tracés par l'architecte.

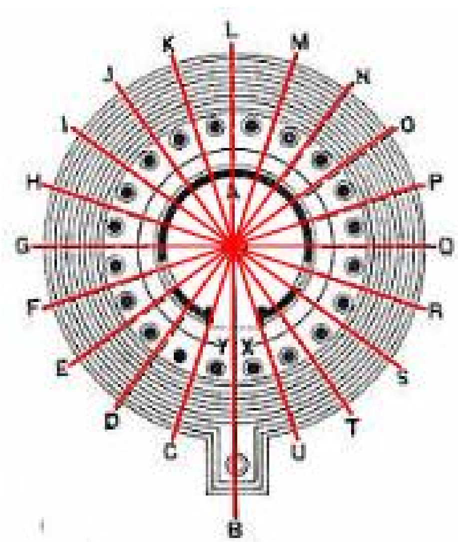
Comment peut-on rendre compte, en termes mathématiques, de la symétrie de cette figure ?



La figure est globalement invariante par la réflexion d'axe LAB.

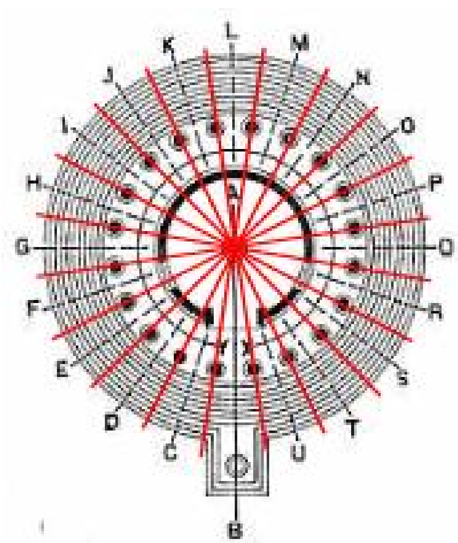
Mais cette remarque ne suffit pas à en décrire la très grande régularité.

Si on fait abstraction de quelques détails : perron carré en avancée sur les marches d'escalier circulaires, ouverture de la porte d'entrée dans le mur circulaire du bâtiment, ouvertures des deux fenêtres (détails par ailleurs très importants à la



fois du point de vue esthétique et du point de vue fonctionnel), la figure est globalement invariante par les 10 réflexions dont les axes sont les droites BAL, CM, DN, EO, FP, GQ, HR, IS, JT et KU. (Ces droites passent par le centre des cercles concentriques, disons le centre de la figure.)

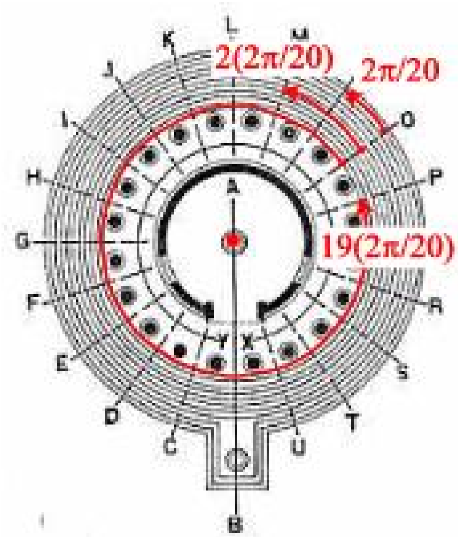
Ces 10 réflexions ne sont pas les seules qui laissent la figure globalement invariante.



Il y a encore 10 autres réflexions, dont les axes sont les droites passant à la fois par le centre de la figure et par les centres des bases de deux colonnes diamétralement opposées (il y a 20 colonnes, diamétralement opposées deux par deux). Pourquoi l'architecte n'a-t-il pas dessiné ces axes, alors qu'il avait dessiné les 10 autres ? Parce que, pour lui, les axes ne sont pas seulement des axes géométriques. Du point de vue mathématique, il n'y a rien qui permette de préférer 10 des 20 axes aux autres.

La figure présente encore un autre type de régularité, d'ailleurs très fortement suggéré par le dessin de l'architecte. En effet, l'architecte n'insiste pas sur le fait que les segments d'axes qu'il a dessinés sont alignés deux par deux, mais plutôt sur le fait que tous ces segments sont équivalents, qu'ils jouent tous le même rôle par rapport à l'ensemble de la figure, que lorsque l'on se déplace d'une colonne à l'autre, on a toujours exactement le même point de vue sur l'ensemble du bâtiment (mis à part les détails du perron, de la porte d'entrée et des fenêtres). Comment traduire cette idée en termes mathématiques ?

Quels déplacements mathématiques appliquent une base de colonne sur une autre, tout en laissant la figure entière globalement invariante ? La rotation dont le centre est le centre de la figure et dont l'angle est $2\pi/20$ applique chaque base de



colonne sur la base de colonne immédiatement suivante (dans le sens direct) et laisse la figure entière globalement invariante ; la rotation de même centre et d'angle 2(2π/20) applique chaque base de colonne sur celle qui suit immédiatement la suivante immédiate,

et laisse la figure entière globalement invariante ; et ainsi de suite ; la rotation de même centre et d'angle 19(2π/20) applique chaque base de colonne sur celle qui la précède immédiatement (sens direct) ; et la rotation d'angle 20(2π/20), c'est-à-dire d'angle nul, qui est l'identité, applique chaque base de colonne sur elle-même. Il y a ainsi 20 rotations qui appliquent globalement la figure sur elle-même.

C'est l'ensemble des 20 rotations et des 20 réflexions qui décrit la régularité de la figure.

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Groupe de symétrie d'une figure

Nous sommes prêts maintenant à donner une définition mathématique générale, permettant de décrire des types très variés de symétrie/ ÇÚÊÏÇá .

Nous avons travaillé pour faire entrevoir que cette définition peut s'exprimer au moyen de l'invariance des figures par des réflexions, mais aussi éventuellement par des rotations. Si on jette un coup d'oeil à une frise décorative et à la coquille de nautile, on comprend que des translations, ou même des similitudes / ÊÔÇÈå quelconques, peuvent intervenir.

Définition

E désignant le plan affine euclidien, soit X une figure de E.

Définition
On appelle *groupe de symétrie de* X ÒãÑÉ ÇÚÊÏÇá l'ensemble des similitudes du plan qui laissent X globalement invariante.

Notation
Le groupe de symétrie d'une figure X se note G_X .

Remarque
L'ensemble des similitudes qui laissent X globalement invariante s'appelle *groupe* de symétrie parce que c'est un groupe au sens algébrique, comme l'énonce la propriété suivante.

Propriété

L'ensemble G_X des similitudes qui laissent X globalement invariante, muni de la loi **o** de composition des applications, est un groupe.

On peut exprimer la démonstration de cette propriété d'une manière intuitive évidente : **1.** si une certaine opération applique une figure sur elle-même, et si on la fait suivre d'une opération qui applique encore la figure sur elle-même, la figure, finalement, n'a pas changé de place ; **2.** si une certaine opération applique une figure sur elle-même, l'opération de retour inverse applique aussi la figure sur elle-même ; **3.** l'opération qui consiste à ne rien changer ne modifie pas la figure.

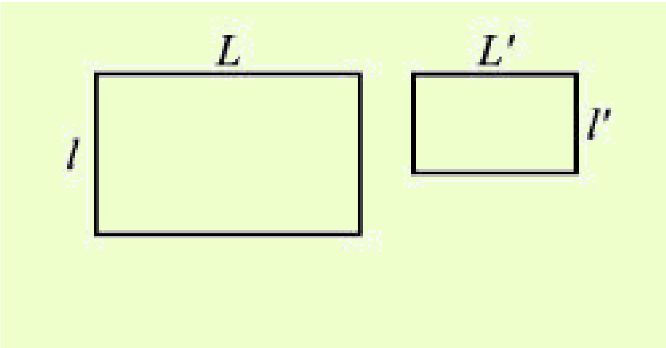
Démonstration

Pourquoi des similitudes ?

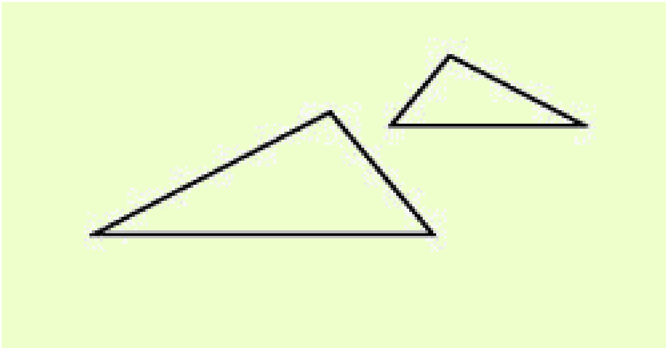
Pourquoi la définition du groupe de symétrie utilise-t-elle des similitudes, de préférence à toute autre sorte d'application ?

Parce que des figures *semblables / ãÊÔÇÈåÇä* , au sens mathématique où l'une est l'image de l'autre par une similitude / ÊÔÇÈå , sont des figures *semblables /* ãÊÔÇÈåÇä au sens du langage courant : elles *se ressemblent /* íÊÔÇÈåÇä , elles ont la *même forme /* äÝÓ ÇáåíÆÉ (les isométries sont des similitudes particulières ; deux figures isométriques / ãÊÞÇíÓÇä sont semblables, elles ont la même forme/äÝÓ ÇáåíÆÉ et, de plus, la même dimension / äÝÓ ÇáÍÌã).

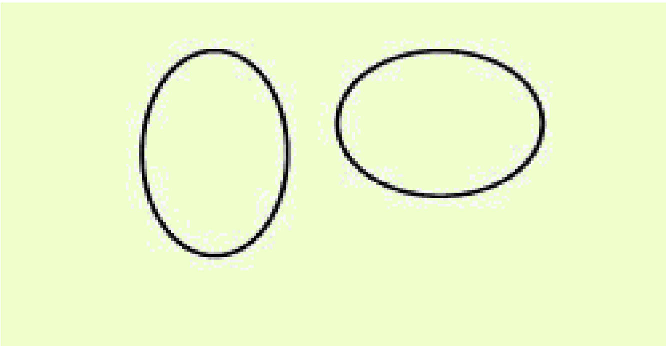
Si bien que les similitudes mathématiques décrivent les parties semblables et régulièrement disposées que l'oeil discerne dans une symétrie d'ensemble.



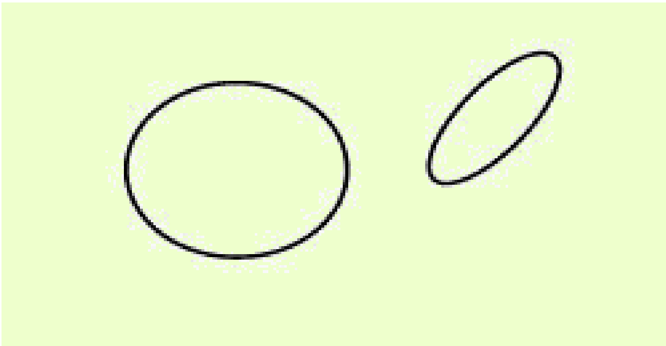
Rectangles semblables/ãÊÔÇÈåÇä



Triangles semblables/ãÊÔÇÈåÇä



Ellipses semblables/ãÊÔÇÈåÇä



Ellipses non semblables

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Groupes de symétrie et types de régularité

Chaque groupe de symétrie décrit un *type de régularité*. Par exemple, la disposition symétrique *bilatérale* de la mosaïque mycénienne est décrite par le groupe de symétrie $\{ s_D \ , Id \}$. La symétrie du plan de bâtiment circulaire est d'un type différent ; elle n'est pas bilatérale mais *rayonnante*, et elle est décrite par un groupe de symétrie constitué de 20 réflexions et 20 rotations.

Notre but est maintenant d'étudier un grand nombre de dispositions régulières de types différents, en décrivant chaque type par son groupe de symétrie. Nous apprendrons comment déterminer exactement chaque groupe de symétrie, et l'accumulation des exemples rendra intuitivement évidente la relation entre le groupe mathématique et l'impression globale produite par un dessin.

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

Pourquoi des isométries ?

La plupart des groupes de symétrie que nous allons voir sont en fait des groupes d'isométries, ce qui s'explique par la propriété mathématique suivante.

Propriété
Si X est une figure bornée et non réduite à un point, son groupe de symétrie ne contient que des isométries.

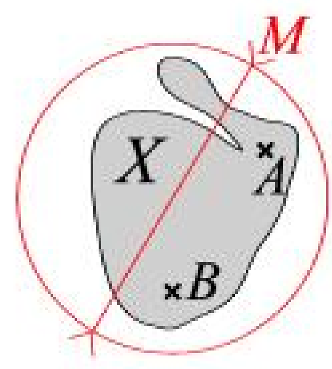
Définition

Une figure X est *bornée* s'il existe un disque du plan qui la contienne, autrement dit, s'il existe un nombre réel M strictement positif tel que :

$$\forall\ A \in X \quad \forall\ B \in X \quad d(A, B) < M$$

où d est la distance du plan affine euclidien.

(Intuitivement, une figure bornée est une figure qui ne s'étend pas à l'infini.)



Exemples

Figures bornées : un triangle, l'intérieur d'un carré, un disque ouvert ou fermé, toute figure constituée d'un nombre fini de points.

Figures non bornées : une droite, un demi-plan, une bande (portion de plan comprise entre deux droites parallèles), le plan tout entier.

Indications de démonstration

Il n'est pas indispensable de connaître la démonstration pour retenir et utiliser la propriété. Par contre, il est très utile de se souvenir de l'image intuitive suivante : si une similitude agrandit (ou rapetisse) la figure, elle ne peut pas l'appliquer sur elle-même. On voit bien que pour une figure non bornée, une droite par exemple, ou pour une figure réduite à un point, la propriété tombe en défaut : une droite "agrandie" est toujours une droite, un point "rapetissé" est toujours un point.

Accueil Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

EXERCICES

Les exercices qui suivent sont de plusieurs types : d'une part des démonstrations mathématiques de propriétés mathématiques ; d'autre part des exercices d'interprétation en termes mathématiques d'idées non mathématiques, et d'analyse mathématique d'objets concrets.

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

Page 1

Exercices 1 à 10

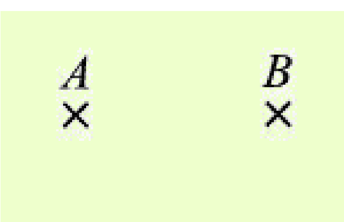
1. Démontrer que si un groupe de similitudes est fini (c.-à-d. s'il contient un nombre fini d'éléments), il ne contient que des isométries. (Raisonner par l'absurde.)

2. Soit X une figure du plan et G_X son groupe de symétrie. Démontrer que si G_X contient au moins une translation distincte de l'identité, alors :

a) G_X est infini (c.-à-d. contient un nombre infini d'éléments)

b) X n'est pas bornée, sauf si elle est vide.

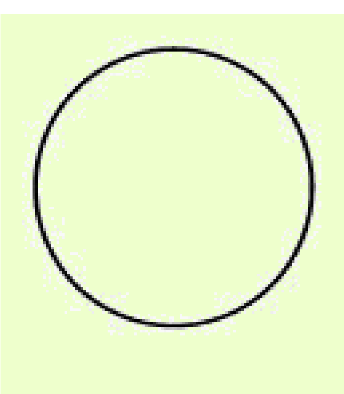
3.



Soient A et B deux points distincts du plan. Quels sont les éléments du groupe de symétrie $G_{\{A\,,\,B\}}$ de la figure $\{A\,,\,B\}$?

(On pourra utiliser le milieu du segment $[AB]$.)

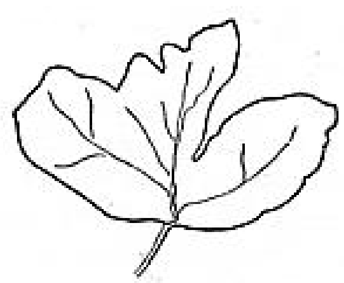
4.



Quel est le groupe de symétrie d'un cercle ? (On pourra utiliser le centre du cercle.)

5. Le plan tout entier est une figure. Pourquoi peut-on dire que "sa symétrie est complète" ?

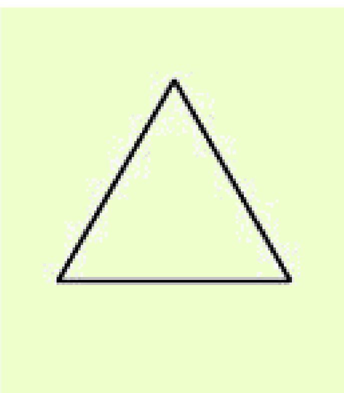
6.



Cette feuille végétale est-elle symétrique ? Est-elle asymétrique ? Est-elle dissymétrique ? Quel est son groupe de symétrie ?

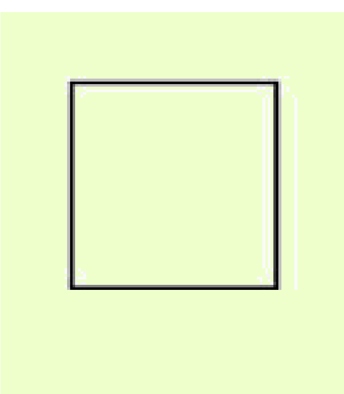
Corrigé

7.



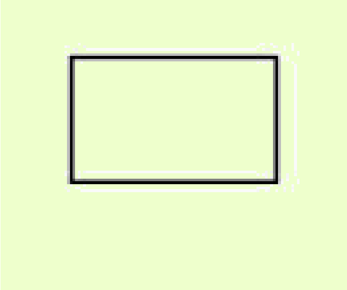
Quel est le groupe de symétrie d'un triangle équilatéral ? (On pourra utiliser le centre de gravité du triangle.)

8.



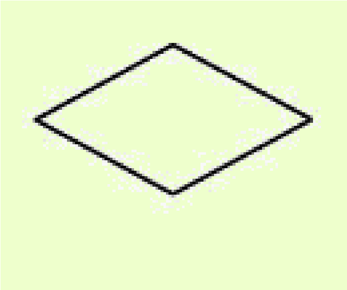
Quel est le groupe de symétrie d'un carré ?

9.



Quel est le groupe de symétrie d'un rectangle ?

10.



Quel est le groupe de symétrie d'un losange ?

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

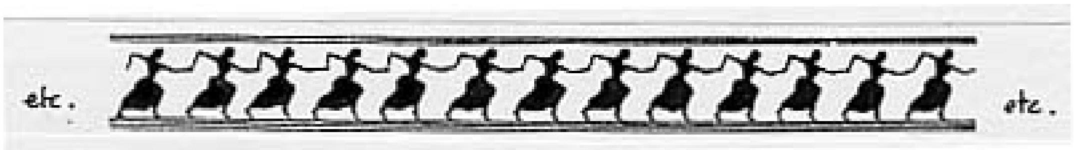
Page précédente Page suivante

EXERCICES

Page 2

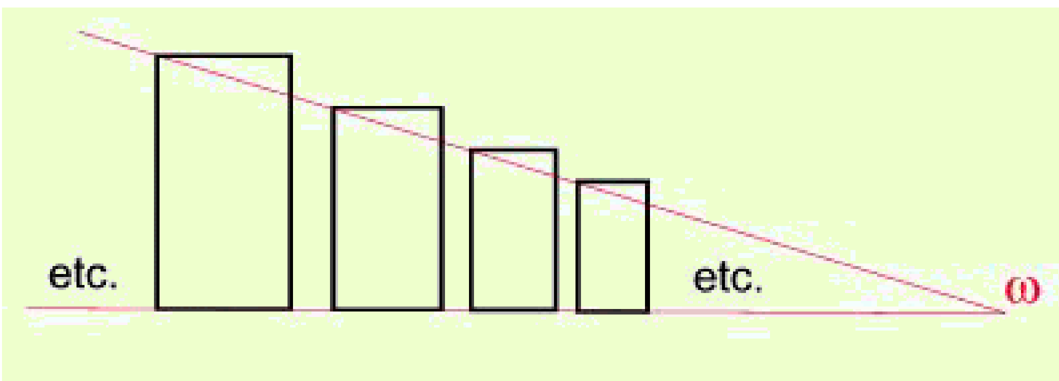
Exercices 11 à 18

11.



Quel est le groupe de symétrie de la frise ci-dessus, où la répétition uniforme des motifs est supposée indéfinie à droite et à gauche ?

12.



Quel est le groupe de symétrie de la figure, en partie représentée ci-dessus, constituée de la réunion d'un rectangle R et de l'infinité des rectangles transformés de R par les homothéties de centre ω et de rapports k^n ($n \in \boldsymbol{Z}$) , où k est un réel positif (sur le dessin, k = 1,26) ?

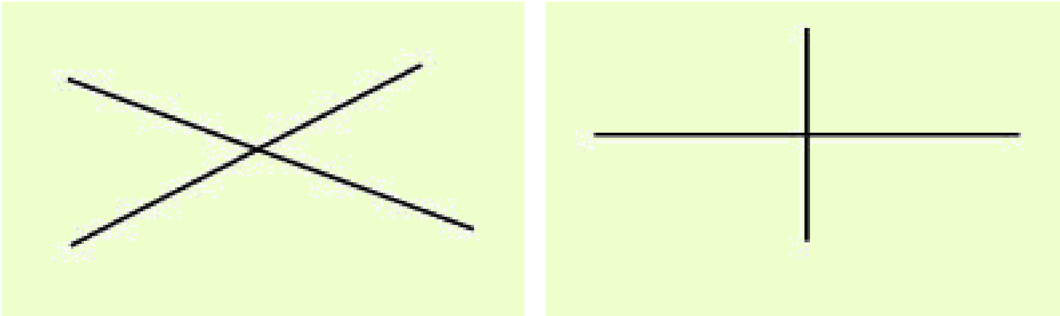
13. Quel est le groupe de symétrie d'un pentagone régulier ? d'un hexagone régulier ? d'un heptagone régulier ? d'un octogone régulier ? d'un ennéagone régulier ? d'un décagone régulier ? d'un hendécagone régulier ? d'un dodécagone régulier ? ...

14.

Quel est le groupe de symétrie d'une droite ? Corrigé 14

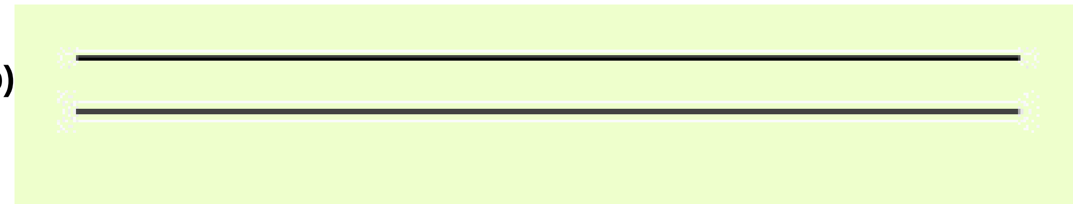
15. Quel est le groupe de symétrie de la réunion de deux droites :

a)



sécantes (perpendiculaires ou non) ?

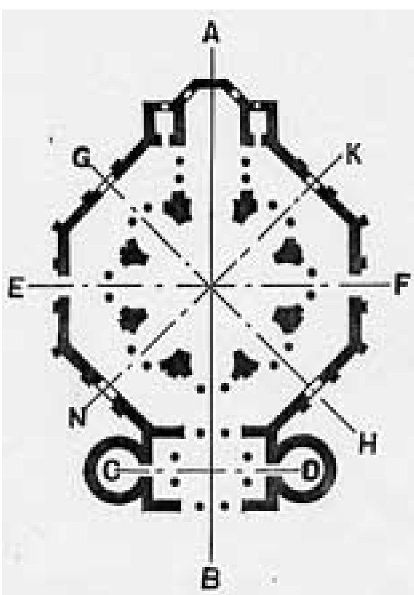
b)



parallèles ?

Corrigé 15

16.



Extrait d'un livre d'architecture.
Les axes ont été dessinés par l'architecte.

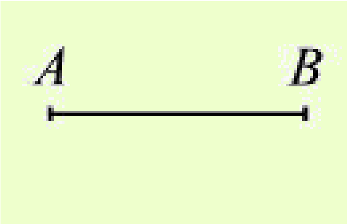
On considère le plan de bâtiment ci-contre.

a) Analyser en termes mathématiques l'impression de régularité donnée par la figure (on utilisera la figure entière et certaines de ses parties, avec leurs symétries exactes ou approximatives).

b) Analyser en termes mathématiques la régularité de la composition / ÊÑßíÈ du plan de bâtiment.

Composer **(du latin *cumponere*, de *cum* "avec" et *ponere* "poser"). Composer, c'est "poser ensemble" des parties, de sorte que certaines de leurs symétries soient communes, c'est-à-dire de sorte que leurs groupes de symétrie aient un sous-groupe commun.**
Analyser la régularité d'une *composition* / ÊÑßíÈ , c'est indiquer les éléments de

symétrie communs aux diverses parties (voir l'exercice 16)**. On peut par ailleurs comparer les types de symétrie des parties** (relation d'ordre sur les types de symétrie)**.**

17. 

Quel est le groupe de symétrie d'un segment [AB] ?

18. Soient A et B deux points distincts du plan. On note m le milieu du segment [AB] , M la médiatrice de [AB] , (AB) la droite passant par A et B , s_M et $s_{(AB)}$ les réflexions par rapport aux droites M et (AB) , s_m la symétrie centrale par rapport à m , et Id l'identité du plan.

Démontrer que l'application composée $s_M \circ s_m$ appartient à l'ensemble $\{ s_M , s_{(AB)} , s_m , \mathrm{Id} \}$.

Accueil

Suite

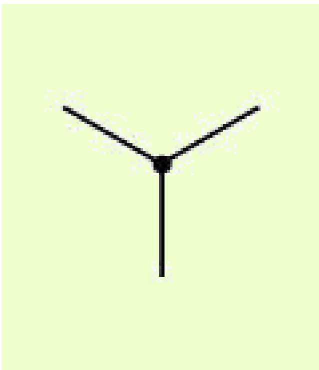
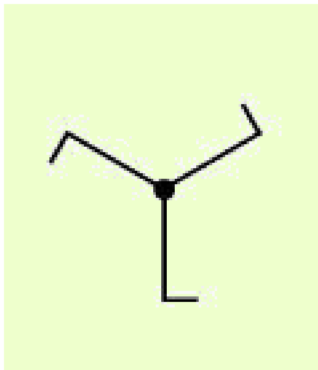
Page précédente Page suivante

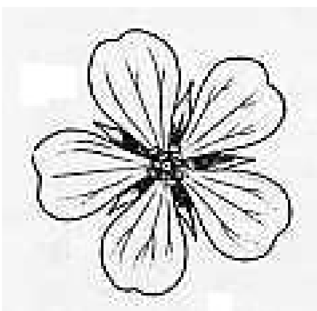
EXERCICES

Page 3

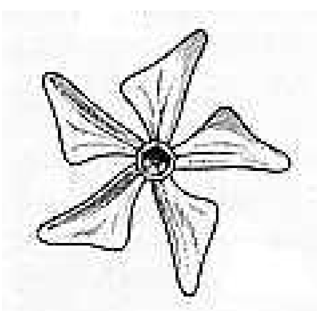
Exercices 19 à 27

19. Quel est le groupe de symétrie de chacune des figures **(a)** et **(b)** ci-dessous ?

(a)  **(b)** 

20. 

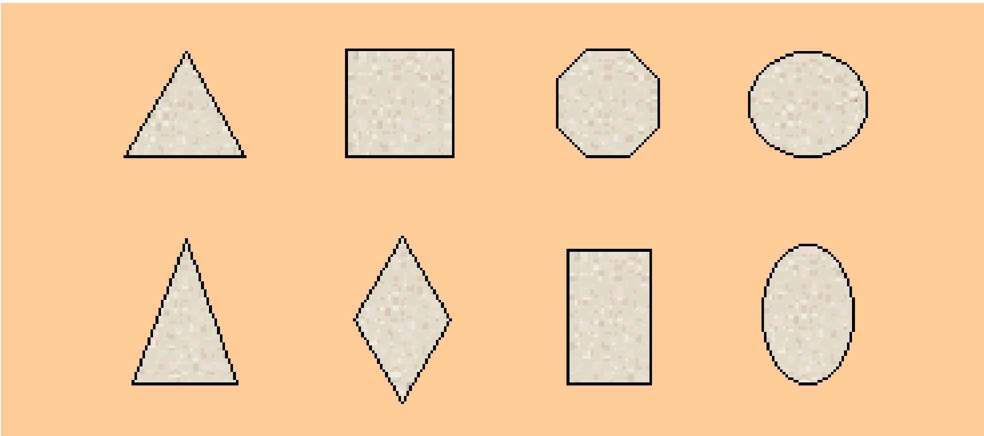
Quel est le groupe de symétrie de la fleur de géranium ci-contre ?

21. 

Quel est le groupe de symétrie de la fleur de *Vinca Herbacea* ci-contre ?

22. Le carré est un rectangle particulier, et le carré donne une impression de régularité plus grande que le rectangle non carré. On dit couramment que *"la symétrie du carré est plus grande que celle du rectangle"*. À quelle propriété mathématique cette expression est-elle liée ? (Voir aussi problème 12)

23. On peut lire dans le livre de A. Lurçat que les figures géométriques reproduites ci-dessous à la première ligne sont *"des formes régulières"* tandis que celles de la deuxième ligne sont *"des formes semi-régulières"*. Comment peut-on élaborer cette idée en termes mathématiques ?



Corrigé 23

Les exercices 22 et 23 montrent qu'il existe une relation d'ordre sur les types de symétrie, une symétrie plus faible qu'une autre correspondant à une inclusion d'un groupe de symétrie dans un autre.

24. **a)** Dessiner deux figures dont les types de symétrie soient différents, l'une étant plus régulière que l'autre.
b) Peut-on dire que la régularité d'un cercle est plus grande – ou moins grande – que celle d'une droite ? Dessiner deux autres figures dont les types de symétrie soient différents et incomparables (ÛíÑ ÞÇÈáÉ ááãÞÇÑäÉ).

L'exercice 24 montre que la relation d'ordre sur les types de symétrie n'est pas une relation d'ordre total.
Retour à *"Composer"*

25. Le cercle était considéré par les pythagoriciens comme une figure (bornée) parfaite. Pouvez-vous traduire cette idée en termes mathématiques ? (On ne demande pas ici de démonstrations. Pour des démonstrations, voir le problème 8.)

26. Dessiner une figure globalement invariante par une réflexion glissée. Quel est le groupe de symétrie de cette figure ?

27. Soit $t_{\vec{u}} \circ s_D$ une réflexion glissée ($\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}$ dans la direction de D) . Dessiner une figure globalement invariante par $t_{\vec{u}}$ **o** s_D et dont le groupe de symétrie ne contienne pas $t_{\vec{u}}$. Le groupe contient-il s_D ?

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

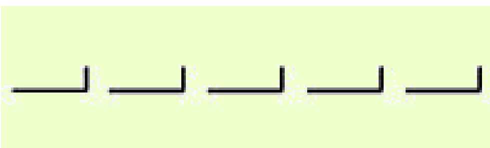
Page précédente   Page suivante

EXERCICES

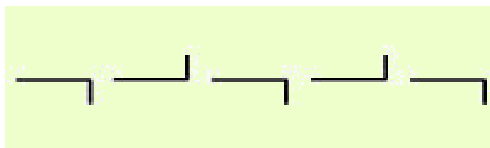
Page 4

Exercice 28 et 29

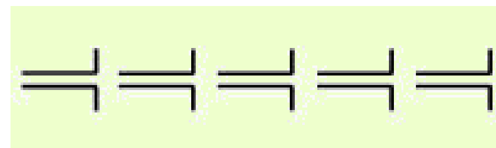
28. Pour chacune des *frises* et chacun des *dessins-tapis* dessinés ci-dessous, on suppose que les motifs se répètent régulièrement indéfiniment. Donner dans chaque cas le groupe de symétrie de la figure.



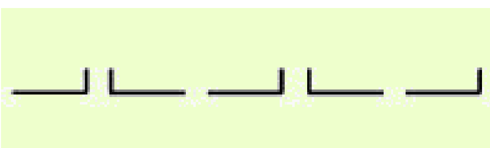
(1)



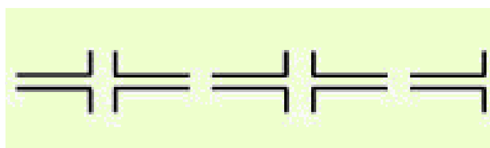
(2)



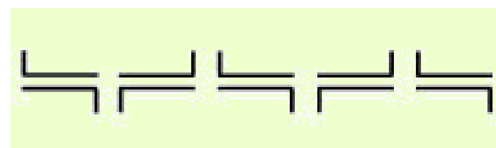
(3)



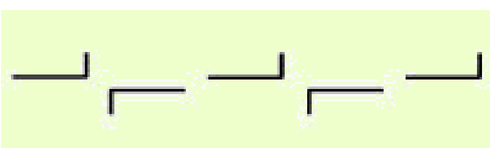
(4)



(5)



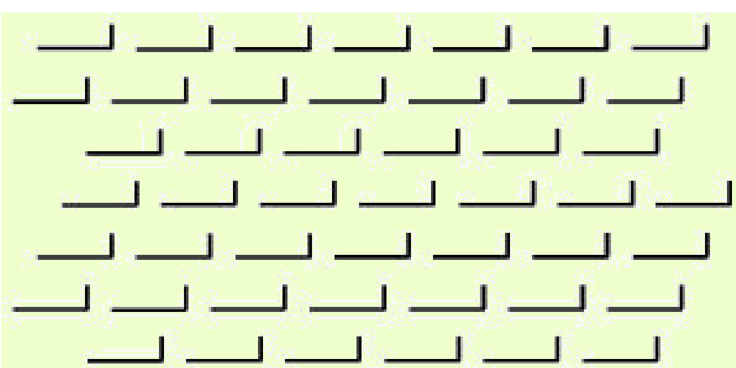
(6)



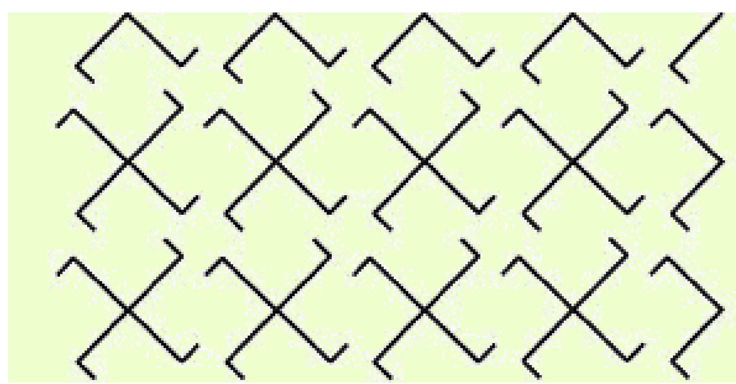
(7)

Les 7 groupes de frises

Corrigé frises

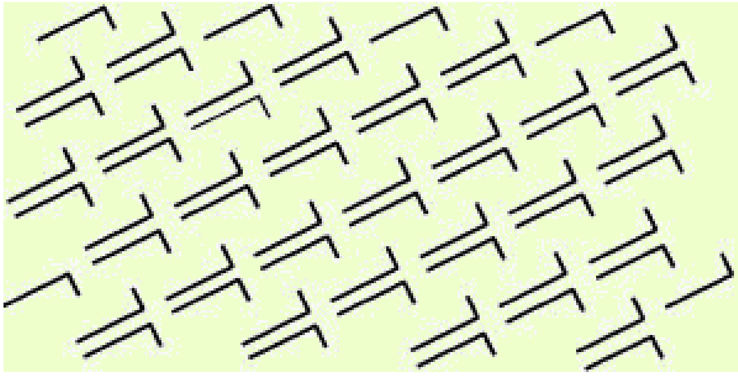


(i)



(ii)

Trois des 17 groupes de dessins-tapis



(iii)

Les 17 groupes de dessins-tapis

29.

Analyser en termes mathématiques la régularité de la frise ci-dessus :

a) Quel est le groupe de symétrie de la frise constituée des contours des motifs, sans tenir compte du coloriage noir/blanc des motifs ?

b) Quel est le groupe de symétrie de la frise coloriée ? (Une isométrie qui envoie un motif noir sur un motif blanc - ou un blanc sur un noir - n'est pas une symétrie de la frise coloriée.)

c) Comparer ces deux groupes.

Dans les motifs décoratifs, il arrive très fréquemment que le coloriage détruise une partie de la symétrie des contours (voir l'exercice 29)**. Le coloriage peut ainsi constituer une dissymétrie sur la règle de régularité des contours, ce qui signifie que le dessin colorié met en évidence plusieurs types de régularité en même temps : le groupe de symétrie du dessin colorié, compte tenu des couleurs, est un sous-groupe du groupe de symétrie des contours, abstraction faite des couleurs ; les deux groupes sont visibles en même temps.**
Retour à l'exercice 30

Accueil

Suite

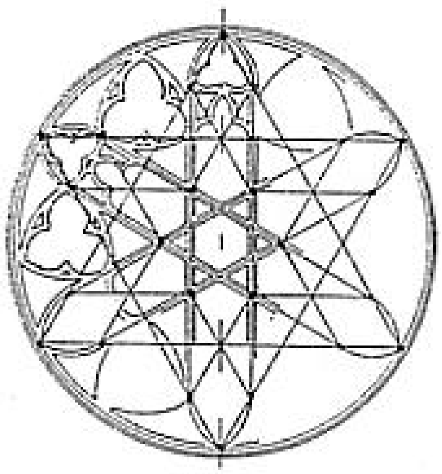
Page précédente Page suivante

EXERCICES

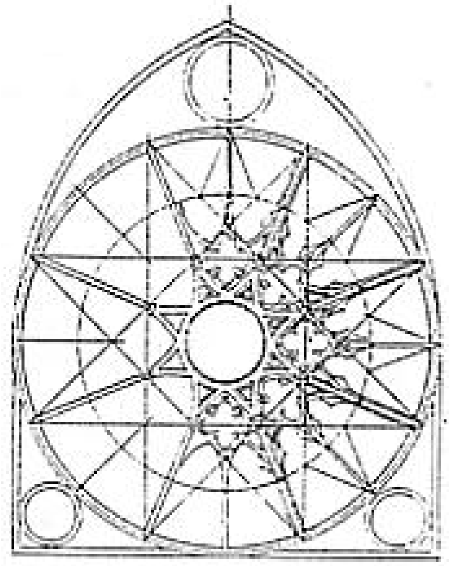
Page 5

Exercices 30 et 31

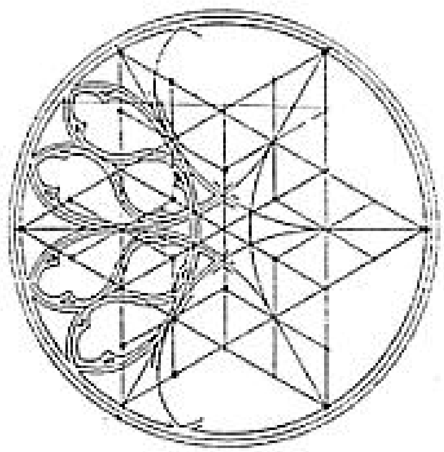
30. Analyser en termes mathématiques la régularité de chacune des rosaces dessinées ci-dessous.



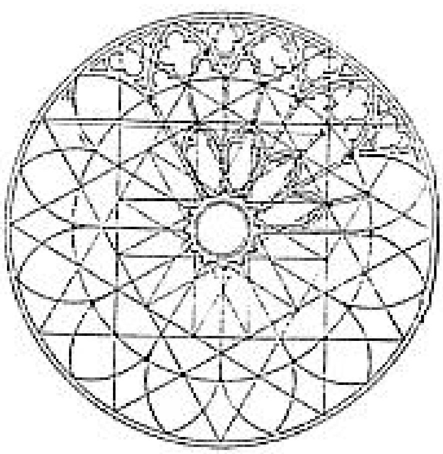
(a)



(b)



(c)



(d)

Chaque rosace est composée de couronnes successives, dont les symétries sont différentes.

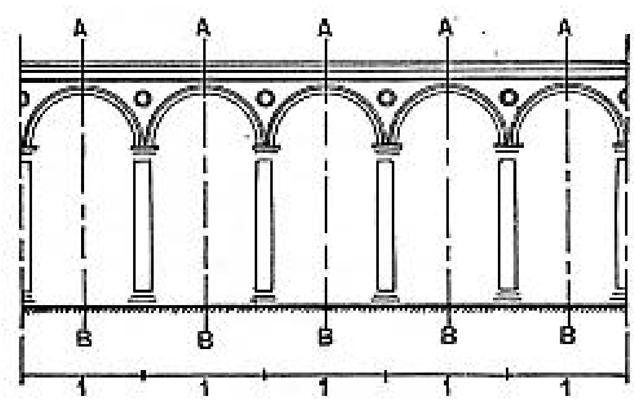
On étudiera la symétrie de chaque couronne, sans oublier l'étude des dissymétries (pour la rosace (b), observer par exemple les pointes de l'étoile).

On étudiera aussi la régularité de la composition.

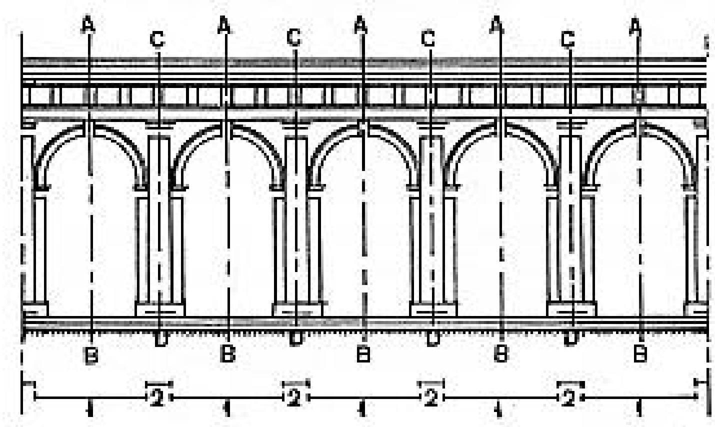
Très souvent les oeuvres d'art mettent en évidence, pour une même partie de figure, non pas un seul type de régularité, mais plusieurs, différents et visibles en même temps. Les couleurs (voir l'exercice 29)**, ou les formes** (voir l'exercice 30) **rompent une certaine régularité, la règle de rupture étant elle-**

même régulière. On peut alors voir en même temps la symétrie rompue et le résultat – lui-même régulier – de la rupture, c'est-à-dire voir simultanément plusieurs groupes de symétrie différents.

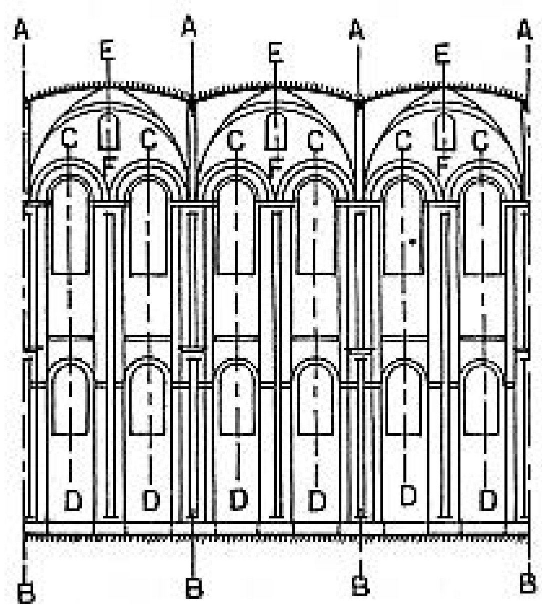
31. Analyser en termes mathématiques la régularité de chacune des façades représentées ci-dessous.



(a)



(b)



(c)

Illustrations extraites d'un [ouvrage d'architecture](#).

(Les axes ont été dessinés par l'architecte.)

L'analyse de la régularité comporte l'analyse de la composition.

Voir aussi la remarque sur le rythme.

Le rythme d'une façade (voir l'exercice 31) **provient d'une répétition, virtuellement indéfinie, mais interrompue par les bornes matérielles de l'objet. L'interruption est une dissymétrie sur la règle de répétition indéfinie. L'étude mathématique du rythme est donc celle des groupes de symétrie qui décrivent la répétiton indéfinie, à laquelle on peut ajouter l'étude de la rupture par les bornes.**

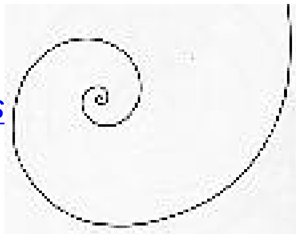
Page précédente Page suivante

EXERCICES

Page 6

Exercices 32 à 34

32. Spirales différentes



Spirale logarithmique

Soit O un point du plan, et a un nombre réel strictement positif.

Pour tout nombre réel θ , on note s_θ la similitude $s(O, \theta, a^\theta)$ de centre O , d'angle θ , et de rapport a^θ .

1) Démontrer que l'ensemble

$$G = \{ s_\theta \ / \ \theta \in \mathbf{R} \}$$

est un sous-groupe du groupe des similitudes du plan.

2) Soit A un point du plan, distinct de O . On considère la courbe Γ , dite trajectoire du point A sous le groupe G , définie par :

$$\Gamma = \{ s_\theta(A) \ / \ \theta \in \mathbf{R} \} .$$

a) On suppose $a > 1$. Choisir une valeur simple de a (par exemple $a^{\pi/2} = 3/2$) , et dessiner les points suivants de Γ (qui correspondent à des valeurs simples de θ) :

$$A_0 = s_0(A) \qquad A_1 = s_{\pi/2}(A) \qquad A_2 = s_\pi(A) \qquad A_3 = s_{3\pi/2}(A)$$

$$A_4 = s_{2\pi}(A) \qquad A_{-1} = s_{-\pi/2}(A) \qquad \ldots$$

Que peut-on dire des triangles OAA_1 , OA_1A_2 , OA_2A_3 , ..., $OA_{-1}A$, ... ?

b) Soit les points B_2 , B_3 , ..., B_n ($n \in \mathbf{N}^*$) , correspondant aux valeurs suivantes de θ :

$\pi / 2^2$, $\pi / 2^3$, ... , $\pi / 2^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) .

Dessiner B_2 et B_3 . Que peut-on dire des triangles OAB_2 et OB_2A_1 ? OAB_3 et OB_3B_2 ? On admet maintenant sans démonstration que la courbe Γ admet une tangente en A , notée T_A , qui est la limite de la droite (AB_n) quand n tend vers $+\infty$.

c) Soit M un point quelconque de Γ . Soit M_1 , M_2 , M_3 , ..., M_n ($n \in \mathbf{N}^*$) , les images de M par s_θ , pour les valeurs $\pi / 2$, $\pi / 2^2$, $\pi / 2^3$, ... , $\pi / 2^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) de θ .

Dessiner M_1 . Le point M_1 appartient-il à Γ ? pourquoi ? Dessiner M_2 et M_3 . Les points M_n ($n \in \mathbf{N}^*$) appartiennent-ils à Γ ? On admet maintenant sans démonstration que la courbe Γ admet une tangente en M , notée T_M , qui est la limite de la droite (MM_n) quand n tend vers $+\infty$.

Que peut-on dire des triangles OMM_1 et OAA_1 ? OMM_2 et OAB_2 ? OMM_n et OAB_n ? Que peut-on dire des angles (OM , T_M) et (OA , T_A) ? Tracer les tangentes aux points de la courbe déjà dessinés, tracer la courbe.

d) Quelle est l'allure de la courbe lorsque θ tend vers $+\infty$? lorsque θ tend vers $-\infty$? Le point O est dit *point asymptote* de la courbe.

3) Soit L un point quelconque de la courbe. Démontrer que Γ est la trajectoire de L sous le même groupe G :

$$\Gamma = \{ s_\theta (L) \ / \ \theta \in \mathbf{R} \} .$$

On peut donc dire que tous les points de la courbe jouent le même rôle, qu'ils sont tous *équivalents* par le groupe G .

4) Nous allons maintenant étudier le groupe de symétrie de Γ , que nous noterons G_Γ .

a) Démontrer que le groupe G est inclus dans le groupe de symétrie G_Γ .

b) Y a-t-il des homothéties dans G_Γ ? (Si non, dire pourquoi ; si oui, dire lesquelles.)

c) Soit D une droite passant par O . On note s_D la réflexion d'axe D . Dessiner sur le même schéma Γ et $s_D(\Gamma)$. Les spirales Γ et $s_D(\Gamma)$ sont-elles *"de même sens"* ? Y a-t-il des antidéplacements dans le groupe de symétrie de Γ ? Y a-t-il des simlitudes indirectes dans ce groupe ?

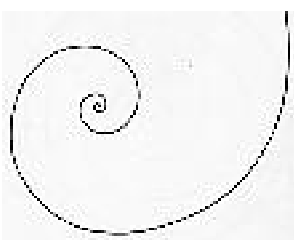
d) Démontrer que G_Γ ne contient aucun autre élément que ceux de G (donc que G_Γ = G). On admettra sans démonstration le fait, intuitivement évident, que toute similitude qui applique globalement la courbe sur elle-même admet nécessairement le point asymptote pour point invariant.

5) Quelle est la courbe Γ si $a = 1$?

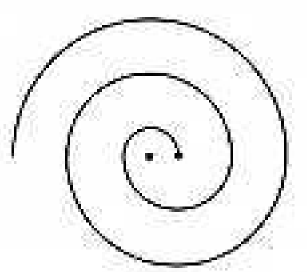
6) Si $a \neq 1$, comparer les courbes Γ_a et $\Gamma_{1/a}$.

7) Soit A' un point quelconque du plan, distinct de A et de O. Γ étant la trajectoire de A sous le groupe G, on nomme Γ' la trajectoire de A' sous le même groupe G. Comparer Γ et Γ'.

Les spirales de l'exercice 32 s'appellent spirales logarithmiques parce qu'elles sont définies au moyen de la fonction exponentielle a^θ, fonction réciproque de la fonction logarithme. Bien entendu, il existe des spirales, qui ne sont pas logarithmiques, dont la forme et la régularité sont différentes :

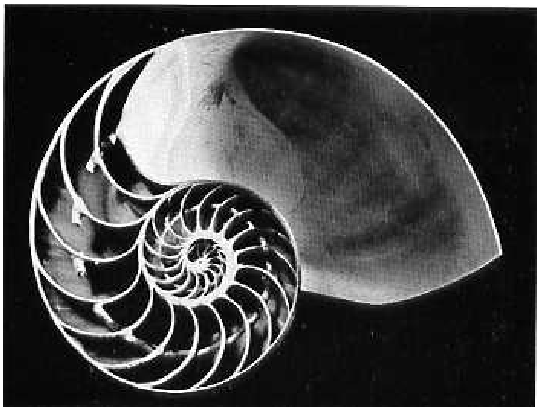


Spirale logarithmique



Spirale consituée de demi-cercles

33.



On considère une coupe plane de coquille de nautile. Elle est constituée d'une spirale logarithmique, cloisonnée en une suite potentiellement infinie de compartiments semblables.

Imprimer l'image et reproduire la spirale et ses cloisonnements à l'aide de papier calque.

Soit O le point asymptote de la spirale. Dessiner O sur le calque. Soit A un point d'une cloison (choisir un point facilement repérable), et soit A_1 le point semblable de A sur la cloison immédiatement voisine dans le sens direct, A_2 le point semblable sur la cloison qui suit immédiatement la voisine immédiate (sens direct), etc. Soit A_{-1} le point semblable de A sur la cloison qui précède immédiatement celle de A (sens direct), etc. Tracer les demi-droites $[OA)$, $[OA_1)$, $[OA_2)$, $[OA_3)$, $[OA_{-1})$, $[OA_{-2})$. Soit α l'angle de $[OA)$ vers $[OA_1)$, et soit f la similitude qui applique la cloison de A sur celle de A_1. Quels sont le centre, l'angle et le rapport de f (utiliser l'exercice 32) ? Quelle est l'image par f de la cloison de A_1 ? Quelle est l'image par f de la cloison de A_2 ? de la cloison de A_{-1} ? Quelle est l'image par $f^2 = f \circ f$ de la cloison de A ? Quelle est l'image par $f^3 = f \circ f \circ f$ de la cloison de A ? Quelle est l'image par f^{-1} de la cloison de A ? Quels sont le centre, l'angle et le rapport de f^2 ? de f^3 ? de f^{-1} ? de f^n ($n \in \mathbf{Z}$) ? Quel est le groupe de symétrie de la coupe plane de coquille de nautile ? Comparer ce groupe à celui de la spirale prise seule (sans les cloisons).

34. Dessiner une composition qui ne soit pas symétrique mais qui soit tout de même régulière (cet exercice a été posé dans un atelier d'architecture, son vocabulaire est celui de l'architecte).

Accueil

Suite

Page précédente   Page suivante

Isométries planes

Notre but dans ce chapitre n'est pas de présenter les isométries d'une manière logiquement cohérente, mais d'en énumérer rapidement les propriétés principales, en les illustrant pour l'intuition par des images (qui s'appuient évidemment sur la culture générale mathématique acquise dans l'enseignement secondaire). L'ordre dans lequel nous présentons les propriétés est celui qui nous semble efficace pour l'imagination ; ce n'est pas l'ordre logique.

Généralités

***Figures isométriques* / ãÊÞÇíÓÇä**
Deux figures *isométriques / ãÊÞÇíÓÇä* sont deux figures qui ont la même forme et la même dimension. Ce sont deux figures superposables / ÊÊØÇÈÞ , c'est-à-dire telles que si on copie l'une d'entre elles sur une feuille de papier calque, on peut faire coïncider cette copie avec l'autre par glissement / ÇäÒáÇÞ ou par retournement / ÇäÞáÇÈ du papier calque (sans déchirure ni déformation).

***Isométrie* / ÊÞÇíÓ**
Une isométrie / ÊÞÇíÓ est une transformation géométrique qui transforme toute figure en une figure isométrique (un triangle en un triangle de même forme et de même dimension, un cercle en un cercle de même rayon, une droite en une droite, un angle de 30° en un angle de 30°, etc.)

En particulier, une isométrie transforme un segment en un segment de même longueur. Ce qui rend évidente la propriété suivante.

Propriété
Une isométrie est une application du plan dans lui-même qui conserve la distance.

En mathématiques, cette propriété est la définition ; mais peu importe pour nous, qui ne nous intéressons pas à l'ordre de construction logique de la théorie.

Exemples d'isométries planes
Les translations / ÅÒÇÍÉ ; les réflexions / ÇäÚßÇÓ , les symétries centrales, les rotations / ÏæÑÇä , l'identité. (Cette liste est incomplète.)

Propriétés
Une isométrie transforme une droite en droite, deux droites parallèles en deux droites parallèles, deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.

Propriétés
Une isométrie est une application bijective du plan sur lui-même.

L'ensemble des isométries du plan, muni de la loi de composition des applications, est un groupe (c'est un sous-groupe du groupe des applications bijectives du plan sur lui-même).

Réflexions

En géométrie plane, une réflexion / ÇäÚßÇÓ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite, et nous préférons l'expression réflexion parcequ'elle est plus imagée. Nous noterons s_D la réflexion par rapport à la droite D (s comme *"symétrie"* et non pas r comme *"réflexion"*, car nous réservons la lettre r aux rotations).

Propriété
Une réflexion est une isométrie.

***Points fixes /* äÞÇØ ËÇÈÊÉ**
L'ensemble des points fixes / ËÇÈÊÉ d'une réflexion est l'axe de la réflexion.

***Droites globalement Invariantes /* áÇãÊÛíÑÉ ÅÌãÇáíÇ**
Les **droites** globalement invariantes / áÇãÊÛíÑÉ ÅÌãÇáíÇ par une réflexion sont l'axe de la réflexion et toutes les droites perpendiculaires à cet axe.

Voir l'exercice 4

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

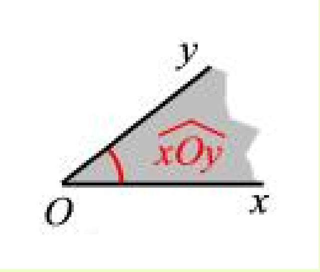
Page précédente Page suivante

Rotations

Nous contournerons ici complètement les mathématiques, qui sont assez complexes en ce qui concerne les notions de rotations et d'angles.

Une fois de plus, nous remplacerons définitions et démonstrations par des schémas et des opérations matérielles convaincantes : feuille de papier, calque et épingle fixant le calque à la feuille en un point, glissement du calque sur la feuille par rotation autour du point fixé par l'épingle (ce qu'on peut facilement imaginer, même sans l'opérer réellement).

Angles géométriques



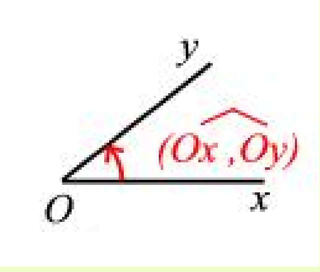
Un **secteur angulaire** est une portion de plan limitée par deux demi-droites de même origine.

Le secteur **[*Ox* , *Oy*]** , noté aussi **[*Oy* , *Ox*]** , a pour **angle géométrique** $\widehat{xOy}$ (noté aussi $\widehat{yOx}$).

Deux secteurs isométriques (c'est-à-dire superposables) ont le même angle géométrique.

Angles orientés, rotations

Le **couple** de demi-droites **(*Ox* , *Oy*)** a pour **angle orienté** $\widehat{(Ox,Oy)}$.

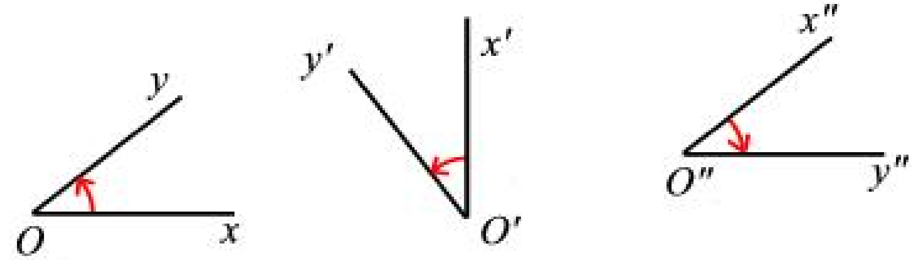


La notation **(*Ox* , *Oy*)** signifie que *Ox* et *Oy* ne jouent pas le même rôle : *Ox* est la première demi-droite du couple, *Oy* est la seconde.

Les couples **(*Ox* , *Oy*)** et **(*Oy* , *Ox*)** ne sont pas les mêmes : ils diffèrent par l'ordre des demi-droites.

Deux couples de demi-droites superposables par déplacement (glissement du calque sans retournement) ont le même angle orienté.

Deux couples de demi-droites superposables par antidéplacement (retournement du calque) ont des angles orientés opposés :



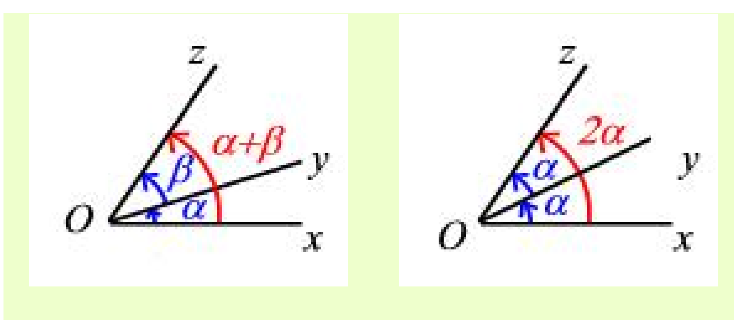
$$(\widehat{Ox,Oy}) = (\widehat{O'x',O'y'})$$
$$(\widehat{O''x'',O''y''}) = -(\widehat{Ox,Oy})$$

Les angles orientés sont représentés sur les schémas par des flèches. On peut aussi bien imaginer que la flèche représente un mouvement de rotation du caque entier, autour de O fixé par une épingle, qui applique Ox sur Oy .

Cette rotation est la **rotation** de centre ***O*** et d'angle $(\widehat{Ox,Oy})$. Si on note α l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oy})$, la rotation se note $r(O,\alpha)$.

Somme d'angles orientés, composition de rotations

Somme des angles



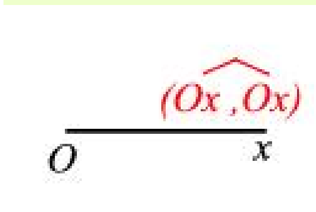
Ajouter les angles orientés, c'est composer les rotations :

$$r(O,\alpha+\beta) = r(O,\beta) \text{ o } (O,\alpha)$$

Pour faire tourner Ox jusqu'à Oz , on peut la faire tourner d'abord jusqu'à Oy , puis de Oy à Oz .
C'est la *"relation de Chasle "* sur les angles orientés :

$$(\widehat{Ox,Oy}) + (\widehat{Oy,Oz}) = (\widehat{Ox,Oz})$$

Angle nul

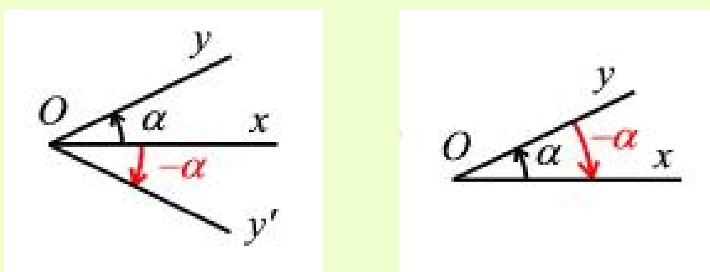


$$(\widehat{Ox,Ox}) = \hat{0}$$

L'angle nul correspond à la rotation Identité (application du plan sur lui-même qui laisse tous les points fixes) :

$r\ (\ O\ ,\ 0\ )\ =\ Id$

Angles opposés



Deux angles opposés correspondent à deux rotations inverses l'une de l'autre :si on fait tourner Ox jusqu'à Oy par la rotation de centre O et d'angle α, et si on fait ensuite tourner Oy autour de O de l'angle opposé, Oy revient sur Ox . Ce qui s'écrit :

$r\ (\ O\ ,\ -\ \alpha\ )\ \circ\ r\ (\ O\ ,\ \alpha\ )\ =\ r\ (\ O\ ,\ 0\ )\ =\ Id$

ou encore :

$r\ (\ O\ ,\ -\ \alpha\ )\ =\ [\ r\ (\ O\ ,\ \alpha\ )\ ]^{-1}$

Accueil

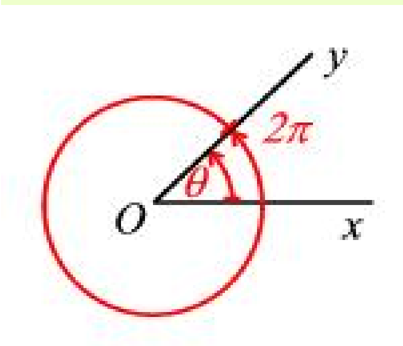
Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Rotations

Mesure des angles

Les mesures en radian d'un angle orienté peuvent s'imaginer par les mouvements de rotation autour de O qui appliquent Ox sur Oy :



Soit θ l'une de ces mesures (ici, environ + $\pi/4$, le sens positif de mesure étant le sens conventionnel habituel).

Les autres sont :

θ + 1 "tour complet", soit $\theta + 2\pi$
θ + 2 "tours complets", soit $\theta + 2(2\pi)$
θ + 3 "tours complets", soit $\theta + 3(2\pi)$
...
θ - 1 "tour complet", soit $\theta - 2\pi$
...

L'ensemble de ces mesures est : $\theta + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$.

Il faut comprendre que ces divers *"trajets"* , qui permettent tous d'arriver à Oy en partant de Ox , correspondent tous à la même rotation puisqu'une rotation mathématique est une application*.*

On a donc une infinité de noms pour la même rotation, suivant le nom choisi pour nommer l'angle, c'est-à-dire suivant la mesure choisie pour l'angle :

$$r(O, \theta) = r(O, \theta + 2\pi) = r(O, \theta + 2(2\pi)) = r(O, \theta + 3(2\pi)) = \ldots$$

$$= r(O, \theta - 2\pi) = r(O, \theta - 2(2\pi)) = \ldots$$

et on aura intérêt à choisir le nom le plus simple possible, ici par exemple $r(O, \theta)$.

Par abus de langage, on appelle très souvent "angle" une mesure de l'angle. On dira par exemple "rotation *d'angle* $\pi/4$" au lieu de "rotation *dont une mesure de l'angle* est $\pi/4$".

Accueil **Suite**

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Rotations

Invariants des rotations

Les mathématiques démontrent les propriétés suivantes (qui s'imaginent très bien au moyen de papier calque tournant autour d'un centre fixé par une épingle).

Points fixes / **äÞÇØ ËÇÈÊÉ**

Une rotation d'angle non nul modulo 2π admet un point fixe unique : son centre.
(Si l'angle est nul modulo 2π, la rotation est l'Identité.)

Droites globalement Invariantes / **áÇãÊÛíÑÉ ÅÌãÇáíÇ**

1) Aucune droite n'est globalement invariante par une rotation dont l'angle n'est ni 0 ni π modulo 2π.
2) Les droites globalement invariantes par une symétrie centrale sont les droites passant par le centre.

Voir l'exercice 3

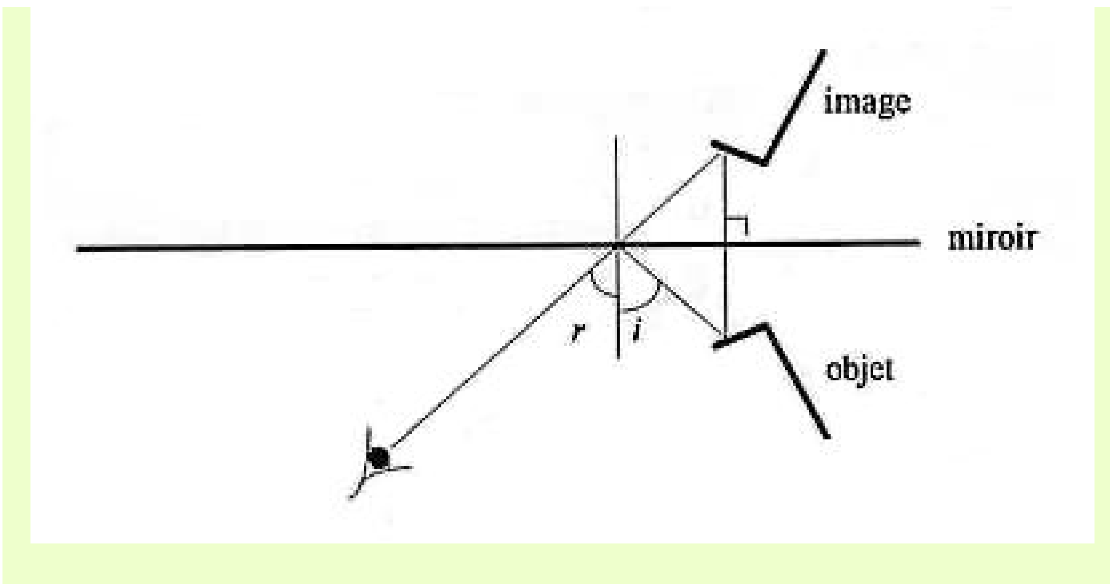
Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Symétrie axiale, symétrie centrale

Symétrie axiale orthogonale

Vocabulaire et imagination

En géométrie **dans l'espace**, la symétrie orthogonale par rapport à un plan se nomme *réflexion* / ÇäÚßÇÓ parce que c'est le modèle mathématique de la réflexion optique dans un miroir plan.



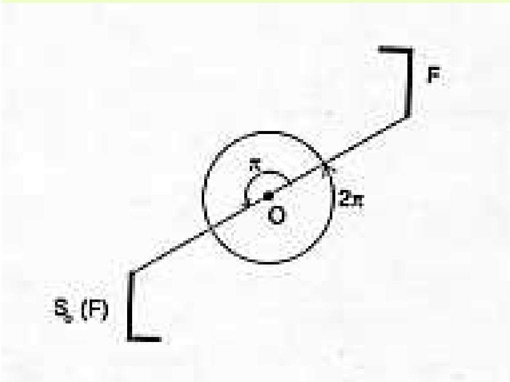
En géométrie **plane,** on nomme *réflexion* / ÇäÚßÇÓ la symétrie axiale orthogonale, parce qu'on peut imaginer l'axe de la symétrie, dans l'univers plan de la géométrie, comme un miroir rectiligne dans lequel se reflètent les figures. (On peut aussi imaginer le plan E de la géométrie plongé dans l'espace environnant (de dimension 3), et voir l'axe de la symétrie comme la trace sur E d'un miroir plan orthogonal à E .)

L'habitude quotidienne de voir se refléter des objets dans des miroirs permet d'imaginer très facilement les images géométriques des figures par des réflexions (au sens mathématique). C'est pourquoi nous préférons ce terme aux autres expressions, qui sont plus longues et plus abstraites.

Symétrie centrale

Une symétrie centrale est une rotation.
C'est un demi-tour / äÕÝ ÏæÑÉ , c'est-à-dire une rotation d'angle π (moitié de l'angle 2π du tour complet / ÏæÑÉ ßÇãáÉ).

La figure $s_O(F)$ est la figure symétrique de F par rapport à O.



Si on copie F sur un morceau de papier calque, que l'on fixe en O avec une épingle, et si on fait tourner le calque d'un demi-tour autour de O, F s'applique sur $s_O(F)$.

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Déplacements, antidéplacements

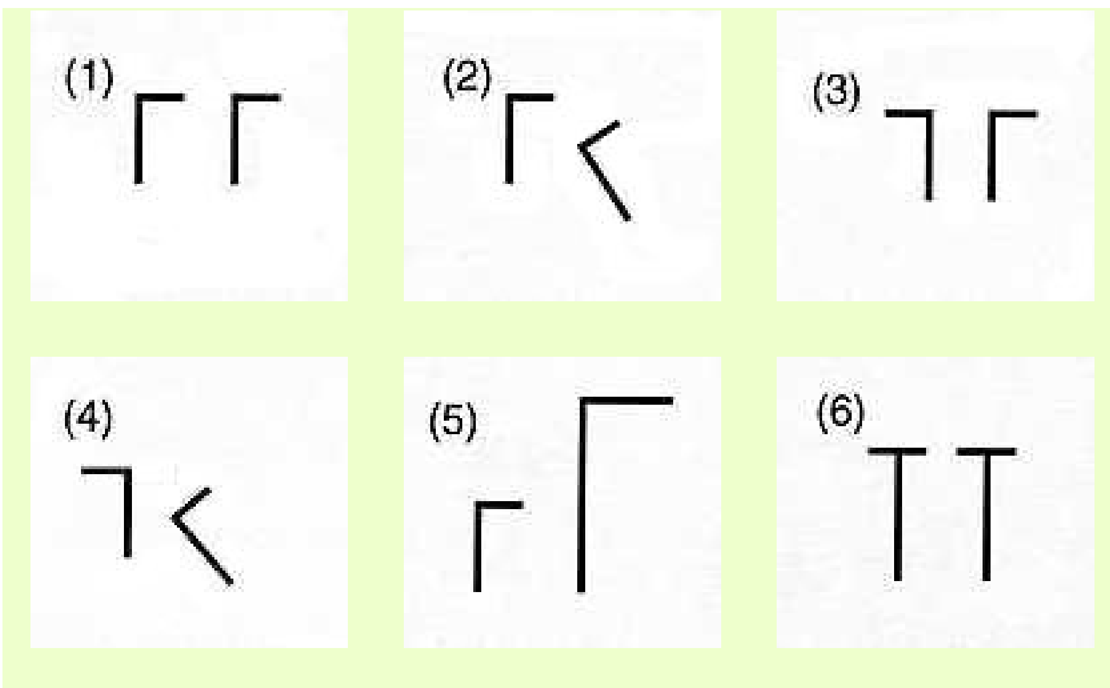
***Déplacements/* ÇäÊÞÇá , *antidéplacements* / / ÇäÊÞÇá ãÖÇÏø**

Une isométrie est ou bien un déplacement, ou bien un antidéplacement.

Un déplacement / ÇäÊÞÇá correspond à un glissement / ÇäÒáÇÞ de la figure sur le plan.
Un antidéplacement / ÇäÊÞÇá ãÖÇÏø correspond à un retournement / ÇäÞáÇÈ de la figure.

Exemples

Dans chacun des exemples ci-dessous, peut-on passer d'un crochet (⌈ ou ⊤) à l'autre (de même forme) par un déplacement ? par un antidéplacement ?



Sens des figures / ÇÊÌÇå ÇáÃÔßÇá

L'image d'une figure asymétrique (comme un crochet ⌈) par un déplacement est une figure *"de même sens" /* äÝÓ ÇáÇÊÌÇå , alors que l'image de la figure par un antidéplacement est une figure *"de sens contraire" /* ãÚßæÓ .

> On reconnait très facilement si deux figures isométriques asymétriques sont de même sens ou de sens contraire : un coup d'oeil suffit pour imaginer le déplacement d'une figure sur l'autre, ou pour voir s'il est nécessaire de la retourner.

Exemples

Déplacements : les translations, les rotations.
Antidéplacements : les réflexions.

(Cette liste est incomplète).

Propriétés

L'isométrie composée de deux déplacements est un déplacement.

L'isométrie composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

L'isométrie composée de deux antidéplacements est un déplacement.
(Imaginer par exemple que l'envers de l'envers, c'est l'endroit.)

Accueil **Suite**

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

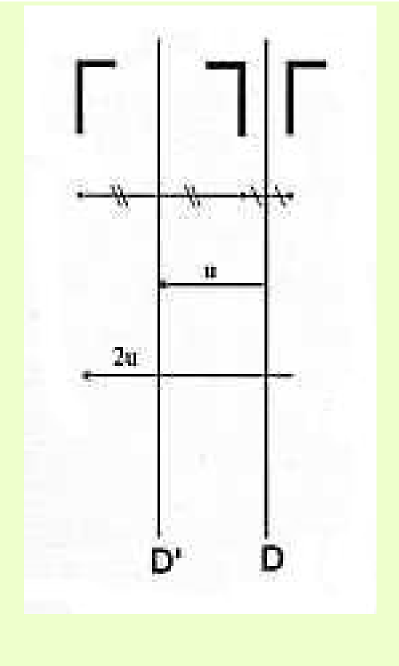
Page précédente

Page suivante

Composition de réflexions

Soit s_D et $s_{D'}$ deux réflexions, d'axes D et D' .

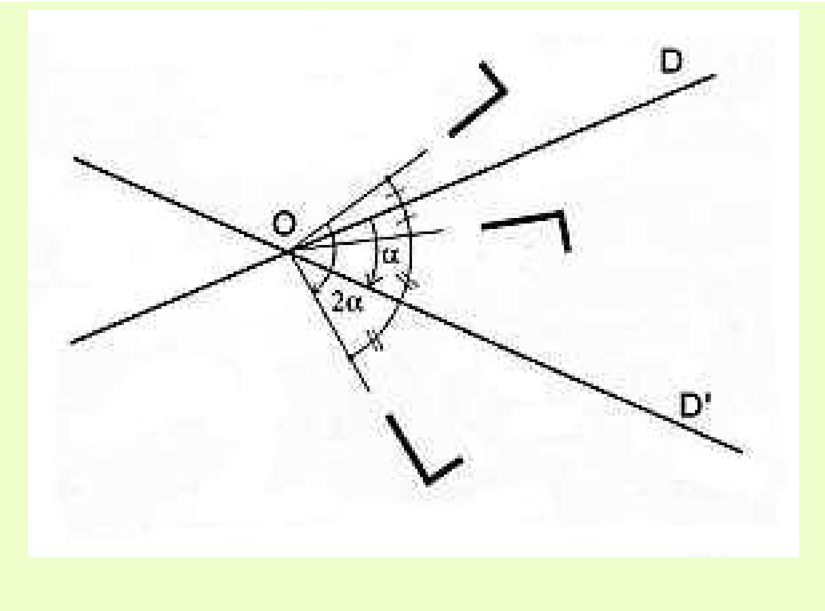
a) Si les axes sont parallèles,



$$s_{D'} \circ s_D = t_{2\vec{u}}$$

où $t_{2\vec{u}}$ est la translation dont le vecteur est le double du vecteur $\vec{u}$ orthogonal à D et D' , dirigé de D vers D' (c'est-à-dire de l'axe de la réflexion effectuée la première vers l'axe de la deuxième) et dont la norme est la distance de D à D' .

b) Si les axes sont sécants,



$$s_{D'} \circ s_D = r(O, 2\alpha)$$

où $r(O, 2\alpha)$ est la rotation centrée au point d'intersection O de D et D' , et dont l'angle est le double de l'angle du premier axe vers le deuxième.

(Ces deux propriétés sont démontrées dans l'enseignement secondaire. Nous nous contentons ici de les illustrer par des schémas.)

Accueil

Suite

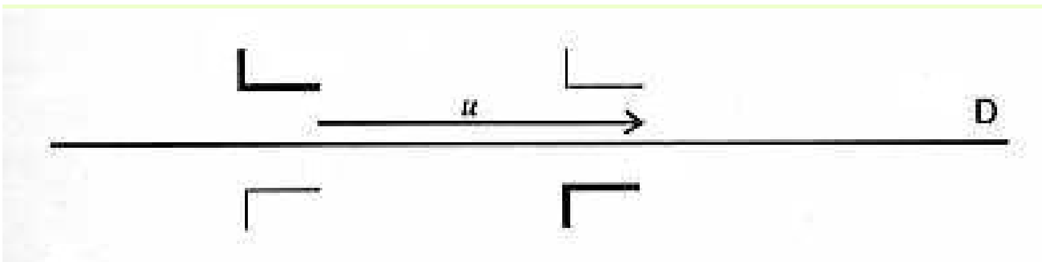
Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

Réflexions glissées

Définition

Une *réflexion glissée* est, par définition, le produit $t_{\vec{u}} \circ s_D$ d'une réflexion et d'une translation, le vecteur de la translation étant non nul et dans la direction de l'axe de la réflexion. Le produit $t_{\vec{u}} \circ s_D$ s'appelle *forme réduite* de la réflexion glissée.



La réflexion glissée $t_{\vec{u}} \circ s_D$

$(\vec{u} \neq \vec{0}\,,\ \vec{u} \,//\, D)$

Propriété

La forme réduite d'une réflexion glissée est commutative :

$$t_{\vec{u}} \circ s_D = s_D \circ t_{\vec{u}} \quad (\vec{u} \neq \vec{0}\,,\ \vec{u} \,//\, D).$$

Cette propriété est visible sur le schéma. Pour une démonstration, voir l'exercice 14

Propriété

Une réflexion glissée est un antidéplacement.

D'une part cette propriété est visible sur le schéma, d'autre part elle se démontre de la manière suivante : une réflexion glissée est, par définition, le produit d'un déplacement et d'un antidéplacement.

Propriété

La forme réduite d'une réflexion glissée ne peut pas se simplifier : une réflexion glissée n'est ni une translation, ni une rotation, ni une réflexion.

Pour une démonstration, voir l'exercice 11

Eléments caractéristiques / ÚäÇÕÑ ããíøÒÉ

La forme réduite d'une réflexion glissée

$$t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D \qquad (\text{où } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0},\ \overrightarrow{u} \,//\, D).$$

est unique. $\overrightarrow{u}$ et D s'appellent le vecteur et l'axe de la réflexion glissée ; ce sont les éléments caractéristiques de la réflexion glissée.

Pour une démonstration, voir l'exercice 16

Invariants / áÇ ãÊÛíøÑÉ

Une réflexion glissée n'admet pas de points fixes.

L'axe d'une réflexion glissée est une droite globalement invariante par la réflexion glissée, et aucune autre droite du plan n'est invariante par la réflexion glissée.

Voir les exercices 20, 21 et 22

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Liste complète des isométries

On démontrent en mathématiques (voir l'exercice 12) que le tableau complet des isométries planes est le suivant.

DÉPLACEMENTS	ANTIDÉPLACEMENTS
Translations Rotations	Réflexions Réflexions glissées

Pour obtenir les définitions et les invariants, cliquer sur le nom de l'isométrie

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

EXERCICES

Page 1

Exercices 1 à 6

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. Dessiner
a) deux figures isométriques.
b) deux figures isométriques par glissement.
c) deux figures isométriques par retournement.

2. Soit D une droite, et $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$. Dessiner D , $\vec{u}$ et la droite $t_{\vec{u}}(D)$:
a) si $\vec{u}$ n'est pas dans la direction de D ;
b) si $\vec{u}$ est dans la direction de D.

3. Soit D une droite, et r une rotation quelconque, de centre O et d'angle θ . Dessiner D et la droite r(D) :

a) si $O \in D$

b) si $O \notin D$ et si :

$0 < \theta < \pi/2$
$\theta = \pi/2$
$\pi/2 < \theta < \pi$
$\theta = \pi$
$\pi < \theta < 2\pi$

Que vaut l'angle $(\widehat{D, r(D)})$? Est-il possible que D soit globalement invariante par r , lorsque r n'est ni l'identité, ni un demi-tour ? On suppose que r est un demi-tour. Dessiner D et r (D) :
a) si $O \notin D$
b) si $O \in D$.

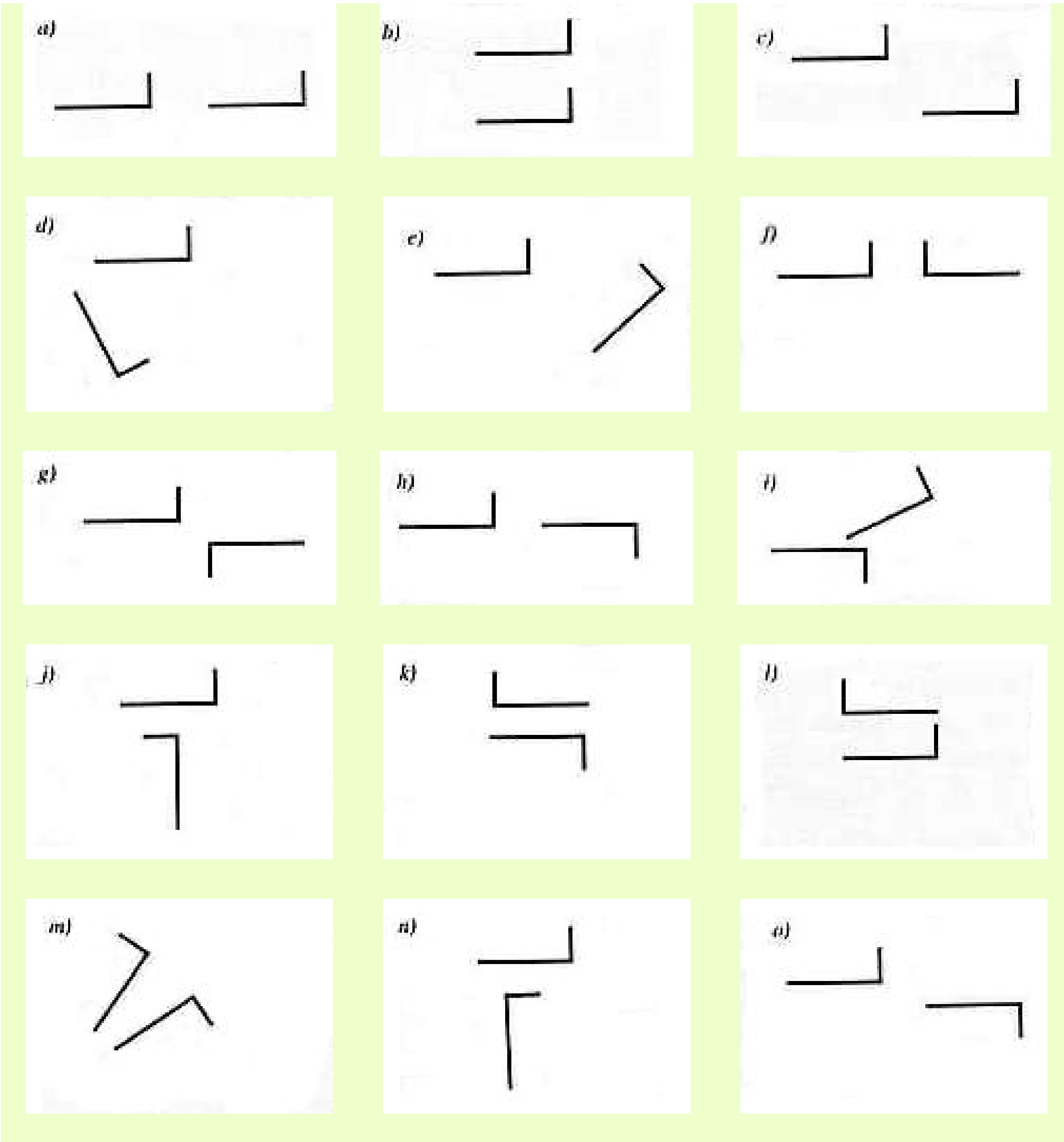
4. Soit D une droite et s_Δ une réflexion d'axe Δ . Dessiner D , Δ et la droite $s_\Delta(D)$:

a) si $D \,//\, \Delta$
b) si $D \perp \Delta$;
c) si D n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à Δ .

5. Dessiner un triangle asymétrique et son image par :

a) une rotation de centre et d'angle donnés.
b) une translation de vecteur donné.
c) une réflexion d'axe donné.

6. Chaque case du tableau ci-dessous contient deux crochets isométriques.



Corrigé 6

On demande dans chaque cas :

a) si l'isométrie qui applique un crochet sur l'autre est un déplacement ou un antidéplacement ;
b) si cette isométrie est une translation, une rotation, une réflexion, ou un antidéplacement qui n'est pas une réflexion (ce dernier cas correspond à deux crochets de sens inverse entre

lesquels, visiblement, aucune droite D ne se place comme axe de symétrie.)

On ne demande pas les éléments caractéristiques des isométries. On ne demande pas de démonstrations. On pourra utiliser du papier calque pour vérifier ses impressions.

Accueil Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

EXERCICES

Page 2

Exercices 7 à 9

7. Dessiner une figure asymétrique simple et son image par le produit de deux réflexions :
a) dans le cas où les axes des réflexions sont sécants
b) dans le cas où les axes des réflexions sont parallèles.

Le produit de deux réflexions est-il un déplacement ou un antidéplacement ? Quelle est sa nature (translation, rotation, ...) ?

8. Quel est le produit d'une translation et d'une rotation ? Quel est le produit de deux rotations ? On discutera suivant les valeurs des angles.

9. On considère deux triangles isométriques ABC et A'B'C' . On cherche à appliquer ABC sur A'B'C' par des réflexions successives.

a) Dessiner deux triangles isométriques quelconques (A' est l'homologue de A , B' celui de B , C' celui de C) .

b) Combien existe-t-il de réflexions qui appliquent A sur A' ? (On discutera suivant les positions relatives de A et de A' .) Soit D_1 l'axe d'une telle réflexion. Dessiner D_1 sur le schéma. Dessiner l'image $A' B_1 C_1$ de ABC par la réflexion.

c) On suppose que $B_1 = B'$ et $C_1 = C'$. Faire un schéma correspondant à ce cas. Conclure.

d) On suppose que $B_1 = B'$ et $C_1 \neq C'$. Faire un schéma correspondant à ce cas. Quelle est la médiatrice du segment $[C_1 C']$? Conclure.

e) On suppose que $B_1 \neq B'$. Soit D_2 la médiatrice de $[B_1 B']$. Où se trouve A' par rapport à D_2 ? Dessiner l'image $A' B' C_2$ de $A' B_1 C_1$ par la réflexion d'axe D_2 . Conclure, suivant que C_2 et C' sont confondus ou non.

EXERCICES

Page 3

Exercices 10 à 13

10. Nous allons démontrer que si deux isométries coïncident sur un repère affine du plan, elles coïncident partout. Soit f et g deux isométries, et soit (A, B, C) un repère affine du plan (c'est-à-dire que A , B et C sont trois points non alignés). On suppose que f et g coïncident sur (A, B, C) et on note :

A' = f(A) = g(A)
B' = f(B) = g(B)
C' = f(C) = g(C) .

On veut démontrer que, quel que soit le point M du plan, f(M) = g(M) .

a) Faire un schéma représentant le triangle ABC et le triangle A'B'C' , d'une manière vraisemblable (les deux triangles sont isométriques).

b) En utilisant le fait que l'image d'une droite par une isométrie quelconque est une droite, démontrer que l'image par f de la droite (AB) est la droite (A'B') (globalement / ÅÌãÇáíÇ). Même question pour g .
Soit M un point quelconque de la droite (AB) . A quelle distance du point A' se trouve nécessairement le point f(M) ? Combien existe-t-il de points situés sur la droite (A'B') à un distance donnée de A' ? Sur quelle demi-droite d'origine A' se trouve nécessairement f (M) ? (Caractériser les demi-droites à l'aide des points B et B' .) Répondre aux mêmes questions pour g(M) , et en conclure que f(M) = g(M) .

c) Soit M un point quelconque du plan. On considère la projection orthogonale m de M sur la droite (AB) . Où se trouvent f(m) et g(m) ? (Utiliser les résultats de la question b).) Quelle est l'image par f de la droite orthogonale à (AB) passant par m ? (Utiliser le fait qu'une isométrie transforme deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.) A quelle distance de f(m) se trouve nécessairement le point f(M) ? Dans quel demi-plan limité par (A'B') se trouve nécessairement le point f(M) ? (Caractériser les demi-plans à l'aide des points C et C' .) Répondre aux mêmes questions pour g , et en conclure que f(M) = g(M) .

Les exercices 9 et 10 prouvent qu'une isométrie quelconque du plan est ou bien une réflexion, ou bien le produit de deux réflexions (dans ce cas c'est une translation ou une rotation), ou bien le produit de trois réflexions.
Les exercices 11 et 12 servent à étudier le produit de trois réflexions.

11. Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$, et s_D une réflexion d'axe D . On veut étudier l'isométrie $t_{\vec{u}} \circ s_D$, dans toutes les dispositions relatives possibles de $\vec{u}$ et de D .

a) Démontrer que l'isométrie $t_{\vec{u}}$ o s_D est un antidéplacement. Une translation est-elle un antidéplacement ? Est-il possible qu'une translation s'écrive sous la forme $t_{\vec{u}}$ o s_D ? Mêmes questions pour une rotation.

b) On suppose $u \perp D$.

Faire un schéma représentant D , $\vec{u}$, une figure asymétrique simple, nommée F , l'image s_D (F) de F par s_D , et l'image $t_{\vec{u}}$ [s_D (F)] de s_D (F) par $t_{\vec{u}}$.

Sur le schéma, a-t-on l'impression qu'il est possible de placer une droite Δ par rapport à laquelle les figures F et $t_{\vec{u}}$ [s_D (F)] soient symétriques ? En décomposant $t_{\vec{u}}$ en un produit de réflexions bien choisies, démontrer que $t_{\vec{u}}$ o s_D est une réflexion et déterminer son axe en fonction de $\vec{u}$ et de D .

c) On suppose $\vec{u}$ // D et $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Faire un schéma représentant D , $\vec{u}$, une figure asymétrique simple, nommée F , l'image s_D (F) de F par s_D , et l'image $t_{\vec{u}}$ [s_D (F)] de s_D (F) par $t_{\vec{u}}$. Sur le schéma, a-t-on l'impression qu'il est possible de placer une droite Δ par rapport à laquelle les figures F et $t_{\vec{u}}$ [s_D (F)] soient symétriques ? En raisonnant par l'absurde, démontrer que l'isométrie $t_{\vec{u}}$ o s_D n'est pas une réflexion (c'est pourquoi on lui donne le nom **nouveau** de *réflexion glissée*).

d) On suppose que $\vec{u}$ n'est ni parallèle, ni orthogonal à D .

En décomposant $\vec{u}$ en une somme de deux vecteurs, l'un dans la direction de D , l'autre orthogonal à D , et en utilisant les résultats des questions b) et c), démontrer que $t_{\vec{u}}$ o s_D est une réflexion glissée (dont $t_{\vec{u}}$ o s_D **n'est pas** une forme réduite) : on demande de trouver une forme réduite dont on donnera les éléments caractéristiques (axe et vecteur) en fonction de $\vec{u}$ et de D .

12. Soit $r\,(O\,,\alpha)$ une rotation de centre O et d'angle α , et s_D une réflexion d'axe D . On veut étudier le produit $r\,(O\,,\alpha)$ o s_D , dans toutes les positions possibles de O par rapport à D .

a) Le produit $r\,(O\,,\alpha)$ o s_D est-il un déplacement ou un antidéplacement ?

b) On suppose que $O \in D$. En décomposant $r(O, \alpha)$ en un produit de réflexions bien choisies, démontrer que $r(O, \alpha) \circ s_D$ est une réflexion, dont on déterminera l'axe.

c) On suppose que $O \notin D$ et $\alpha \neq 0\ [2\pi]$. En décomposant $r(O, \alpha)$ en un produit de réflexions bien choisies, et en utilisant les résultats de l'exercice 11 ci-dessus, démontrer que $r(O, \alpha) \circ s_D$ est une réflexion glissée, dont on déterminera les éléments caractéristiques.

13. En utilisant les résultats des exercices 11 et 12, ainsi que ceux des exercices 9 et 10, démontrer qu'il n'existe pas d'autres isométries du plan que les translations, les rotations, les réflexions, et les réflexions glissées.

Accueil Suite

EXERCICES

Page 4

Exercices 14 à 22

14. *Commutativité*

Nous allons démontrer que si $\vec{u}$ et D sont un vecteur et une droite quelconques, le produit $t_{\vec{u}}$ o s_D est commutatif si, et seulement si, $\vec{u}$ est dans la direction de D .

a) Si $\vec{u}$ est dans la direction de D , soit Δ et Δ' deux droites, orthogonales à $\vec{u}$, telles que $s_{\Delta'}$ o $s_\Delta = t_{\vec{u}}$. Quel est l'angle de la rotation s_Δ o s_D ? Quel est l'angle de la rotation s_D o s_Δ ? En déduire que

$$s_\Delta \text{ o } s_D = s_D \text{ o } s_\Delta$$

et démontrer que

$$t_{\vec{u}} \text{ o } s_D = s_D \text{ o } t_{\vec{u}} .$$

b) Si $\vec{u}$ n'est pas dans la direction de D , trouver les éléments caractéristiques de l'isométrie $t_{\vec{u}}$ o s_D , et ceux de s_D o $t_{\vec{u}}$ (utiliser les résultats de l'exercice 11, b et d). Conclure.

15. *Commutativité*

Le produit $r\,(O\,,\alpha)$ o s_D d'une réflexion et d'une rotation quelconques, est-il commutatif ? (On pourra utiliser les résultats de l'exercice 12 pour trouver les éléments caractéristiques de l'isométrie $r\,(O\,,\alpha)$ o s_D , et ceux de s_D o $r\,(O\,,\alpha)$.)

16. Soit f une réflexion glissée. Nous allons démontrer que la forme réduite de f est unique.

Soit deux formes réduites de f :

$$f = t_{\vec{u}} \text{ o } s_D \ , \quad \text{où } \vec{u} \,//\, D \text{ et } \vec{u} \neq \vec{0} \ ,$$

$= t_{\vec{u}'} \circ s_{D'}$, où $\vec{u}'$ // D' et $\vec{u}' \neq \vec{0}$.

Faire un schéma représentant D et $\vec{u}$. Soit A un point quelconque du plan. Dessiner A , ainsi que les points $s_D(A)$, $t_{\vec{u}}(A)$, et l'image A' de A par la réflexion glissée. Où se trouve le milieu du segment [AA'] par rapport à la droite D ?

Même question en utilisant D' et $\vec{u}'$, et le même point A .

En utilisant deux points A et B et leurs images, démontrer que D = D' , puis que $\vec{u} = \vec{u}'$.

17. Reprendre les schémas de l'exercice 6 et dessiner sur chaque schéma les éléments caractéristiques de l'isométrie.

18. Etant donné des translations, des rotations, des réflexions et des réflexions glissées, toutes quelconques :

$t_{\vec{u}}$ $\quad r(O, \alpha)$ $\quad s_D$ $\quad s_\Delta \circ t_{\vec{v}}$ (où $\vec{v}$ // Δ et $\vec{v} \neq \vec{0}$)

$t_{\vec{u}'}$ $\quad r(O', \alpha')$ $\quad s_{D'}$ $\quad s_{\Delta'} \circ t_{\vec{v}'}$ (où $\vec{v}'$ // Δ et $\vec{v}' \neq \vec{0}$)

on considère leurs produits deux à deux, de toutes les manières possibles. On demande de dire dans chaque cas :

a) si le produit est un déplacement ou un antidéplacement ;

b) quelle est la nature du produit (translation, rotation, etc.) et quels en sont les éléments caractéristiques.

19. Soit f une réflexion glissée. Faire un schéma représentant l'axe et le vecteur de f , une figure asymétrique simple, nommée F , l'image f(F) de F par f , et l'image f [f(F)] de f(F) par f . Quel est le produit f o f de la réflexion glissée par elle même (nature et éléments caractéristiques) ?

20. Soit f une réflexion glissée, d'axe D et de vecteur $\vec{u}$ ($\vec{u}$ // D , $\vec{u} \neq \vec{0}$) . Quelle est l'image par f d'un point de D ? Quelle est l'image par f de D ? Quelle est l'image par f de chaque demi-plan limité par D ?

21. Soit f une réflexion glissée, d'axe D . Démontrer qu'aucun point M du plan n'est fixe par f , en utilisant les résultats de l'exercice 20 précédent et en supposant :

a) que $M \in D$

b) que $M \notin D$.

22. Soit f une réflexion glissée, d'axe D . Démontrer que si Δ erst une droite différente de D , alors $f(\Delta) \neq \Delta$

Accueil

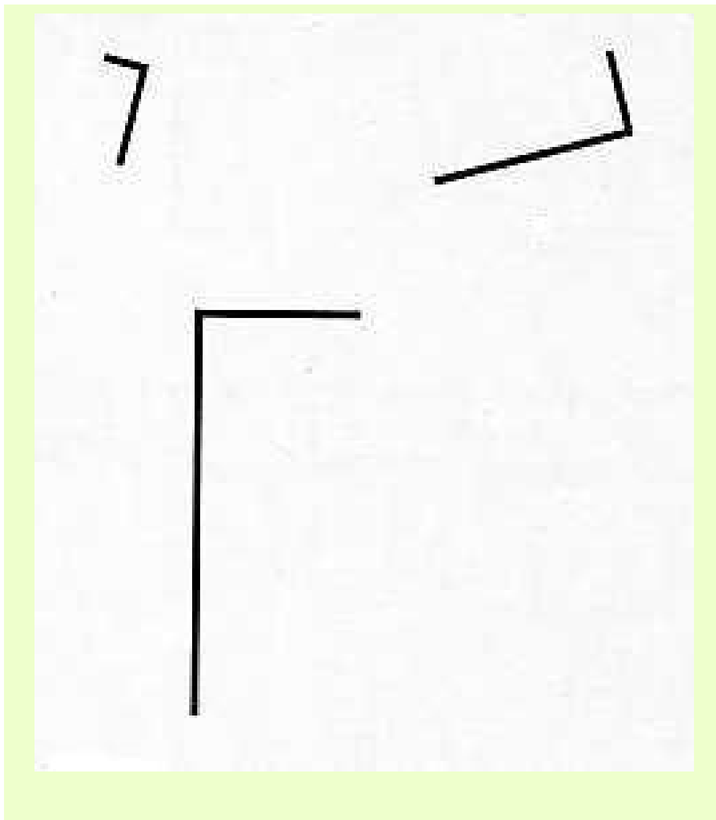
Suite

Page précédente Page suivante

Similitudes planes

Généralités

Figures semblables / ãÊÔÇÈåÇä
Deux figures *semblables / ãÊÔÇÈåÇä* sont deux figures qui ont la même forme / äÝÓ ÇáåíÆÉ (mais pas nécessairement la même dimension).



Similitude / ÊÔÇÈå
Une similitude / ÊÔÇÈå est une transformation géométrique qui transforme toute figure en une figure semblable (un triangle en un triangle de même forme, éventuellement plus petit ou plus grand ; un secteur angulaire en un secteur de même angle ; un cercle en un cercle, éventuellement plus petit ou plus grand ; une droite en une droite, etc.).

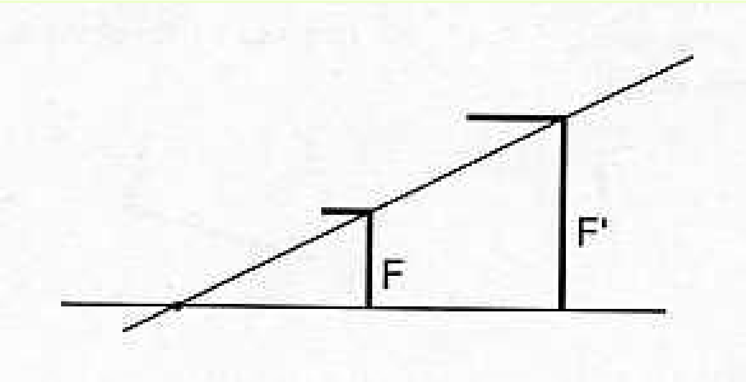
Rapport de similitude
A chaque similitude est associée un rapport, c'est-à-dire un nombre réel strictement positif par lequel la similitude multiplie les distances. (Si le rapport est supérieur à 1, la similitude agrandit les figures ; si le rapport est inférieur à 1, la similitude rapetisse les figures ; si le rapport vaut 1, la similitude transforme chaque figure en une figure de même forme et de même dimension : c'est une isométrie).

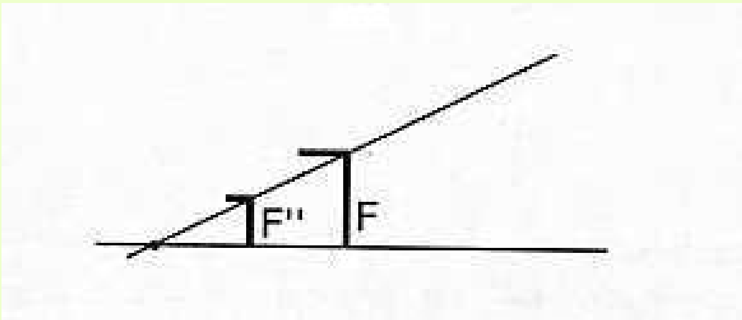
Homothéties

Définition

Etant donné un point A et un nombre réel k non nul, *l'homothétie /* ÊÍÇßò de centre A et de rapport k est l'application de l'espace dans lui-même qui associe à tout point M de l'espace le point M' tel que :

$$\overrightarrow{AM'} = k\ \overrightarrow{AM}\ .$$



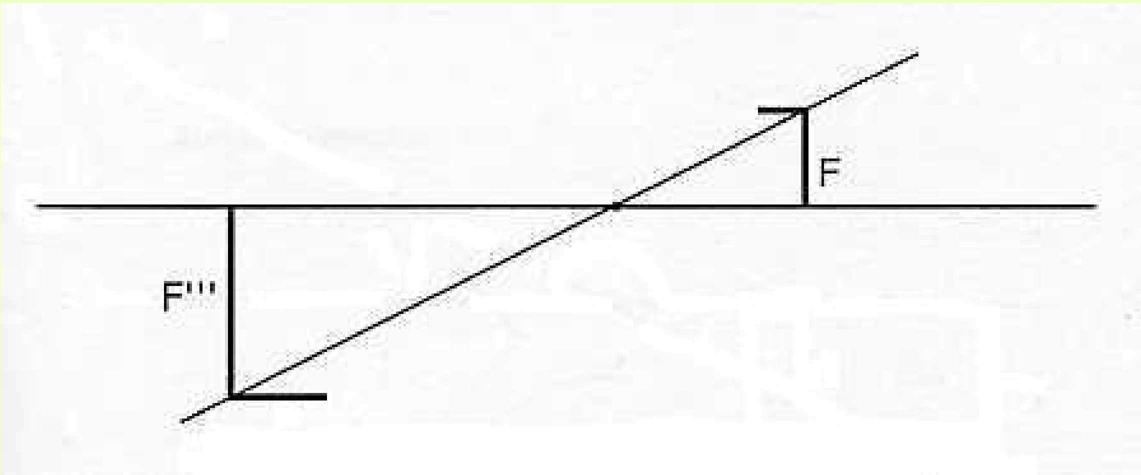


La figure F' est l'image de F par une homothétie de rapport 2 .

Les figures F et F' sont semblables, et F' est plus grande que F .

La figure F'' est l'image de F par une homothétie de rapport 1/2 .

Les figures F et F'' sont semblables, et F'' est plus petite que F.



La figure F''' est l'image de F par une homothétie de rapport -2 .

Les figures F et F''' sont semblables, et F''' est plus grande que F (les longueurs sont multipliées par 2) .

Produits, inverses

Si f et g sont deux homothéties, de même centre et de rapports respectifs h et k , alors g o f est l'homothétie de même centre et de rapport $k.h$.

Si f est une homothétie de rapport k , alors f possède une application réciproque f^{-1} , qui est l'homothétie de même centre et de rapport $1/k$.

Pour des démonstrations, voir l'exercice 4

Identité, symétrie centrale

Une homothétie de rapport 1 est l'identité du plan.
Une homothétie de rapport -1 est une symérie centrale, c'est-à-dire un demi-tour.

Rapport d'homothétie, rapport de similitude

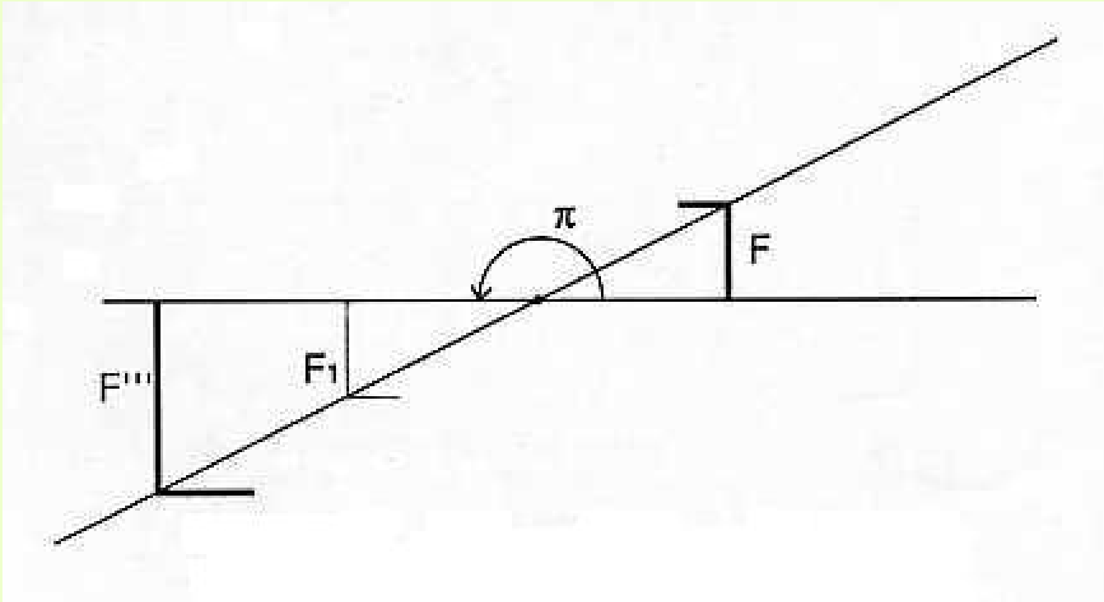
Une homothétie de rapport k (où $k \in$ **R** et $k \neq 0$) est une similitude de rapport $|k|$ (les distances sont multipliées par $|k|$) .

Vocabulaire et imagination

Homothétiques (du grec ***homos*** "semblable" et ***thesis*** "position") signifie "semblablement posées", ce qui a un sens intuitif évident dans le cas d'une homothétie de rapport positif : deux figures homothétiques dans un rapport positif ne sont pas seulement "semblables" (par la forme), elles sont, de plus, "semblablement posées" sur la page.

Sens des figures / ÇÊÌÇå ÇáÃÔßÇá

Si on admet comme évident que deux figures homothétiques dans un rapport positif sont "de même sens", puisqu'elles sont "semblablement posées", on constate que deux figures homothétiques dans un rapport négatif sont également "de même sens", puisque :



La figure F''' est l'image de F par une homothétie de rapport -2 .

Pour appliquer F sur F''' , on peut d'abord appliquer F sur la figure intermédiaire F_1 par un demi-tour, puis appliquer F_1 sur F''' par une homothétie de rapport 2 .

on peut passer de l'une à l'autre en effectuant successivement deux opérations dont aucune ne change le sens des figures.

***Points fixes /* äÞÇØ ËÇÈÊÉ**
Une homothétie de rapport **différent de 1** possède un point fixe unique : son centre.
(Si le **rapport est 1**, l'homothétie est l'identité.)

***Droites globalement invariantes /* áÇ ãÊÛíÑÉ ÅÌãÇáíÇ**

Les droites globalement invariantes par une homothétie distincte de l'identité sont les droites passant par le centre.

Voir l'exercice 7

Accueil

Suite

Similitudes planes

Page précédente Page suivante

Similitudes directes, similitudes indirectes

Similitudes directes, similitudes indirectes
Une similitude directe est une similitude qui conserve le sens des figures.
Une similitude indirecte est une similitude qui inverse le sens des figures asymétriques.

Exemples

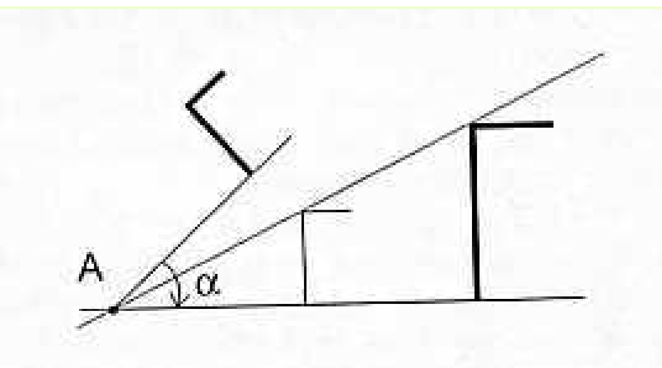
Les déplacements sont des similitudes directes (mais une similitude directe de rapport différent de 1 n'est pas un déplacement).

Les antidéplacements sont des similitudes indirectes (mais une similitude indirecte de rapport différent de 1 n'est pas un antidéplacement).

Une homothétie (de rapport positif ou négatif) est une similitude directe.

Autres exemples

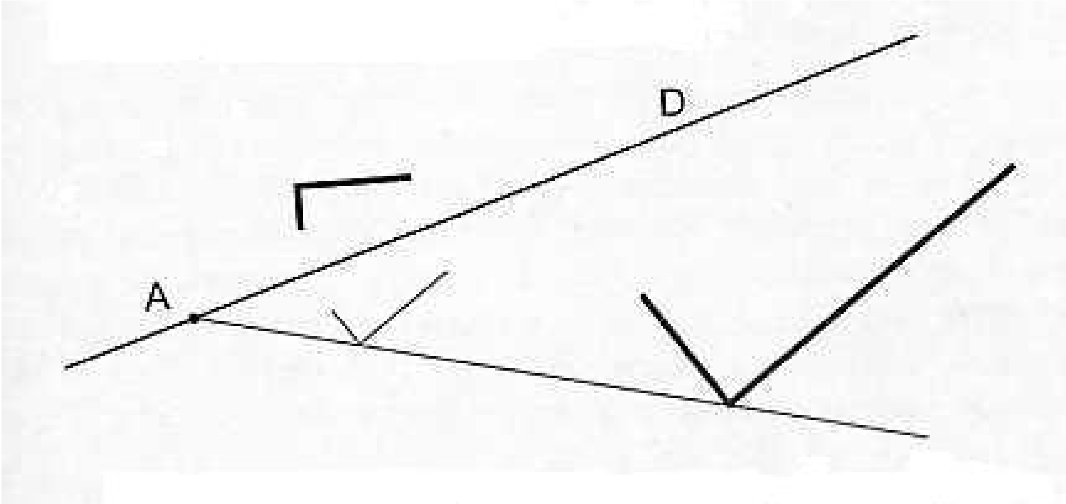
Exemple de similitude directe



Soit $h(A, k) \circ r(A, \alpha)$ l'application composée d'une rotation de centre A et d'angle α, et d'une homothétie de même centre et de rapport k stictement positif.

Cette application est une similitude de rapport k (elle agrandit les figures, ou elle les rapetisse, dans le rapport k) et elle n'inverse pas le sens des figures (puisque ni la rotation, ni l'homothétie, ne l'inversent).

Exemple de similitude indirecte



Soit $h(A, k) \circ s_D$ l'application composée d'une réflexion d'axe D et d'une homothétie, dont le centre A appartient à D et dont le rapport k est strictement positif.

Cette application est une similitude de rapport k (elle agrandit les figures, ou elle les rapetisse, dans le rapport k), et elle inverse le sens des figures asymétriques (puisque la réflexion inverse le sens et que l'homothétie n'y change rien).

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

Liste des similitudes

On démontre en mathématiques que la liste de similitudes que nous venons de voir en exemples est complète. C'est ce qu'énoncent les théorèmes suivants.

Centre d'une similitude non isométrique

Toute similitude non isométrique possède un point fixe unique, nommé centre de la similitude.

Forme réduite d'une similitude non isométrique

Soit f une similitude non isométrique quelconque. Soit A son centre et k son rapport $(k > 0,\ k \neq 1)$.

1) Si f est **directe**, il existe une unique rotation de centre A, soit $r(A, \alpha)$, dont le produit avec l'homothétie de centre A et de rapport k est égal à la similitude :

$$f = h(A, k) \circ r(A, \alpha) \qquad (k > 0,\ k \neq 1).$$

Ce produit est commutatif. Il s'appelle la forme réduite de la similitude. (Une similitude directe non isométrique est caractérisée par un centre, un rapport et un angle.)

2) Si f est **indirecte**, il existe une unique réflexion, soit s_D, dont l'axe D passe par A, et dont le produit avec l'homothétie de centre A et de rapport k est égal à la similitude :

$$f = h(A, k) \circ s_D \qquad (k > 0,\ k \neq 1,\ A \in D).$$

Ce produit est commutatif. Il s'appelle la forme réduite de la similitude. (Une similitude indirecte non isométrique est caractérisée par un centre, un rapport et un axe.)

Ces propriétés ne sont pas évidentes : étant donné deux figures semblables quelconques (voir par exemple des crochets), on ne discerne pas immédiatement la forme simple de la similitude qui applique une figure sur l'autre. On voit plutôt des manières de passer d'une figure à l'autre en plus de deux étapes : agrandir, tourner et translater ; ou bien : agrandir, retourner et tourner ; etc. Pour apprendre à déterminer le centre et l'angle, ou le centre et l'axe, d'une similitude non isométrique quelconque, voir les exercices 11 et 13.

Droites globalement invariantes / áÇ ãÊÛíÑÉ ÅÌãÇáíÇ

1) Soit f une similitude **non isométrique directe**, donnée sous forme réduite :

$$f = h(A, k) \circ r(A, \alpha) \qquad (k > 0 ,\ k \neq 1) .$$

Si la rotation n'est ni l'identité, ni un demi-tour, aucune droite n'est globalement invariante par f.

Si la rotation est l'identité ou un demi-tour (c.-à-d. si f est une homothétie, de rapport k ou $-k$), les droites globalement invariantes par f sont les droites passant par le centre.

2) Soit f une similitude **non isométrique indirecte**, donnée sous forme réduite :

$$f = h(A, k) \circ s_D \qquad (k > 0 ,\ k \neq 1 ,\ A \in D) .$$

Les droites globalement invariantes par f sont l'axe D de la réflexion, et la droite perpendiculaire à D en A .

Pour des démonstrations, voir exercices 16 et 17

Accueil Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

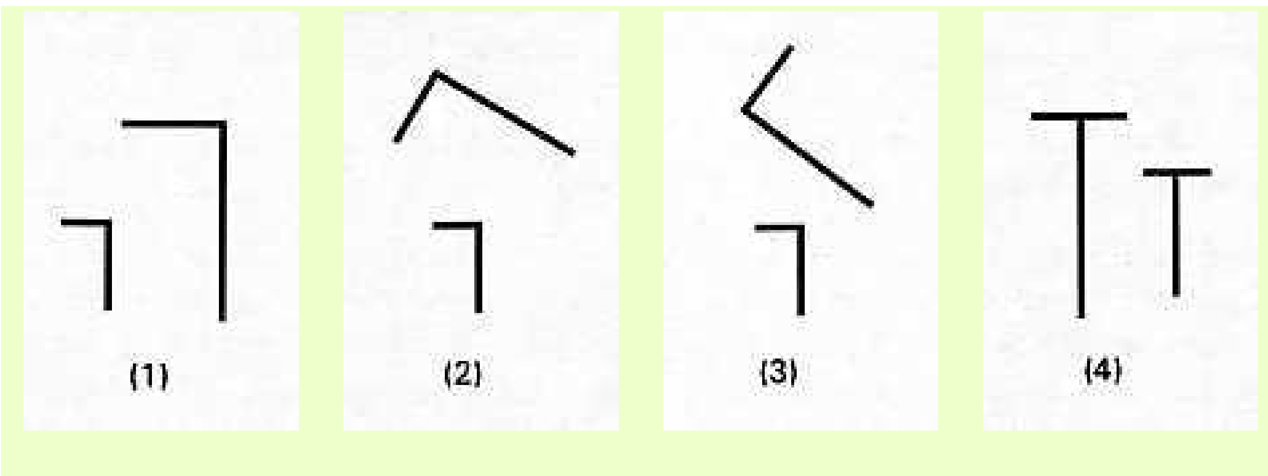
EXERCICES

Page 1

Exercices 1 à 12

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. Dans chacun des exemples ci-dessous



les deux crochets sont-ils directement semblables ? indirectement semblables ?

2. Dessiner une figure asymétrique et son image

a) par une homothétie de centre A et de rapport 3
b) par l'homothétie de même centre et de rapport 1/3
c) par l'homothétie de même centre et de rapport -3 .

3. Soit A un point du plan. On considère l'homothétie de centre A et de rapport -3/2 . Est-elle agrandissante ou rapetissante ? Est-ce une similitude directe ou une similitude indirecte ?

4. a) Soit f et g deux homothéties de mêmes centre A , et de rapports respectifs h et k . Soit M un point quelconque du plan, M’ l’image de M par f , M” l’image de M’ par g .
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM''}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AM'}$, puis en fonction du vecteur $\overrightarrow{AM}$.
Quelle est l’application g o f ?

b) Soit f une homothétie de centre A et de rapport k , et soit M un point quelconque du plan. Trouver un point M' du plan dont l'image par f est M. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AM}$. L'homothétie f admet-elle une application réciproque ?

5. Soit $h(A, -k)$ une homothétie de centre A et de rapport négatif - k. En utilisant le théorème donnant le produit de deux homothéties, démontrer que le produit du demi-tour de centre A et de l'homothétie $h(A, k)$, de centre A et de rapport k positif, est égal à $h(A, -k)$.

6. Quel est le rapport de similitude d'une homothétie de rapport négatif ? Quel est l'angle de similitude d'une homothétie de rapport négatif ? Quel est l'angle de similitude d'une homothétie de rapport positif ?

7. Soit une homothétie de centre A et de rapport k quelconque ($k \neq 0$). Soit D une droite quelconque du plan.

Faire un schéma représentant D et son image h(D) par h, dans les cas :

a) $A \in D$
b) $A \notin D$ et $k > 1$
c) $A \notin D$ et $0 < k < 1$
d) $A \notin D$ et $k < 0$

(Faire des schémas correspondant à des valeurs simples de k)

Dans tous les cas, quelle est la position relative de D et de h(D) ?

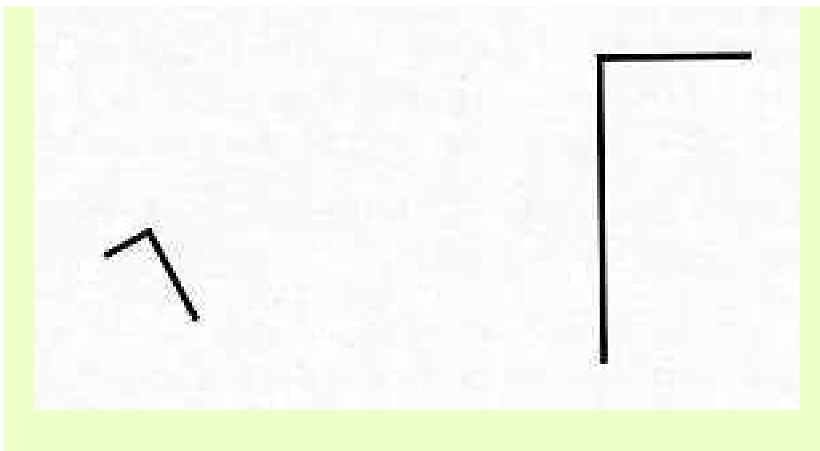
8. Soit $h(A, k) \circ r(A, \alpha)$ ($k > 0$, $k \neq 1$) une similitude non isométrique directe, donnée sous forme réduite. Représenter sur un schéma la commutativité de ce produit : on dessinera A, un point M distinct de A, les images M_1 et M_2 de M respectivement par $h(A, k)$ et par $r(A, \alpha)$ (choisir un rapport et un angle simples), et l'image M' de M par la similitude.

9. Soit $h(A, k) \circ s_D$ ($k > 0$, $k \neq 1$, $A \in D$) une similitude non isométrique indirecte, donnée sous forme réduite. Représenter sur un schéma la commutativité de ce produit : on dessinera A et D, un point M distinct de A (et, en général, n'appartenant pas à D), les images M_1 et M_2 de M respectivement par $h(A, k)$ et par s_D (choisir un rapport simple), et l'image M' de M par la similitude.

10. Soit $s\,(A\,,D\,,k)$ une similitude indirecte de centre A , d'axe D et de rapport k (k ∈ **R*$_+$**). Soit M un point n'appartenant pas à D . Dessiner D , A , M et l'image M’ de M par la similitude (on choisira pour k un rapport simple).

Soit I le point d'intersection des droites D et (MM’) . Où se trouve I par rapport au segment [MM’] ? Que vaut le rapport IM’ / IM ? (On pourra utiliser le point M_1 , image de M par la réflexion d'axe D .)

11. Les deux crochets dessinés ci-dessous sont indirectement semblables.



Utiliser les résultats de l'exercice 10 précedent pour déterminer les éléments caractéristiques de la similitude qui applique l'un des crochets sur l'autre (rapport, axe, centre).

12. Soit $s\,(A\,,\alpha\,,k)$ une similitude directe de centre A , d'angle α et de rapport k (k ∈ **R*$_+$**). On suppose $\alpha \neq 0\ [\pi]$.

Soit M un point distinct de A , et N un point distinct de M . Dessiner A , M , N , et les images M’ et N’ de M et N par la similitude (on choisira pour k et α un rapport et un angle simples).

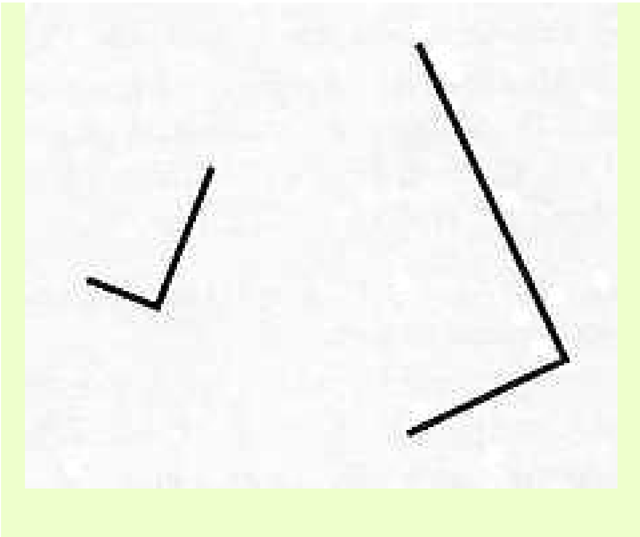
Que vaut l’angle orienté de droites $(\widehat{(MN),(M'N')})$? Soit I le point d’intersection des droites (MN) et (M’N’) . Que vaut l’angle orienté de droites $(\widehat{(IM),(IM')})$? Sur quels cercles remarquables se trouve le point I ? (On pourra utiliser des arcs capables.)

EXERCICES

Page 2

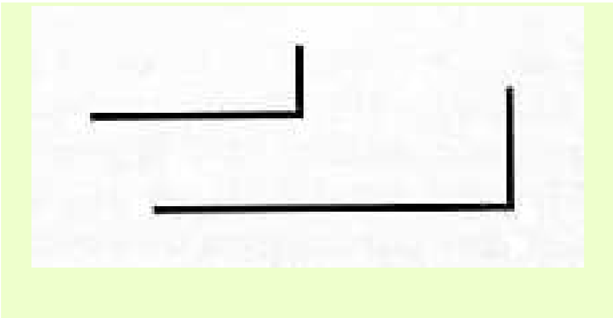
Exercices 13 à 18

13. Les deux crochets ci-dessous sont directement semblables.



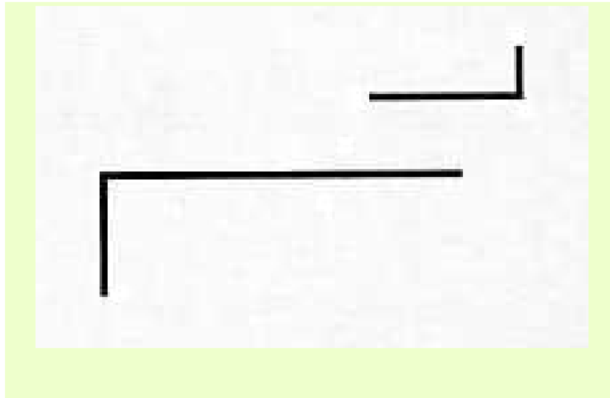
Utiliser les résultats de l'exercice 12 pour déterminer les éléments caractéristiques de la similitude qui applique l'un des crochets sur l'autre (rapport, angle, centre).

14. Les deux crochets ci-dessous sont directement semblables.



Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude qui applique l'un des crochets sur l'autre.

15. Même question qu'à l'exercice 14 pour les deux crochets ci-dessous.



16. Soit f $= r(A, \alpha) \circ h(A, k)$ $(k > 0,\ k \neq 1)$ une similitude non isométrique directe, donnée sous forme réduite. On suppose que l'angle α n'est ni zéro, ni π, modulo 2π.
Nous allons démontrer qu'aucune droite n'est globalemnt invariante par f .

Soit D une droite quelconque du plan. Quel est l'angle de droites $(\widehat{D, h(D)})$? Quel est l'angle de droites $(\widehat{h(D), r(h(D))})$? Quel est l'angle de droites $(\widehat{D, r(h(D))})$? Conclure.

17. Soit f $= s_D \circ h(A, k)$ $(k > 0,\ k \neq 1,\ A \in D)$ une similitude non isométrique indirecte, donnée sous forme réduite.

a) Nous allons démontrer que D , et la droite Δ perpendiculaire à D en A , sont globalement invariantes par f .

Quelle est l'image de D (respectivement : de Δ) par h ? Quelle est l'image de cette image par s_D ? Conclure.

b) Nous allons démontrer qu'aucune autre droite n'est globalement invariante par f .

Soit E une droite quelconque du plan. On suppose que f(E) = E .

Soit E_1 l'image de E par h . Quelle est la position relative de E et de E_1 ? (Voir l'exercice 7.) Puisque f(E) = E , quelle est nécessairement l'image de E_1 par s_D ? Quelles sont les positions relatives possibles de E et de D ?

On suppose E // D et $E \neq D$. Puisque $E_1 = s_D(E)$, les droites E_1 et E sont-elles dans le même demi-plan limité par D ? Puisque E_1 est l'image de E par l'homothétie h , dont le rapport est positif, les droites E et E_1 peuvent-elles être dans deux demi-plans différents limités par D ? En déduire que si E // D , alors E = D .

On suppose que $E \perp D$. Quelle est l'image de E par s_D ? Quelle est par conséquent l'image de E par h ? Comment est situé le point A par rapport à E ? Conclure.

Accueil

Suite

Page précédente Page suivante

LA SYMÉTRIE PLANE
Problèmes et exercices généraux

Page 1
Exercices 1 à 6

1. Quel est le groupe de symétrie de la figure constituée de deux demi-droites ouvertes de même origine ? On demande de justifier la réponse par des démonstrations.

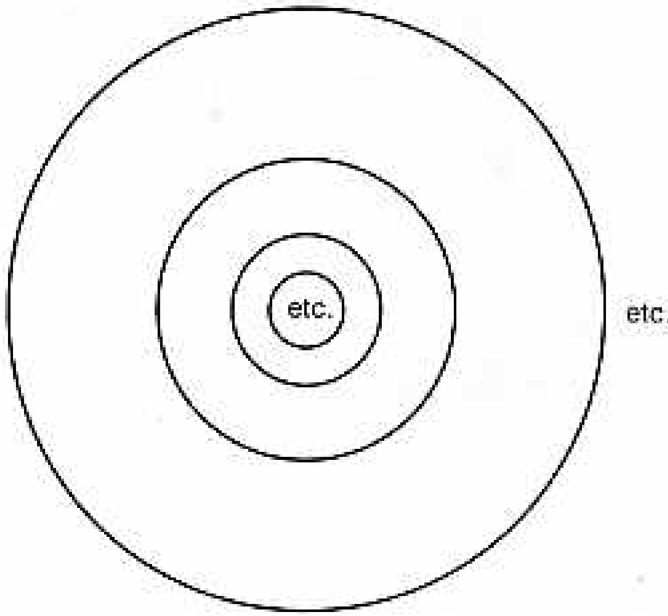
Corrigé 1

2. Quel est le groupe de symétrie de la figure ci-dessous, où la répétition des motifs est suposée indéfinie à droite et à gauche ? On ne demande pas de démonstrations, mais on demande une réponse précise et complète.

Motif indien du sud-ouest des Etats-Unis, fin 19e-début 20e siècle

Corrigé 2

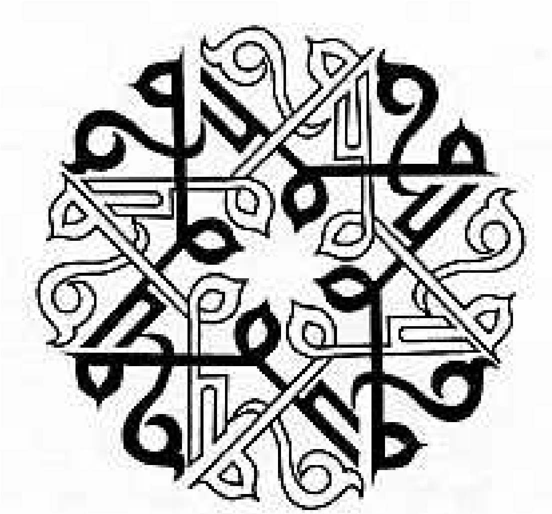
3. On considère la figure X, constituée de la réunion d'un cercle C, de centre O, et de l'infinité des cercles C_n transformés de C par les homothéties de centre O et de rapports $2n$ $(n \in \mathbf{Z})$.



Quel est le groupe de symétrie de X ? On demande de justifier la réponse par des démonstrations.

Corrigé 3

4. Analyser en termes mathématiques la régularité de la calligraphie ci-dessous.



Calligraphie coufique circulaire répétant huit fois le nom de Mohamed

On demande de donner la symétrie exacte de l'ensemble, abstraction faite du coloriage noir/blanc, et compte tenu de ce coloriage. On demande aussi d'analyser, en particulier, la régularité du bord extérieur, celle du centre, et celle de la composition.

Corrigé 4

5. Analyser en termes mathématiques la régularité de la rosace ci-dessous. On analysera l'effet de contraste entre le cercle extérieur et le remplissage intérieur.

Motif indien du sud-ouest des Etats-Unis, fin 19e-début 20e siècle

Corrigé 5

6. Quel est le groupe de symétrie d'un demi-plan ? On demande de justifier la réponse par des démonstrations.

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente   Page suivante

LA SYMÉTRIE PLANE
Problèmes et exercices généraux

Page 2
Exercices 7 à 10

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

7. Analyser en termes mathématiques la régularité de la rosace ci-dessous.

Motif indien du sud-ouest des Etats-Unis, fin 19e-début 20e siècle

On analysera la symétrie du bord extérieur, celle du remplissage central, et celle de la composition.

8. *Symétrie parfaite du cercle*

I

Quelle est la définition du groupe de symétrie d'une figure ?

II

Soit **X** une figure **bornée** non réduite à un poiont. On note G_X le groupe de symétrie de X .

1. Si une similitude appartient à G_X , que peut-on dire de son rapport ?

2. G_X contient-il des translations ?

3. Soit f une réflexion glissée. Quelle est la nature de l'isométrie $f \circ f$? G_X contient-il des réflexions glissées ?

4. On suppose que G_X contient deux rotations distinctes de l'identité : r_1 de centre O_1 et d'angle α_1 , et r_2 de centre O_2 et d'angle α_2 .

a) A quelle condition sur α_1 et α_2 la composée $r_2 \circ r_1$ est-elle une translation ?

On suppose qu'on est dans ce cas. On note $\vec{u}$ le vecteur de la translation. Déterminer $\vec{u}$ en fonction des deux rotations (on pourra choisir un point particulièrement simple et construire son image par $r_2 \circ r_1$). En déduire que si $r_2 \circ r_1$ est une translation, O_1 et O_2 sont confondus.

b) **On ne suppose pas** que $r_2 \circ r_1$ est une translation.

Utiliser les symétries de la figure $r_2(X)$ pour trouver deux rotations appartenant à G_X et dont la composée est une translation.

N.B. : On pourra admettre et utiliser la propriété suivante, intuitivement évidente : Si Y est une figure et f une similitude (par exemple f est une rotation ou une réflexion), et si le groupe de symétrie de Y contient une rotation de centre O et d'angle α , alors le groupe de symétrie de la figure semblable $f(Y)$ contient la rotation dont le centre est le point semblable $f(O)$ et dont l'angle est : α si f est directe, $-\alpha$ si f est indirecte. Voir exercice 12.

Que peut-on dire des points $r_2(O_1)$ et O_1 ? En déduire que O_1 et O_2 sont confondus.

5. On suppose que G_X contient une rotation de centre O et d'angle α , et une réflexion s_D d'axe D . En utilisant les symétries de la figure $s_D(X)$ (voir le **N.B.** ci-dessus), démontrer que $O \in D$.

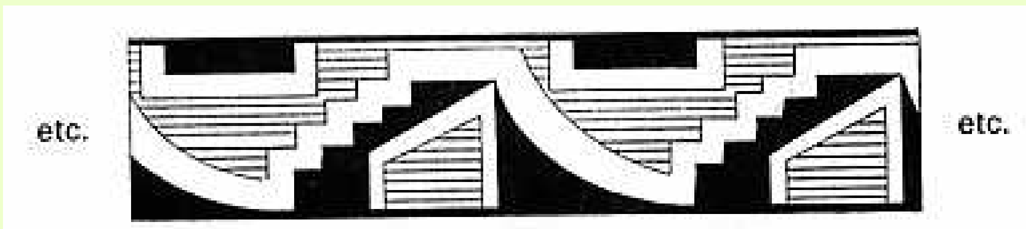
III

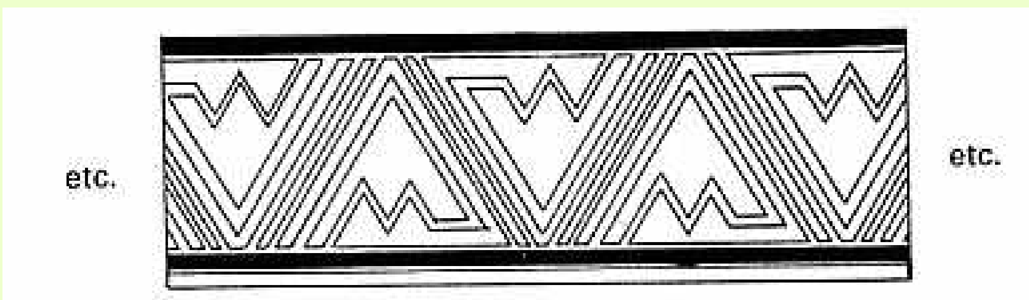
Pouvez-vous exprimer en termes mathématiques l'idée pythagoricienne que le cercle est une figure parfaite ?

9. a) Quel est le groupe de symétrie d'une figure asymétrique ?

b) Soit X une figure du plan, et soit X' une figure semblable à X . Démontrer que X est asymétrique si, et seulement si, il existe une unique similitude qui donne de X l'image X'.

10. Analyser en termes mathématiques la régularité des rosaces et des frises ci-dessous.





Motifs indiens du sud-ouest des
Etats-Unis, fin 19e-début 20e siècle

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

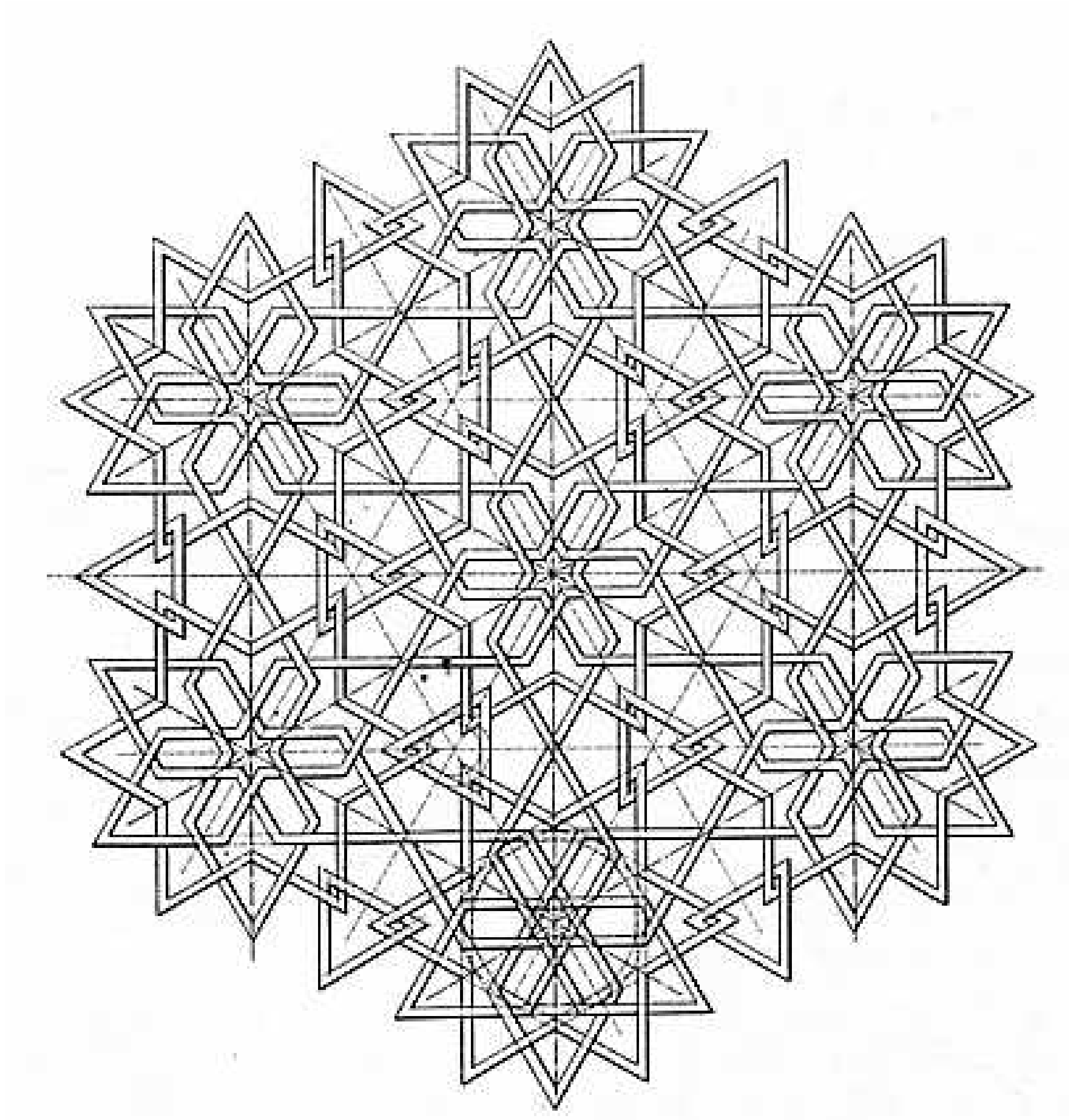
Page précédente Page suivante

LA SYMÉTRIE PLANE
Problèmes et exercices généraux

Page 3
Exercices 11 et 12

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

11. a) On considère la rosace ci-dessous, bornée (on n'envisage pas l'étude du remplissage régulier du plan tout entier, suggéré par le dessin).



Panneau peint, Damas. Extrait de J. Collin, voir bibliographie

Quel est le groupe de symétrie de la rosace ?
Si on y regarde de plus près, on s'aperçoit que certaines des bandes de l'entrelacs

passent par dessus, les autres par dessous. Quel est le groupe de symétrie de la figure, compte tenu de cette dissymétrie ?

b) Etudier la symétrie du remplissage régulier du plan tout entier, suggéré par le dessin (ce remplissage, non borné, s’obtient en prolongeant régulièrement le dessin dans toutes les directions).

12. Le but de cet exercice est de comparer les éléments des groupes de symétrie de deux figures semblables.

1) Soit X une figure du plan. Donner la définition du groupe de symétrie de X .

2) Soit R un rectangle qui n'est pas carré.

a) Quel est le groupe de symétrie G_R de R ? (On demande la liste précise des éléments de G_R . On ne demande pas de démonstrations.)

b) Soit D une droite quelconque du plan. Dessiner D , R , et le rectangle $s_D(R)$ réfléchi de R par rapport à D . Comparer les éléments des groupes de symétrie G_R et $G_{sD(R)}$ des deux rectangles. (On demande d'exprimer les éléments de $G_{sD(R)}$ à l'aide des éléments de G_R et de s_D . On ne demande pas de démonstrations).

3) On considère deux figures semblables quelconques du plan : X étant une figure quelconque du plan, et g une similitude quelconque, on considère les figures X et $g(X)$. Démontrer que les groupes de symétrie G_X et $G_{g(X)}$ sont liés par la relation :

$$f \in G_X \quad \Leftrightarrow \quad g \circ f \circ g^{-1} \in G_{g(X)} .$$

4) Soit maintenant f et g deux similitudes quelconques du plan. On veut comparer les similitudes $g \circ f \circ g^{-1}$ et f , c'est-a-dire comparer la nature et les éléments caractéristiques de $g \circ f \circ g^{-1}$ et de f .

a) On suppose que f est une réflexion s_Δ d’axe Δ .

La similitude $g \circ s_\Delta \circ g^{-1}$ est-elle directe ou indirecte ? Quel est son rapport ? Démontrer que $g \circ s_\Delta \circ g^{-1}$ est la réflexion d'axe $g(\Delta)$. (On pourra étudier l'image d'un point de la droite $g(\Delta)$ par $g \circ s_\Delta \circ g^{-1}$.)

b) On suppose que f est une isométrie quelconque.

Démontrer que $g \circ f \circ g^{-1}$ est une isométrie de même nature que f , et donner les éléments caractéristiques de $g \circ f \circ g^{-1}$, en fonction de g et des éléments caractéristiques de f. (On distinguera tous les cas possibles suivant la nature de f. On pourra décomposer f en produits de réflexions et utiliser le résultat de la question 4) a).)

5) a) Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. Faire un schéma représentant $\vec{u}$ et une figure F dont le groupe de symétrie est le groupe de translations $\{ t_{n\vec{u}} \ / \ n \in \mathbf{Z} \}$.

b) Soit ω un point quelconque du plan. Soit g la similitude directe de centre ω, de rapport 2 et d'angle $\pi/4$. Ajouter au schéma précédent le point ω et dessiner $g(F)$. Exprimer à l'aide de $\vec{u}$ et de g les éléments du groupe de symétrie $G_{g(F)}$ de la figure $g(F)$.

Suite

Accueil

Problèmes corrigés

Problèmes - page 3

Page précédente Page suivante

LA SYMÉTRIE PLANE
Problèmes et exercices généraux

Page 9
Exercices 27 à 29

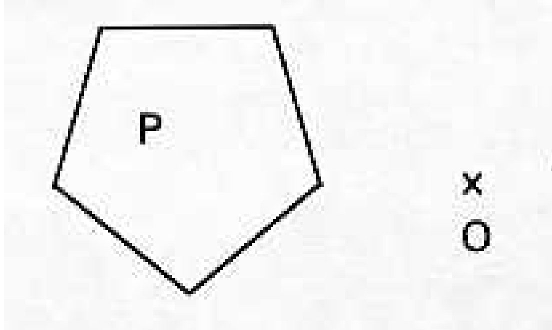
27. Analyser en termes mathématiques la régularité de la vignette décorative ci-dessous.

Maurits C. Escher, gravure sur bois

On donnera le groupe de symétrie qui décrit la répétition régulière de la licorne ailée. On étudiera les dissymétries, ainsi que la composition de la vignette, inscrite dans un rectangle.

Corrigé 27

28. 1) Dessiner à main levée le polygone régulier P et le point O disposés comme sur le schéma ci-dessous.



a) Quel est le nom de ce polygone ? Quel est son groupe de symétrie ? (On demande une réponse précise et complète ; on ne demande pas de démonstrations.)

b) Dessiner l'image P' de P par la similitude s de centre O , d'angle $-\pi/2$ et de rapport 3/2 . Indiquer sur le schéma l'un des axes de symétrie de P , soit D , et son image s (D) par s .

c) Exprimer les éléments caractéristiques des symétries de P' au moyen de la similitude s et des éléments caractéristiques des symétries de P . (On ne demande pas de démonstrations.) **N.B.:** une symétrie d'une figure est un élément de son groupe de symétrie.

d) En utilisant le groupe de symétrie de P , trouver deux similitudes différentes qui donnent toutes les deux de P l'image P' (on ne demande pas de trouver les formes réduites). Peut-on dire que P et P' sont deux figures *"de même sens"* ? Peut-on dire que ces figures sont *"de sens contraire"* ? Peut-on dire qu'elles *"ont un sens"* ? (On demande de justifier les réponses.)

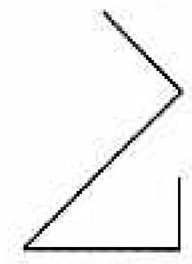
2) Soit f une symétrie quelconque de P .

a) Quelle est l'image de P' par la similitude s^{-1} ? par $f \circ s^{-1}$? par $s \circ f \circ s^{-1}$? Choisir pour f une symétrie particulière de P , et dire (sans démonstration) quelle est la similitude $s \circ f \circ s^{-1}$, en indiquant sur le schéma ses éléments caractéristiques.

b) On dit couramment, par abus de langage, que les polygones P et P' *"ont le même groupe de symétrie"* . Pouvez-vous donner un sens mathématique précis à cette expression ?

Corrigé 28

29. Le dessin ci-dessous



est-il symétrique ? asymétrique ? dissymétrique ? Justifier les réponses.

Ce dessin est constitué de deux "crochets" semblables. Indiquer le centre, l'angle et le rapport de la similitude qui applique l'un des crochets sur l'autre.

Compléter le dessin pour en augmenter la symétrie, sans faire apparaître d'axe de symétrie. On demande de faire un schéma et de le justifier.

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente

Page suivante

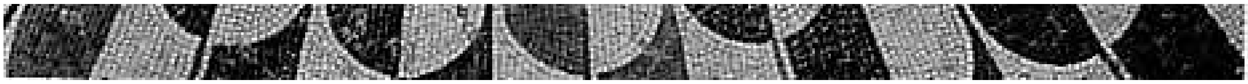
LA SYMÉTRIE PLANE

Problèmes et exercices généraux

Page 10

Exercice 30

30. On considère la mosaïque romaine reproduite ci-dessous.



On ne tiendra pas compte des déformations dues à l'angle de la prise de vue et on comprendra, par exemple, que la courbe qui entoure le dessin de la tête est un cercle.

a) On considère le motif indiqué par le chiffre 1 sur la photographie, et les isométries ou les similitudes qui appliquent ce motif sur les motifs indiqués par les chiffres 2, 3, ..., 8. Dans chaque cas, dire de quelle isométrie ou de quelle similitude il s'agit, et préciser ses éléments caractéristiques.

b) Analyser en termes mathématiques la régularité de la partie de la mosaïque située à l'extérieur du cercle.

Corrigé 30

Suite

Accueil

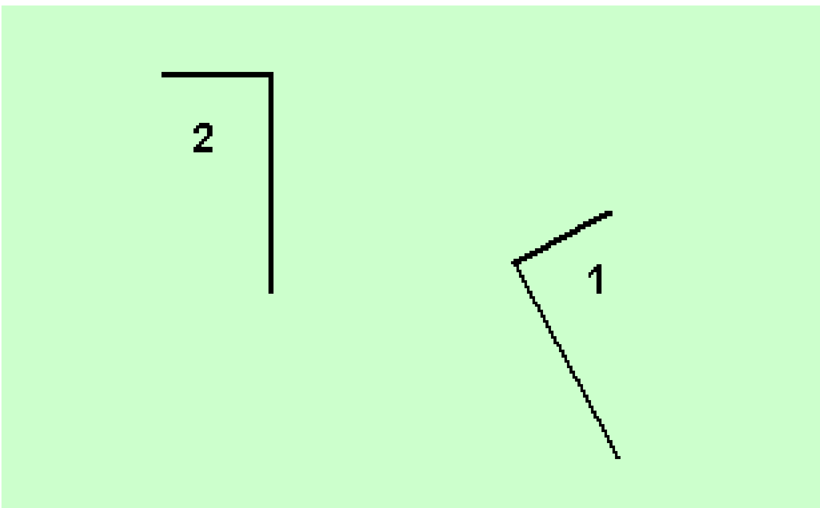
Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

LA SYMÉTRIE PLANE
Problèmes et exercices généraux

Page 11
Exercices 31 à 35

31. On considère les deux “crochets” du schéma ci-dessous, l’un nommé 1 et l’autre nommé 2 .



1. Trouver une rotation r , une translation t et une réflexion s telles que la composée s o t o r applique le crochet 1 sur le crochet 2 . On demande de représenter sur le schéma les éléments caractéristiques de chacune des trois applications, ainsi que les images successives du crochet 1 par les applications. On ne demande pas de démonstrations.

Corrigé 31 1

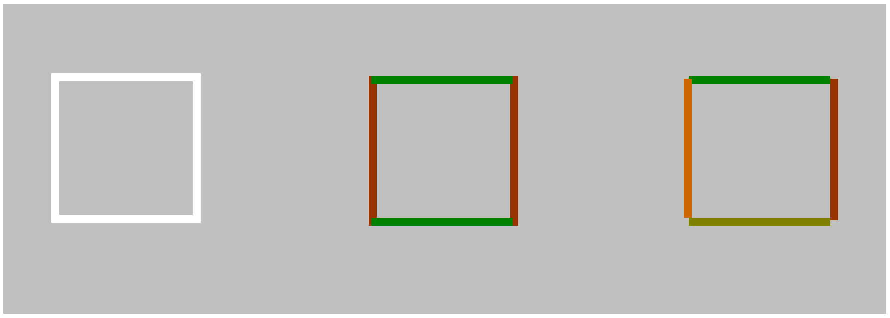
2. Peut-on appliquer 1 sur 2 par un antidéplacement ? Justifier la réponse.
Peut-on appliquer de 1 sur 2 par un déplacement ? Justifier la réponse.

Corrigé 31 2

3. Donner une isométrie exprimée sous forme réduite qui applique 1 sur 2 : on demande de représenter sur le schéma les éléments caractéristiques de l’isométrie réduite, et de donner le nom de l’isométrie.

Corrigé 31 3

32.



1. On considère un carré. Quel est le groupe de symétrie du carré ? (On demande la liste précise et complète des éléments du groupe ; on ne demande pas de démonstrations.)

Corrigé 32 1

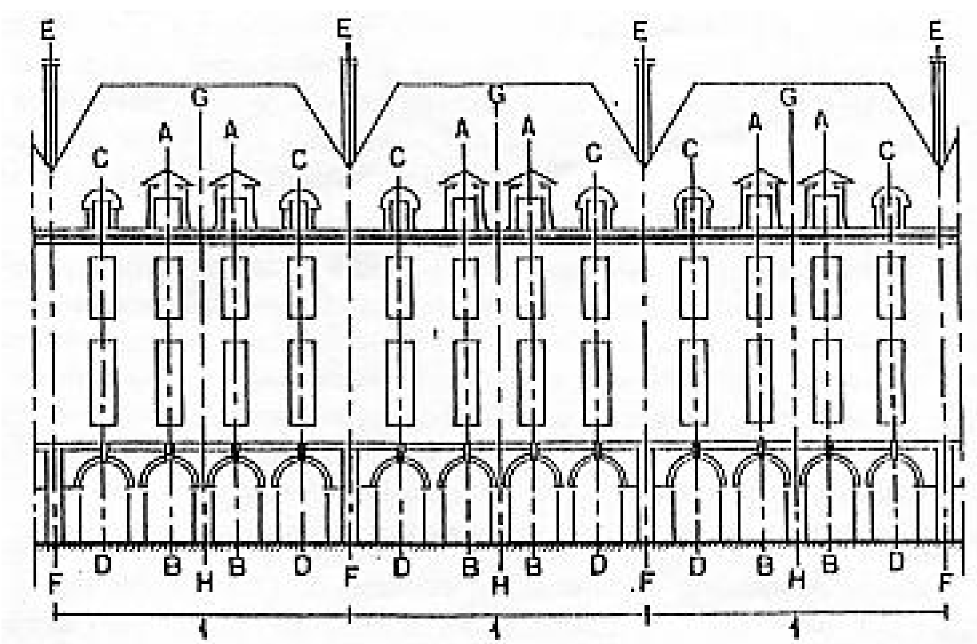
2. On colorie deux côté opposés du carré en vert, et les deux autres côtés en brun. Quel est le groupe de symétrie du carré colorié ? (Une isométrie qui envoie un côté vert sur un côté brun – ou un brun sur un vert – n'est pas une symétrie du carré colorié.)

Corrigé 32 2

3. On décolore l'un des côtés bruns en brun clair, et l'un des verts en vert clair. Muni de ce nouveau coloriage, le carré est-il symétrique ? Est-il asymétrique ? Est-il dissymétrique ? Justifier les réponses.

Corrigé 32 3

33.



La figure ci-dessus est la photocopie d'une page d'un livre d'architecture. L'architecte y analyse, par le schéma, une façade de bâtiment. On voit sur la façade des modules se répéter régulièrement indéfiniment à gauche et à droite : la figure considérée n'est pas une façade réelle (qui serait bornée) mais une “frise” virtuelle non bornée.

1. L’architecte a dessiné les axes EF et GH plus longs que les axes AB et CD (voir en particulier le niveau des lettres B , D , F et H en bas). Le schéma exprime ainsi une hiérarchie entre les axes (les axes les plus longs sont les plus importants). Exprimer en termes mathématiques, au moyen des propriétés de la frise entière (non bornée), les raisons géométriques de cette hiérarchie.

Corrigé 33 1

2. L’architecte a dessiné des segments, qu’il a tous nommés 1, en bas du schéma. Ces segments indiquent des parties homologues de la frise. Quelles sont les applications mathématiques qui correspondent à la répétition du chiffre 1 ?

Corrigé 33 2

3. On note G_F le groupe de symétrie de la frise (non bornée). Donner la liste précise et complète des éléments du groupe. (On ne demande pas de démonstrations.)

Corrigé 33 3

4. Les notations de l’architecte confondent sous le même nom des droites et des parties de la frise. On vous demande de jouer les mathématiciens : distinguez les axes et les parties par des numérotations et des **’**, et indiquez, d’une manière précise, au moyen des éléments de G_F, quelles sont les “confusions” opérées par l’architecte (c’est-à-dire indiquez comment les objets nommés du même nom par l’architecte se déduisent mathématiquement les uns des autres).

Corrigé 33 4

5. On considère la frise “nommée” du mathématicien, c’est-à-dire qu’on cesse de considérer comme interchangeables des droites ou des parties que l’architecte confondait par ses notations. Par exemple deux droites, nommées maintenant $A_1 B_1$ et $A_3 B_3$, ne sont plus interchangeables (l’état d’esprit est analogue à celui d’un observateur qui se regarde dans un miroir et qui décide de distinguer un bras droit humain d’un bras gauche, si bien qu’il “voit” qu’aucun déplacement ne pourrait l’appliquer sur son reflet dans le miroir).

Corrigé 33 5

Quel est le groupe de symétrie de la frise “nommée” du mathématicien ?

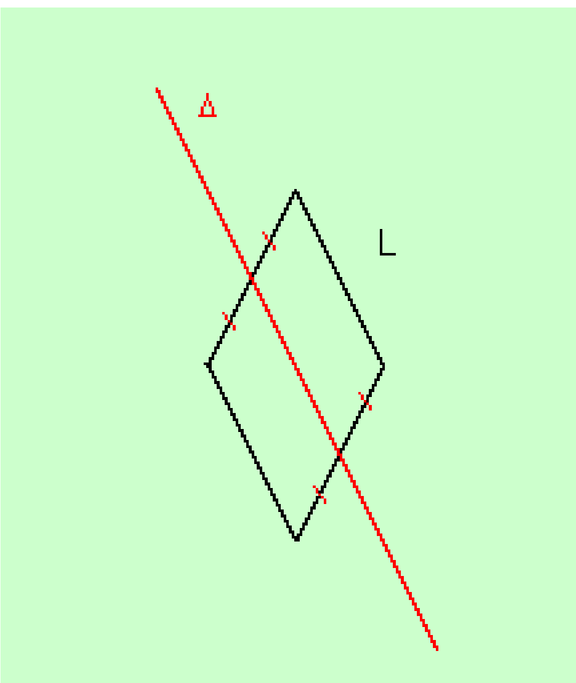
Quel est le groupe de symétrie de la frise “nommée” de l’architecte ? Les notations de l’architecte donnent-elles une bonne idée globale de la symétrie de la façade ?

34.

Analyser en termes mathématiques l'équilibre de la figure ci-contre. On analysera la symétrie du pourtour, celle de l'image centrale, et celle de la figure dans son ensemble.

Corrigé 34

35.



Soit L un losange non carré. Soit Δ une médiane du losange et s_Δ la réflexion d'axe Δ .

1. Soit L' la figure réfléchie de L par rapport à Δ . Faire un schéma représentant L , Δ et L' .

Corrigé 35 1

2. On note G_L le groupe de symétrie de L . Donner la liste des éléments du groupe, en indiquant sur le schéma leurs éléments caractéristiques. (On ne demande pas de démonstrations.)

Corrigé 35 2

3. Peut-on trouver une rotation qui applique L sur L' ? Si oui, en donner un exemple ; si non, expliquer pourquoi.

Corrigé 35 3

4. On veut étudier l'ensemble A de toutes les isométries qui appliquent L sur L' .

a) En utilisant s_Δ et les éléments de G_L , trouver quatre isométries différentes qui appliquent L sur L' .

Corrigé 35 4a

b) Indiquer un sommet S de L sur le schéma et les images de S par chacune des quatre isométries. En déduire l'expression simple de chacune des quatre isométries, et indiquer sur le schéma leurs éléments caractéristiques.

Corrigé 35 4b

c) Existe-t-il dans A d'autres isométries que les quatre déjà trouvées ? Si oui, lesquelles ? Si non, pourquoi ?

Corrigé 35 4c

Suite

Accueil

Page précédente

Page suivante

LA SYMÉTRIE PLANE

Problèmes et exercices généraux

Page 12

Exercices 36 à 41

Texte 36	Corrigé 36
Texte 37	Corrigé 37
Texte 38	Corrigé 38
Texte 39	Corrigé 39
Texte 40	Corrigé 40
Texte 41	Corrigé 41

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

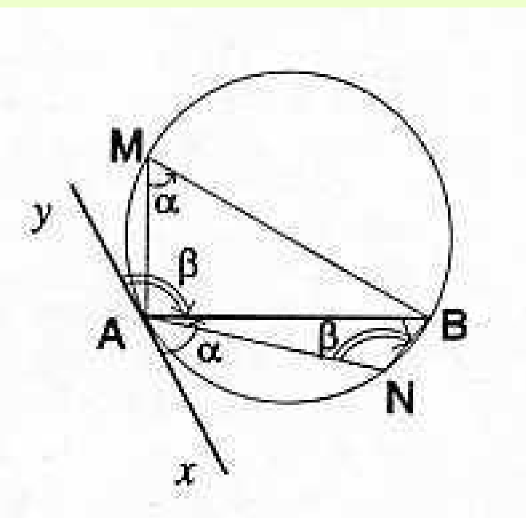
Page précédente
Page suivante

ANNEXE

Arcs capables

(Arc *"capable"* signifie capable de *"voir un segment donné sous un angle donné"*.)

Angles inscrits

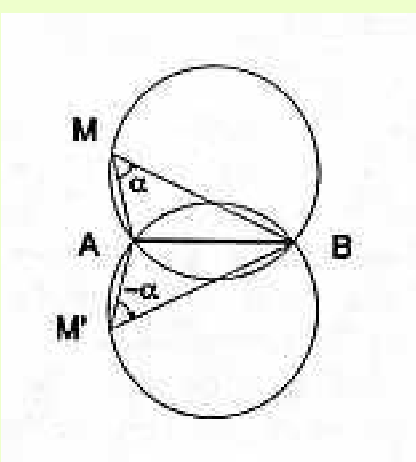


Soit un cercle, une corde [AB] du cercle, et un point M situé sur l'un des arcs d'extrémités A et B . Lorsque M varie sur l'arc, l'angle orienté de demi-droites $(\widehat{[MA),[MB)})$ est constant.

Soit (xAy) la tangente au cercle en A , [Ax) étant la demi-droite qui n'est pas située du même côté de (AB) que M . Alors :

$$(\widehat{[Ax),[AB)}) = (\widehat{[MA),[MB)}) \quad [2\pi] .$$

(C'est un cas "limite" du précédent, lorsque M "tend vers A" .)



Soit N un point du cercle, situé sur l'autre arc d'extrémités A et B . Lorsque N varie sur cet arc, l'angle orienté de demi-droites $(\widehat{[NA),[NB)})$ est constant et :

$$(\widehat{[NA),[NB)}) = (\widehat{[MA),[MB)}) + \pi \quad [2\pi] .$$

Soit le cercle symétrique du premier par rapport à la droite (AB) , et M' le point symétrique de M par rapport à (AB) . Alors :

$$(\widehat{[M'A),[M'B)}) = -(\widehat{[MA),[MB)})$$

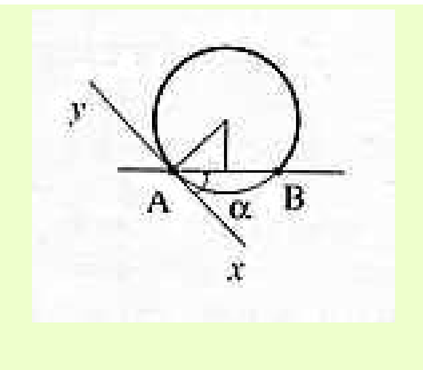
[2π] .

Arcs capables

Soit [AB] un segment donné, et α un nombre réel, différent de zéro modulo π (c.-à-d. diférent de zéro et de π, modulo 2π) .

L'ensemble des points M du plan tels que l'angle orienté de demi-droites vérifie :

$$\left(\widehat{[MA), [MB)} \right) = \alpha \quad [2\pi]$$



est l'arc de cercle d'extrémités A et B construit de la manière suivante :

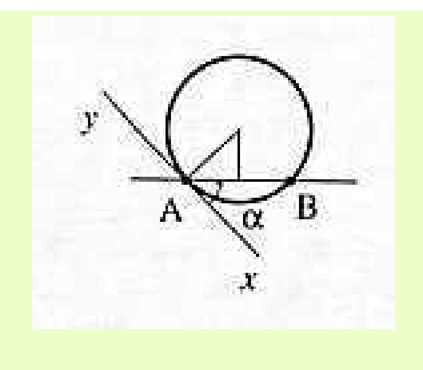
1. tracer (xAy) en utilisant

$$\left(\widehat{[Ax), [AB)} \right) = \alpha \ ,$$

2. trouver le centre du cercle à l'aide de la perpendiculaire à (xAy) en A et de la médiatrice de [AB] ,
3. choisir l'arc qui n'est pas du même côté de (AB) que [Ax) .

L'ensemble des points M du plan tels que l'angle orienté de droites vérifie :

$$\left(\widehat{(MA), (MB)} \right) = \alpha \quad [\pi]$$



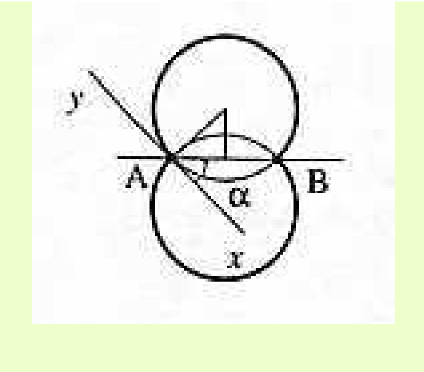
est le cercle passant par A et B construit de la manière suivante :

1. tracer (xAy) en utilisant

$$\left(\widehat{[Ax), [AB)} \right) = \alpha \ ,$$

2. trouver le centre du cercle à l'aide de la perpendiculaire à (xAy) en A et de la médiatrice de [AB] .

L'ensemble des points M du plan tels que l'angle géométrique $\widehat{AMB}$ vérifie :



$\widehat{AMB} = \alpha$ (on suppose $0 < \alpha < \pi$)

est la réunion des deux arcs de cercles symétriques d'extrémités A et B , construits de la manière suivante :

1. tracer l'une des deux droites (xAy) qui vérifient $\widehat{xAB} = \alpha$,
2. trouver le centre de l'un des cercles à l'aide de la perpendiculaire à (xAy) en A et de la médiatrice de [AB] ,
3. choisir l'arc qui n'est pas du même côté de (AB) que [Ax) ,
4. ajouter l'arc symétrique par rapport à (AB) .

Cet ensemble est le même que l'ensemble des points pour lesquels l'angle orienté de demi-droites vérifie :

$$(\widehat{[MA), [MB)}) = \pm\alpha \quad [2\pi]$$

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente

Symétrie et mathématiques : BIBLIOGRAPHIE

Accueil

Mathématiques - Art - Architecture : LIENS

LA SYMETRIE PLANE

Index

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

BIBLIOGRAPHIE

Mathématiques (ouvrages généraux , ouvrages de vulgarisation)

AUDIRAC J. L. et al., *Mathématiques, Terminales C et E, Algèbre et Géométrie,* Magnard, Paris, 1986.

BOUAZZI M., *Modules, règles de composition et régularité : aspects mathématiques*, dans *Le module dans les arts plastiques* (ouvrage collectif), pp. 43 à 65, Editions du Centre d'Art Vivant de la Ville de Tunis, 1988. [Exposé, sur deux exemples particuliers, de quelques-unes des idées mathématiques permettant l'étude des compositions décoratives régulières.]

BOUAZZI M., Panneau analytique accompagnant l'affiche de l'exposition "*Horizons mathématiques*", dans *Al Madar*, revue de la Cité des Sciences de Tunis, n° 2, 1994.

COXETER H. S. M., *Introduction to Geometry*, Wiley, New York, 1961, 1980.

FLEURY M., *Graphisme et Géométrie*, Presses de l'Université du Québec, Québec, 1986.

JACOBS H. R., *Geometry*, Freeman and C°, New York, 1974, 1987.

LOCKWOOD E. H. and McMILLAN R. H., *Geometric Symmetry*, Cambridge University Press, 1978.

MARTIN G. E., *Transformation Geometry, An Introduction to Symmetry*, Springer-Verlag, New York, 1982. [Introduction à l'étude mathématique de la symétrie en général, et des compositions répétitives régulières en particulier.]

WENNINGER, *Polyhedron Models*, Cambridge University Press, 1971. [Recueil complet de tous les polyèdres uniformes (les cinq solides platoniciens, les treize solides archimédiens, et tous les autres, en tout : 119) avec pour chaque modèle une photographie de maquette et son patron.]

WEYL H., *Symmetry*, Princeton University Press, 1952, publié en français sous le titre *Symétrie et mathématique moderne*, Flammarion, Paris, 1964. [La symétrie dans les sciences et les arts, conférences prononcées par un grand nom de la physique et des mathématiques, devant des publics de non spécialistes.]

Architecture

BAHRI-MEDDEB A., *Les principes de la composition architecturale*, polycopié de l'Institut Technologique d'Art, d'Architecture et d'Urbanisme, Tunis, 1994-95.

CHING F. D. K., *Architecture : Form, Space and Order*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1979.

LURÇAT A., *Formes, composition et lois d'harmonie, éléments d'une science de l'esthétique architecturale*, tome IV, Vincent, Fréal et C^ie^, Paris, 1955.

MEUNIÉ L., *L'architecture et la géométrie - symétries et rythmes harmoniques*, Vincent, Fréal et C[ie], Paris, 1968.

Décorations régulières (recueils de motifs, ouvrages mathématiques spécialisés)

BELANGER GRAFTON C., *Floral Patterns, 120 Full-Color Designs in the Art Nouveau Style by M. P. Verneuil*, Dover, New York, 1981 (réédition de planches choisies de : VERNEUIL M. P., *Etude de la plante : son application aux industries d'art*, Librairie Centrale des Beaux-Arts, Paris, n.d., v. 1900).

BOURGOIN J., *Arabic Geometrical Pattern and Design*, Dover, New York, 1973 (réédition des 200 planches de : BOURGOIN J., *Les éléments de l'art arabe : le trait des entrelacs*, Firmin-Didot, Paris, 1879).

Catalogue de l'exposition *Apogée du Jelliz tunisien "Qallaline" du XVI[e] siècle au XX[e] siècle*, Galerie Driba Espace d'Art, La Marsa, Tunisie, 1995.

COLLIN J., *Etude pratique de la décoration polygonale arabe, recueil de modèles à l'usage des arts décoratifs*, ouvrage publié sous les auspices de la Commission officielle pour le relèvement des industries d'art indigènes de Tunisie, Librairie de la Construction Moderne, Paris, n.d.

OWEN JONES, *The Grammar of Ornament*, Day and Son, London, 1856 ; Studio Editions, London, 1986, 1988.

PRISSE D'AVENNES A. C. T. E., *L'art arabe*, Bookking International, Paris, 1989 (réédition de 109 planches choisies de : PRISSE D'AVENNES A. C. T. E., *L'art arabe d'après les monuments du Caire depuis le VII[e] siècle jusqu'à la fin du XVIII[e] siècle*, Morel et C[ie], Paris, 1869-1877).

SAVARIAU J., *Groupes ornementaux*, polycopié de l'IREM de l'université de Poitiers, 1977-78. [Etude mathématique des compositions répétitives régulières.]

SCHATTSCHNEIDER D., *The Plane Symmetry Groups, Their Recognition and Notation*, American Mathematical Monthly, 85, 1978, pp. 439 à 445. [Aide mémoire mathématique.]

SMITH SIDES D., *Decorative Art of the Southwestern Indiens*, Dover, New York, 1961.

أودزلي، الزخرفة عبر التاريخ، Liverpool 1881 ، مكتبة مدبولي، القاهرة، 1990.

Pour aller plus loin

COXETER H. S. M. et al., M. C. Escher : Art and Science, North Holland, Amsterdam, 1986.

CRITCHLOW K., *Islamic Pattern, An Analytical and Cosmological Approach*, Thames and Hudson, London, 1976, 1989.

CRITCHLOW K., *Order in Space, A Design Sourcebook*, Thames and Hudson, London, 1969, 1979.

GARDNER M., *The Ambidextrous Universe*, Basic Books, New York, 1964 ; Penguin Books, London, 1982 ; traduction française : *L'univers ambidextre*, Science ouverte, Le Seuil, Paris, 1985.

GRÜNBAUM and SHEPHARD, *Tilings and Patterns*, Freeman and C°, NewYork, 1987. [700 pages : une véritable encyclopédie sur l'étude mathématique des compositions répétitives régulières.]

HOFSTADTER D. R., *MATHEMAGICAL THEMAS*, *Parquet deformations : patterns of tiles that shift gradually in one dimension*, Scientific American, July 1983, pp. 12 à 18. [Description, par un mathématicien, d'un travail mené par un professeur de design dans un atelier d'une école d'architecture aux Etats Unis.]

LEGER C. et TERRASSON J.-C., *MATHEMATIQUES*, *Pavages et métamorphoses des pavages*, Encyclopaedia Universalis, Universalia 1987 (supplément annuel), pp. 305 à 312. [Etat des travaux mathématiques sur la question en 1987.]

MacGILLAVRY C. H., *Symmetry Aspects of M. C. Escher's Periodic Drawings*, Oosthoek, Utrecht, 1965 ; réimpression : *Fantassy and Symmetry*, 1976. [Ouvrage d'enseignement sur les groupes de symétrie, en particulier les groupes de couleurs (cours universitaire de cristallographie), dont les "shémas" sont des dessins d'Escher.]

NOËL E., *La symétrie aujourd'hui*, (entretiens avec treize spécialistes de disciplines variées), Points Sciences, Le Seuil, Paris, 1989.

SCHATTSCHNEIDER D., *Visions of Symmetry - Notebooks, Periodic Drawings, and Related Works of M. C. Escher*, Freeman and C°, New York, 1990, traduit en français par M. BOUAZZI sous le titre : *Escher - Visions*, Le Seuil, Paris, 1992. [Escher : recueil exhaustif de ses dessins de pavages réguliers, histoire de la "théorie" mathématique personnelle de l'artiste et de ses relations avec le monde scientifique.]

SHUBNIKOV A. V., *Symmetry of Similarity*, trad. anglaise dans Soviet Physics Crystallography, 5, 1961, pp. 469 à 476. [Shubnikov, grand nom de la physique, est l'un des fondateurs de l'étude mathématique actuelle de la symétrie.]

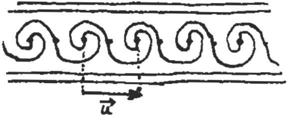
SHUBNIKOV and BELOV, *Colored Symmetry*, Pergamon Press, Oxford, 1964. [Voir Shubnikov, ci-dessus.]

SHUBNIKOV and KOPTSIK, *Symmetry in Science and Art*, (traduit du russe), Plenum, New York, 1974. [Voir Shubnikov, ci-dessus.]

Quelle est la symétrie de la frise ci-dessous ? On n'oubliera pas d'analyser la symétrie du coloriage du dessin en noir et blanc.

Exercice

- La symétrie de la frise est décrite par son groupe de symétrie.
- L'interruption matérielle de la répétition est une dissymétrie sur les règles décrites par les groupes suivants.



Sans coloriage ($\overset{\text{motifs}}{\text{noirs}} = \overset{\text{motifs}}{\text{blancs}}$)

Le groupe de symétrie de la frise est :

$$G_F = \{ t_{n\vec{u}} \,/\, n \in \mathbb{Z} \} \cup \{ s_{O_n} \,/\, n \in \mathbb{Z} \}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur dessiné sur le schéma, O_0 est l'un des points dessinés, et $O_n = t_{n\frac{\vec{u}}{2}}(O_0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (on a dessiné tous les points O_n situés dans le cadre du schéma).

Coloriage (noir $\neq$ blanc)

Le groupe de symétrie de la frise coloriée est :

$$G_{F_c} = \{ t_{n\vec{u}} \,/\, n \in \mathbb{Z} \}$$

Le coloriage détruit une partie des symétries de la frise non coloriée, si bien que G_{F_c} est un sous groupe strict de G_F.

PROBLEME (sur 13 points). Soit I un point du plan et soient a et b deux nombres réels vérifiant les inégalités : $1 < b < a$. Pour tout nombre réel θ, on considère les similitudes :

$$v_\theta = s_{(I,\, \theta,\, a^\theta)} \qquad \text{et} \qquad w_\theta = s_{(I,\, \theta,\, b^\theta)}$$

de centre I, d'angle θ et de rapports a^θ et b^θ. On note G_a et G_b les groupes :

$$G_a = \{v_\theta \,/\, \theta \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad G_b = \{w_\theta \,/\, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Soit A un point du plan, distinct de I. On note Γ_a et Γ_b les trajectoires de A sous les groupes G_a et G_b :

$$\Gamma_a = \{v_\theta(A) \,/\, \theta \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_b = \{w_\theta(A) \,/\, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Le but du problème est de comparer les spirales Γ_a et Γ_b ; on se place dans le cas particulier où $a^{\pi/4} = 3/2$ et $b^{\pi/4} = 4/3$ ($\pi/4$ radian = 45°).

1. *Etude de Γ_a*

a) Faire un schéma représentant I, A, et les points

$$A_0 \quad A_{\pi/4} \quad A_{\pi/2} \quad A_{3\pi/4} \quad A_\pi \quad A_{-\pi/4} \quad A_{-\pi/2} \quad A_{-3\pi/4} \quad A_{-\pi}$$

où A_θ désigne le point $v_\theta(A)$.

Tracer la portion de Γ_a comprise entre les points $A_{-\pi}$ et A_π, en indiquant les tangentes à la courbe aux points dessinés, d'une manière approximative mais vraisemblable.

b) Quelle est l'allure de la courbe lorsque θ tend vers $+\infty$? lorsque θ tend vers $-\infty$?

c) Soit θ un nombre réel quelconque donné.

Démontrer que : $\forall M \in \Gamma_a \quad v_\theta(M) \in \Gamma_a$.

Démontrer que : $\forall M \in \Gamma_a \quad \exists N \in \Gamma_a \quad v_\theta(N) = M$.

En déduire que : $v_\theta(\Gamma_a) = \Gamma_a$.

d) Quel est le groupe de symétrie de Γ_a ? (On ne demande pas de démonstration.)

2. *Comparaison de Γ_a et Γ_b*

a) Sur le schéma représentant Γ_a, dessiner les points

$$B_0 \quad B_{\pi/4} \quad B_{\pi/2} \quad B_{3\pi/4} \quad B_{\pi} \quad B_{-\pi/4} \quad B_{-\pi/2} \quad B_{-3\pi/4} \quad B_{-\pi}$$

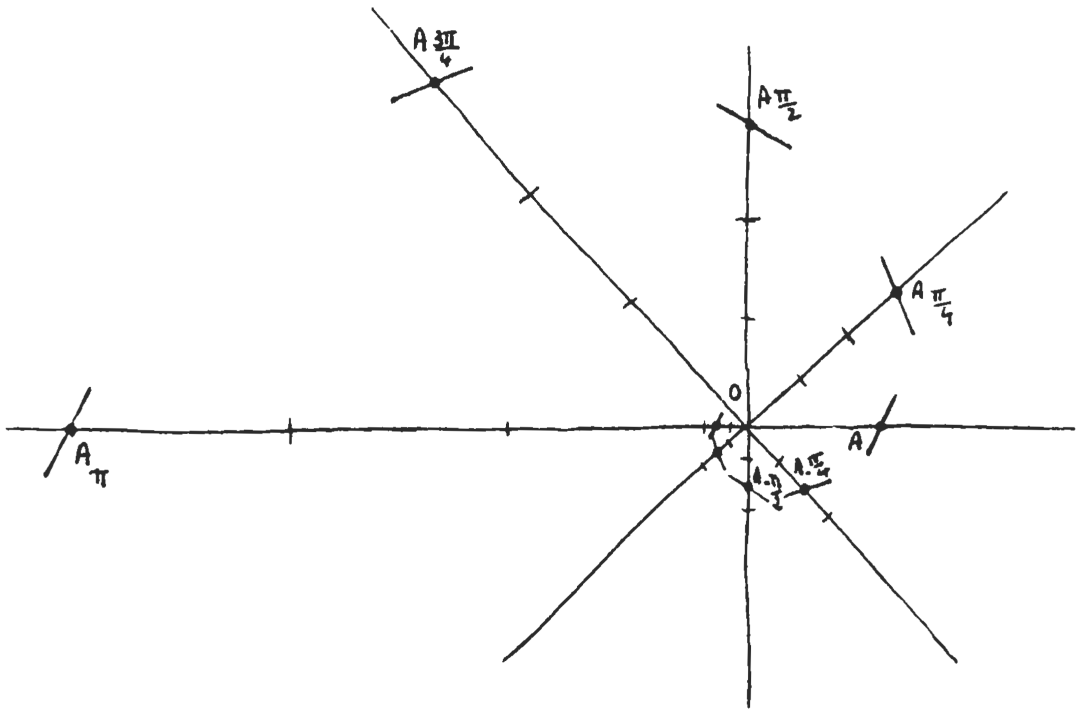
où B_θ désigne le point $w_\theta(A)$.

Tracer la portion de Γ_b comprise entre les points $B_{-\pi}$ et B_{π}, en indiquant les tangentes à la courbe aux points dessinés, d'une manière approximative mais vraisemblable.

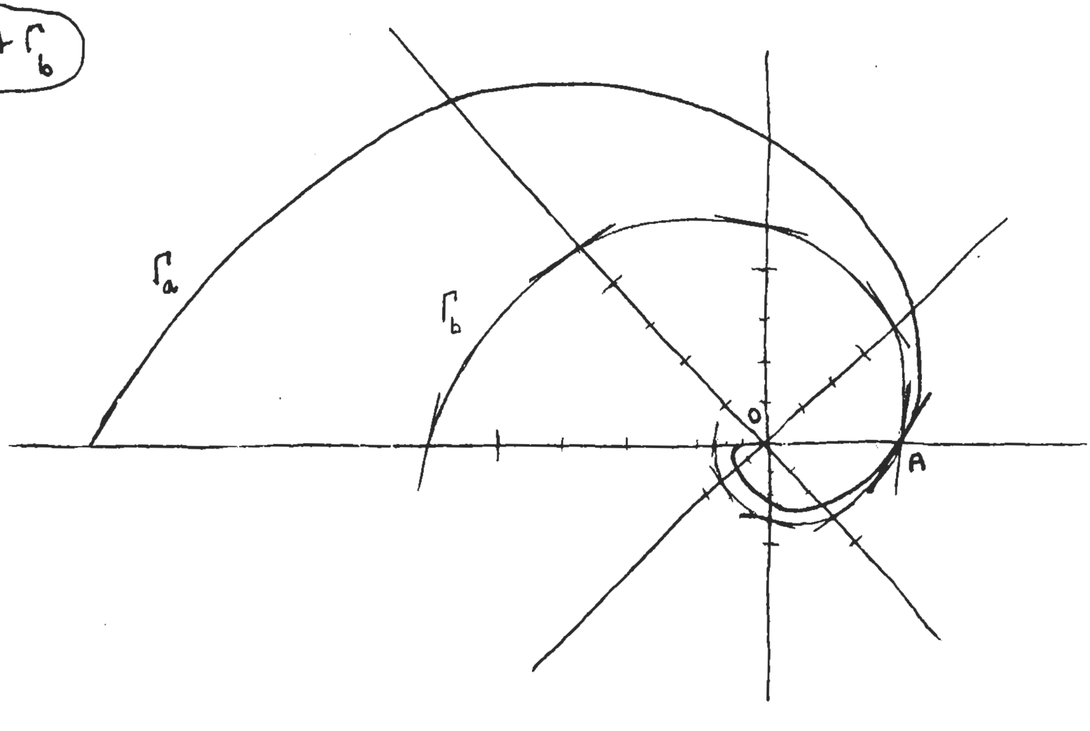
b) À vue d'œil, existe-t-il une similitude qui applique Γ_a sur Γ_b ? Pourquoi ? On demande une justification intuitive ; on ne demande pas de démonstration.

Peut-on dire que l'une des spirale est plus régulière que l'autre ? Les deux spirales présentent-elles la même symétrie ? Justifier rapidement les réponses.

Γ_a



Γ_a et Γ_b



1. a) Voir le 1er schéma :

$A_0 = A \qquad OA_{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}.OA \qquad OA_{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}.OA_{\frac{\pi}{4}}$ etc.

$OA_{-\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}.OA$ etc.

$T_A \parallel T_{A_\pi} \parallel T_{A_{-\pi}} \qquad T_{A_{\frac{\pi}{4}}} \parallel T_{A_{-\frac{\pi}{4}}}$ etc.

$T_A \perp T_{A_{\frac{\pi}{2}}}$ etc.

$\widehat{(OA_\theta, T_{A_\theta})} = \text{constant}$

b) Lorsque θ croît et tend vers $+\infty$, la courbe tourne indéfiniment dans le sens direct en s'éloignant indéfiniment du point O. Lorsque θ décroît et tend vers $-\infty$, la courbe tourne indéfiniment dans le sens indirect en se rapprochant indéfiniment de O, sans jamais l'atteindre (O est un point asymptote).

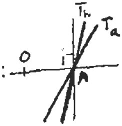
c) * Soit M un point de Γ_a.
Donc, soit φ un nombre tel que : $\varphi \in \mathbb{R}$ et $v_\varphi(A) = M$.
Alors $v_\theta(M) = v_{\theta+\varphi}(A) \in \Gamma_a$.

* Soit M un point de Γ_a.
Soit $N = v_{-\theta}(M)$
Alors $N \in \Gamma_a$ (résultat * précédent, valable pour $-\theta$).
Et $v_\theta(N) = M$.

* Par conséquent $v_\theta(\Gamma_a) \subset \Gamma_a$ et $\Gamma_a \subset v_\theta(\Gamma_a)$. Donc $v_\theta(\Gamma_a) = \Gamma_a$.

d) Le groupe de symétrie de Γ_a est G_a.

2. a) voir le 2ème schéma :
$B_0 = A$ $\quad$ Γ_b et Γ_a se traversent au point A $\quad$ Tangentes en A :



$OB_{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3} \cdot OA$ $\quad$ $OB_{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \cdot OB_{\frac{\pi}{4}}$ $\quad$ etc.

$OB_{-\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4} \cdot OA$ $\quad$ etc.

$(\widehat{OB_\theta, T_{B_\theta}}) =$ constant

b) Il n'existe pas de similitude qui applique Γ_a sur Γ_b car les ~~formes des~~ deux spirales n'ont pas la même forme : l'une s'ouvre plus vite que l'autre (on peut voir aussi que les pentes des tangentes ne sont pas les mêmes).

Aucune des deux spirales n'est plus régulière que l'autre, et on peut dire qu'elles ne présentent pas la même symétrie puisque leurs groupes de symétrie sont différents :

$G_a \neq G_b \quad G_a \not\subset G_b \quad G_b \not\subset G_a$.

Symétrie plane (sur 20 points)

On considère un pavage du plan, constitué de triangles équilatéraux isométriques, régulièrement placés les uns à côté des autres suivant la disposition schématisée sur la feuille jointe, schéma 0. Le pavage considéré est ***non borné***, c'est-à-dire que la répétition uniforme des triangles est supposée indéfinie dans toutes les directions.

1. On considère les deux vecteurs **i** et **j** représentés sur le schéma 1 (voir feuille jointe) et on nomme Δ le triangle souligné en noir.

Sur le schéma 1, tracer au crayon noir les triangles $t_i(\Delta)$ et $t_j(\Delta)$, images de Δ par les translations t_i et t_j. Ecrire **i** à l'intérieur du triangle $t_i(\Delta)$, et **j** à l'intérieur du triangle $t_j(\Delta)$.

Tracer au crayon noir le vecteur **i+j** et le triangle $t_{i+j}(\Delta)$, et écrire **i+j** à l'intérieur du triangle image.

Tracer le vecteur **-j** et le triangle $t_{-j}(\Delta)$, et écrire **-j** à l'intérieur du triangle image.

Tracer le vecteur **i-j** et le triangle $t_{i-j}(\Delta)$, et écrire **i-j** à l'intérieur du triangle image.

2. Sur le schéma 2, dessiner au crayon noir les triangles $t_{2i}(\Delta)$, $t_{2i+j}(\Delta)$, $t_{-2j}(\Delta)$, $t_{-i-j}(\Delta)$, et écrire à l'intérieur de chaque triangle le nom du vecteur de la translation correspondante.

Quel est l'ensemble des vecteurs des translations qui appliquent Δ sur l'un quelconque des triangles du pavage ? On demande d'exprimer ces vecteurs en fonction des vecteurs **i** et **j** ; on ne demande pas de démonstration.

Sur le schéma 2, dessiner en rouge le vecteur d'une translation qui n'applique pas Δ sur l'un des triangles du pavage.

3. On considère le centre du triangle Δ , indiqué par le signe ⅄ sur le schéma 3. Combien existe-t-il de rotations, centrées en ce point, qui appliquent le triangle Δ sur lui-même ? Quels sont leurs angles ?

Choisir l'un de ces angles, différent de zéro modulo 2π ; soit r la rotation correspondante. Dessiner sur le schéma 3, en noir ondulé l'image par r du triangle donné en noir ondulé, et en noir pointillé l'image par r du triangle donné en noir pointillé.

4. a) On considère un sommet du triangle Δ, indiqué par le signe ✱ sur le schéma 4. Indiquer en noir l'image de Δ par la rotation centrée au point ✱ et dont l'angle est π/3 (π/3 = 2π/6 , c'est l'angle d'un sixième de tour complet).

b) Combien existe-t-il de rotations centrées au point ✱ qui appliquent Δ sur un triangle du pavage ? Quels sont leurs angles ? Inscrire la valeur de chacun de ces angles sur le triangle qui est l'image de Δ par la rotation correspondante (on inscrira par exemple π/3 sur le triangle image de Δ par la rotation d'angle π/3, et 0 sur le triangle Δ lui-même).

c) On considère le triangle donné en noir ondulé sur le schéma 4. Indiquer en noir ondulé les images de ce triangle par les rotations de la question 4b, et inscrire à l'intérieur de chaque triangle l'angle de la rotation correspondante.

5. On considère le milieu d'un côté du triangle Δ, indiqué par le signe • sur le schéma 5. Indiquer en noir l'image du triangle Δ par le demi-tour centré au point • . Indiquer en noir ondulé – respectivement : noir pointillé – l'image par le même demi-tour du triangle donné en noir ondulé – respectivement : pointillé – sur le schéma 5.

6. On considère les réflexions s_D et s_B dont les axes D et B sont dessinés sur le schéma 6. Indiquer en noir les images par s_D et s_B du triangle Δ, et en noir ondulé les images par les mêmes réflexions du triangle donné en noir ondulé sur le schéma.

7. On considère la droite D' dessinée en pointillé sur le schéma 7 (D' est l'axe de la bande constituée par deux médianes de triangles équilatéraux). Dessiner en pointillé le triangle $s_{D'}(\Delta)$ image de Δ par la réflexion d'axe D'. Le triangle $s_{D'}(\Delta)$ est-il un triangle du pavage ? Dessiner sur le schéma le vecteur **u'** d'une réflexion glissée d'axe D' qui applique Δ sur un triangle du pavage, et exprimer **u'** en fonction des vecteurs **i** et **j** (donnés à la question 1). La translation $t_{\mathbf{u}'}$ applique-t-elle Δ sur un triangle du pavage ?

8. On considère la droite B' dessinée en pointillé sur le schéma 8 (B' est l'axe de la bande constituée par deux droites portant des côtés de triangles équilatéraux). Dessiner en pointillé le triangle $s_{B'}(\Delta)$ image de Δ par la réflexion d'axe B'. Le triangle $s_{B'}(\Delta)$ est-il un triangle du pavage ? Dessiner sur le schéma le vecteur **v'** d'une réflexion glissée d'axe B' qui applique Δ sur un triangle du pavage, et exprimer **v'** en fonction des vecteurs **i** et **j**. La translation $t_{\mathbf{v}'}$ applique-t-elle Δ sur un triangle du pavage ?

9. Sur le schéma 9, dessiner le vecteur **u** d'une réflexion glissée d'axe D qui applique Δ sur un triangle du pavage, et exprimer **u** en fonction des vecteurs **i** et **j**.

Sur le même schéma, dessiner le vecteur **v** d'une réflexion glissée d'axe B qui applique Δ sur un triangle du pavage, et exprimer **v** en fonction de **i** et **j**.

Les translations $t_{\mathbf{u}}$ et $t_{\mathbf{v}}$ appliquent-elles Δ sur un triangle du pavage ?

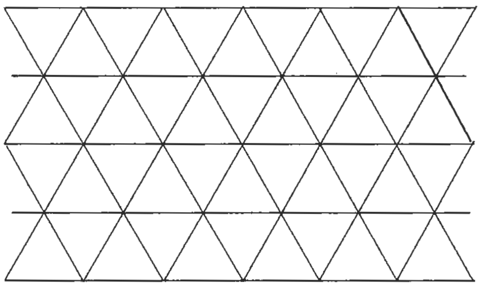


Schéma 0

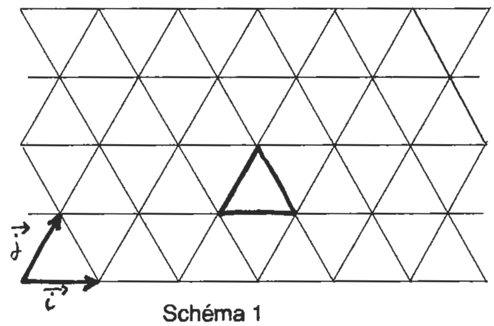


Schéma 1

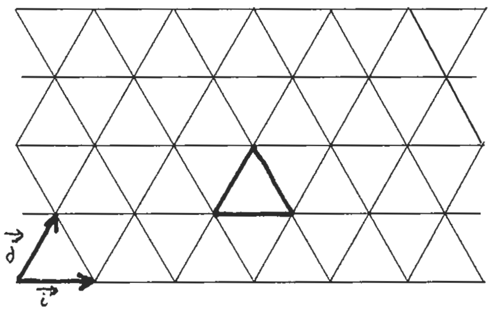


Schéma 2

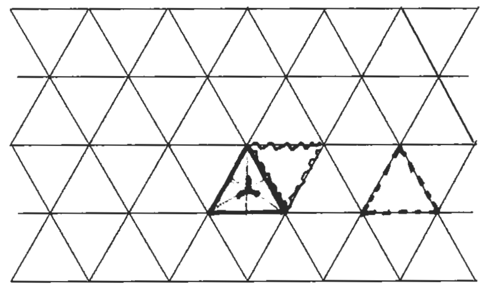


Schéma 3

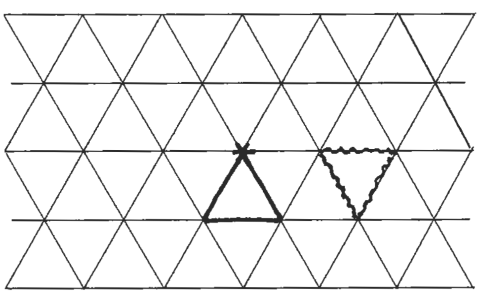


Schéma 4

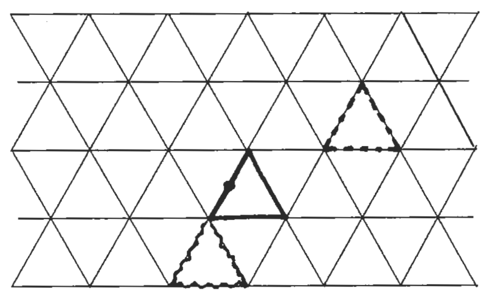


Schéma 5

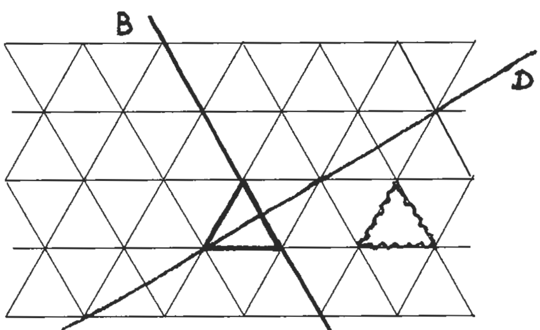


Schéma 6

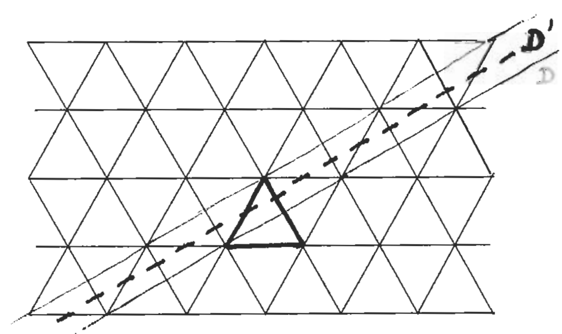


Schéma 7

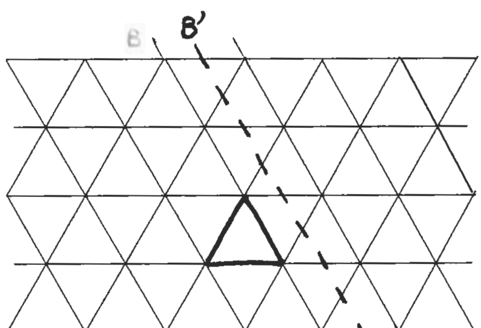


Schéma 8

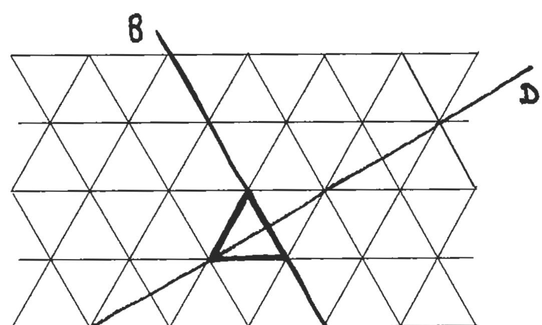


Schéma 9

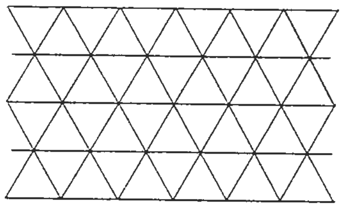


Schéma 0

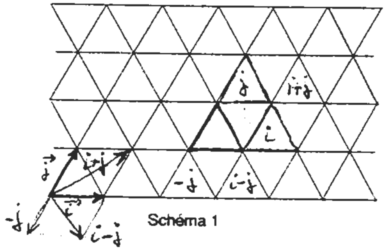


Schéma 1

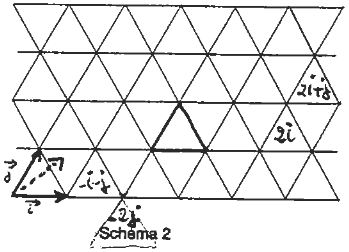


Schéma 2

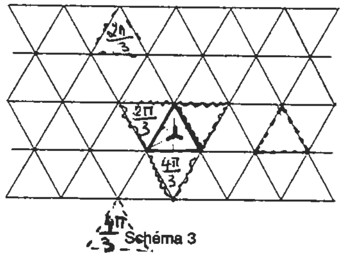


Schéma 3

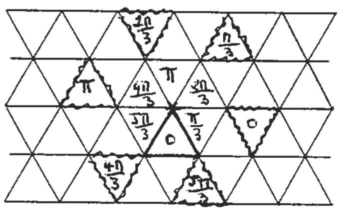


Schéma 4

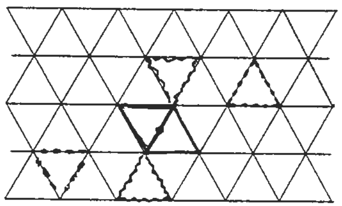


Schéma 5

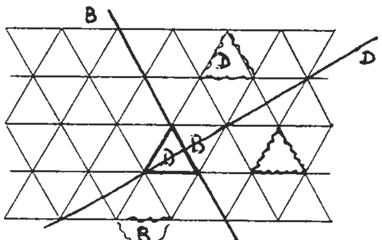


Schéma 6

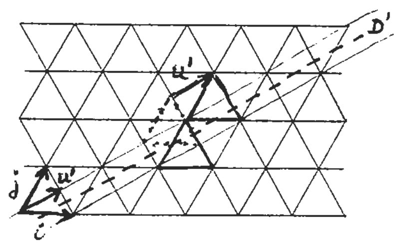


Schéma 7

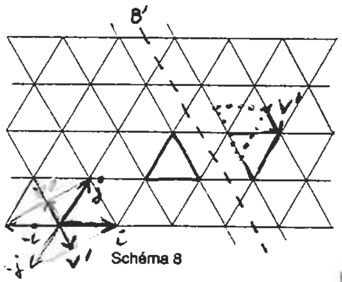


Schéma 8

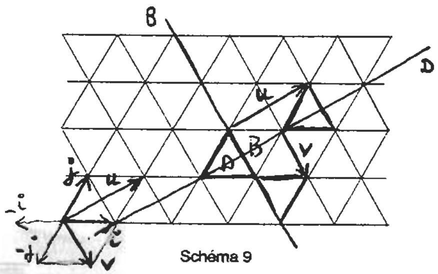


Schéma 9

2. L'ensemble des vecteurs des translations qui appliquent Δ sur l'un quelconque des triangles du pavage est :

$$\{ n\vec{i} + m\vec{j} \;/\; n \in \mathbb{Z},\; m \in \mathbb{Z} \}.$$

(Le vecteur d'une translation qui n'applique pas Δ sur un triangle du pavage est représenté en pointillés ..... (au lieu du rouge).)

3. Il existe 3 rotations, centrées au point $\curlywedge$, qui appliquent Δ sur lui-même. Leurs angles sont : $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, 0.

4. b) Il existe 6 rotations, centrées au point $*$, qui appliquent Δ sur un triangle du pavage. Leurs angles sont les 6 multiples de $\frac{\pi}{3}$, soit : $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, 0.

7. Le triangle $s_{D'}(\Delta)$ n'est pas un triangle du pavage.
$\vec{u}' = \frac{\vec{i}+\vec{j}}{2}$ (par exemple).
La translation $t_{\vec{u}'}$ n'applique pas Δ sur un triangle du pavage.
(Si on nomme G le groupe de symétrie du pavage, on remarque que :
$s_{D'} \notin G \quad t_{\vec{u}'} \notin G \quad t_{\vec{u}'} \circ s_{D'} \in G$.)

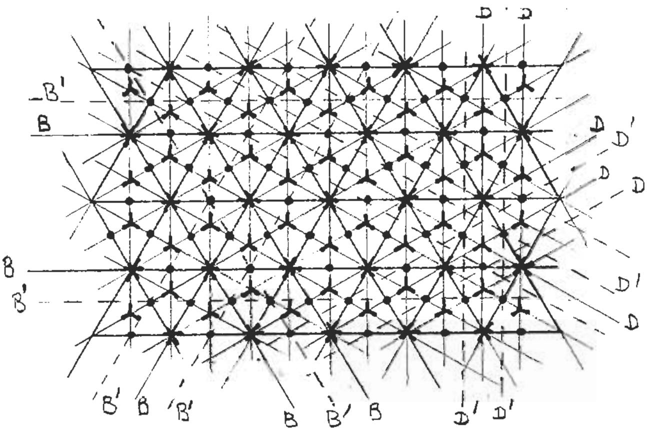
8. $\vec{v}' = \frac{\vec{i}-\vec{j}}{2}$ (par exemple).
Ni $s_{B'}(\Delta)$, ni $t_{\vec{v}'}(\Delta)$ ne sont des triangles du pavage. (On remarque :
$s_{B'} \notin G \quad t_{\vec{v}'} \notin G \quad t_{\vec{v}'} \circ s_{B'} \in G$.)

9. $\vec{u} = \vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i}-\vec{j}$ (par exemple). Ni $t_{\vec{u}}(\Delta)$, ni $t_{\vec{v}}(\Delta)$ ne sont des triangles du pavage. (On remarque que :
$s_D \in G \quad t_{\vec{u}} \in G \quad t_{\vec{u}} \circ s_D \in G$
$s_B \in G \quad t_{\vec{v}} \in G \quad t_{\vec{v}} \circ s_B \in G$.)

<u>Remarque</u> (qui n'est pas demandée).

L'étude précédente amène à donner le groupe de symétrie du pavage.

Ce groupe contient tous les types d'isométries (et aucune similitude non isométrique). Nous indiquons sur le schéma les éléments caractéristiques de ces isométries.



Les translations sont celles dont les vecteurs s'expriment en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ comme on l'a vu à la question 2.

Les réflexions sont celles dont les axes, analogues à B ou D, sont indiqués par des traits pleins ——.

Les réflexions glissées ont pour axes des droites analogues à B' ou D', indiquées par des traits pointillés - - - -.

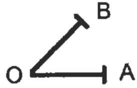
Les points marqués ✱, nommés hexades, sont les centres de 6 rotations, dont les angles sont les 6 multiples de $\frac{2\pi}{6}$.

Les points marqués ⅄, nommés triades, sont les centres de 3 rotations, dont les angles sont les 3 multiples de $\frac{2\pi}{3}$.

Les points marqués •, nommés diades, sont les centres de 2 rotations, dont les angles sont les 2 multiples de π.

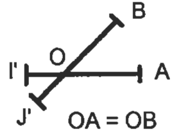
(Nous n'avons pas tout dessiné sur le schéma; d'ailleurs, c'est impossible : la figure considérée est non bornée. Eh, bien ! Il y a vraiment beaucoup d'éléments dans le groupe !)

1. Quel est le groupe de symétrie de chacune des huit figures ci-contre ? On demande de donner les groupes par la liste complète et précise de leurs éléments. On ne demande pas de démonstrations.
2. Parmi ces figures, y en a-t-il dont la symétrie (globale) peut s'exprimer par plusieurs groupes différents (pour la même figure) ? On demande de donner une réponse précise, et de la justifier (par des arguments qui ne sont pas internes aux mathématiques).
3. Quelles sont celles de ces figures qui présentent une symétrie bilatérale ?
4. Comparer entre elles les symétries de toutes ces figures. On demande de classer les figures par ordre de symétrie identique ou croissante, lorsque c'est possible, et de justifier les réponses au moyen des groupes de symétrie.
5. La figure 8 est donnée par un schéma où les droites mathématiques (non bornées) sont suggérées par un dessin matériel dont les traits rectilignes représentent plus directement des segments (puisque tout trait matériel est nécessairement borné). Quelle est la symétrie de la figure matérielle, où les traits sont bornés, mais "très longs" ?



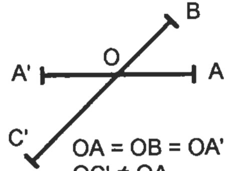
$OA = OB$

1



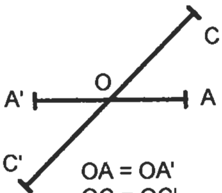
$OA = OB$
$OA \neq OI'$
$OI' = OJ'$

2



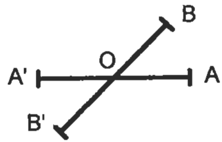
$OA = OB = OA'$
$OC' \neq OA$

3



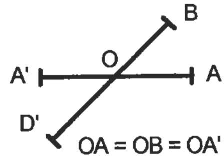
$OA = OA'$
$OC = OC'$
$OA \neq OC$

4



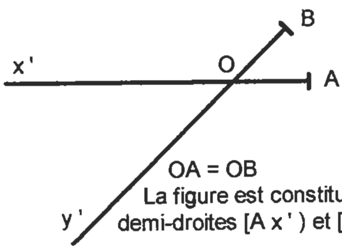
$OA = OB = OA' = OB'$

5



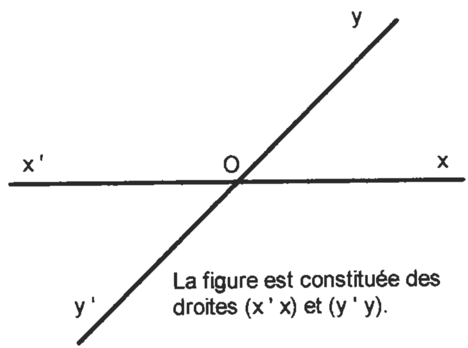
$OA = OB = OA'$
OD' # OA
(La longueur OD' est très peu différente de la longueur OA.)

6



$OA = OB$
La figure est constituée des demi-droites [A x ') et [B y ').

7



La figure est constituée des droites (x ' x) et (y ' y).

8

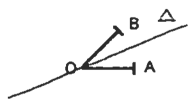
ENAU 98/99 Archi 1ère année Mathématiques : Géométrie

Test du 20/2/99

corrigé

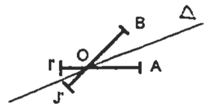
1. On note Id l'identité du plan, s_Δ la réflexion par rapport à la droite Δ dessinée sur chaque schéma (voir dessin joint), $s_{\Delta'}$ la réflexion par rapport à Δ', s_O la symétrie centrale de centre O (demi-tour) et $h_{(O,k)}$ l'homothétie de centre O et de rapport k.

Nous indiquons en dessous de chaque figure son groupe de symétrie. Pour la figure 6, deux groupes différents sont indiqués : voir l'explication à la question suivante.



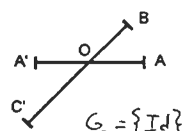
$G_1=\{Id, s_\Delta\}$

1



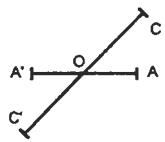
$G_2=G_1$

2



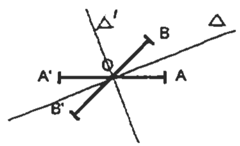
$G_3=\{Id\}$

3



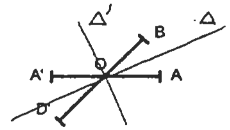
$G_4=\{Id, s_O\}$

4



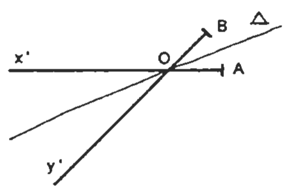
$G_5=\{Id, s_O, s_\Delta, s_{\Delta'}\}$

5



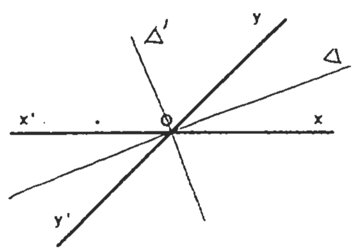
$G_6=G_3 \quad G'_6=G_5$

6



7

$G_7=G_1$



8

$G_8=G_5\cup\{h_{(O,k)}/k\in\mathbb{R}^*\setminus\{-1,1\}\}\cup\{s_\Delta\circ h_{(O,k)}/k\in\mathbb{R}^*\setminus\{-1,1\}\}$

2. On peut voir la figure 6 asymétrique, comme la figure 3, puisque la longueur OD est différente de OA ; on voit alors le groupe correspondant : $\{Id\}$. Mais on peut aussi considérer que la figure 6 est dissymétrique, sur le type de régularité de la figure 5 ; c'est-à-dire que, lorsqu'on regarde la figure 6, on voit aussi le groupe G_5, qui n'est pas complètement masqué par la légère différence de longueur entre OD' et les autres segments.

3. Les figures dont la symétrie est bilatérale sont celles dont le groupe de symétrie est $\{Id, s_\Delta\}$; ce sont les figures 1, 2 et 7.

4. Les figures 1, 2 et 7 ont la même symétrie (bilatérale) puisque leurs groupes de symétrie sont les mêmes. Si on note $\prec$ la symétrie croissante des figures, les figures se classent de la manière suivante :

$$3 \prec \begin{matrix}1,2,7\\4\\6\end{matrix} \prec 5 \prec 8 .$$

En effet, les groupes de symétrie se classent par inclusion les uns dans les autres de la manière suivante :

$$\{Id\} \subset \begin{matrix}\{Id, s_\Delta\}\\ \{Id, s_O\}\end{matrix} \subset \{Id, s_O, s_\Delta, s_{\Delta'}\} \subset G_8 .$$

On peut aussi classer la symétrie de la figure 6 entre 3 et 5 puisque la figure 6, où on discerne la symétrie de la figure 5, est plus régulière que la figure 3 qui est franchement asymétrique, et moins régulière que 5 à cause de la dissymétrie.

Les symétries des figures 1, 2, 7 et 4 sont différentes et incomparables : 4 n'est ni plus régulière, ni moins régulière que 1, 2, 7 puisque aucun des deux groupes n'est inclus dans l'autre.

On ne peut pas non plus classer 6 par rapport à 4 ou à 1, 2, 7 puisque la symétrie parfaite peut être considérée comme plus grande que la dissymétrie, mais que les règles de symétrie, suivies parfaitement par 1, 2, 7 ou par 4, et imparfaitement par 6, se classent dans l'ordre inverse.

5. Si on considère que les traits de la figure 8 sont bornés, la figure n'est pas différente de la figure 5 et son groupe est G_5. Mais les traits "très longs" sont tracés pour suggérer des droites non bornées ; le groupe de symétrie de la figure suggérée est G_8. On peut donc dire que la figure 8 matériellement dessinée est dissymétrique sur la règle de symétrie du type G_8, la dissymétrie constituée par l'interruption matérielle des droites ne laissant subsister que le type G_5.

N.B. Tous les schémas doivent être faits à main levée, d'une manière approximative mais vraisemblable.

On considère la spirale logarithmique S, trajectoire du point A sous le groupe G des similitudes directes de centre I, où $I \neq A$, d'angle θ et de rapport a^{θ}, où a est le nombre réel tel que $a^{\pi/2} = 4/3$:

$$I \neq A \qquad a^{\pi/2} = 4/3 \qquad \forall\, \theta \in R \quad s_\theta = s_{(I,\,\theta,\,a^{\theta})} \qquad G = \{s_\theta / \theta \in R\}$$

$$S = \{s_\theta(A) / \theta \in R\} .$$

1. Faire un schéma représentant la spirale S, une droite D passant par I, et la symétrique S' de S par rapport à D.
2. Faire un schéma représentant la spirale S et son homothétique S'' par l'homothétie h de centre I et de rapport 2.
3. Existe-t-il un déplacement qui applique
   a) S' sur S ?
   b) S'' sur S ?

Dans chacun des cas, si la réponse est oui, préciser de quel type de déplacement il s'agit et dessiner ses éléments caractéristiques sur le schéma ; si la réponse est non, dire pourquoi.

3. a) Il n'est pas possible d'appliquer S' sur S par un déplacement car les deux spirales sont de sens contraire : lorsqu'on se déplace sur S en tournant dans le sens direct on s'éloigne de I, alors qu'il faut tourner sur S' dans le sens indirect pour s'éloigner de I. Une spirale a un sens (alors qu'un cercle, par exemple, n'en a pas) et la réflexion, qui est un antidéplacement, inverse le sens, alors qu'un déplacement le conserve.

b) Il existe un unique nombre réel β tel que $a^{\beta} = 2$, et la similitude s_{β}, de centre I, d'angle β et de rapport a^{β}, appartient au groupe de symétrie de S (voir l'exercice 32 p. 40, fascicule 1). Or

$$s_{\beta} = r_{(I,\,\beta)} \circ h_{(I,\,2)}$$

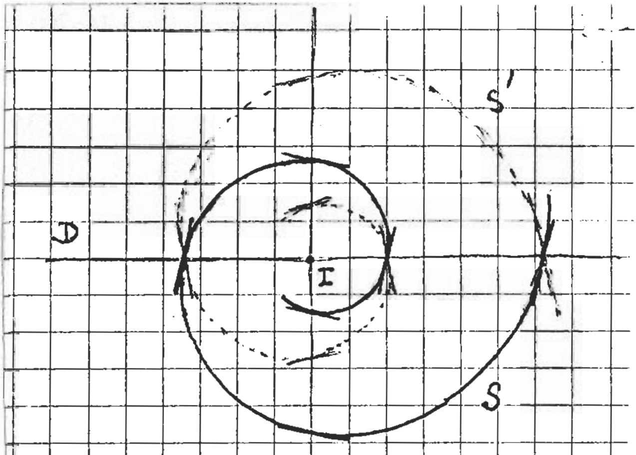
où r est la rotation de centre I et d'angle β. Donc cette rotation applique h(S), c'est-à-dire S'', sur S.

L'angle β, représenté sur le schéma, est l'angle

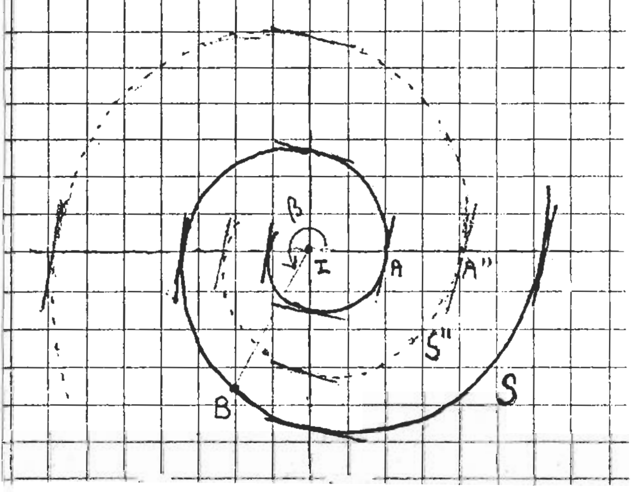
$$\beta = \widehat{(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})}$$

où B est l'unique point d'intersection de S avec le cercle de centre I et de rayon IA'', et A'' = h(A).

1)
et
3) a)



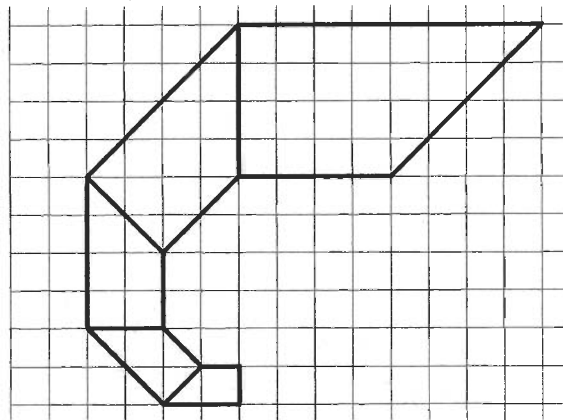
2)
et
3) b)

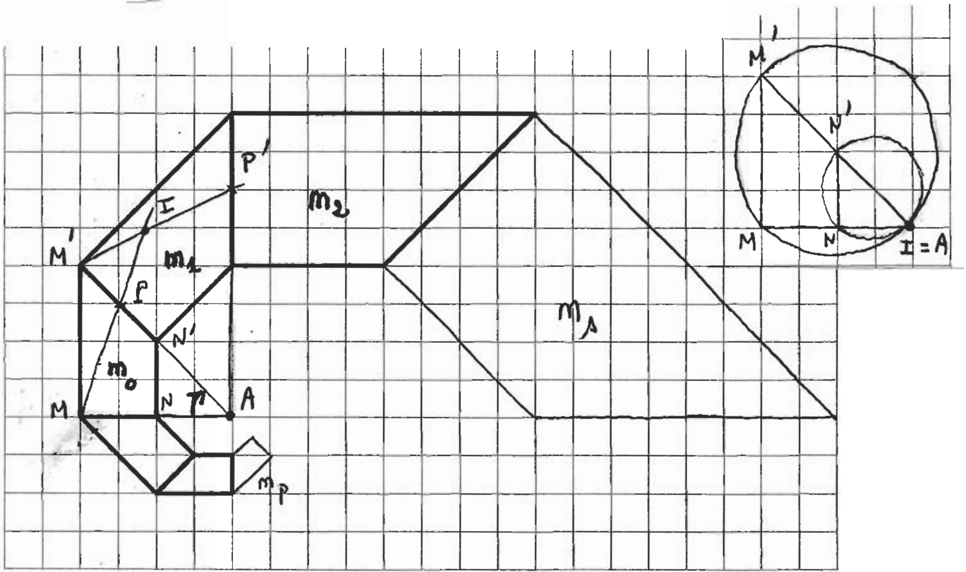


Le schéma ci-joint représente une spirale de modules tous semblables et régulièrement disposés. Il suggère une figure non bornée S où les modules se répètent régulièrement indéfiniment, sans début ni fin.

1. Dessiner sur le schéma le module qui précède le premier des modules déjà dessinés, et celui qui succède au dernier.
2. On nomme m_0 l'un des modules, et m_1 l'un des deux modules adjacents à m_0. Indiquer m_0 et m_1 sur le schéma. Pourquoi n'existe-t-il qu'une seule similitude appliquant m_0 sur m_1 ? Soit f cette similitude. Est-elle directe ou indirecte ? Justifier la réponse et donner les éléments caractéristiques de f (on construira en particulier le centre sur le schéma ; on ne demande pas de démonstrations).
3. On nomme m_2 le module qui suit m_1, c'est-à-dire celui qui est adjacent à m_1 du côté opposé à m_0. Quelle est la similitude qui applique m_1 sur m_2 ? Justifier la réponse.
4. Démontrer que f appartient au groupe de symétrie G_S de S et donner deux autres éléments du groupe G_S.

N.B. Tous les schémas doivent être faits à main levée (en s'aidant du quadrillage).





M'
I
P'
m_2
m_1
P
N'
m_0
m_A
M
N
A
m_p
M'
N'
M
N
I = A

1. Voir sur le schéma les modules m_p et m_s, où m_p précède le premier des modules déjà dessinés et m_s succède au dernier (le sens de succession choisi est arbitraire ; si on choisit le sens inverse, m_s sera le précédent et m_p le suivant).

2. Il n'existe qu'une seule similitude appliquant m_0 sur m_1 car ces modules sont asymétriques. La similitude f qui applique m_0 sur m_1 est directe car les modules sont dans le même sens (les modules ont un sens : si on retourne l'un des modules, le retournement est visible puisque le groupe de symétrie du module ne contient aucun retournement).

   Soient M et N deux points du module m_0 et soient M' et N' les points homologues de m_1. On voit sur le schéma que l'angle et le rapport de f sont :

$$(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = -\pi/4 \qquad \text{et} \qquad M'N'/MN = \sqrt{2}.$$

   Pour les points M et N que nous avons choisis (voir schéma), les droites MN et M'N' se coupent au centre A de f car :

$$(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AN'}}) = -\pi/4 \qquad \text{et} \qquad AN'/AN = \sqrt{2}.$$

   Remarquons que d'une manière générale, pour d'autres points homologues, M et M', P et P' par exemple (voir schéma), on pourrait nommer I l'intersection des droites MP et M'P' et construire l'intersection des cercles IMM' et IPP'. Les cercles se coupent en I et en A. (En appliquant cette construction aux points M, M', N et N' on trouverait deux cercles tangents : I = A.)

3. On voit sur le schéma que la similitude qui applique m_1 sur m_2 a le même angle et le même rapport que f, et que son centre est le même puisque la même construction, appliquée à m_1 et m_2 au lieu de m_0 et m_1, donne le même point A. La similitude qui applique m_1 sur m_2 est donc f.

4. D'une manière générale, on constate que

$$\forall n \in Z \qquad f(m_n) = m_{n+1} \quad \text{et} \quad m_n = f(m_{n-1}).$$

   Donc

$$f(S) \subset S \quad \text{et} \quad S \subset f(S),$$

$$f(S) = S.$$

   Par conséquent G_S contient f.
   Puisque G_S est un groupe, il contient nécessairement aussi toutes les similitudes f^n, $n \in Z$, c'est-à-dire :

$$f^0 = Id,$$
$$f^{-1} = s_{(A,\ \pi/4,\ 1/\sqrt{2})},$$
$$f^2 = s_{(A,\ -\pi/2,\ 2)},$$
$$f^3 = s_{(A,\ -3\pi/4,\ 2\sqrt{2})},\ f^4 = s_{(A,\ \pi,\ 4)} = h_{(A,\ -4)},\ f^8 = h_{(A,\ 16)}, \text{ etc.}$$

Corrigé abrégé

(a)

$\alpha_{\min\,(1\to 6)} = \dfrac{2\pi}{68}$ $\qquad k_{\min\,(1\to 6)} \simeq 1{,}12$ $\qquad (\widehat{\Delta, \Delta'}) = \alpha$ $\qquad (\widehat{\Delta, \delta}) = \dfrac{\alpha}{2}$

O : centre du cercle entourant la tête

$r = r(O, \alpha)$ $\quad h = h(O, k)$ $\quad r^n = r(O, n\alpha)$ $\quad h^m = h(O, k^m)$

exemple : $r^3 = r(O, 3\alpha)$ $\quad h^{-1} = h(O, \frac{1}{k})$

$1 \rightsquigarrow$	2	3	4	5	6	7	8
	r^2	h^2	h^{-2}	$h^2 \circ r^2$	$h \circ r = s$	$h \circ r^3$	$h^3 \circ r$

motif : moitié blanche
ou
motif entier bicolore

(motif entier sans couleur (noir = blanc) ajouter : $s_{\Delta'}$ $\quad h^2 \circ s_{\Delta}$ $\quad h^{-2} \circ s_{\Delta}$ $\quad h^2 \circ s_{\Delta'}$ $\quad h \circ s_{\delta}$ $\quad h \circ s_{\delta'}$ $\quad h^3 \circ s_{\delta}$)

(b)

- Etude régularité = groupe de symétrie
- Répétition indéfinie : figure non bornée (vers l'extérieur) et rép. indéfinie vers le centre.
- L'interruption matérielle de la répétition est une dissymétrie sur la règle décrite par les groupes suivants.

Deux couleurs (noir/blanc)

Le gpe est constitué des similitudes directes suivantes :

$h^{2q} \circ r^{2p}$ $\qquad p \in \{1, 2, \dots, 33, 0\}$ $\quad q \in \mathbb{Z}$

y compris les rotations $(q = 0)$, dont s_0 $(q = 0$ et $p = 17)$
y c. les homothéties $(p = 0)$
(y.c. Id : $p = 0$ et $q = 0$)

$h^{2q+1} \circ r^{2p+1}$ $\qquad p \in \{0, 1, \dots, 33\}$ $\quad q \in \mathbb{Z}$

(c.à d. angles $\dfrac{2\pi}{68}$ + multiples de $\dfrac{2\pi}{34}$)

(en particulier s (de $1 \rightsquigarrow 6$ question ①) pour $p = 0$ et $q = 0$)

Sans couleurs (noir = blanc)

Ajouter au gpe précédent l'ensemble suivant de similitudes indirectes :

$h^{2q} \circ s_{\Delta_p}$ $\qquad p \in \{1, \dots, 33, 0\}$ $\quad q \in \mathbb{Z}$ $\qquad \Delta_p = r^p(\Delta)$ $\quad p = 1, 2, \dots, 33, 0$

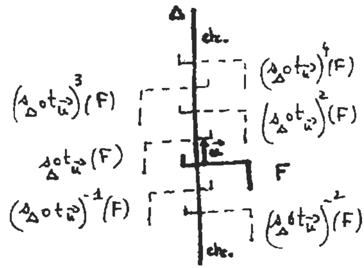
y.c. les 34 réflexions s_{Δ_p} (pour $q = 0$)

$h^{2q+1} \circ s_{\delta_p}$ $\qquad p \in \{1, \dots, 33, 0\}$ $\quad q \in \mathbb{Z}$ $\qquad \delta_p = r_{\frac{\alpha}{2} + p\alpha}(\Delta)$ $\quad p = 1, 2, \dots, 33, 0$

(non compris les s_{δ_p})

La vignette représente un cheval ailé muni d'une corne, qui se répète d'une manière régulière. La répétition se fait au moyen d'une réflexion glissée, mais, pour en rendre compte, il faut considérer que la figure n'est pas bornée et qu'il s'agit d'une figure théorique où la répétition des chevaux est indéfinie vers le haut et vers le bas. Nommons Y cette figure non bornée, et F l'un quelconque des chevaux :

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(s_\Delta \circ t_{\vec{u}}\right)^n (F)$$



où $s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ est la réflexion glissée dont l'axe Δ et le vecteur $\vec{u}$ sont représentés sur le schéma ci-contre (Δ traverse les yeux des chevaux).

Cette définition de Y néglige diverses dissymétries présentes dans la répétition de la vignette : le dégradé dans la couleur des chevaux (Y ne tient compte que des contours des chevaux), la position des pattes des deux chevaux du bas (l'un assis, l'autre les pattes écartées), l'écriture et la signature de l'artiste, la forme différente des ailes, de la queue et de la corne du cheval le plus élevé.

La régularité de la vignette est décrite par le groupe de symétrie de Y :

$$\mathcal{G}_Y = \left\{ s_\Delta \circ t_{(2n+1)\vec{u}} \;/\; n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ t_{2n\vec{u}} \;/\; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Cependant les dissymétries rompent cette règle, si bien que le groupe de symétrie de la vignette telle qu'elle est effectivement dessinée est

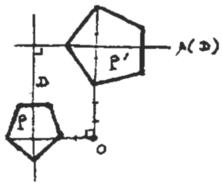
$$\mathcal{G}_X = \{ Id \}$$

(en nommant X le dessin effectif de la vignette).

Puisque l'artiste était matériellement obligé d'effectuer un dessin borné, il a composé son oeuvre en l'inscrivant dans un rectangle, dont l'un des axes est Δ. Les diverses dissymétries dans la forme des chevaux, signalées ci-dessus, ont été en fait introduites pour atténuer le déséquilibre provoqué par l'interruption de la répétition et pour améliorer la régularité de la vignette par rapport à la symétrie du rectangle.

1)

b)



a) Ce polygone est un pentagone régulier. Son groupe de symétrie est constitué des cinq réflexions dont les axes sont les médiatrices des cinq côtés (chacune d'entre elles passe par le milieu d'un côté, le centre du pentagone, et le sommet opposé au côté), et des cinq rotations, centrées au centre du pentagone, dont les angles sont les cinq multiples de $\frac{2\pi}{5}$ ($\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$ et 0). La rotation d'angle nul est l'identité. Le groupe du pentagone ne contient pas la symétrie centrale (demi-tour) par rapport au centre du pentagone.

c) Les symétries de P' sont les cinq réflexions dont les axes sont les images par s des axes des réflexions de P, et les cinq rotations dont les angles sont les mêmes que ceux des rotations de P et dont le centre est l'image par s du centre des rotations de P.

d) Soit f une symétrie quelconque de P (réflexion ou rotation), distincte de l'identité. Alors $s \circ f$ est une similitude, distincte de s, qui donne de P l'image P' (puisque $f(P) = P$ et ~~que~~ $s(f(P)) = s(P) = P'$).

En choisissant pour f l'une des réflexions du groupe de P, on voit que P et P' sont à la fois directement semblables (puisque s est directe) et indirectement semblables (puisque $s \circ f$ est indirecte). Mais on ne peut pas dire que P et P' soient "de même sens", ni "de sens contraire", puisque, dans le langage courant, dire que deux figures sont de même sens signifie qu'elles ne sont pas de sens contraire, et inversement. On dit plutôt que ces figures "n'ont pas de sens", ce qui correspond au fait qu'elles n'ont pas de sens visible : déplacé ou retourné, un pentagone régulier a toujours le même aspect.

2)

a) $s^{-1}(P') = P$

$f \circ s^{-1}(P') = f(s^{-1}(P')) = f(P) = P$

$s \circ f \circ s^{-1}(P') = s(f \circ s^{-1}(P')) = s(P) = P'$

Donc $s \circ f \circ s^{-1}$ est l'une des symétries de P'. De plus, c'est un déplacement si f est un déplacement, c'est un anti-déplacement si f est un anti-déplacement. D'une manière précise, notons m_Δ une réflexion quelconque du groupe de P, et $r(\omega, \alpha)$ une rotation quelconque de ce groupe (Δ est l'un des axes de symétrie de P, ω est le centre de P, α est l'un des multiples de $\frac{2\pi}{5}$).

Alors

$$s \circ m_\Delta \circ s^{-1} = m_{s(\Delta)}$$

$$s \circ r_{(\omega,\alpha)} \circ s^{-1} = r_{(s(\omega), \alpha)}.$$

(Voir question 1-c). $s(\Delta)$ est celui des axes de P' qui est perpendiculaire à l'axe choisi Δ, $s(\omega)$ est le centre ω' de P'.

Démonstration (qui n'est pas demandée)

L'application $s \circ m_\Delta \circ s^{-1}$ est un anti-déplacement du groupe de P', donc c'est l'une des réflexions de ce groupe. Or elle laisse la droite $s(\Delta)$ invariante :

$$s \circ m_\Delta \circ s^{-1}(s(\Delta)) = s \circ m_\Delta (s^{-1} \circ s(\Delta)) = s \circ m_\Delta(\Delta) = s(m_\Delta(\Delta))$$
$$= s(\Delta).$$

C'est donc la réflexion d'axe $s(\Delta)$.

Puisque l'application $s \circ r_{(\omega,\alpha)} \circ s^{-1}$ est l'un des déplacements du groupe de P', c'est l'une des rotations de ce groupe. Son centre est donc nécessairement $\omega' = s(\omega)$, et son angle est l'un des multiples de $\frac{2\pi}{5}$. En fait, son angle est α, le même que celui de r, puisque l'angle de la similitude $s \circ r \circ s^{-1}$ est la somme des angles de s, de r et de s^{-1}, et que les angles de s et de s^{-1} sont opposés.

b) Les groupes de symétrie $\mathcal{G}_P$ et $\mathcal{G}_{P'}$ de P et de P' ne sont pas constitués des mêmes éléments, ils ne sont pas égaux au sens mathématique. Mais les éléments de l'un se déduisent de ceux de l'autre d'une manière canonique au moyen de s (voir questions 1-c et 2-a). Lorsqu'on imagine un élément f de $\mathcal{G}_P$ et l'élément correspondant f' de $\mathcal{G}_{P'}$, on peut penser intuitivement que "f' est l'image de f par s", mais il serait faux d'écrire $f' = s(f)$. En réalité, ce sont les éléments caractéristiques de f' qui sont les images de ceux de f par s, f' et f étant deux isométries de même nature, et l'écriture correcte de la relation entre les applications est :

$$f' = s \circ f \circ s^{-1}.$$

La correspondance entre les deux groupes peut s'écrire :

$$\mathcal{G}_{P'} = s \circ \mathcal{G}_P \circ s^{-1}$$

et il serait faux d'écrire $\mathcal{G}_{P'} = \mathcal{G}_P$ ou $\mathcal{G}_{P'} = s(\mathcal{G}_P)$.

Soient A et B les deux demi-droites ouvertes, et soit a leur origine commune.

Toute similitude qui laisse $A \cup B$ globalement invariante admet nécessairement a pour point invariant. Cherchons donc les éléments du groupe de symétrie $\mathcal{G}_{A\cup B}$ de $A \cup B$ parmi les similitudes admettant a pour point invariant.

1) <u>Translations</u> :

Seule la translation identité admet a pour point invariant.

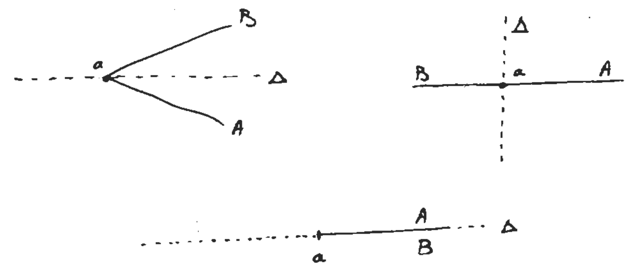
2) <u>Rotations</u> :

Si r est une rotation admettant a pour point invariant elle est centrée en a. Si de plus $r \in \mathcal{G}_{A\cup B}$, ou bien $r(A) = A$ et $r(B) = B$, ou bien $r(A) = B$ et $r(B) = A$ (on peut avoir les deux cas à la fois si A et B sont confondues). Si $r(A) = A$ et $r(B) = B$, alors $r = Id$. Si $r(A) = B$ et $r(B) = A$, nécessairement $\widehat{(A,B)} = \widehat{(B,A)}$; et ou bien A et B sont deux demi-droites opposées d'une même droite, et r est la symétrie centrale s_a par rapport à a ; ou bien A et B sont confondues, et $r = Id$.

3) <u>Reflexions</u>

Si s_Δ est une reflexion par rapport à une droite Δ, et si elle laisse a invariant, nécessairement Δ contient a. Si de plus $s_\Delta(A) = A$ et $s_\Delta(B) = B$, c'est que nécessairement A et B sont portées par Δ (et ou bien opposées, ou bien confondues) :

Si $s_\Delta(A) = B$ et $s_\Delta(B) = A$, c'est que Δ est la bissectrice de l'angle des demi-droites (dans le cas où A et B sont opposées, Δ est perpendiculaire à A et B; si A et B sont confondues, Δ porte A et B) :



4) <u>Reflexions glissées</u> :

$\mathcal{G}_{A\cup B}$ n'en contient pas puisque les reflexions glissées n'ont pas de points invariants.

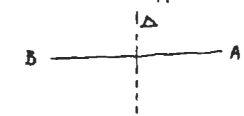
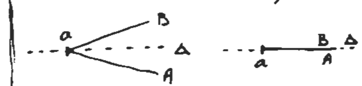
5) <u>Similitudes directes non isométriques</u> :

Une telle similitude admettant a pour point invariant est nécessairement centrée en a. C'est donc le produit $h(a,k) \circ r(a,\alpha)$ d'une homothétie de centre a et de rapport k $(k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})$ et d'une rotation de centre a et d'angle α. Or A et B sont globalement invariants par $h(a,k)$; donc, si $h(a,k) \circ r(a,\alpha)$ appartient à $\mathcal{G}_{A \cup B}$, nécessairement $r(a,\alpha)$ appartient à $\mathcal{G}_{A \cup B}$; et par conséquent $r(a,\alpha)$ est l'une des rotations trouvées au paragraphe 2).

6) <u>Similitudes indirectes non isométriques</u> :

Une telle similitude admettant a pour point invariant est nécessairement centrée en a. C'est donc le produit $h(a,k) \circ s_\Delta$ d'une homothétie de centre a et de rapport k $(k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})$ et d'une réflexion par rapport à une droite Δ contenant a. De plus, si $h(a,k) \circ s_\Delta \in \mathcal{G}_{A \cup B}$, c'est que nécessairement $s_\Delta \in \mathcal{G}_{A \cup B}$, donc que s_Δ est l'une des réflexions trouvées au paragraphe 3).

Le groupe de symétrie de $A \cup B$ est donc constitué des éléments suivants (s_a désigne la symétrie centrale par rapport à a ; Δ désigne la bissectrice de l'angle des demi-droites et s_Δ la réflexion par rapport à Δ ; $s_{(AB)}$ désigne la réflexion p.r. à la droite (AB) définie par A et B quand elles sont alignées ; $h(a,k)$ désigne l'homothétie de centre a et de rapport k) :

	A et B opposées 	A et B non opposées (distinctes ou confondues) 
translations	Id	Id
rotations	Id, s_a	Id
réflexions	s_Δ, $s_{(AB)}$	s_Δ
réflexions glissées	aucune	aucune
similitudes directes non isométriques	1) Toutes les homothéties $h(a,k)$ où $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ 2) Tous les produits $h(a,k) \circ s_a$ où $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ On peut rassembler 1) et 2) : il s'agit en tout de toutes les homothéties $h(a,k)$ où $k \in \mathbb{R}^* - \{-1,1\}$ (voir N.B. a).	Toutes les homothéties $h(a,k)$ où $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$
similitudes indirectes non isométriques	1) Tous les produits $h(a,k) \circ s_\Delta$ où $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ 2) Tous les produits $h(a,k) \circ s_{(AB)}$ où $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ On peut rassembler 1) et 2) : il s'agit en tout de tous les produits $h(a,k) \circ s_\Delta$ où $k \in \mathbb{R}^* - \{-1,1\}$ (voir N.B. b).	Tous les produits $h(a,k) \circ s_\Delta$ où $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

<u>N. B.</u> :

a) $h(a,k) \circ s_a = h(a,-k)$

b) $s_{(AB)} = s_a \circ s_\Delta \qquad (\text{car } s_a = s_{(AB)} \circ s_\Delta)$

Donc :

$$h(a,k) \circ s_{(AB)} = h(a,k) \circ s_a \circ s_\Delta$$
$$= h(a,-k) \circ s_\Delta$$

Le groupe de symétrie de la figure est l'ensemble $\{t_{n\vec{u}} \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$ où $\vec{u}$ est le vecteur représenté sur la figure et où $t_{n\vec{u}}$ désigne la translation de vecteur $n\vec{u}$.

etc.

etc.

En réalité les motifs répétés sont légèrement différents les uns des autres ; la symétrie de translation n'est pas rigoureuse mais approximative.

Toute similitude qui laisse X globalement invariante admet nécessairement ω pour point invariant. Cherchons donc les éléments du groupe de symétrie $\mathcal{G}_X$ de X parmi les similitudes admettant ω pour point invariant.

1) <u>Translations</u>:

Seule la translation identité admet ω pour point invariant

2) <u>Rotations</u> :

Si r est une rotation admettant ω pour point invariant, elle est centrée en ω. Réciproquement, toute rotation de centre ω laisse chaque cercle C_n globalement invariant, donc appartient à $\mathcal{G}_X$.

3) <u>Réflexions</u> :

Si s_Δ est une réflexion par rapport à une droite Δ, et si elle laisse ω invariant, nécessairement Δ contient ω. Réciproquement, toute réflexion dont l'axe contient ω laisse chaque cercle C_n globalement invariant, donc appartient à $\mathcal{G}_X$.

4) <u>Reflexions glissées</u> :

$\mathcal{G}_X$ n'en contient pas puisque les reflexions glissées n'ont pas de points invariants.

5) Similitudes directes non isométriques :

Si une telle similitude admet ω pour point invariant, elle est nécessairement centrée en ω. C'est donc le produit $h(\omega,k)\circ r(\omega,\alpha)$ d'une homothétie de centre ω et de rapport k $(k\in\mathbb{R}_+^*-\{1\})$ et d'une rotation de centre ω et d'angle α. Or toutes les rotations de centre ω appartiennent à $\mathcal{G}_X$; donc

$$h(\omega,k)\circ r(\omega,\alpha)\in\mathcal{G}_X \iff h(\omega,k)\in\mathcal{G}_X .$$

Cherchons donc les homothéties $h(\omega,k)$ de $\mathcal{G}_X$. Si ℓ est le rayon du cercle C, chaque cercle C_n de X admet pour centre ω et pour rayon $2^n\ell$. L'image de C par l'homothétie $h(\omega,k)$ est un cercle de centre ω et de rayon $k\ell$. Si $h(\omega,k)\in\mathcal{G}_X$, nécessairement $h(\omega,k)(C)$ est l'un des cercles C_n de X, donc $k=2^n$.
Réciproquement, toute homothétie $h(\omega,2^n)$ appartient à $\mathcal{G}_X$ car

$$\forall m\in\mathbb{Z}\quad h(\omega,2^n)(C_m)=C_{m+n}$$
$$\forall m\in\mathbb{Z}\quad C_m=h(\omega,2^n)(C_{m-n})$$

donc $\quad h(\omega,2^n)(X)=X$

Les homothéties de $\mathcal{G}_X$ sont donc les homothéties $h(\omega,2^n)$, où $n\in\mathbb{Z}$.

6) Similitudes indirectes non isométriques :

Si une telle similitude admet ω pour point invariant, elle est nécessairement centrée en ω. C'est donc le produit $h(\omega,k)\circ s_\Delta$ d'une homothétie de centre ω et de rapport k $(k\in\mathbb{R}_+^*-\{1\})$ et d'une réflexion par rapport à une droite Δ contenant ω. Or toutes les réflexions dont les axes passent par ω appartiennent à $\mathcal{G}_X$; donc, si $\Delta\ni\omega$,

$$h(\omega,k)\circ s_\Delta\in\mathcal{G}_X \iff h(\omega,k)\in\mathcal{G}_X .$$

Et l'étude précédente nous a déjà fourni les homothéties de $\mathcal{G}_X$.

Le groupe de symétrie $\mathcal{G}_X$ est donc constitué des éléments suivants :

translations	Id
rotations	Toutes les rotations de centre ω
réflexions	Toutes les réflexions dont les axes passent par ω
réflexions glissées	aucune
similitudes directes non isométriques	Tous les produits $h(\omega,2^n)\circ r(\omega,\alpha)$ des homothéties de centre ω et de rapport 2^n $(n\in\mathbb{Z})$ et de rotations de centre ω et d'angle α quelconque. Remarques : 1) On obtient les homothéties $h(\omega,2^n)$ $(n\in\mathbb{Z})$ pour $\alpha=0$. 2) Pour α plat, la rotation est la symétrie centrale s_ω par rapport à ω et $h(\omega,2^n)\circ s_\omega=h(\omega,-2^n)$. $\mathcal{G}_X$ contient donc non seulement les homothéties $h(\omega,2^n)$ $(n\in\mathbb{Z})$ mais aussi les homothéties $h(\omega,-2^n)$ $(n\in\mathbb{Z})$.
similitudes indirectes non isométriques	Tous les produits $h(\omega,2^n)\circ s_\Delta$ des homothéties de centre ω et de rapport 2^n $(n\in\mathbb{Z})$ et des réflexions s_Δ dont les axes Δ passent par ω.

Soit O le point représenté sur la figure. Le groupe de symétrie de la figure est constitué des 4 rotations suivantes :

$$Id,\ r(O,\tfrac{\pi}{2}),\ r(O,\pi),\ r(O,\tfrac{3\pi}{2}).$$

($r(O,\pi)$ est la symétrie centrale par rapport à O).

En réalité les motifs répétés sont légèrement différents les uns des autres ; la symétrie de rotation n'est pas rigoureuse mais approximative.

Si on ne tient pas compte de la différence de couleur (noir plein, ou gris pointillé) des motifs, c'est-à-dire si on considère la figure constituée seulement des contours des motifs, on trouve un groupe de symétrie constitué de 8 rotations :

$$Id,\ r(O,\tfrac{\pi}{4}),\ r(O,\tfrac{\pi}{2}),\ r(O,\tfrac{3\pi}{4}),\ r(O,\pi),\ r(O,\tfrac{5\pi}{4}),\ r(O,\tfrac{3\pi}{2}),\ r(O,\tfrac{7\pi}{4}).$$

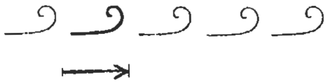
C'est l'ensemble de ces deux groupes de symétrie (dont l'un est un sous groupe de l'autre) qui rend compte de la régularité propre à cette figure.

le groupe de symétrie de la figure est $\{Id\}$.

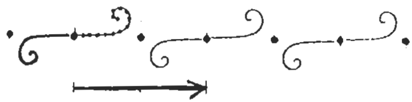
On remarque que l'artiste a joué sur le contraste entre <u>l'asymétrie</u> générale de la figure et le fait que cette figure est inscrite dans un cercle, figure géométrique <u>la plus symétrique</u> des figures bornées. (Le cercle est la plus symétrique des figures bornées puisque son groupe de symétrie contient <u>toutes</u> les symétries possibles pour une figure bornée).

Les 7 groupes de frises

Groupes ne contenant que des isométries positives :

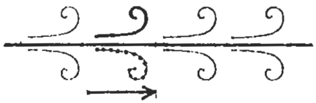


T_1

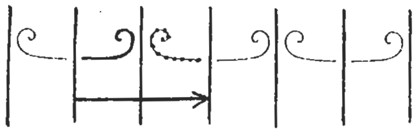


$T_1 C_2$

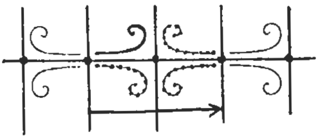
Groupes contenant aussi des isométries négatives :



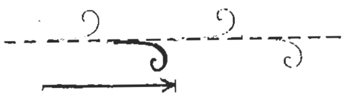
$T_1 D_1^{\parallel}$



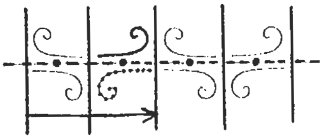
$T_1 D_1^{\perp}$



$T_1 D_2$



U



$U C_2$

Rosaces (figures bornées)

Cycliques

$C_n = \{ r_{(I,\frac{2\pi}{n})}, r_{(I,2.\frac{2\pi}{n})}, r_{(I,3.\frac{2\pi}{n})}, \dots r_{(I,(n-1)\frac{2\pi}{n})}, Id \}$

Exemples :

$C_1 = \{Id\}$ $C_2 = \{s_I, Id\}$ $C_3 = \{ r_{(I,k.\frac{2\pi}{3})} / k \in \{1,2,0\} \}$ $C_4 = \{ r_{(I,\frac{\pi}{2})}, s_I, r_{(I,-\frac{\pi}{2})}, Id \}$

Diédraux

$D_n = C_n \cup \{ s_{\Delta_1}, s_{\Delta_2}, \dots, s_{\Delta_n} \}$ $\quad \left((\widehat{\Delta_k, \Delta_{k+1}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} \; [\pi] \right)$

Exemples :

$D_1 = \{ s_\Delta, Id \}$ $D_2 = \{ s_{\Delta_1}, s_{\Delta_2}, s_I, Id \}$ ($\Delta_1 \perp \Delta_2$) $D_4 = C_4 \cup \{ s_{\Delta_k} / k \in \{1,2,3,4\} \}$ ($(\widehat{\Delta_k, \Delta_{k+1}}) = \frac{\pi}{8}$)

Notation : Si G et G' sont des groupes d'isométries, on note GG' l'ensemble :

$$GG' \underset{\text{def}}{=} \{ g \circ g' / g \in G \text{ et } g' \in G' \}$$

Frises

Remarques :

$T_1 = \{ t_{n\vec{u}} / n \in \mathbb{Z} \}$

$T_{①}$ signifie : une direction de translations (pour les "dessins-tapis" il y en a plus d'une.)

$T_1C_2 = \{ t \circ r / t \in T_1 \text{ et } r \in C_2 \}$

$= \underbrace{T_1}_{\text{transl}^{\circ}} \cup \underbrace{\{ s_{I_n} / n \in \mathbb{Z} \}}_{\text{demi-tours}}$

$C_2 = \{ s_{I_0}, Id \}$ I_0 est l'un qcq des centres de sym^{ie}.

$I_n = t_{n\frac{\vec{u}}{2}}(I_0)$, $n \in \mathbb{Z}$

$T_1D_1'' = \{ t \circ f / t \in T_1 \text{ et } f \in D_1'' \}$

$= \underbrace{T_1}_{\text{transl}^{\circ}} \cup \underbrace{\{ s_\Delta \}}_{\text{une réflexion}} \cup \underbrace{\{ s_\Delta \circ t_{n\vec{u}} / n \in \mathbb{Z}^* \}}_{\text{r. glissées}}$

$D_1'' = \{ s_\Delta, Id \}$ Δ est l'axe de sym^{ie}, $\Delta /\!/ \vec{u}$.

$T_1D_1^\perp = \{ t \circ f / t \in T_1 \text{ et } f \in D_1^\perp \}$

$= \underbrace{T_1}_{\text{transl}^{\circ}} \cup \underbrace{\{ s_{\Delta_n} / n \in \mathbb{Z} \}}_{\text{réflexions}}$

$D_1^\perp = \{ s_{\Delta_0}, Id \}$ Δ_0 l'un qcq des axes de sym^{ie}, $\Delta_0 \perp \vec{u}$

$\Delta_n = t_{n\frac{\vec{u}}{2}}(\Delta_0)$, $n \in \mathbb{Z}$

$T_1D_2 = \{ t \circ f / t \in T_1 \text{ et } f \in D_2 \}$

$= \underbrace{T_1}_{\text{transl}^{\circ}} \cup \underbrace{\{ s_\Delta \}}_{\text{réflexion}} \cup \underbrace{\{ s_\Delta \circ t_{n\vec{u}} / n \in \mathbb{Z}^* \}}_{\text{r. glissées}} \cup \underbrace{\{ s_{\Delta_n} / n \in \mathbb{Z} \}}_{\text{réflexions}} \cup \underbrace{\{ s_{I_n} / n \in \mathbb{Z} \}}_{\text{demi-tours}}$

$D_2 = \{ s_\Delta, s_{\Delta_0}, s_{I_0}, Id \}$ I_0 pt de $\Delta \cap \Delta_0$

$U = \{ g^n / n \in \mathbb{Z} \}$

$= \underbrace{\{ t_{2n\vec{u}} / n \in \mathbb{Z} \}}_{\text{transl}^{\circ}} \cup \underbrace{\{ s_\Delta \circ t_{(2n+1)\vec{u}} / n \in \mathbb{Z} \}}_{\text{r. glissées}}$

$g = s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ est une r. glissée

Ni réflexions, ni demi-tours

$UC_2 = \{ f \circ r / f \in U \text{ et } r \in C_2 \}$

$= \underbrace{U}_{\text{transl}^{\circ} \text{ et r. glissées}} \cup \underbrace{\{ s_{I_n} / n \in \mathbb{Z} \}}_{\text{demi-tours}} \cup \underbrace{\{ s_{\Delta_n} / n \in \mathbb{Z} \}}_{\text{réflexions}}$

Les centres des ½ tours n'appartiennent pas aux axes des réflexions.

Rosaces, frises, dessins-tapis

Les schémas représentent en rouge les éléments caractéristiques des isométries du groupe de symétrie. Par exemple, une triade est un centre de rotation d'ordre 3 (centre de 3 rotations dont les angles sont les 3 multiples de $2\pi/3$). Les groupes sont classés en fonction de n (n = 1, n = 2, ..., n = 6), où n est l'ordre maximum des centres de rotations du groupe.

Un axe est l'axe d'une infinité de réflexions glissées dont les vecteurs, par exemple pour le groupe « T_2D_1 rhombique » (page 4 des schémas, n = 1), sont $(2h+1)\mathbf{a}$ (où $h \in \mathbf{Z}$ et $\mathbf{a}$ est le vecteur dessiné en noir sur le schéma). Un axe est un axe de réflexion et aussi de réflexions glissées dont les vecteurs, pour le même exemple « T_2D_1 rhombique », sont $2h\mathbf{a}$ ($h \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{a}$ dessiné).

Le dessin répétitif d'ensemble est la trajectoire, sous le groupe de symétrie, de n'importe lequel des , par exemple la trajectoire de celui qui est indiqué en vert .

Dans presque tous les cas, le groupe de symétrie est le produit du réseau T_2 de translations du groupe (dont deux vecteurs de base sont indiqués en noir gras) par un autre sous-groupe (par exemple, pour T_2D_1 , le sous groupe D_1 , groupe diédral d'ordre 1, correspondant à la symétrie bilatérale). Le dessin indiqué en vert plein et pointillé (exemple :) est la trajectoire de sous le sous-groupe (exemple : sous D_1). Le dessin d'ensemble est la trajectoire du motif vert plein et pointillé (exemple : trajectoire de) sous le réseau de translations.

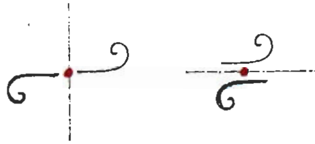
Les traits noirs fins délimitent des domaines du plan (parallélogrammes, triangles, etc.) qui pavent le plan tout entier sous le groupe de symétrie du dessin-tapis.

Les notations T_2 , T_2D_1 , ..., sont celles de *Savariau* (voir bibliographie). Elles indiquent clairement les produits de groupes. Les notations inscrites en dessous : p1 , cm , ..., sont les notations cristallographiques internationales.

Groupes de rosaces

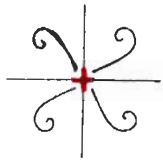
Groupes cycliques :

C_1

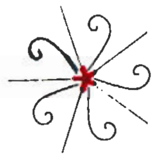


C_2

C_3



C_4

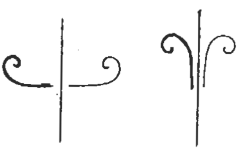


C_5

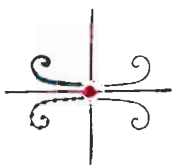
C_6

etc.

Groupes diédraux :

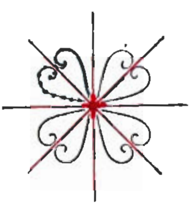


D_1

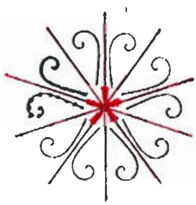


D_2

D_3



D_4



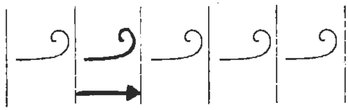
D_5

D_6

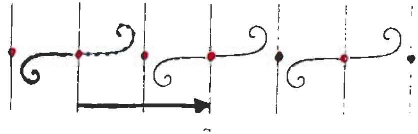
etc.

Les 7 Groupes de frises

Groupes ne contenant que des isométries positives :

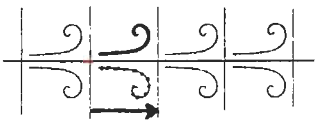


T_1

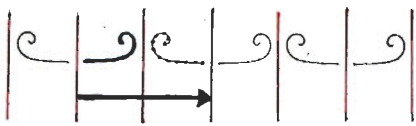


T_1C_2

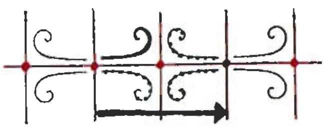
Groupes contenant aussi des isométries négatives :



$T_1D_1^{\parallel}$

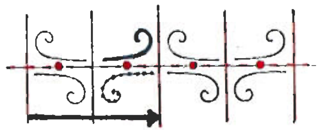


$T_1D_1^{\perp}$



T_1D_2

U

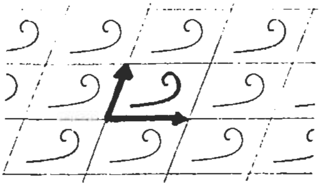


UC_2

Les 17 Groupes de dessins-tapis

Groupes ne contenant que des isométries positives :

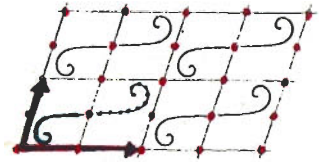
$n = 1$:



T_2

p1

$n = 2$:

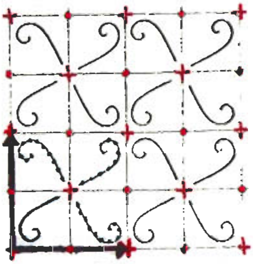


$T_2\, C_2$

p2

réseau quelconque

$n = 4$:

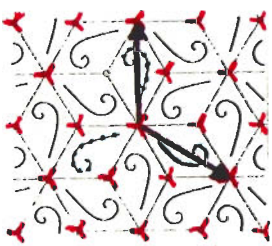


$T_2\, C_4$

p4

réseau carré

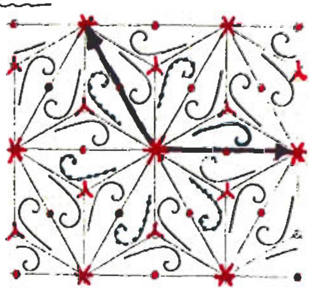
$n = 3$:



$T_2\, C_3$

p3

$n = 6$:



$T_2\, C_6 = T_2\, C_3\, C'_2$

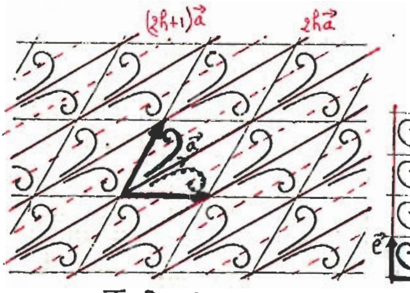
p6

réseau hexagonal

• diades   + tétrades   ⅄ triades   * héxades

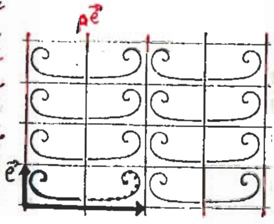
Groupes contenant aussi des isométries négatives :

$n = 1$:



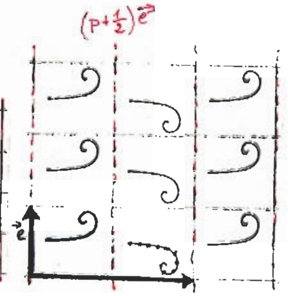
$T_2\,D_1$ rhomb.

cm



$T_2\,D_1$ rect.

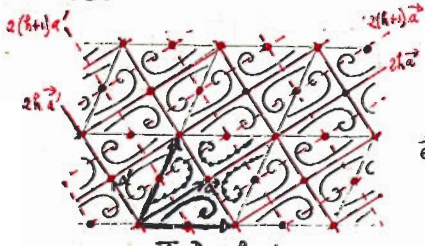
pm



$T_1\,U'$

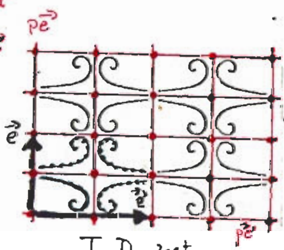
pg

$n = 2$:



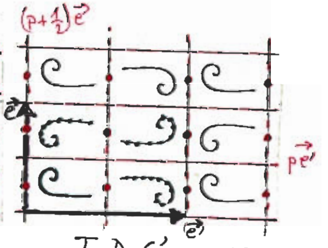
$T_2\,D_2$ rhomb.

cmm

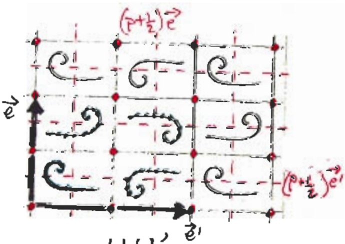


$T_2\,D_2$ rect.

pmm



$T_2\,D_1\,C_2'$ pmg



$U\,U'$

pgg

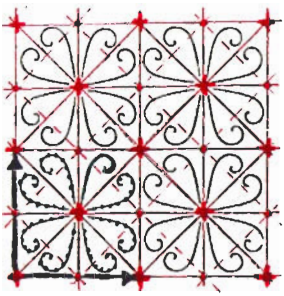
réseau rhombique

réseau rectangulaire

—— axe de reflexion (et de refl. glissée)

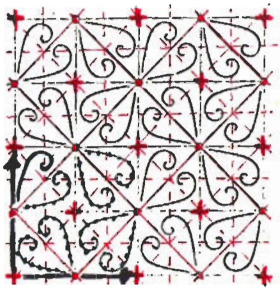
- - - axe de reflex. glissée (pas de reflexion)

$\underset{\sim}{n = 4}$:



$T_2 D_4$

p4m

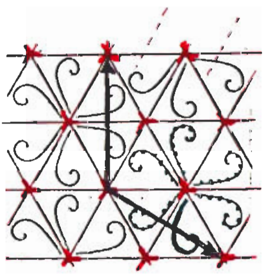


$T_2 C_4 D'_1$

p4g

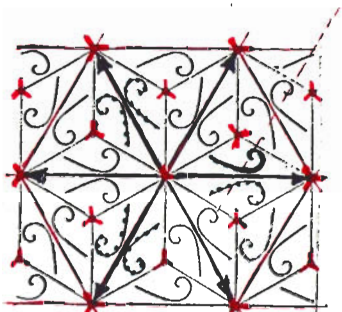
réseau carré

$\underset{\sim}{n = 3}$:



$T_2 D_3$

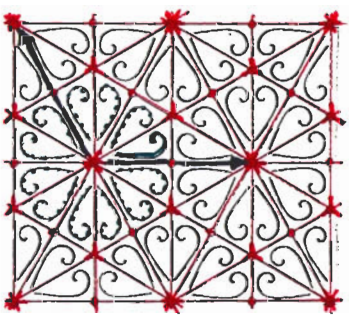
p3m1



$(T_2 D_3)^* = T_2 C_3 D'_1$

p31m

$\underset{\sim}{n = 6}$:



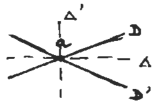
$T_2 D_6$

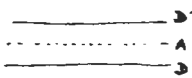
p6m

réseau hexagonal

On suppose les deux droites <u>distinctes</u> (sinon voir exercice 14).

Soient D et D' les deux droites. Si elles sont sécantes, soit a leur point d'intersection. Si elles sont parallèles, soit A l'axe de la bande (c.à.d. la droite parallèle à D et D' et équidistante de D et D').





Soit $\mathcal{G}$ le groupe de symétrie de la figure $D \cup D'$.

Si D et D' sont sécantes, a est nécessairement un <u>point fixe</u> de toutes les similitudes de $\mathcal{G}$. Si D et D' sont parallèles, A est nécessairement une <u>droite globalement invariante</u> par toutes les similitudes de $\mathcal{G}$. De plus, dans tous les cas, les similitudes de $\mathcal{G}$ sont ou bien les similitudes par lesquelles D <u>et</u> D' sont respectivement globalement invariantes, ou bien les similitudes qui donnent de D l'image D' et de D' l'image D. $\mathcal{G}$ est donc constitué de :

① <u>Si D et D' sont sécantes</u> :

	Remarques	telles que $D \mapsto D$ et $D' \mapsto D'$	telles que $D \rightleftarrows D'$
translations	a fixe	Id	aucune
rotations	centrées en a	s_a et Id (exercice 14)	<u>si $D \not\perp D'$</u> : aucune <u>si $D \perp D'$</u> : $r(a, \mp\frac{\pi}{2})$ car $(\widehat{D,D'}) = (\widehat{D',D})\ [\pi] \Leftrightarrow (\widehat{D,D'}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.
réflexions	soit s_ρ une réflexion appartenant à $\mathcal{G}$.	Nécessairement (exercice 14), ou bien $\rho = D$ et $\rho \perp D'$, ou bien $\rho \perp D$ et $\rho = D'$. Donc si $D \not\perp D'$: aucune <u>si $D \perp D'$</u> : s_D et $s_{D'}$	s_Δ et $s_{\Delta'}$, où Δ et Δ' sont les deux bissectrices de l'angle des droites D et D'.
réflexions glissées	a fixe	aucune	aucune
Similitudes directes non isométriques	Centrées en a. Forme réduite : $r(a,\alpha) \circ h(a,k)$ $(k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})$ Or $h(a,k)$: $D \mapsto D$, $D' \mapsto D'$. Donc $r \circ h \in \mathcal{G} \Leftrightarrow r \in \mathcal{G}$.	$h(a,k)$ et $h(a,k) \circ s_a$ $(k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})$ c.à.d : $h(a,k)$ où $k \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$	si $D \not\perp D'$: aucune <u>si $D \perp D'$</u> : $h(a,k) \circ r(a, \mp\frac{\pi}{2})$ où $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$
Similitudes indirectes non isométriques	Centrées en a. Forme réduite : $s_\rho \circ h(a,k)$ $(k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ et $\rho \ni a)$. Et $s_\rho \circ h \in \mathcal{G} \Leftrightarrow s_\rho \in \mathcal{G}$.	si $D \not\perp D'$: aucune <u>si $D \perp D'$</u> : $h(a,k) \circ s_D$ et $h(a,k) \circ s_{D'}$, où $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$	$h(a,k) \circ s_\Delta$ et $h(a,k) \circ s_{\Delta'}$, où $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ et Δ et Δ' sont les bissectrices de (D, D').

② <u>Si D et D' sont parallèles</u> :

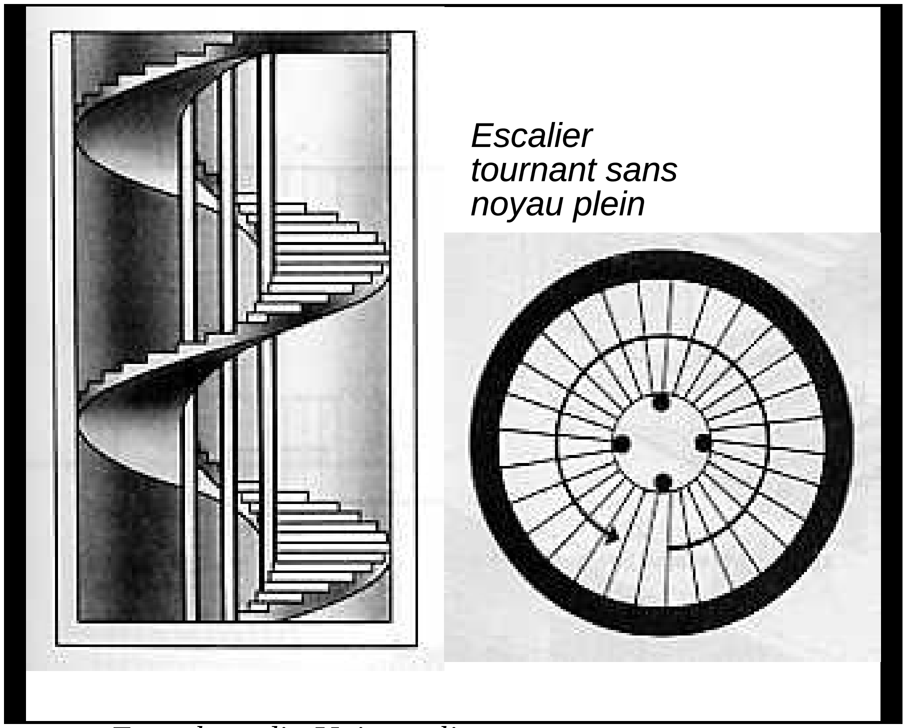
	Remarques	telles que $D \mapsto D$ et $D' \mapsto D'$	telles que $D \rightleftarrows D'$
translations	A globalement invariante. Appliquer <u>à A</u> l'exercice 14.	$\{t_{\vec{u}} \,/\, \vec{u} \in \vec{D}\}$ (exercice 14 et $\vec{A} = \vec{D}$)	aucune
rotations	//	Id	$\{s_\omega \,/\, \omega \in A\}$
réflexions	//	$\{s_B \,/\, B \perp A\}$	s_A
réflexions glissées	//	aucune	$\{s_A \circ t_{\vec{u}} \,/\, \vec{u} \in \vec{A}\}$
Similitudes non isométriques	Changent la distance des deux droites D et D'	aucune	aucune

Accueil

Page suivante

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Introduction



Encyclopædia Universalis

Le but de cette partie est d'étudier des objets de l'espace, d'une manière tout à fait analogue à ce qui est fait en géométrie plane dans la première partie.

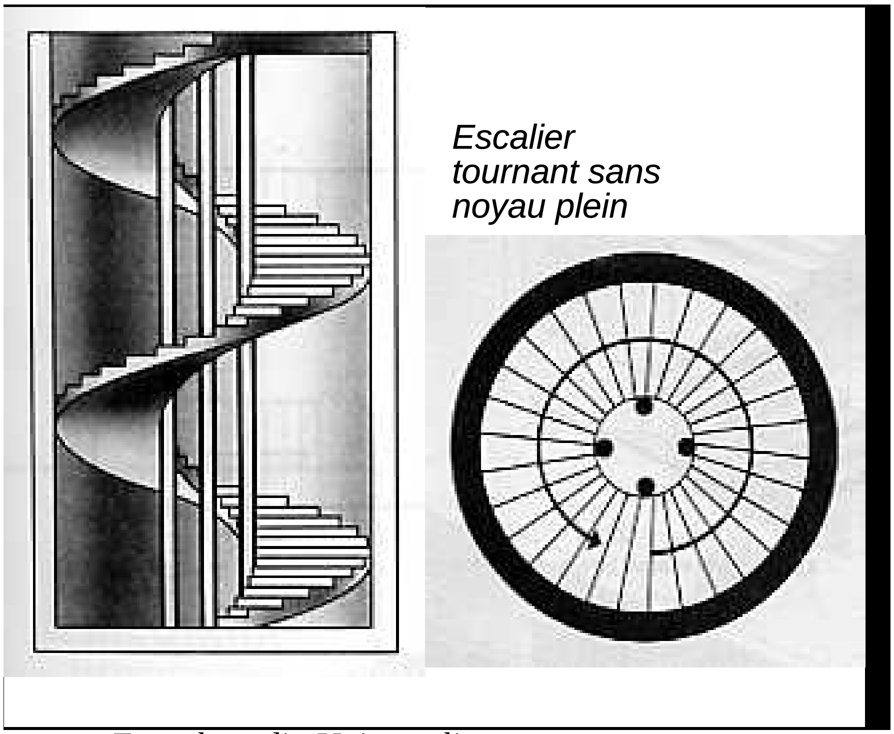
Cependant, les isométries et les similitudes de l'espace ne sont pas étudiées dans l'enseignement secondaire d'une manière aussi systématique qu'en géométrie plane. C'est pourquoi nous développons assez soigneusement leur présentation.

En laissant de côté des pans entiers de mathématiques, que nous remplaçons par des images, et en mettant en valeur des notions-clés, nous espérons mettre à la disposition de l'architecte l'outil géométrique, de la manière la plus rapide et la plus efficace.

Page suivante

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Introduction



Encyclopædia Universalis

Le but de cette partie est d'étudier des objets de l'espace, d'une manière tout à fait analogue à ce qui est fait en géométrie plane dans la première partie.

Cependant, les isométries et les similitudes de l'espace ne sont pas étudiées dans l'enseignement secondaire d'une manière aussi systématique qu'en géométrie plane. C'est pourquoi nous développons assez soigneusement leur présentation.

En laissant de côté des pans entiers de mathématiques, que nous remplaçons par des images, et en mettant en valeur des notions-clés, nous espérons mettre à la disposition de l'architecte l'outil géométrique, de la manière la plus rapide et la plus efficace.

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente
Page suivante

Orientation de l'espace

L'objet mathématique *orientation* peut se définir d'une manière algébrique, rigoureuse et abstraite. Cependant il correspond à des idées intuitives, à des images et à des objets de l'expérience courante. Nous allons dans ce chapitre nous appuyer sur les images, espérant donner une idée assez précise de l'objet mathématique et permettre son utilisation pratique, sans entrer dans la complexité de la construction algébrique.

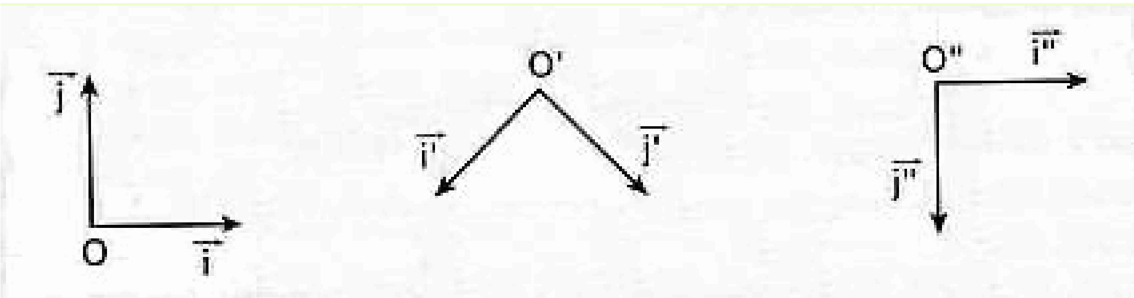
L'orientation de l'espace se fait d'une manière analogue à l'orientation du plan en géométrie plane. C'est pourquoi nous commencerons par indiquer les idées essentielles en géométrie plane, où les propriétés sont faciles à imaginer. Nous pourrons ennsuite les généraliser sans difficulté à la dimension 3.

Orientation du plan en géométrie plane

Définition mathématique

La démarche mathématique pour définir l'orientation est la suivante.

1. Les mathématiques comencent par définir le fait d'être *de même sens* pour deux repères orthonormés du plan. Nous ne donnerons pas ici cette définition. Mais même si on l'ignore, on peut reconnaître d'un coup d'œil si deux repères orthonormés, matérialisés par des schémas, sont de même sens.



$(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,')$ sont **de même sens**.
$(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O'', \vec{i}\,'', \vec{j}\,'')$ **ne sont pas** de même sens.

Par exemple, les repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,')$, dessinés ci-dessus, sont *de même* *sens*, ce qui correspond au fait qu'on peut les appliquer l'un sur l'autre par déplacement / ÇäÊÞÇá dans le plan.

Par contre, il est impossible de faire glisser de cette manière le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ pour l'amener à coïncider avec $(O'', \vec{i}'', \vec{j}'')$.

L'opération matérielle de glissement des objets solides sur le plan est une expérience concrète dont l'opération mathématique de *"déplacement /* ÇäÊÞÇá *"* dans le plan (isométrie affine positive en géométrie plane) est une abstraction, et nous venons d'imaginer une illustration intuitive de la propriété mathématique suivante.

Propriété
Deux repères orthonormés du plan sont *de même sens* si, et seulement si, l'un est l'image de l'autre par un déplacement / ÇäÊÞÇá.

(Cette propriété, qui caractérise les repères "de même sens", se démontre en mathématiques ; ce n'est pas celle qui permet de définir le "même sens", mais elle en est voisine et elle est facile à imaginer.)

2. Les mathématiques démontrent ensuite la propriété suivante.

Propriété
Il y a deux sens, et deux sens seulement, pour les repères orthonormés du plan.

En effet, il y a au moins deux sens, parce qu'il existe des repères qui ne sont pas de même sens.
Et il n'y a pas plus de deux sens puisque, si deux repères ne sont pas de même sens qu'un même troisième, c'est que ces deux repères sont entre eux de même sens.

3. Vient alors la définition.

Définition et vocabulaire
Orienter le plan, c'est choisir l'un des deux sens de repères orthonormés du plan.
Dans le plan orienté, les repères qui sont dans le sens choisi pour l'orientation sont dits *positifs*, ou *directs*. Les repères qui sont dans l'autre sens sont dits *négatifs*, ou *indirects*.

Accueil

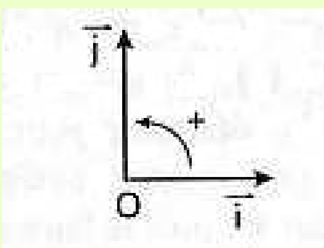
Suite

Orientation du plan en géométrie plane

Convention technique

Pour les mathématiques, rien ne distingue les deux sens et, au moment de l'orientation, on peut nommer direct l'un ou l'autre.

Mais, pour les sciences appliquées et les techniques, le sens conventionnellement direct est "le sens contraire des aiguilles d'une montre" : un repère direct est un repère dont le premier vecteur s'applique sur le deuxième par rotation d'un quart de tour dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.



$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est direct.

C'est le sens qu'on utilise pour les schémas de trigonométrie.

C'est celui que les mathématiciens utilisent le plus souvent quand ils font des schémas pour illustrer des propriétés abstraites.

Dans toute la suite de ce cours, nous utiliserons toujours ce sens pour les schémas et les études d'objets concrets.

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

Orientation de l'espace

Définition mathématique

1. Dans l'espace, de même qu'en géométrie plane, on commence par définir le fait d'être *de même sens* pour deux repères orthonormés. Nous ne donnerons pas ici cette définition, mais même si on l'ignore, on peut reconnaître si deux repères orthonormés de l'espace, matérialisés par des schémas, sont de même sens.

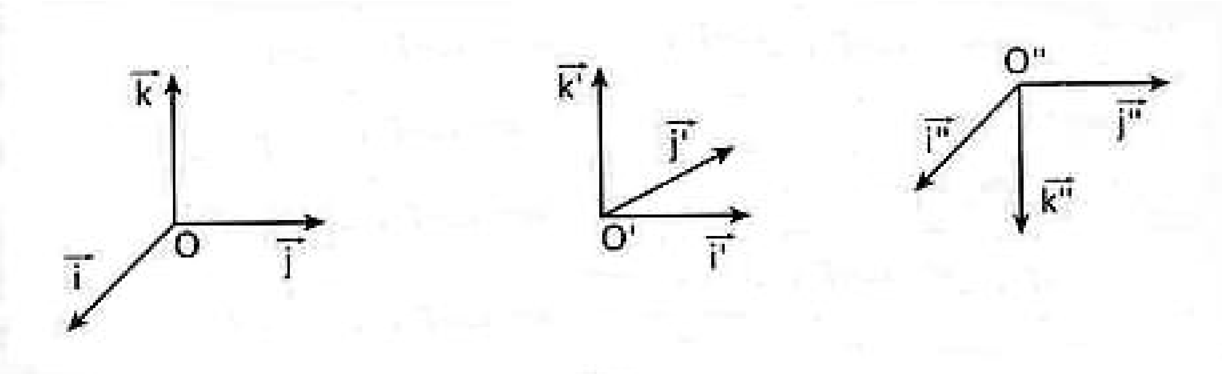


Schéma en perspective cavalière

On imagine par exemple que ***O*, *O'* et *O''* sont dans le plan** de la feuille de papier, ainsi que les vecteurs $\vec{j}$ **et** $\vec{k}$ **,** $\vec{i}$**' et** $\vec{k}$**' ,** $\vec{j}$**'' et** $\vec{k}$**''** .

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$' et $\vec{i}$'' sont perpendiculaires à ce plan. On peut imaginer $\vec{i}$ **et** $\vec{i}$**'' dirigés vers l'avant**, et $\vec{j}$**' vers l'arrière**.

* * *

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ sont de **même sens**.

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O'', \vec{i}'', \vec{j}'', \vec{k}'')$ **ne sont pas** de même sens.

Par exemple, les repères $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, schématisés ci-dessus, sont *de même sens*, ce qui correspond au fait qu'on peut les appliquer l'un sur l'autre par déplacement /Ç äÊÞÇá dans l'espace.

Par contre, il est impossible de déplacer le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pour l'amener à coïncider avec $(O'', \vec{i}'', \vec{j}'', \vec{k}'')$:

En donnant aux mots un sens imagé, c'est-à-dire en remplaçant les *"déplacements /* äÊÞÇá *"* mathématiques (isométries positives dans l'espace affine de dimension 3) par des déplacements matériels d'objets solides dans l'espace, nous avons donné une illustration intuitive de la propriété mathématique suivante.

Propriété
Deux repères orthonormés de l'espace sont *de même sens* si, et seulement si, l'un est l'image de l'autre par un déplacement / ÇäÊÞÇá.
(Cette propriété, qui caractérise les repères "de même sens", se démontre en mathématiques ; ce n'est pas celle qui permet de définir le "même sens", mais elle en est voisine et elle est plus facile à imaginer.)

2. Comme en géométrie plane, les mathématiques démontrent alors la propriété suivante.

Propriété
Il y a deux sens, et deux sens seulement, pour les repères orthonormés de l'espace.

En effet, il y a au moins deux sens puisque, nous venons de l'imaginer à l'aide de solides imaginaires, il existe des repères qui ne sont pas de même sens. (Cette propriété se démontre en mathématiques.)
Et il n'y a pas plus de deux sens puisque, si deux repères ne sont pas de même sens qu'un même troisième, c'est que ces deux repères sont entre eux de même sens.

3. Vient alors la définition.

Définition et vocabulaire
Orienter l'espace, c'est choisir l'un des deux sens de repères orthonormés de l'espace.
Dans l'espace orienté, les repères qui sont dans le sens choisi pour l'orientation sont dits *positifs*, ou *directs*. Les repères qui sont dans l'autre sens sont dits *négatifs*, ou *indirects*.

Suite

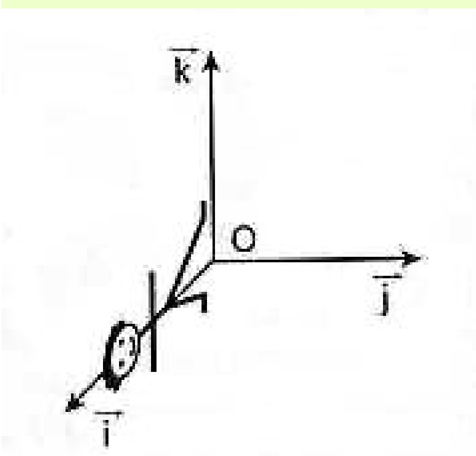
Accueil

Orientation de l'espace

Convention technique

Pour les mathématiques, rien ne distingue les deux sens et, au moment de l'orientation, on peut nommer direct l'un ou l'autre.

Mais, pour les sciences appliquées et les techniques, le sens conventionnellement direct est celui qui est donné par "la règle de l'observateur d'Ampère" : un repère direct est un repère tel qu'un observateur, debout suivant le premier vecteur (les pieds à l'origine, la tête vers l'extrémité du vecteur), et regardant dans la direction du deuxième vecteur, ait le bras gauche dans la direction du troisième vecteur.



Perspective cavalière représentant O, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans le plan de la feuille de papier, et $\vec{i}$ perpendiculaire à ce plan et dirigé **vers l'avant**.

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct.

C'est le sens qu'on utilise en physique.
C'est le sens qu'utilisent le plus souvent les mathématiciens quand ils font des schémas pour illustrer des propriétés abstraites.

Dans toute la suite de ce cours, nous supposerons toujours l'espace orienté et nous utiliserons toujours le sens conventionnel pour les schémas et les études d'objets concrets.

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

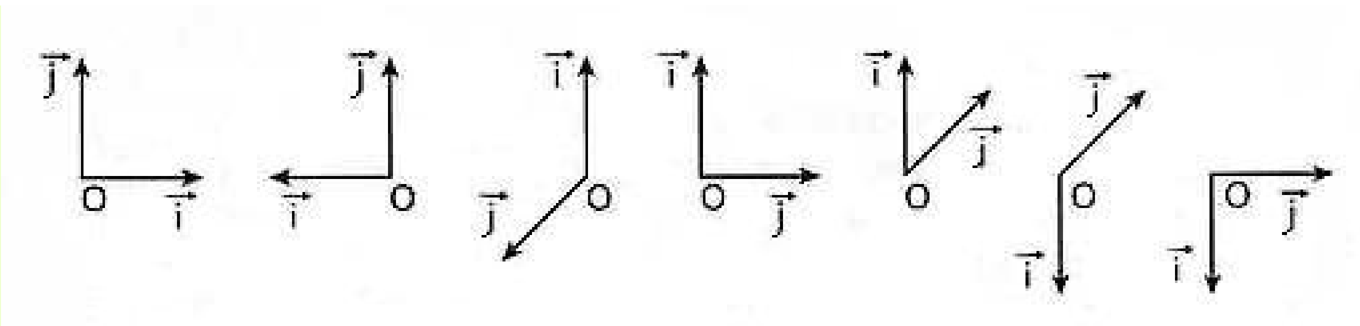
Orientation de l'espace

Exercices

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. *Observateurs d'Ampère, gymnastique mentale*

Soit O un point de l'espace. Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs orthogonaux, de norme 1. Dans tous les cas de figure dessinés ci-dessous en perspective cavalière, représenter le vecteur $\vec{k}$ tel que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit direct.



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g)

Schémas en perspective cavalière

On suppose dans tous les cas que **O et $\vec{i}$ sont dans le plan de la feuille** de papier

et que $\vec{j}$ **est** : (a) et (b) dans le plan du papier,
(c) dirigé vers l'avant,
(d) dans le plan du papier,
(e) et (f) dirigé vers l'arrière,
(g) dans le plan du papier.

2. *Permutations circulaires*

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace (direct ou indirect).

Les permutations circulaires de la suite ordonnée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont les suites ordonnées de ces trois vecteurs dans lesquelles l'ordre de succession relatif des vecteurs est toujours le même (en considérant que $\vec{i}$ succède à $\vec{k}$). Ce sont : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ et $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les trois repères obtenus à partir de $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par permutation circulaire des vecteurs.

Faire un schéma représentant le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Indiquer les deux autres repères sur le même schéma (l'origine est ***la même***, les vecteurs sont ***les mêmes***, seul ***l'ordre*** considéré pour les vecteurs est différent). Quel est le sens de chacun de ces repères ? (On ne demande pas de démonstrations ; on pourra imaginer des observateurs d'Ampère.)

3. *Miroirs*

En géométrie dans l'espace, la symétrie orthogonale par rapport à un plan se nomme réflexion, parce que c'est le modèle mathématique de la réflexion optique dans un miroir plan.

Faire un schéma représentant un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, et son image par la réflexion par rapport au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Quel est le sens du premier repère ? Quel est le sens du repère réfléchi ?

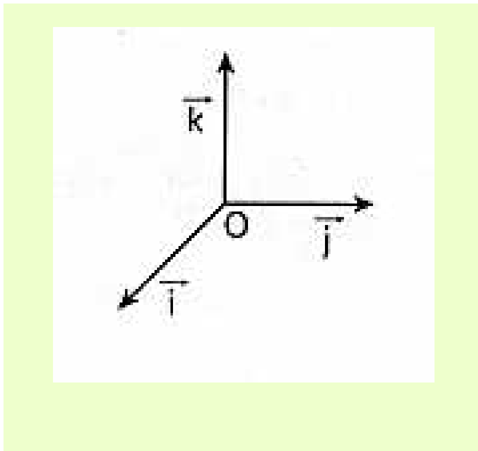
On peut considérer qu'une forme humaine privée d'un bras est la réalisation matérielle d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: O est le point où se tient debout ce manchot, $\vec{i}$ va de ses pieds vers sa tête, $\vec{j}$ est dans la direction de son regard (le manchot a le cou raide : il regarde toujours droit devant lui), $\vec{k}$ va vers son bras unique. (Si le bras unique est le bras gauche, il s'agit d'un repère direct ; si le bras unique est le bras droit, il s'agit d'un repère indirect.)

Lorsqu'un manchot du bras droit se regarde dans un miroir plan, voit-il un manchot du bras droit, ou un manchot du bras gauche ? Si $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est l'image de $(O, \vec{i}, \vec{j},$

$\vec{k}$) par une réflexion quelconque, pouvez-vous dire quel est le sens de (O' , $\vec{i}\,'$, $\vec{j}\,'$, $\vec{k}\,'$) ? (On demande de répondre, non pas par des démonstrations mathématiques, mais grâce à son expérience quotidienne des miroirs.)

4. *Perpectives*

Voici le schéma en perspective cavalière d'un repère orthonormé de l'espace :



... d'un repère ... ou de deux ! O , $\vec{j}$ et $\vec{k}$ étant supposés dans la feuille de papier, on peut voir $\vec{i}$ venir vers l'avant : le “coin” (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est alors vu d'en haut et de l'intérieur. On peut aussi voir $\vec{i}$ partir vers l'arrière : le “coin” est alors vu d'en bas et de l'extérieur (la perspective cavalière, comme la perspective conique, est ambigüe : voir Ambiguité). Quel est le sens de chacun de ces deux repères ?

5. *Transpositions*

Soit (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) un repère orthonormé de l'espace (direct ou indirect).

Les transpositions de la suite ordonnée ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) sont les suites ordonnées de ces trois vecteurs obtenues en échangeant deux des vecteurs. Ce sont les suites dans lesquelles l'ordre relatif des vecteurs n'est pas celui de la suite ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) . Ce sont les suites ($\vec{j}$, $\vec{i}$, $\vec{k}$) , ($\vec{i}$, $\vec{k}$, $\vec{j}$) et ($\vec{k}$, $\vec{j}$, $\vec{i}$) . Elles s'obtiennent toutes par permutation circulaire de l'une d'entre elles.

Faire un schéma représentant le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Indiquer sur le même schéma les trois repères obtenus à partir de $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par transposition des vecteurs (l'origine est ***la même***, les vecteurs sont ***les mêmes***, seul ***l'ordre*** considéré pour les vecteurs est différent).Trouver une réflexion qui donne du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ l'image $(O, \vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$. Quel est le sens de chacun de ces deux repères ? Quel est le sens de chacun des trois repères obtenus à partir de $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par transposition des vecteurs ?

6. *Divers*

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct. On considère les repères orthonormés dont l'origine est O et dont les vecteurs (ordonnés) sont :

$(\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$ $(\vec{j}, -\vec{i}, \vec{k})$ $((\vec{i}+\vec{j})/\sqrt{2}, (\vec{j}-\vec{i})/\sqrt{2}, \vec{k})$ $((\vec{i}+\vec{j})/\sqrt{2}, (\vec{j}-\vec{i})/\sqrt{2}, -\vec{k})$ $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ $(-\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$ $(-\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k})$.

Quel est le sens de chacun de ces repères ? (Faire des schémas et imaginer des déplacements, des miroirs, ou des observateurs d'Ampère).

Accueil

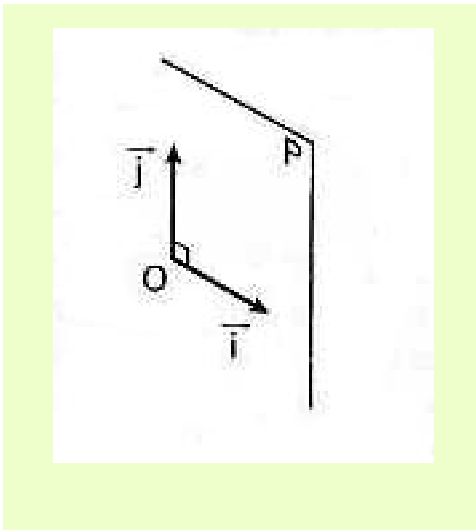
Suite

Orientations dans l'espace orienté

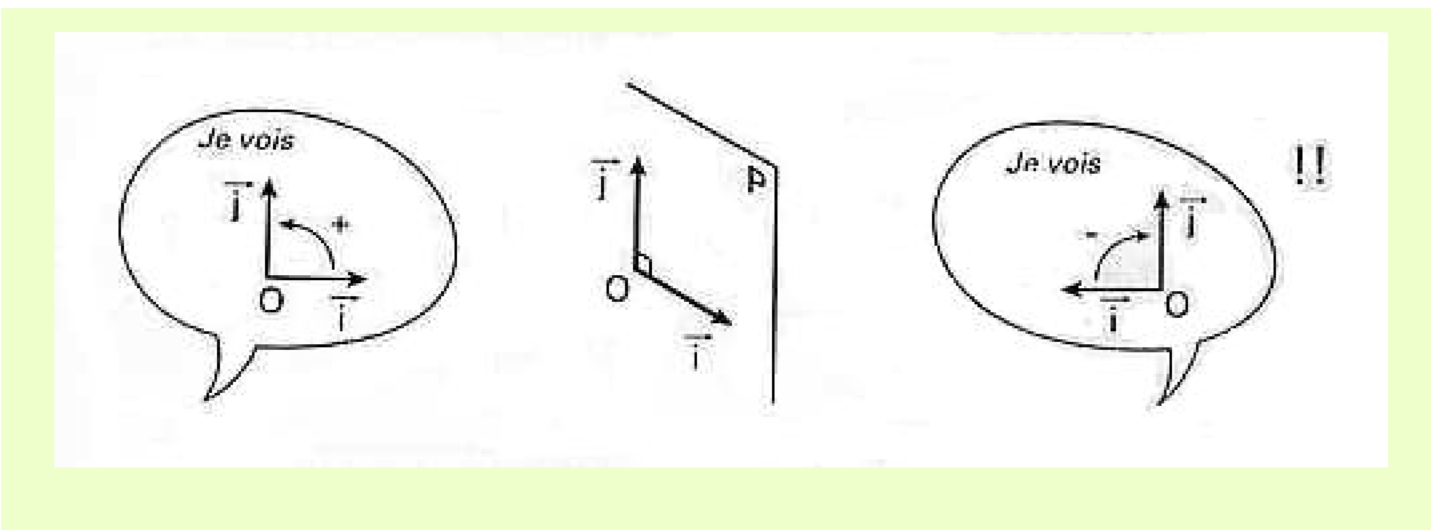
Orientation d'un plan

Dans l'espace, orienté une fois pour toutes, considérons un plan P. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P.

Ce repère est-il direct ou indirect ? ... ça dépend du point de vue ! Si on le voit direct quand on le regarde par un côté du plan ...



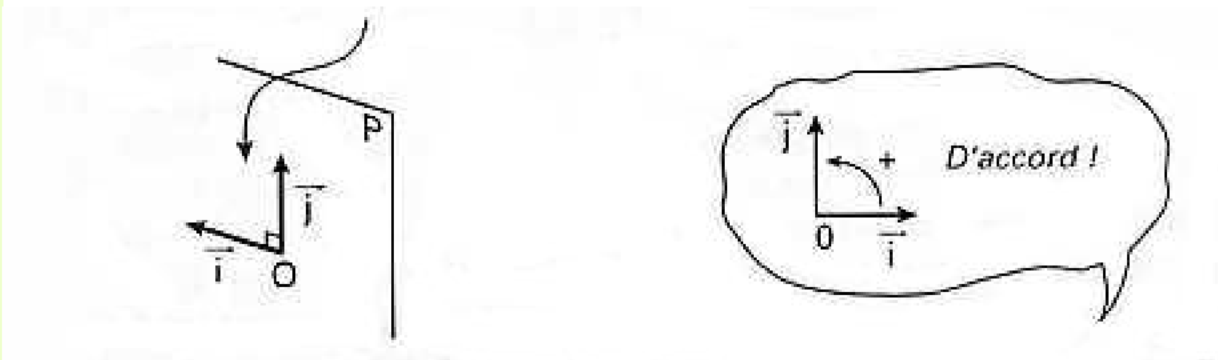
... on le voit indirect quand on le regarde par l'autre côté.
(Pour s'en convaincre, dessiner sur une feuille de papier calque un repère direct, retourner le calque et observer le repère.)



Que venons-nous de faire ? Nous avons essayé, dans l'espace orienté, de distinguer les repères positifs des repères négatifs du plan P, en employant la convention de sens de la géométrie plane, et nous n'y sommes pas parvenus puisque, lorsqu'on regarde le plan, par un côté quelconque, on peut distinguer si deux repères du plan sont dans le même sens, mais que, si aucun des deux côtés du plan n'est choisi comme point de vue privilégié, aucun des deux sens de repères de P n'est privilégié, c'est-à-dire que le plan n'est pas orienté.

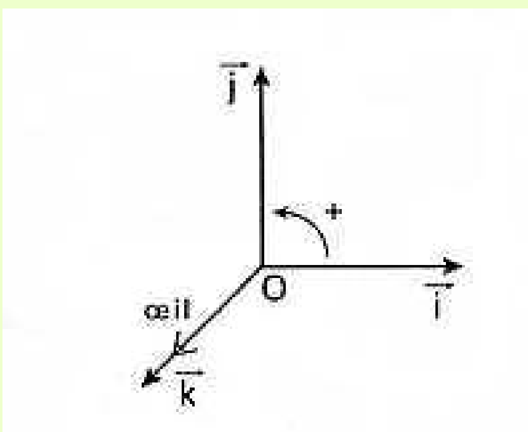
Pour orienter le plan au moyen de la convention de la géométrie plane, il faut choisir l'un des deux côté du plan pour le regarder, et donner à P celle des deux orientations qui est compatible / ãÊæÇÝÞ avec ce point de vue : les repères positifs du plan sont ceux qui sont vus, à partir du côté choisi, dans le sens positif (pour la convention de la géométrie plane).

DÉCRET: Le repère $(O , \vec{i} , \vec{j})$ est positif.



Pour donner une expression plus mathématique à ces observations, constatons que la règle de l'observateur d'Ampère peut s'exprimer aussi de la manière suivante.

Schéma représentant O, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans le plan de la feuille de papier, et $\vec{k}$ perpendiculaire à ce plan et dirigé **vers l'avant**.



$(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ est direct.

Un repère $(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ de l'espace est direct lorsque l'observateur, debout suivant $(O , \vec{k})$, les pieds en O et l'œil vers l'extrémité du vecteur $\vec{k}$, regarde le plan qui porte $(O , \vec{i} , \vec{j})$ et voit le repère $(O , \vec{i} , \vec{j})$ dans le sens direct de la convention de géométrie plane.

On comprend finalement que les observations précédentes s'expriment en termes mathématiques de la manière suivante.

Propriété

Soit P un plan de l'espace, et $\vec{k}$ l'un quelconque des deux vecteurs de norme 1 orthogonaux à P. Deux repères orthonormés $(O_1, \vec{i_1}, \vec{j_1})$ et $(O_2, \vec{i_2}, \vec{j_2})$ de P sont de même sens dans P si, et seulement si, $(O_1, \vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k})$ et $(O_2, \vec{i_2}, \vec{j_2}, \vec{k})$ sont de même sens dans l'espace.

Voir l'exercice 2

Définition

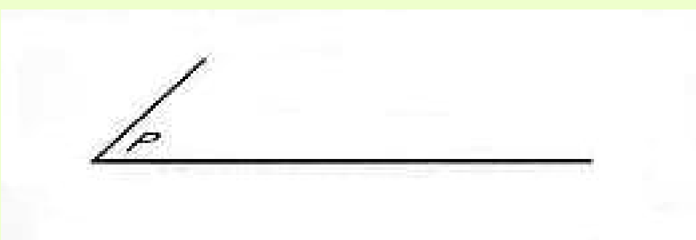
Dans l'espace orienté, soit P un plan, et $\vec{k}$ l'un des deux vecteurs de norme 1 orthogonaux à P. Une orientation de P est dite *compatible / ãÊæÇÝÞ* avec $\vec{k}$, si les repères directs de P, pour cette orientation, sont les repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$ qui donnent des repères $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ directs de l'espace (lorsqu'on leur ajoute $\vec{k}$ comme troisième vecteur).

Propriété

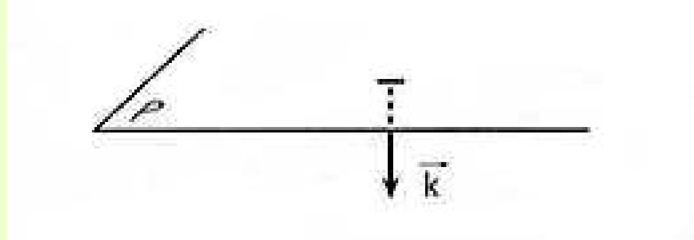
Dans l'espace orienté, soit P un plan, et $\vec{k}$ l'un des deux vecteurs de norme 1 orthogonaux à P. Alors, l'une des deux orientations de P est compatible avec $\vec{k}$.

Définition

Dans l'espace orienté, *orienter un plan par un vecteur orthogonal au plan*, c'est choisir l'un des deux vecteurs de norme 1 orthogonaux au plan, et donner au plan l'orientation compatible avec ce vecteur.



Le plan P n'est pas orienté



Le plan P est orienté par $\vec{k}$

Suite

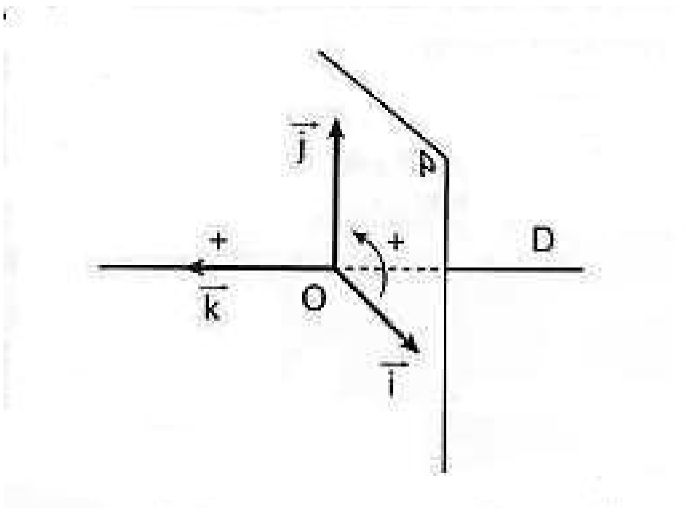
Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Orientations dans l'espace orienté

Orientations compatibles

Définition
Dans l’espace orienté, soit P un plan et D une droite, orthogonaux entre eux. Une orientation de P et une orientation de D sont dites *compatibles entre elles / ãÊæÇÝÞÇä* si l’orientation du plan est compatible avec le vecteur qui oriente la droite.

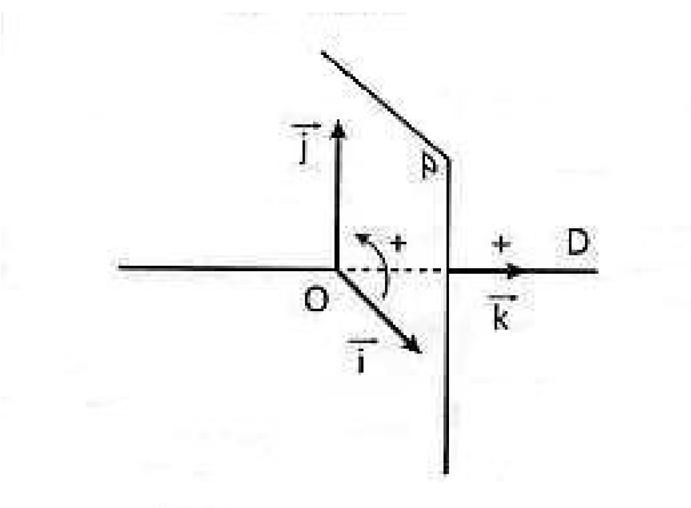


$(O, \vec{k})$ est un repère direct de D.

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère direct de P.

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère direct de l'espace.

Les orientations de D et de P sont compatibles.



$(O, \vec{k})$ est un repère direct de D.

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère direct de P.

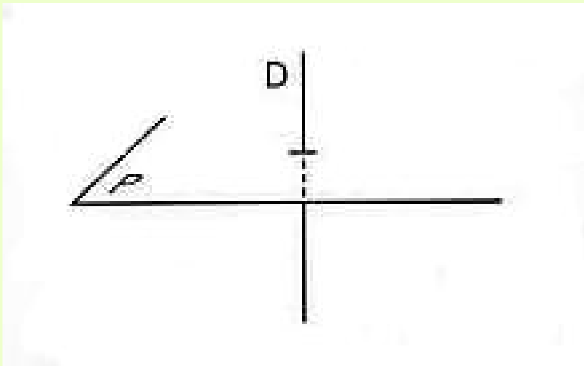
$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ n'est pas un repère direct de l'espace.

Les orientations de D et de P ne sont pas compatibles.

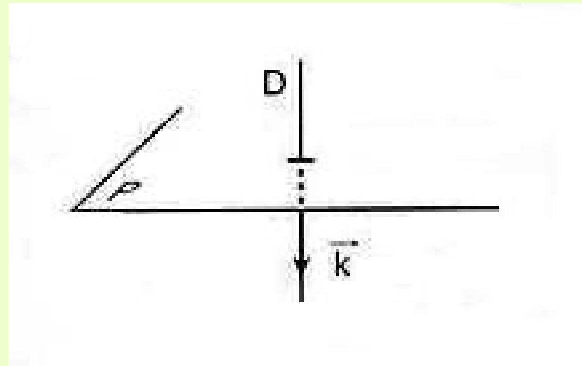
Propriété

Soit P un plan et D une droite, orthogonaux entre eux. On suppose la droite D orientée. Alors, l'une des deux orientations de P est compatible avec l'orientation de D .

Définition
Etant donné un plan P et une droite D , orthogonaux entre eux, *orienter P par l'orientation de D* , c'est orienter D , et donner à P l'orientation compatible avec celle de D.



D n'est pas orientée. P n'est pas orienté.



D est orientée par $\vec{k}$. P est orienté par l'orientation de D.

Accueil

Suite

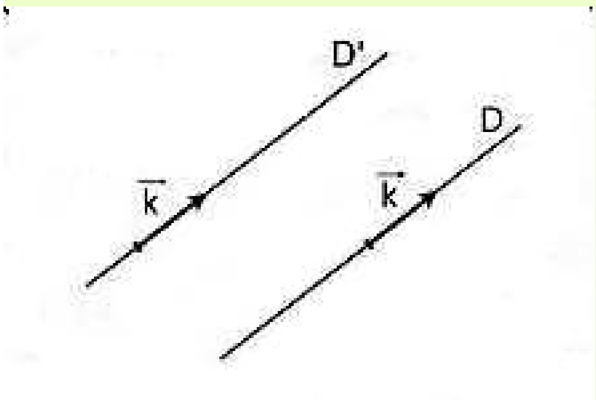
Orientations dans l'espace orienté

Orientation d'une direction de droites

Quand on oriente une droite D, par le choix de l'un de ses deux vecteurs de norme 1, toutes les droites de la même direction sont orientées "dans le même sens" par le même vecteur et, en fait, ce n'est pas la droite qu'on oriente, mais toute la direction des droites parallèles.

Définition

Orienter une direction de droites de l'espace, c'est choisir l'un des deux vecteurs de norme 1 de cette direction.



D et D' sont orientées "dans le même sens" par le choix du vecteur $\overrightarrow{k}$.

La direction de D est orientée par le choix du vecteur $\overrightarrow{k}$.

Suite

Accueil

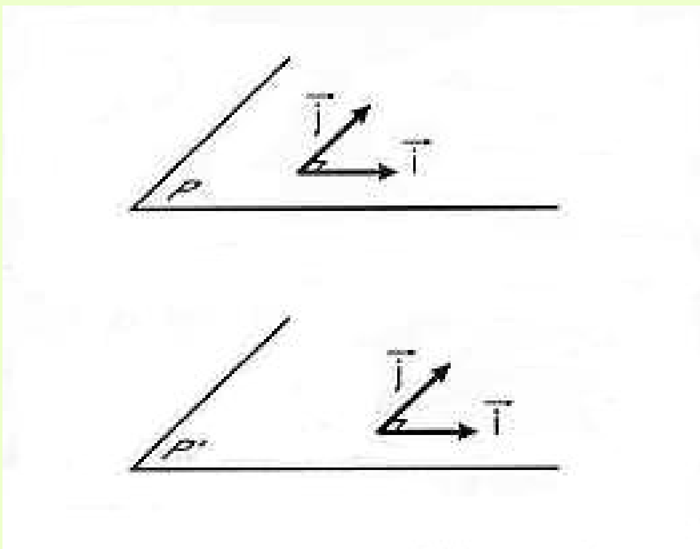
Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

Orientations dans l'espace orienté

Orientation d'une direction de plans

Quand on oriente un plan P , on oriente "dans le même sens" tous les plans parallèles à P .



P et P' sont orientés "dans le même sens" par le choix du *couple ordonné* ($\vec{i}$, $\vec{j}$) .

La direction de P est orientée par le choix du couple ordonné ($\vec{i}$, $\vec{j}$) .

Les mathématiques démontrent en effet les propriétés suivantes.

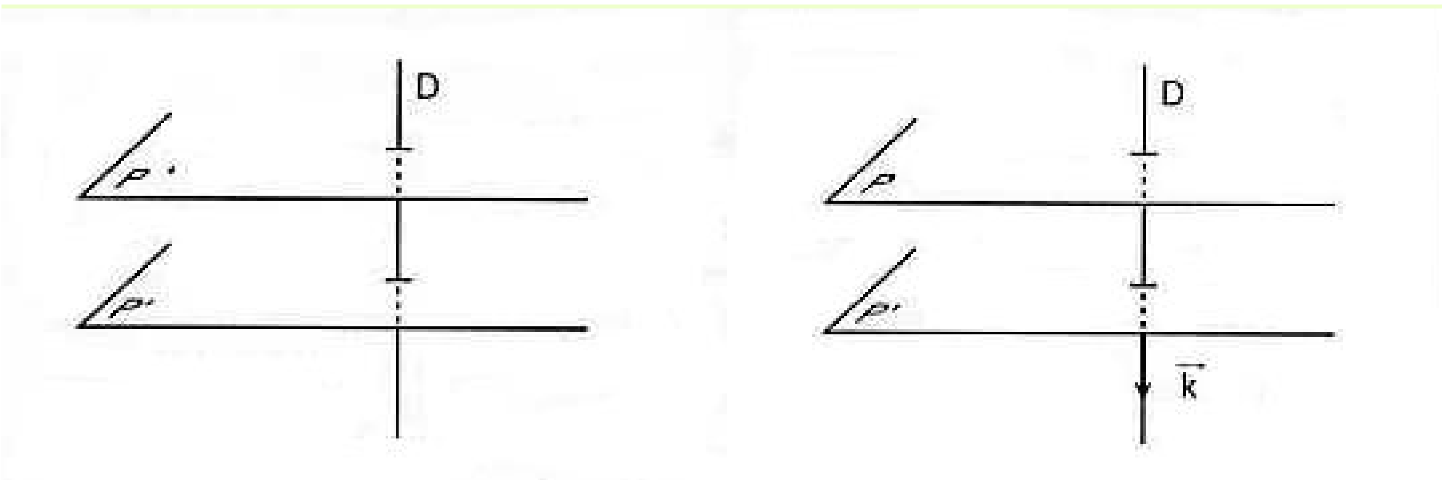
Propriété
Si deux repères orthonormés d'un plan sont constitués des mêmes vecteurs, dans le même ordre, (si les repères ne diffèrent que par leurs origines), les deux repères sont de même sens.
Voir l'exercice 2

Propriété
Pour orienter un plan, il suffit de choisir un couple ordonné de vecteurs orthonormés du plan.
(Les origines des repères n'ont pas d'importance pour la détermination du sens.)

Définition
Orienter une direction de plans de l'espace, c'est choisir un couple ordonné de vecteurs orthonormés de cette direction de plans.

Propriété
Si D et P sont une droite et un plan de l'espace, orthogonaux entre eux, tous les plans de la

direction de P sont orientés "dans le même sens" par l'orientation de D. Autrement dit : l'orientation de D oriente la direction de P.



D n'est pas orientée. Ni P, ni P', ne sont orientés.	D est orientée par $\vec{k}$. P et P' sont orientés par l'orientation de D (tous les deux "dans le même sens").

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Orientations dans l'espace orienté

Exercices

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. *Géométrie en dimension 1*

Soit D une droite. Nous allons faire de la géométrie en dimension 1, c'est-à-dire dans la droite (de même que la géométrie en dimension 2 est une géométrie dans un plan).

a) Quelles sont les isométries de D ?

b) Quels sont les repères orthonormés de D ? Que peut-on dire des vecteurs de deux repères de même sens dans D ?

c) Dans D, les symétries centrales sont-elles des déplacements ou des antidéplacements ?

2. *Déplacements et miroirs, en dimensions 2 et 3*

On se trouve dans l'espace orienté. Soit P un plan, et $\vec{k}$ un vecteur de norme 1 orthogonal à P. Faire un schéma représentant P et $\vec{k}$.

a) Soit $(O_1, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O_2, \vec{i}, \vec{j})$ deux repères orthonormés de P, dont les vecteurs sont les mêmes, dans le même ordre. Représenter les deux repères. Existe-t-il un déplacement de P qui applique $(O_1, \vec{i}, \vec{j})$ sur $(O_2, \vec{i}, \vec{j})$? (Si oui, dire lequel ; si non, dire pourquoi.)

Représenter les repères $(O_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O_2, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Existe-t-il un déplacement de l'espace qui applique $(O_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sur $(O_2, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$? (Si oui, dire lequel ; si non, dire pourquoi.)

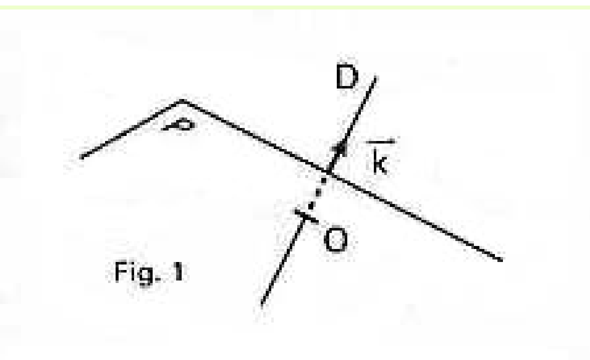
b) Soit $(O, \vec{i_1}, \vec{j_1})$ et $(O, \vec{i_2}, \vec{j_2})$ deux repères orthonormés de P, de même origine

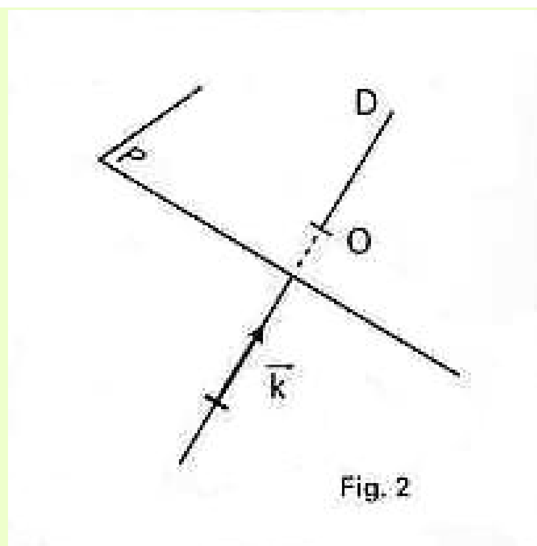
et de même sens dans P. Représenter les deux repères. Par quel déplacement de P peut-on appliquer $(O, \vec{i_1}, \vec{j_1})$ sur $(O, \vec{i_2}, \vec{j_2})$?
Existe-t-il un déplacement de l'espace qui applique $(O, \vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k})$ sur $(O, \vec{i_2}, \vec{j_2}, \vec{k})$?

c) Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P. Les repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O, \vec{j}, \vec{i})$ sont-ils de même sens dans le plan ? Trouver une réflexion plane qui applique $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sur $(O, \vec{j}, \vec{i})$.
Les repères $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O, \vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ sont-ils de même sens dans l'espace ? Trouver une réflexion de l'espace qui applique $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sur $(O, \vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$. (Voir Orientation de l'espace : exercice 3.)

3. *Orientation des plans orthogonaux à une droite orientée donnée*

Dans tous les cas de figure ci-dessous, la droite D est orientée par le vecteur $\vec{k}$, et le plan P (respectivement P'), orthogonal à D, est orienté par l'orientation de D. Dessiner dans chacun des cas un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (resp. $(O', \vec{i}', \vec{j}')$) direct de P (resp. P').





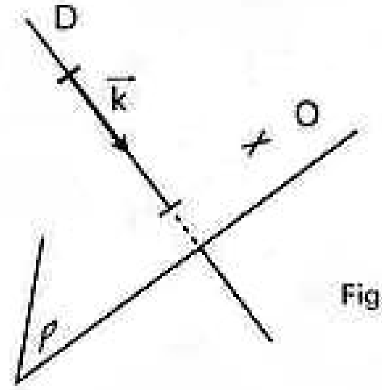


Fig. 3

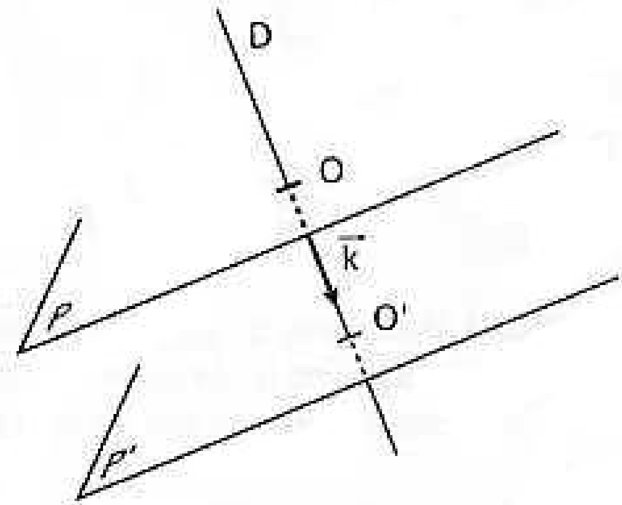


Fig. 5

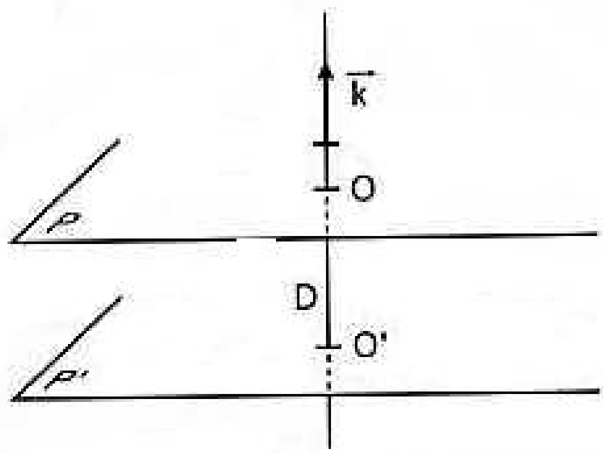
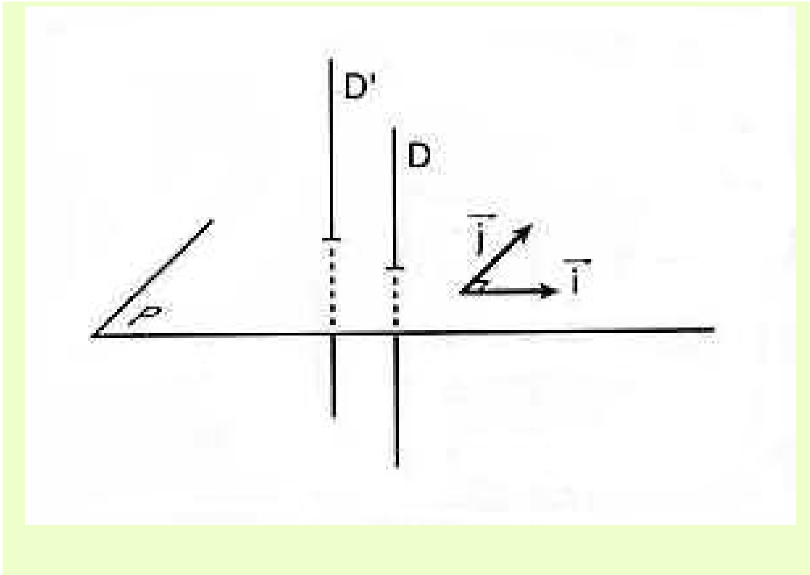


Fig. 4

4. *Orientation des droites orthogonales à un plan orienté donné*

Le schéma ci-dessous représente un plan P orienté par un couple $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de vecteurs orthonormés, et deux droites D et D' orthogonales à P. Dessiner un repère direct de D et un repère direct de D', pour l'orientation compatible avec celle de P.



Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente
Page suivante

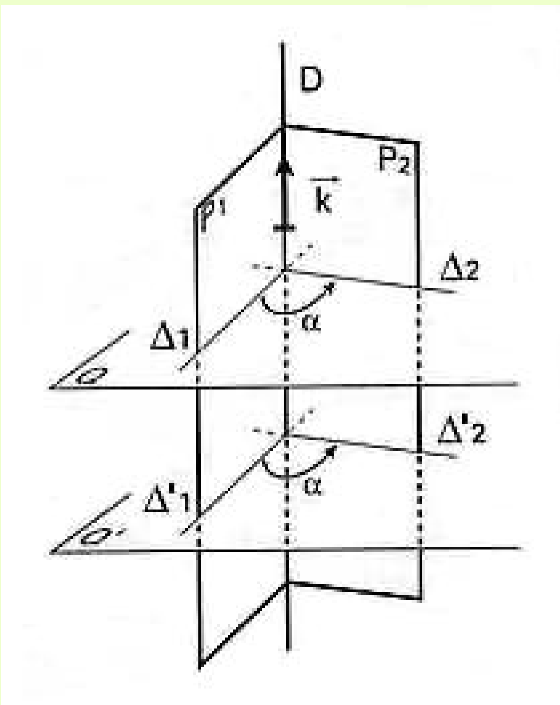
Orthogonalité, angles

Ce chapitre rassemble quelques définitions et propriétés faciles ou bien connues par l'enseignement secondaire. Il convient de l'utiliser comme un dictionnaire : au fur et à mesure des besoins éventuels.

Angle de deux plans

1. Soit deux plans **non parallèles**. Pour parler rapidement, nommons "charnière" / ãÝÕá des deux plans leur droite d'intersection.

Par définition, l'angle des deux plans est l'angle de deux droites : les droites d'intersection des plans avec n'importe quel plan perpendiculaire à la charnière. (Les mathématiques démontrent que lorsque l'on change de plan perpendiculaire à la charnière, l'angle des droites ne change pas, pour une orientation donnée de la "charnière".)



D est la "charnière" de P_1 et P_2.

Q et Q' sont perpendiculaires à D, ils sont orientés par l'orientation de D.

$$(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = (\widehat{\Delta'_1, \Delta'_2}) \text{ (modulo } \pi\text{)}.$$

Par définition :

$$(\widehat{P_1, P_2}) = (\widehat{\Delta_1, \Delta_2}).$$

2. Par définition, l'angle de deux plans **parallèles** est nul (modulo π).

Suite
Accueil

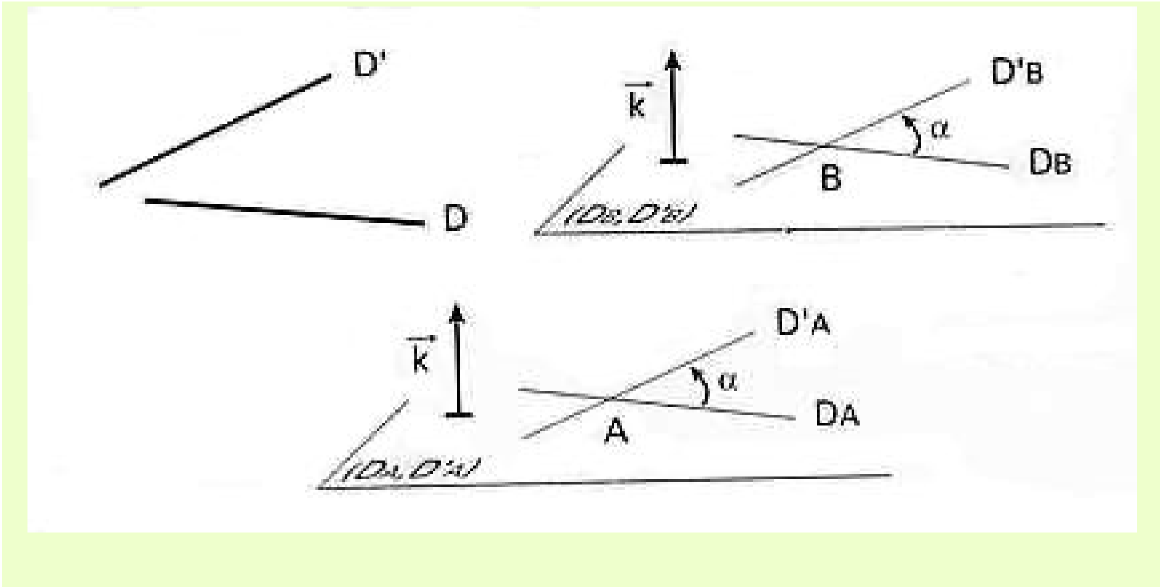
Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Angle de deux droites

1. Si D et D' sont deux droites **coplanaires et distinctes**, l'angle $(\widehat{D, D'})$ des droites dans l'espace est l'angle des droites en géométrie plane, dans le plan (D , D') orienté par le choix de l'un des deux vecteurs de norme 1 orthogonaux à ce plan.

2. L'angle de deux droites **confondues** est nul (modulo π).

3. Si D et D' sont deux droites **non coplanaires** de l'espace, l'angle $(\widehat{D, D'})$ est l'angle $(\widehat{D_A, D'_A})$ des parallèles à D et D' menée par un point A quelconque de l'espace. (Les mathématiques démontrent que lorsque l'on change de point A , l'angle $(\widehat{D_A, D'_A})$ ne change pas, pour une orientation donnée de la direction de ce plan.)



Les plans (D_A, D'_A) et (D_B, D'_B) sont orientés dans le même sens par le même vecteur $\vec{k}$.

$(\widehat{D_A, D'_A}) = (\widehat{D_B, D'_B})$ (modulo π).

Par définition : $(\widehat{D, D'}) = (\widehat{D_A, D'_A})$.

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Orthogonalité

Droites orthogonales

Deux droites orthogonales sont deux droites dont l'angle est droit.

> Si les droites ne sont pas sécantes, c'est-à-dire si elles ne sont pas coplanaires, dire que leur angle est droit c'est dire que les parallèles aux deux droites, menées par un point quelconque de l'espace, forment un angle droit.

Droites perpendiculaires

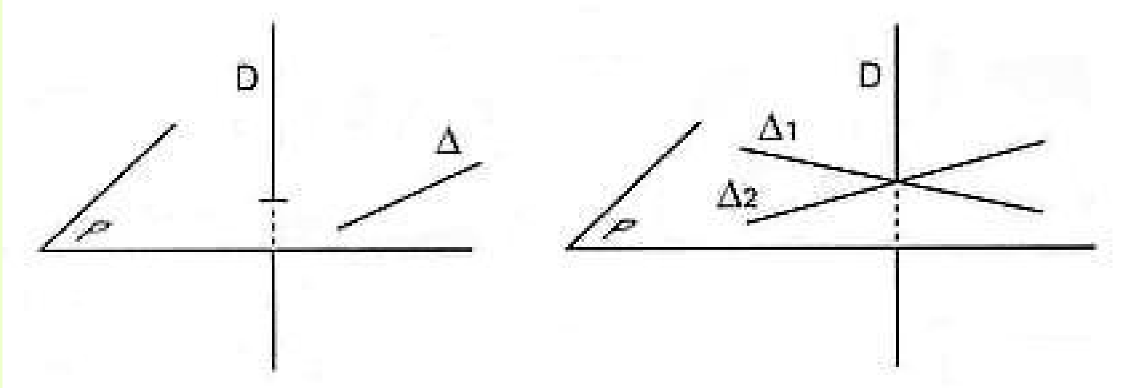
Dans la plupart des textes, perpendiculaires signifie orthogonales et sécantes, et nous employons nous-même le vocabulaire dans ce sens.

> Dans certains textes, perpendiculaire est employé dans le sens de orthogonal, et il faut alors préciser, le cas échéant, "perpendiculaires et sécantes".

Droites et plans orthogonaux

Par définition, une droite et un plan sont orthogonaux si la droite est orthogonale à toutes les droites du plan.

Pour qu'une droite et un plan soient orthogonaux, il suffit que la droite soit orthogonale à deux droites sécantes du plan.



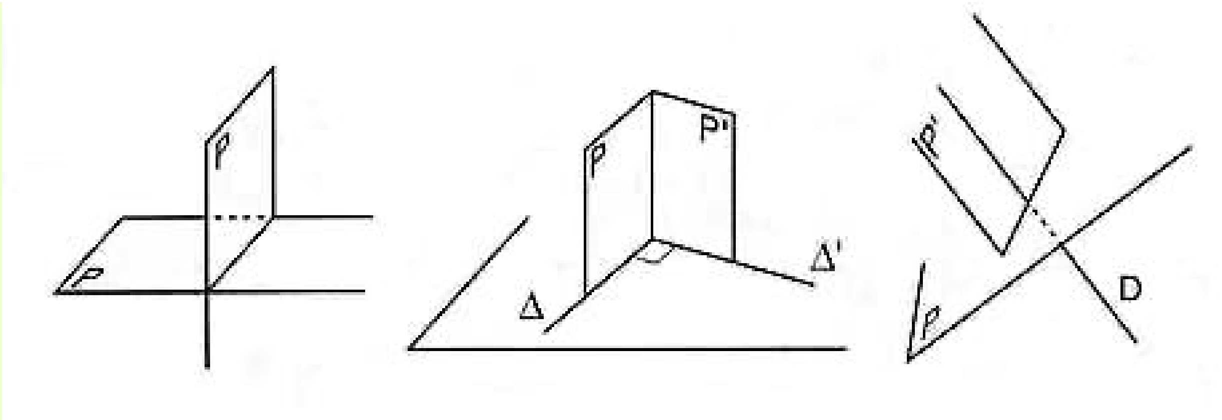
$D \perp P$. $\Delta \subset P$. $D \perp \Delta$.

$D \perp \Delta_1$ et $D \perp \Delta_2$. $D \perp P$.

Plans orthogonaux

Deux plans orthogonaux sont deux plans dont l'un contient une droite orthogonale à l'autre, ou encore deux plans dont l'angle est droit.

Les deux propriétés sont équivalentes, voir l'exercice 5. Elles sont différentes et intéressantes toutes les deux. On peut prendre l'une ou l'autre comme définition de l'orthognalité des plans.



$P \perp P'$

$(\widehat{P,P'}) = \pi/2$

$P \perp P'$

$D \perp P$ et $P' \supset D$

$P \perp P'$

Accueil

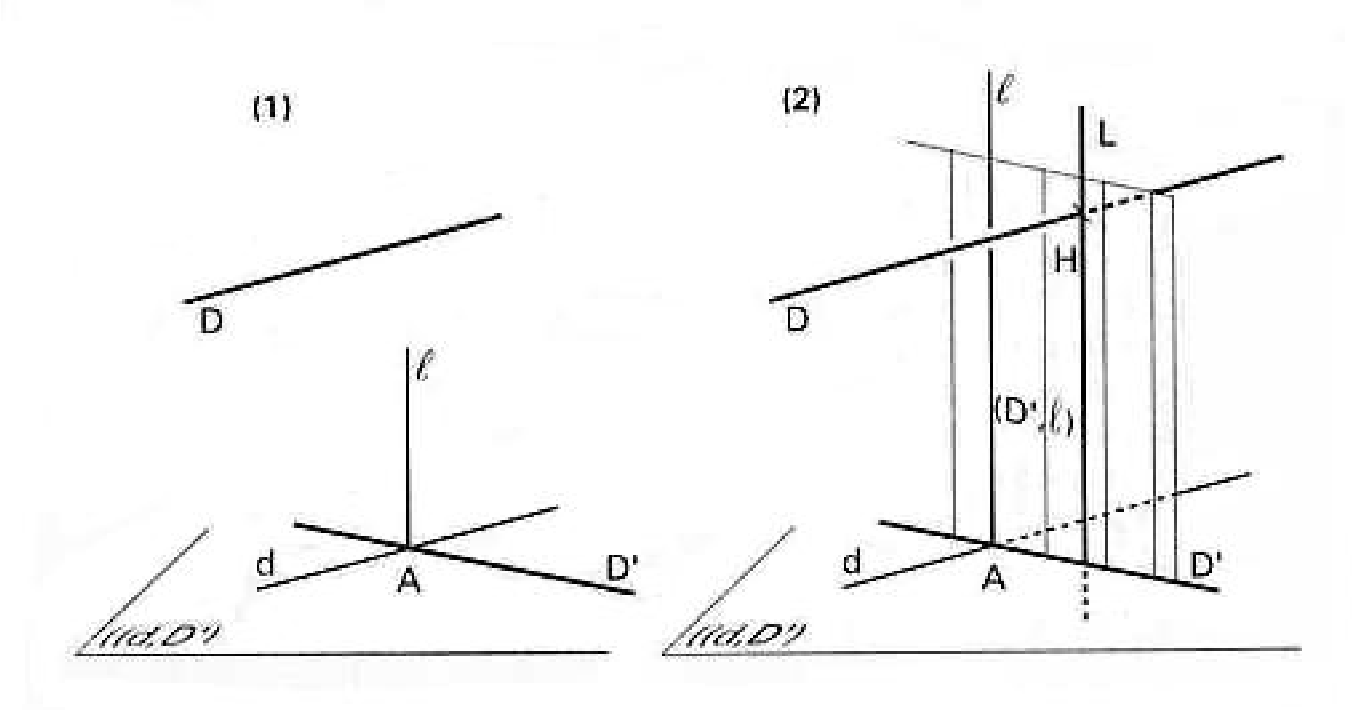
Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

Perpendiculaire commune à deux droites

Si D et D' sont deux droites non coplanaires, Il existe une droite, et une seule, orthogonale à D, orthogonale à D', sécante avec D et sécante avec D'. Cette droite s'appelle la perpendiculaire commune à D et D'.



D et D' sont non coplanaires.

(1) La direction de leur perpendiculaire commune est nécessairement celle de la droite l, perpendiculaire en A au plan (d, D') (A est un point quelconque de D', d est la parallèle à D passant par A).

(2) La perpendiculaire commune est nécessairement parallèle à l et sécante avec D'. Elle est donc incluse dans le plan (D', l).

Ce plan coupe D en un point H.

La perpendiculaire commune est la droite L, parallèle à l et passant par H. (Elle coupe la droite D' en un point H').

EXERCICES

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. Combien existe-t-il de directions de droites orthogonales à un plan donné ?
Combien existe-t-il de directions de droites orthogonales à une droite donnée ?
Combien existe-t-il de directions de plans orthogonaux à un plan donné ?
Combien existe-t-il de directions de plans orthogonaux à une droite donnée ?

2. Faire un schéma représentant un plan et une droite qui ne sont ni parallèles, ni orthogonaux.

3. Soit P et P' deux plans, sécants suivant une droite D. On suppose que D est orientée par un vecteur $\overrightarrow{k}$, et que $(\widehat{P,P'}) = \pi/3$. Soit Δ une droite incluse dans P et sécante avec D en un point A. Existe-t-il une droite Δ' passant par A, incluse dans P' et telle que $(\widehat{\Delta,\Delta'}) = \pi/2$? (Faire des travaux pratiques avec un cahier ouvert et une équerre.) Etant donné un angle θ quelconque, existe-t-il deux droites E et E' passant par A, telles que $E \subset P$, que $E' \subset P'$, et que $(\widehat{E,E'}) = \theta$?

4. Si P et P' sont deux plans parallèles non confondus, et si D est une droite incluse dans P, et D' une droite incluse dans P', les droites D et D' sont-elles non coplanaires ? On demande d'étudier par exemple les cas où l'angle $(\widehat{D,D'})$ est $\pi/4$, $\pi/2$, et 0 ? (Faire des schémas.)

5. a) Soit P un plan, D une droite orthogonale à P, et Q un plan contenant D. Démontrer que l'angle $(\widehat{P,Q})$ est droit.

b) Soit P et Q deux plans sécants, dont l'angle est droit. Trouver une droite orthogonale à l'un et incluse dans l'autre.

6. Soit deux plans orthogonaux. Est-ce que toute droite de l'un est orthogonale à toute droite de l'autre ?

7. Soit P et Q deux plans quelconques de l'espace. On note Δ_P et Δ_Q deux droites quelconques, orthogonales respectivement à P et à Q. Faire un schéma représentant P, Q, Δ_P et Δ_Q. Démontrer que :

$$P \perp Q \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_P \perp \Delta_Q \ .$$

8. Comparer l'angle de deux plans quelconques de l'espace avec l'angle de deux droites orthogonales respectivement à l'un et à l'autre.

9. Combien existe-t-il de perpendiculaires communes à deux droites données, si les droites sont sécantes ? si elles sont parallèles ? si elles sont non coplanaires ?

10. Soit P et Q deux plans orthogonaux. On suppose que Δ_P et Δ_Q sont deux droites non coplanaires, orthogonales respectivement à P et à Q. Faire un schéma représentant P, Q, Δ_P et Δ_Q. Dessiner sur le schéma la perpendiculaire commune à Δ_P et Δ_Q.

11. Plier une feuille de papier à angle droit, pour matérialiser deux plans orthogonaux. Soit Δ la droite du pli. On considère deux droites D et D', situées chacune dans l'un des deux plans, et sécantes avec Δ en deux points différents.

1) Où se trouve la perpendiculaire commune à D et D' :

   a) lorsque les deux droites sont perpendiculaires à Δ (chacune dans son plan) ?

   b) lorsque l'une est perpendiculaire à Δ et pas l'autre ?

   c) lorsqu'aucune des deux n'est perpendiculaire à Δ ?

(Réaliser les trois expériences, en dessinant dans chaque cas les droites D et D' sur le papier.)

2) Quel est, dans chaque cas, l'angle des droites D et D' ?

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Isométries de l'espace

Notre but dans ce chapitre est de donner la liste exhaustive des isométries de l'espace, avec leurs propriétés fondamentales. Beaucoup de ces isométries sont étudiées dans l'enseignement secondaire mais pas toutes, même dans les sections mathématiques et techniques. L'ordre dans lequel nous présenterons les définitions et les propriétés est celui qui nous semble efficace pour l'imagination ; ce n'est pas l'ordre de la théorie mathématique.

Généralités

Dans l'espace, les propriétés générales des isométries sont les mêmes qu'en géométrie plane. (Un coup d'oeil aux démonstrations permettrait de s'assurer qu'elles ne font pas intervenir la dimension de l'espace.)

***Figures isométriques* / ãÊÞÇíÓÇä**
Deux figures *isométriques* / ãÊÞÇíÓÇä sont deux figures qui ont la même forme et la même dimension (par exemple : deux sphères de même rayon, deux tétraèdres de même forme et dont les arêtes homologues ont la même longueur, deux secteurs angulaires de même angle, deux plans, deux droites, ...).

***Isométrie* / ÊÞÇíÓ**
Une *isométrie* / ÊÞÇíÓ est une transformation géométrique qui transforme toute figure en une figure isométrique.

En particulier, une isométrie transforme un segment en un segment de même longueur. Ce qui rend évidente la propriété suivante.

Propriété
Une isométrie est une application de l'espace dans lui-même qui conserve la distance.

En mathématiques, cette propriété est la définition ; mais peu importe pour nous, qui ne nous intéressons pas à l'ordre de construction logique de la théorie.

Exemples d'isométries de l'espace
Les translations / ÅÒÇÍÉ , les réflexions / ÇäÚßÇÓ , les symétries centrales / ÊäÇÙÑ ãÑßÒí , les symétries axiales orthogonales par rapport à des droites / ÊäÇÙÑ ãÍæÑí Úãæï , l'identité (cette liste est incomplète).

Propriétés
Une isométrie transforme une droite en droite et un plan en plan.
Elle conserve le parallélisme.
Elle conserve l'orthogonalité des droites et des plans.
Elle transforme un repère orthonormé en un repère orthonormé.

Propriétés

Une isométrie est une application bijective de l'espace sur lui-même.

L'ensemble des isométries de l'espace, muni de la loi de composition des applications, est un groupe (c'est un sous-groupe du groupe des applications bijectives de l'espace sur lui-même).

Accueil Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Généralités

Exercices

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. Soit P un plan de l'espace, et s_P la réflexion par rapport à P. Faire un schéma représentant P, un point M quelconque de l'espace, et l'image de M par s_P :

a) si $M \notin P$
b) si $M \in P$.

2. Soit D une droite de l'espace, et s_D la symétrie orthogonale par rapport à D. Faire un schéma représentant D, un point M quelconque de l'espace, et l'image de M par s_D :

a) si $M \notin D$
b) si $M \in D$.

3. Est-ce que la projection orthogonale de l'espace sur un plan est une isométrie ?

4. a) Si on imagine deux figures, images l'une de l'autre par une isométrie, comme deux figures *"ayant la même forme et la même dimension"*, est-il possible d'imaginer deux points distincts de l'espace dont les images par une isométrie soient confondues ?

b) En utilisant la définition d'une isométrie (une isométrie est une application de l'espace dans lui-même qui conserve la distance), démontrer qu'une isométrie est une application injective.

(Une isométrie est aussi surjective : l'image de l'espace est l'espace tout entier, mais la démonstration de cette propriété n'est pas simple.)

5. En géométrie **plane**, quelles sont les isométries (planes) admettant :
a) au moins un point fixe ?

b) au moins deux points fixes distincts ?
c) au moins trois points fixes non alignés ?
d) aucun point fixe ?

6. Soit f une isométrie quelconque de l'espace. On suppose que A et B sont deux points fixes de f, distincts. Nous allons démontrer que tous les points de la droite (AB) sont nécessairement des points fixes de f.

a) En utilisant le fait que l'image d'une droite est une droite, démontrer que l'image par f de la droite (AB) est la droite (AB) (globalement / ÅÌãÇáíÇ).

b) Soit M un point quelconque de la droite (AB). À quelle distance du point A se trouve nécessairement le point $f(M)$? Combien existe-t-il de points situés sur la droite (AB) à une distance donnée de A ? Sur quelle demi-droite d'origine A se trouve nécessairement $f(M)$? Conclure.

7. Soit f une isométrie quelconque de l'espace. On suppose que A, B et C sont trois points fixes de f, non alignés. Nous allons démontrer que tous les points du plan (ABC) sont nécessairement des points fixes de f.

a) En utilisant le fait que l'image d'un plan est un plan, démontrer que l'image par f du plan (ABC) est le plan (ABC) (globalement / ÅÌãÇáíÇ).

b) Soit M un point quelconque du plan (ABC).

On considère la projection orthogonale m de M sur la droite (AB). Où se touve $f(m)$? (Utiliser le résultat de l'exercice précédent.)

Quelle est l'image par f de la droite orthogonale à (AB) passant par M ? (Utiliser le fait qu'une isométrie transforme deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.)

À quelle distance du point m se trouve nécesairement le point $f(M)$? Dans quel demi-plan limité par la droite (AB) se trouve nécessairement $f(M)$? Conclure.

8. Soit f une isométrie quelconque de l'espace. On suppose que A, B, C et D sont quatre points fixes de f, non coplanaires. En utilisant la projection orthogonale m de M sur le plan (ABC), et en s'inspirant des exercices 6 et 7 précédents, démontrer que tous les points de l'espace sont nécessairement des points fixes de f et que, par conséquent, f est l'identité de l'espace.

9. Connaissez-vous des isométries de l'espace admettant :

a) au moins un point fixe ?
b) au moins deux points fixes distincts ?
c) au moins trois points fixes non alignés ?
d) au moins quatre points fixes non coplanaires ?
e) aucun point fixe ?

10. Nous allons démontrer que si deux isométries coïncident sur un repère affine de l'espace, elles coïncident partout.

Soit f_1 et f_2 deux isométries quelconques de l'espace. Soit (A, B, C, D) un repère affine de l'espace (c'est-à-dire que A, B, C et D sont quatre points non coplanaires). On suppose que f_1 et f_2 coïncident sur (A, B, C, D) et on note :

$$A' = f_1(A) = f_2(A)$$

$$B' = f_1(B) = f_2(B)$$

$$C' = f_1(C) = f_2(C)$$

$$D' = f_1(D) = f_2(D) .$$

On veut démontrer que, quel que soit le point M de l'espace, $f_1(M) = f_2(M)$.

a) Faire un schéma représentant A, B, C, le plan (ABC), et le point D. Dessiner A', B', C', le plan $(A'B'C')$ et le point D', d'une manière vraisemblable (deux figures isométriques ont *"la même forme et la même dimension"*).

b) Soit M un point quelconque de la droite (AB) . En s'inspirant de l'exercice 6 précédent, démontrer que $f_1(M)$ est un point : **1.** situé sur la droite $(A'B')$; **2.** à une distance déterminée de A' ; **3.** sur une demi-droite déterminée d'origine A' .

En déduire que $f_1(M) = f_2(M)$.

c) Soit M un point quelconque du plan (ABC) . En utilisant la projection orthogonale m de M sur la droite (AB) , et en s'inspirant de l'exercice 7 précédent, démontrer que $f_1(M)$ est un point : **1.** du plan $(A'B'C')$; **2.** situé sur la droite du plan $(A'B'C')$ perpendiculaire à $(A'B')$ en $f_1(m)$; **3.** à une distance déterminée de $f_1(m)$; **4.** dans un demi-plan déterminé limité par la droite (AB) .

En déduire que $f_1(M) = f_2(M)$.

d) Soit M un point quelconque de l'espace. En utilisant la projection orthogonale m de M sur le plan (ABC), et en s'inspirant de ce qui précède, démontrer que $f_1(M) = f_2(M)$.

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Réflexions

Une réflexion / ÇäÚßÇÓ de l'espace est une symétrie orthogonale par rapport à un plan de l'espace, et nous préférons l'expression réflexion parcequ'elle est plus imagée. Nous noterons s_P la réflexion par rapport à un plan P (s comme *"symétrie"* et non pas r comme *"réflexion"*, car nous réservons la lettre r aux rotations).

Propriété
Une réflexion est une isométrie.

***Points fixes /* äÞÇØ ËÇÈÊÉ**
L'ensemble des points fixes / ËÇÈÊÉ d'une réflexion est le plan de la réflexion.

***Invariants globaux /* áÇãÊÛíÑÉ ÅÌãÇáíÇ**
Les **droites** globalement invariantes / áÇãÊÛíÑÉ ÅÌãÇáíÇ par une réflexion sont les droites incluses dans le plan de la réflexion et les droites perpendiculaires à ce plan.
Les **plans** globalement invariants / áÇãÊÛíÑÉ ÅÌãÇáíÇ par une réflexion sont le plan de la réflexion et les plans perpendiculaires à ce plan.

Réflexions

Exercices

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. Soit s_P une réflexion par rapport à un plan P, et soit D une droite quelconque de l'espace. Quelles sont toutes les positions relatives possibles de D et de $s_P(D)$?

2. Soit P le plan d'une réflexion, et soit Q un plan orthogonal à P. On note $s_P|_Q$ la restriction /ÇÞÊÕÇÑ à Q de la reflexion s_P. Faire un schéma représentant un point M quelconque de Q et son image par $s_P|_Q$. Quel est l'ensemble d'arrivée de $s_P|_Q$? Comment se nomme cette restriction en géométrie plane ?

3. Soit P un plan de l'espace, et s_P la réflexion par rapport à P. Faire un schéma représentant P, un segment $[MN]$ quelconque de l'espace, et l'image $[M'N']$ de $[MN]$ par s_P.

En partant de la propriété qu'une réflexion **plane** est une isométrie plane, démontrer qu'une réflexion **de l'espace** est une isométrie de l'espace.

4. Soit P un plan et Δ une droite qui n'est ni parallèle, ni orthogonale à P. On considère la symétrie oblique / ãÇÆá par rapport à P, dans la direction de Δ.

Faire un schéma représentant P et Δ, un segment $[MN]$ quelconque de l'espace, et l'image $[M'N']$ de $[MN]$ par la symétrie oblique. La symétrie oblique conserve-t-elle la distance ? Deux figures, images l'une de l'autre par une symétrie oblique, ont-elles toujours la même forme ?

5. Pourquoi la symétrie affine orthogonale par rapport à un plan de l'espace est-elle le modèle mathématique de la réflexion optique dans un miroir plan?

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

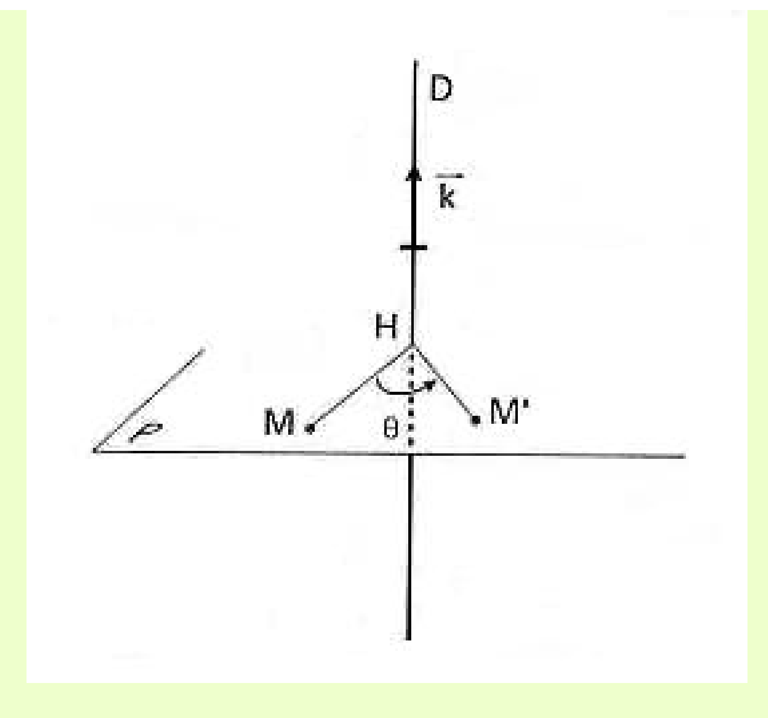
Rotations

Observons autour de nous des objets qui tournent, par exemple la porte. Comment tourne-t-elle ?
Elle tourne autour des gonds, qui matérialisent une droite de points fixes / äÞÇØ ËÇÈÊÉ au cours du mouvement.
Comment tournent les autres points de la porte, par exemple les points du bord d'en bas ? Ils tournent dans le plan du sol ou, plus exactement, dans un plan proche du sol et parallèle au sol. D'une manière générale, chaque point de la porte tourne dans un plan perpendiculaire à l'axe des gonds.

Imaginons maintenant la porte à moitié ouverte, et supposons qu'on veuille la faire tourner de + $\pi/4$. Il est possible alors que l'un d'entre nous, regardant le sol, dise qu'il faut fermer la porte, alors qu'un autre, regardant le plafond, dira qu'il faut l'ouvrir.
En d'autres termes, pour pouvoir mesurer l'angle de la rotation, il faut orienter de la même manière tous les plans perpendiculaires à l'axe des gonds (il suffit pour cela d'orienter l'axe).

Et, en effet, en mathématiques, on donne la définition suivante.

Définition et notations



Soit D une droite, $\vec{k}$ un vecteur de norme 1 de D , et θ un nombre. La rotation /ÏæÑÇä , d'axe D orienté par $\vec{k}$ et d'angle θ , notée $r\,(D\,\vec{k}\,,\theta\,)$, est l'application qui à tout point M de l'espace associe le point M' qui est :
1. situé dans le plan P orthogonal à D passant par M , **2.** image de M dans P par la rotation plane $\rho\,(H\,,\theta\,)$, où H est le point où D perce P , et P est orienté par l'orientation de D .

Propriété

Une rotation est une isométrie.

A propos de la démonstration

A condition de connaître la propriété, on peut ignorer la démonstration sans aucun inconvénient pour l'utilisation pratique des rotations.

Points fixes / äÞÇØ ËÇÈÊÉ

L'ensemble des points fixes/ËÇÈÊÉ d'une rotation est l'axe de la rotation, lorsque l'angle de la rotation n'est pas nul modulo 2π.

Lorsque l'angle est nul modulo 2π, la rotation est l'identité de l'espace.

Invariants globaux / áÇãÊÛíÑÉ ÅÌãÇáíÇ

Les **droites** globalement invariantes / áÇãÊÛíÑÉ ÅÌãÇáíÇ par une rotation sont l'axe de la rotation et : **1)** aucune autre lorsque la rotation n'est ni l'identité, ni un demi-tour ; **2)** les droites perpendiculaires à l'axe lorsque la rotation est un demi-tour.

Les **plans** globalement invariants / áÇãÊÛíÑÉ ÅÌãÇáíÇ par une rotation sont les plans perpendiculaires à l'axe de la rotation et : **1)** aucun autre lorsque la rotation n'est ni l'identité, ni un demi-tour ; **2)** les plans contenant l'axe lorsque la rotation est un demi-tour.

Voir l'exercice 7

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Rotations

Exercices

1. Soit $r\,(D\,\vec{k}, \pi/3)$ une rotation d'axe D orienté par $\vec{k}$ et d'angle $\pi/3$. Faire un schéma représentant un axe D horizontal, un vecteur $\vec{k}$ qui oriente D, un point M quelconque de l'espace, et l'image de M par la rotation,

a) si $M \notin D$,

b) si $M \in D$.

2. Quels que soient la droite D, orientée par $\vec{k}$, et l'angle θ, que peut-on dire de $r\,(D\,\vec{k}, \theta)$ et de $r\,(D\,{-\vec{k}}, -\theta)$?

3. Parmi les repères orthonormés donnés dans l'exercice 6, certains sont directs. Touver des rotations de l'espace (donner les axes et les angles) qui appliquent $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sur chacun des repères directs.

4. Groupe *des rotations de même axe*

Soit D une droite de l'espace, orientée par un vecteur $\vec{k}$. Faire des schémas et démontrer que l'ensemble

$$\mathrm{D} = \{\, r\,(D\,\vec{k}, \theta) \,/\, \theta \in \mathbf{R} \,\}$$

est un groupe. (Utiliser les propriétés connues des rotations **planes**, et démontrer que D est un sous-groupe du groupe des isométries de l'espace).

5. Etant donné une droite D, combien y a-t-il de demi-tours d'axe D ? Est-il nécessaire d'orienter D pour distinguer $r\,(D_{\vec{k}}\,,\pi)$ de $r\,(D_{\vec{k}}\,,-\pi)$?

6. Quelle est l'application inverse d'une symétrie axiale orthogonale ? d'un demi-tour ? d'une rotation quelconque ?

7. À partir des résultats sur les invariants globaux des rotations planes, supposés connus en géométrie plane, nous allons démontrer les résultats sur les invariants globaux des rotations de l'espace.

Soit r une rotation quelconque de l'espace, d'axe D orienté par $\vec{k}$, et d'angle θ. On suppose r distincte de l'identité.

a) Soit Δ une droite quelconque de l'espace, dont on suppose qu'elle est globalement invariante par r, et distincte de D. Soit A un point appartenant à Δ et pas à D, et A' l'image de A par r.

Pourquoi A' est-il distinct de A ? Dans quel plan remarquable se trouve nécessairement A' ? Où se trouve A' par rapport à Δ ? Dans quel plan remarquable se trouve nécessairement Δ ? Conclure (en utilisant les propriétés des rotations planes).

b) Soit Q un plan quelconque de l'espace, dont on suppose qu'il est globalement invariant par r.

Soit W un point quelconque de D, et soit Δ la droite perpendiculaire à Q passant par W ; elle perce le plan Q en un point K (qui est la projection orthogonale de W sur Q).

Démontrer que Δ est une droite globalement invariante par r (utiliser le fait qu'une isométrie conserve l'orthogonalité des droites et des plans). Quelle est l'image de K par r ?

Quelles sont les positions possibles de la droite Δ ? (Utiliser les résultats de la question a).)

Si W et K sont distincts, quelle est nécessairement la droite Δ ? Quelle est nécessairement la direction de Q ?

Si W et K sont confondus, quelles sont les positions possibles de Q ? Conclure.

8. Soit $r(D\,\overrightarrow{k}, \theta)$ une rotation de l'espace, d'axe D orienté par $\overrightarrow{k}$ et d'angle θ, distincte de l'identité ($\theta \neq 0\ [2\pi]$). Soit Δ une droite quelconque de l'espace. Nous allons étudier l'image Δ' de Δ par la rotation.

a) On suppose que Δ // D. Démontrer que Δ' // D. Où se trouve exactement Δ' ? On pourra utiliser un plan P, orthogonal à D, et faire un schéma représentant D et $\overrightarrow{k}$, Δ, P et ses points d'intersection H et K avec D et Δ, l'image K' *de* K par la rotation, et finalement Δ'.

b) On suppose que Δ et D sont orthogonales (mais pas nécessairement sécantes). Où se trouve Δ' ? Faire un schéma représentant D et $\overrightarrow{k}$, P ; Δ, et Δ'. Quel est l'angle $(\widehat{\Delta,\Delta'})$?

c) On suppose que Δ n'est ni parallèle, ni orthogonale à D.

Si Δ et D sont sécantes, soit I leur point d'intersection. Faire un schéma représentant D et $\overrightarrow{k}$, Δ et I, et un plan P, orthogonal à D et ne passant pas par I. Dessiner le point d'intersection M de Δ et de P, l'image M' de M par la rotation, et finalement Δ'. Démontrer que l'angle $(\widehat{\Delta,\Delta'})$ n'est pas l'angle θ de la rotation.

Si Δ et D ne sont pas sécantes, utiliser une droite parallèle à Δ et sécante avec D pour trouver Δ'. L'angle $(\widehat{\Delta,\Delta'})$ est-il l'angle de la rotation ? (Faire un schéma.)

9. Soit $r(D\,\overrightarrow{k}, \theta)$ une rotation de l'espace, d'axe D orienté par $\overrightarrow{k}$ et d'angle θ, distincte de l'identité ($\theta \neq 0\ [2\pi]$). Soit Q un plan quelconque de l'espace. Nous allons étudier l'image Q' de Q par la rotation.

a) Si $Q \perp D$, où se trouve Q' ?

b) Si $Q \supset D$, où se trouve Q' ? Démontrer que l'angle $(\widehat{Q,Q'})$ est l'angle θ de la rotation. (Faire un schéma.)

c) Si Q // D, où se trouve Q' ? Quel est l'angle $(\widehat{Q,Q'})$?

d) On suppose que Q n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à D. Faire un schéma représentant D et Q. Soit I le point d'intersection de Q et de D. En utilisant la droite Δ, perpendiculaire à Q en I, et les résultats de l'exercice précédent, démontrer que l'angle

$(\widehat{\vec{Q},\vec{Q}'})$ n'est pas l'angle θ de la rotation.

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Réflexions tournées

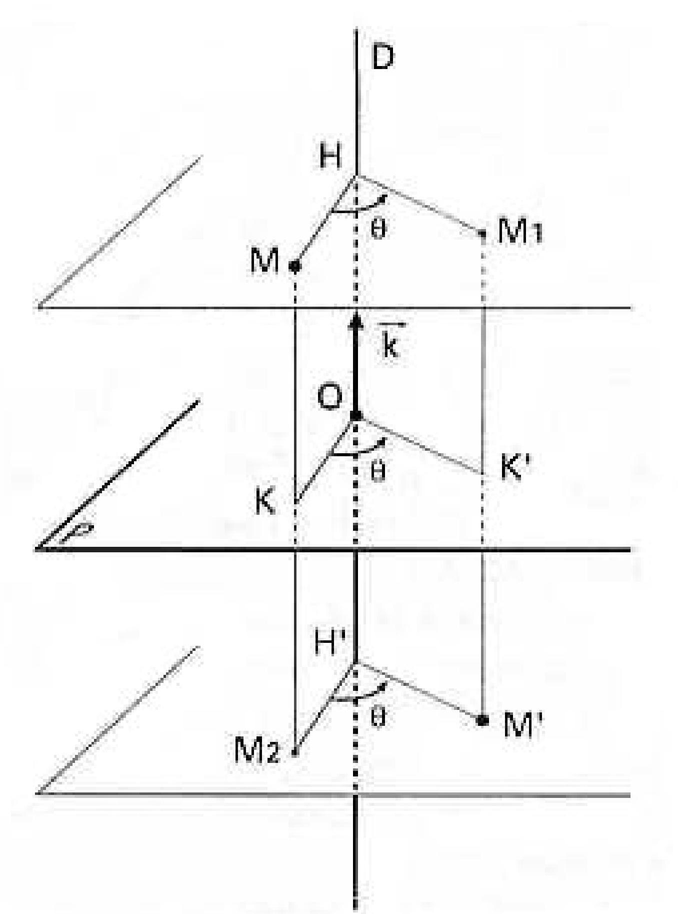
Définition

Une *réflexion tournée* est le produit $s_P \circ r(D_{\vec{k}}, \theta)$ d'une réflexion et d'une rotation, l'axe de la rotation étant perpendiculaire au plan de la réflexion, et l'angle de la rotation étant différent de zéro modulo 2π. Le produit $s_P \circ r(D_{\vec{k}}, \theta)$ s'appelle *forme réduite* de la réflexion tournée.

La réflexion tournée

$s_P \circ r(D_{\vec{k}}, \theta)$

$(D \perp P, \theta \neq 0\ [2\pi])$



Pour obtenir l'image M' d'un point M, on fait tourner M par la rotation $r(D_{\vec{k}}, \theta)$, ce qui donne le point intermédiaire M_1, puis on réfléchit M_1 par rapport à P, ce qui donne M'.

(On peut aussi réfléchir d'abord M par rapport à P, ce qui donne M_2 , puis

faire tourner M_2 par

$r\,(D_{\vec{k}}\,, \theta)$, ce

qui donne également

M' .)

Propriété

Une réflexion tournée est une isométrie.

Démonstration : une réflexion tournée est, par définition, le produit de deux isométries.

Propriété

La forme réduite d'une réflexion tournée est commutative :

$$s_P \circ r\,(D_{\vec{k}}\,, \theta) \;=\; r\,(D_{\vec{k}}\,, \theta) \circ s_P \qquad (\theta \neq 0\ [2\pi],\ D \perp P).$$

Cette propriété est visible sur le schéma. Pour une démonstration, voir l'exercice 4.

***Points fixes* / äÞÇØ ËÇÈÊÉ**

La réflexion tournée $s_P \circ r\,(D_{\vec{k}}\,, \theta)$ (où $\theta \neq 0\ [2\pi]$ et $D \perp P$) possède un point fixe et un seul : le point d'intersection de la droite D et du plan P. Ce point s'appelle *le centre* de la réflexion tournée.

Il est évident que le point d'intersection de D et de P est fixe par la réflexion tournée. De plus, il est le seul : voir l'exercice 3

Une réflexion tournée est une isométrie nouvelle, qui n'est pas étudiée dans l'enseignement secondaire.

***Invariants globaux* / áÇãÊÛíÑÉ ÅÌãÇáíÇ**

Soit f une réflexion tournée :

$f = s_P \circ r\,(D_{\vec{k}}\,, \theta)$ (où $\theta \neq 0\ [2\pi]$ et $D \perp P$) .

Les **droites** globalement invariantes par f sont : **1)** la droite D et aucune autre lorsque f n'est pas une symétrie centrale ($\theta \neq \pi\ [2\pi]$) ; **2)** les droites passant par le centre lorsque f est une symétrie centrale.

Les **plans** globalement invariants par f sont : **1)** le plan P et aucun autre lorsque f n'est pas une symétrie centrale ; **2)** les plans passant par le centre lorsque f est une symétrie centrale.

Voir les exercices 5 et 6

***Elements caractéristiques* / ÚäÇÕÑ ãäíøöÒÉ**

Soit f une réflexion tournée.

Si f n'est pas une symétrie centrale, la forme réduite $s_P \circ r(D_{\vec{k}}, \theta)$ (où $\theta \neq 0 \ [2\pi]$ et $D \perp P$) de f est unique. P, D et θ s'appellent *le plan, l'axe, et l'angle de la réflexion tournée* (θ est défini modulo 2π, et il change de signe lorsque l'on change l'orientation de l'axe) ; P, D et θ sont les éléments caractéristiques de la réflexion tournée.

Si f est une symétrie centrale, elle possède une infinité de formes réduites : tous les produits d'une réflexion et d'un demi-tour dont le plan et l'axe sont perpendiculaires et se coupent au centre de la symétrie. (Une symétrie centrale n'a ni plan caractéristique, ni axe caractéristique.)

Voir l'exercice 7

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

Réflexions tournées

Exercices

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. On considère $s_P \circ r(D_{\vec{k}}, 0)$, produit d'une réflexion et d'une rotation d'angle nul.

Quel est le nom de cette isométrie de l'espace ?

2. Soit une réflexion tournée $s_P \circ r(D_{\vec{k}}, \pi/4)$, où P et D sont un plan et une droite perpendiculaires donnés. Faire un schéma représentant P et D, un point M de l'espace n'appartenant ni à P, ni à D, et les images de M par :

$s_P \circ r(D_{\vec{k}}, \pi/4)$

$s_P \circ r(D_{-\vec{k}}, -\pi/4)$

$[s_P \circ r(D_{\vec{k}}, \pi/4)]^{-1}$.

Mêmes questions si M appartient à P, ou à D, ou aux deux.

3. Nous allons démontrer que la réflexion tournée :

$$f = s_P \circ r(D_{\vec{k}}, \theta) \quad (\text{où } \theta \neq 0 \ [2\pi] \text{ et } D \perp P)$$

ne possède pas d'autres points fixes que le point d'intersection de D et de P.

a) Faire un schéma représentant P, D, et le vecteur $\vec{k}$ qui oriente D. On nomme O le point d'intersection de D et de P.

b) Soit M un point de D. Dessiner M et son image par f :

i) si $M = O$

ii) si $M \neq O$.

Quelle est la restriction de f à D ?

c) Soit M un point de P. Dessiner M et son image par f :

i) si $M = O$

ii) si $M \neq O$.

Quelle est la restriction de f à P ?

d) Soit M un point de l'espace qui n'appartient ni à D, ni à P. Dessiner M. Quelle est l'image par f du demi-espace limité par le plan P ? Conclure.

4. Nous allons démontrer la commutativité de la forme réduite d'une réflexion tournée.

Soient

$f = s_P \circ r(D_{\vec{k}}, \theta)$ et

$f' = r(D_{\vec{k}}, \theta) \circ s_P$

où $\theta \neq 0 \; [2\pi]$ et $D \perp P$.

Quelles sont les restrictions de f et de f' à D ? de f et de f' à P ? Conclure, en utilisant le résultat de l'exercice 10.

5. Soit $f = s_P \circ r(D_{\vec{k}}, \theta)$ (où $\theta \neq 0 \; [2\pi]$ et $D \perp P$) une réflexion tournée. On note O le centre de f.

Nous allons démontrer que les droites globalement invariantes par f sont : **1)** la droite D et aucune autre, si f n'est pas la symétrie centrale s_O ; **2)** les droites passant par O, si f est la symétrie centrale s_O.

Soit Δ une droite quelconque de l'espace, dont on suppose qu'elle est globalement invariante par f.

Soit δ la projection orthogonale de Δ sur P. Deux cas se présentent :

(a) Δ est orthogonale à P, et δ est le point d'intersection de Δ et de P ;

(b) Δ *n'*est pas orthogonale à P, et δ est la droite d'intersection de P et du plan Q, orthogonal à P et contenant Δ.

Cas (a). Faire un schéma représentant P , D , $\overrightarrow{k}$, ainsi que Δ et δ . Quelle est l'image par f de P ? de Δ ? Quelle est par conséquent l'image de δ ? Où se trouve nécessairement le point δ ? Quelle est nécessairement la droite Δ ?

Cas (b). Faire un schéma représentant P , D , $\overrightarrow{k}$, Δ , Q et δ . Quelle est l'image par f de Q ? (On utilisera le fait qu'une isométrie conserve l'orthogonalité des plans, et qu'il n'existe qu'un seul plan orthogonal à P et passant par Δ .) En déduire que la droite δ est globalement invariante, dans le plan P , par la rotation plane $\rho\,(O , \theta)$ (le plan P est orienté par l'orientation de D). En utilisant les invariants globaux des rotations planes, démontrer que $f = s_O$ et que Δ passe par O .

Conclure.

6. Soit $f = s_P \circ r\,(D_{\overrightarrow{k}} , \theta)$ (où $\theta \neq 0 \; [2\pi]$ et $D \perp P$) une réflexion tournée. On note O le centre de f.

Nous allons démontrer que les plans globalement invariants par f sont : **1)** le plan P et aucun autre, si f n'est pas la symétrie centrale s_O ; **2)** les plans passant par O , si f est la symétrie centrale s_O .

Soit Q un plan quelconque de l'espace, dont on suppose qu'il est globalement invariant par f .

a) On suppose P et Q sécants, et on nomme Δ leur droite d'intersection. Faire un schéma représentant P , D , $\overrightarrow{k}$, Q et Δ . Quelle est l'image par f de P ? de Q ? Quelle est par conséquent l'image de Δ ? Est-il possible que Δ soit confondue avec D ? En utilisant les résultats de l'exercice précédent, démontrer que $f = s_O$ et que Q passe par O .

b) On suppose P et Q parallèles. Soit K le point d'intersection de D et de Q . Quelle est l'image par f de D ? de Q ? Quelle est par conséquent l'image de K ? Où se trouve nécessairement le point K ? Quel est nécessairement le plan Q ?

c) Conclure.

7. Soit f une réflexion tournée qui n'est pas une symétrie centrale. Nous allons démontrer que la forme réduite de f est unique.

Soit deux formes réduites de f :

$$f = s_P \circ r(D_{\vec{k}}, \theta), \quad \text{où} \quad D \perp P, \quad \theta \neq 0\ [2\pi], \quad \text{et} \quad \theta \neq \pi\ [2\pi],$$

$$f' = s_{P'} \circ r(D'_{\vec{k}'}, \theta'), \quad \text{où} \quad D' \perp P', \quad \theta' \neq 0\ [2\pi], \quad \text{et} \quad \theta' \neq \pi\ [2\pi]$$

D'après la première forme, quels sont les droites et les plans globalement invariants par f ? D'après le deuxième forme, quels sont-ils ? En déduire que $P = P'$ et que $D = D'$, puisque $\theta = \theta'\ [2\pi]$ (en prenant $\vec{k} = \vec{k}'$).

8. *Trois symétries*

Soit P et D un plan et une droite perpendiculaires en un point O. On note s_P et s_D les symétries orthogonales par rapport à P et à D, et s_O la symétrie centrale par rapport à O.

Faire un schéma montrant que le produit de deux quelconques de ces symétries est commutatif, et qu'il est égal à la troisième. Démontrer ces propriétés.

Accueil

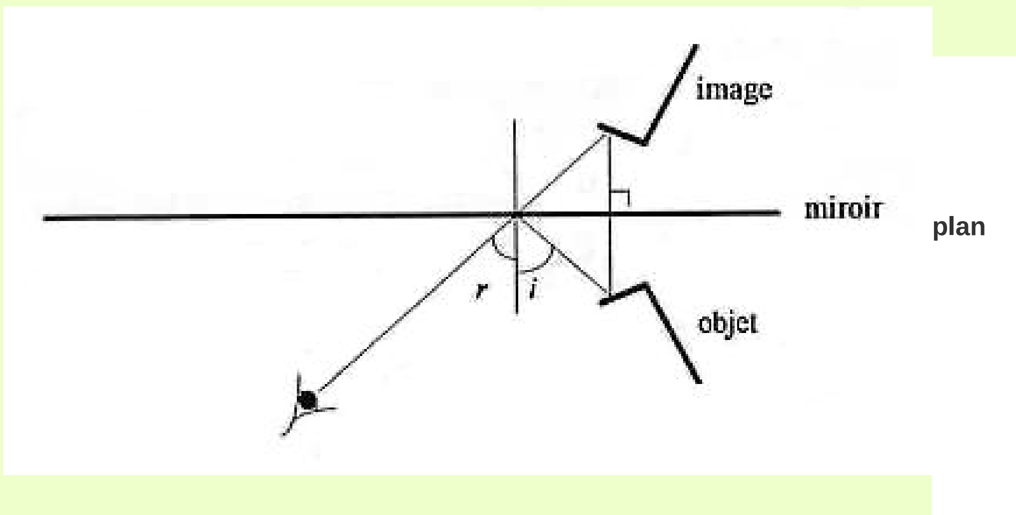
Suite

Symétries orthogonales, symétrie centrale

Symétrie orthogonale par rapport à un plan

Vocabulaire et imagination

En géométrie dans l'espace, la symétrie orthogonale par rapport à un plan se nomme *réflexion /* ÇäÚßÇÓ parce que c'est le modèle mathématique de la réflexion optique dans un miroir plan.

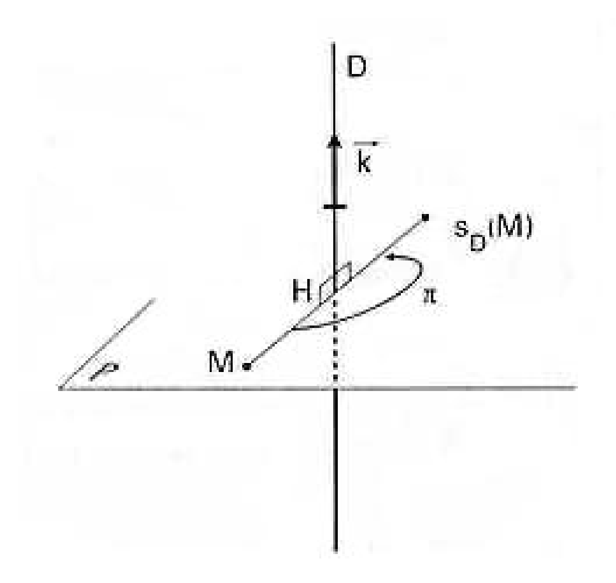


L'habitude quotidienne de voir se refléter des objets dans des miroirs permet d'imaginer très facilement les images géométriques des figures par des réflexions (au sens mathématique). C'est pourquoi nous préférons ce terme aux autres expressions, qui sont plus longues et plus abstraites.

Symétrie axiale orthogonale

Une symétrie axiale orthogonale est un demi-tour / äÕÝ ÏæÑÉ .

Un demi-tour /äÕÝ ÏæÑÉ est la moitié d'un tour complet/ÏæÑÉ ßÇãáÉ ; c'est une rotation d'angle π, moitié de l'angle 2π du tour complet.

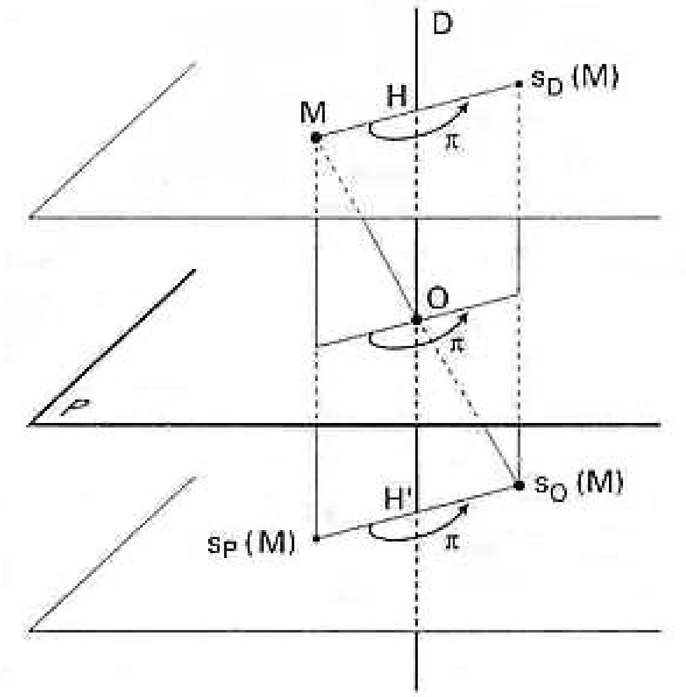


Le point $s_D(M)$ est le point symétrique de M par rapport à D : H étant la projection orthogonale de M sur D, c'est-à-dire l'intersection de D et du plan P orthogonal à D passant par M, la droite D est l'une des médiatrices du segment $[M\ s_D(M)]$.

Dans le plan P, le point $s_D(M)$ est symétrique de M par rapport au point H ; $s_D(M)$ est donc l'image de M, dans le plan P, par le demi-tour plan de centre H.

Symétrie centrale

Une symétrie centrale est une réflexion tournée d'angle plat



D et *P* étant une droite et un plan quelconques orthogonaux entre eux au point *O* ,

$s_O = s_P \circ s_D = s_D \circ s_P$.

$$s_O\,(M) = s_P\,(s_D\,(M))$$
$$= s_D\,(s_P\,(M))$$

et s_D est un demi-tour.

Accueil

Suite

Page précédente Page suivante

Liste des isométries ademettant au moins un point fixe

ENSEMBLE DES POINTS FIXES	NOM DE L'ISOMETRIE	NOTATION
un plan	réflexion	s_P
une droite	rotation (d'angle non nul modulo 2π)	$r(D_{\vec{k}}, \theta)$
un singleton	réflexion tournée	$s_P \circ r(D_{\vec{k}}, \theta)$ ($\theta \neq 0\ [2\pi]$, $D \perp P$)
l'espace entier	Identité (rotation d'angle nul modulo 2π, ou translation de vecteur nul.)	Id

Accueil Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Composition de réflexions

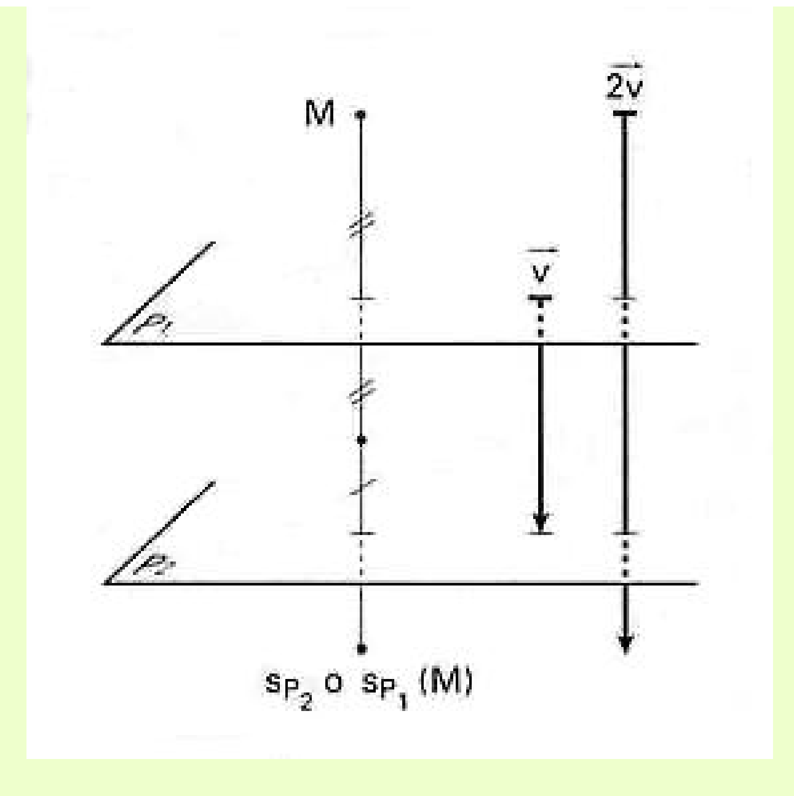
Produit de deux réflexions

Propriété

Le produit de deux réflexions est ou bien une translation, ou bien une rotation.

Soit s_{P1} et s_{P2} deux réflexions, de plans P_1 et P_2 .

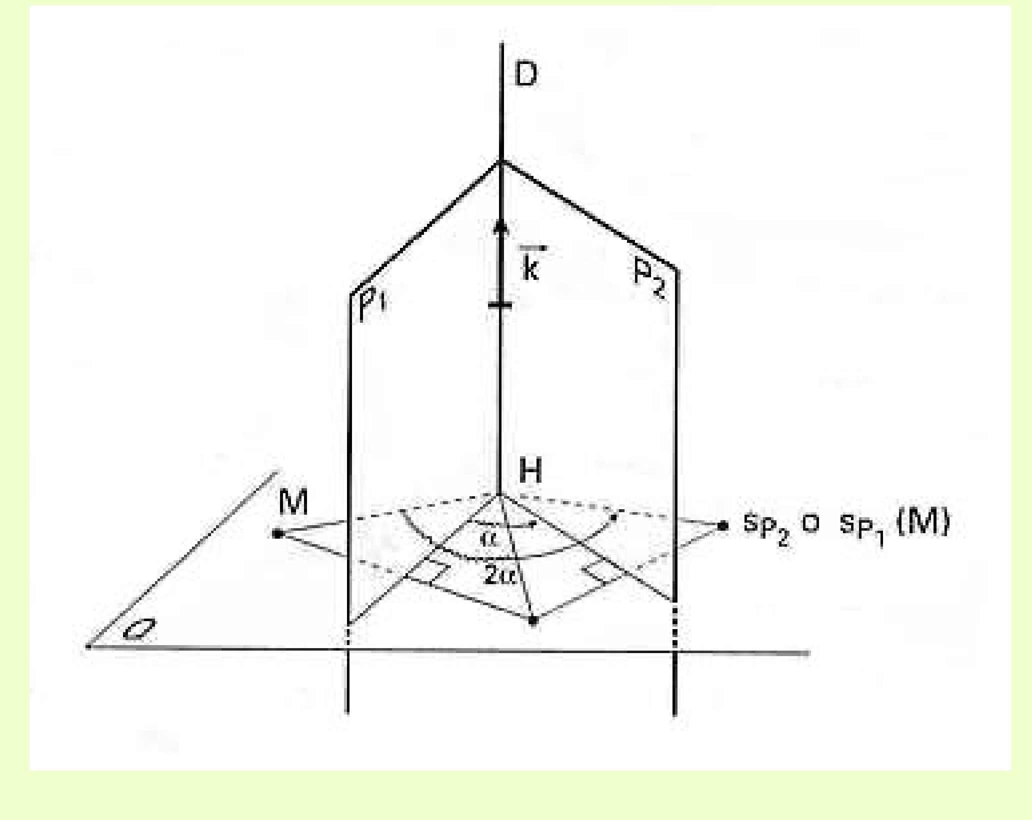
a) Si les plans sont parallèles,



$s_{P2} \circ s_{P1} = t_{2\vec{v}}$

où $t_{2\vec{v}}$ est la translation dont le vecteur est le double du vecteur $\vec{v}$, orthogonal à P_1 et P_2 , dirigé de P_1 vers P_2 (c'est-à-dire du plan de la réflexion effectuée la première vers le plan de la deuxième), et dont la norme est la distance de P_1 à P_2 .

b) Si les plans sont sécants,



$s_{P2} \circ s_{P1} = r\,(D_{\vec{k}}, 2\alpha)$

où $r\,(D_{\vec{k}}, 2\alpha)$ est la rotation dont l'axe est la droite D d'intersection des deux plans, et dont l'angle est le double de l'angle du premier plan vers le deuxième.

Propriété réciproque

Toute translation, et toute rotation, est le produit de deux réflexions

Toute translation $t_{\vec{u}}$ est le produit de deux réflexions dont les plans sont :

orthogonaux à $\vec{u}$ (donc parallèles entre eux),

distants de $||\vec{u}/2||$,

tels que $\vec{u}$ soit dirigé du plan de la réflexion effectuée la première vers le plan de la deuxième,

et par ailleurs quelconques. (Il existe une infinité de tels couples de plans).

Toute rotation $r\,(D_{\vec{k}}, \theta)$ est le produit de deux réflexions dont les plans sont :

sécants suivant la droite D ,

tels que l'angle du plan de la réflexion effectuée la première vers le plan de la deuxième soit $\theta/2$ pour l'orientation $\vec{k}$ de D ,

et par ailleurs quelconques. (Il existe une infinité de tels couples de plans).

Composition de réflexions

Isométrie quelconque

Théorème fondamental

Une isométrie quelconque est toujours égale à un produit de réflexions. (Dans cette expression, un "produit d'une seule réflexion" signifie "une réflexion".)

Démonstration

Puisqu'une isométrie admettant au moins un point fixe est ou bien une réflexion, ou bien une rotation, ou bien une réflexion tournée, elle est égale, suivant les cas, au produit de 1, 2 ou 3 réflexions.

En utilisant le théorème ci-dessous, on trouve qu'une isométrie quelconque (même si elle n'admet pas de points fixes) est toujours le produit d'un certain nombre de réflexions.

Théorème

Une isométrie quelconque est le produit d'une isométrie admettant au moins un point fixe et d'une translation.

Démonstration

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Composition de réflexions

Exercices

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. A partir des théorèmes donnant le produit de deux réflexions **planes**, supposés connus en géométrie plane, nous allons démontrer les théorèmes donnant le produit de deux réflexions **de l'espace**.

a) Soit P_1 et P_2 deux plans sécants, et soit $D = P_1 \cap P_2$. Soit M un point quelconque de l'espace, et soit Q le plan contenant M et orthogonal à D. En utilisant la restriction à Q des réflexions s_{P1} et s_{P2} et les propriétés des réflexions planes, dans le plan Q orienté par un vecteur $\vec{k}$ de D, démontrer que $s_{P2}\ o\ s_{P1}$ est la rotation de l'espace $r(D\ \vec{k}, 2\alpha)$, où α est l'angle $(\widehat{P_1, P_2})$.

b) Soit P_1 et P_2 deux plans parallèles, et soit M un point quelconque de l'espace. Soit Q un plan contenant M et orthogonal à P_1 et P_2. Soit Δ_1 la droite $Q \cap P_1$, et Δ_2 la droite $Q \cap P_2$. Combien existe-t-il de directions de droites de l'espace orthogonales à Δ_1 et Δ_2 ? Si L est une droite orthogonale à Δ_1 et incluse dans le plan Q, quelle est nécessairement sa direction ? En utilisant ce résultat, et les propriétés des réflexions planes dans le plan Q, démontrer le théorème donnant le produit $s_{P2}\ o\ s_{P1}$.

2. Soit P_1 , P_2 et P_3 trois plans parallèles quelconques. Démontrer que $s_{P3}\ o\ s_{P2}\ o\ s_{P1}$ est une réflexion, dont on déterminera le plan.

3. Soit P_1 , P_2 et P_3 trois plans passant par une même droite. Démontrer que $s_{P3} \circ s_{P2} \circ s_{P1}$ est une réflexion, dont on déterminera le plan.

4. Soit P et Q deux plans quelconques de l'espace. Démontrer que

$$s_Q \circ s_P = s_P \circ s_Q \quad \Leftrightarrow \quad P \perp Q \quad \text{ou} \quad P = Q \ .$$

5. Soit P_1 et P_2 deux plans sécants, et P_3 un plan orthogonal à la droite d'intersection de P_1 et P_2 . Démontrer que $s_{P3} \circ s_{P2} \circ s_{P1}$ est une réflexion tournée, dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Déplacements, antidéplacements

***Déplacements* / ÇäÊÞÇá *, antidéplacements* / ÇäÊÞÇá ãÖÇÏ**

Un déplacement est une isométrie qui transforme un repère orthonormé en un repère de même sens.

Un antidéplacement est une isométrie qui transforme un repère orthonormé en un repère orthonormé de sens contraire.

Exemple fondamental

Une réflexion est un antidéplacement.

Pour une interprétation imagée de cette propriété, voir Miroirs.

Propriétés

Le produit de deux déplacements est un déplacement.

L'ensemble des déplacements de l'espace, muni de la loi de composition des applications, est un groupe (c'est un sous-groupe du groupe des isométries).

Le produit de deux antidéplacements est un déplacement.

Le produit d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Propriété

Une isométrie de l'espace est ou bien un déplacement, ou bien un antidéplacement. C'est un déplacement (respectivement : un antidéplacement) si c'est le produit d'un nombre pair (respectivement : impair) de réflexions.

Exemples

Déplacements : les translations, les rotations.

Antidéplacements : les réflexions, les réflexion tournées.

(Cette liste est incomplète)

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

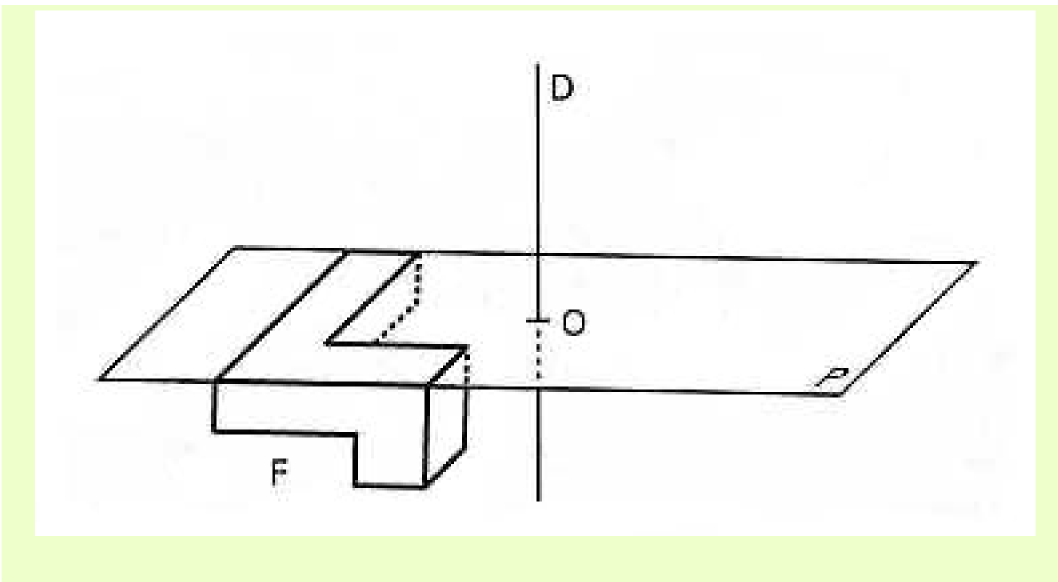
Déplacements, antidéplacements

Exercices

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. *Trois symétries* (voir aussi Trois symétries)

Le schéma ci-dessous représente un polyèdre F de l'espace, dont une face est collée à un plan P .



La doite D est orthogonale à P , et toutes les arêtes du polyèdre sont orthogonales deux à deux.

Dessiner les images de F par :

a) la symétrie orthogonale par rapport au plan P

b) la symétrie orthogonale par rapport à la droite D

c) la symétrie centrale par rapport à O .

Ces symétries sont-elles des déplacements ou des antidéplacements ? Le polyèdre F et le polyèdre image, par chacune de ces symétries, sont-ils "de même sens" ?

2. *Composition de deux symétries centrales*

Le produit $s_{O'} \circ s_O$ de deux symétries centrales de l'espace est-il un déplacement ou un antidéplacement ? A quelle isométrie simple ce produit est-il égal ? (Faire le schéma d'un point M quelconque de l'espace, et de son image par $s_{O'} \circ s_O$.) Ce produit est-il commutatif ?

3. *Composition de deux demi-tours*

On considère deux droites D et D' , et les demi-tours s_D et $s_{D'}$.

a) Le produit $s_{D'} \circ s_D$ est-il un déplacement ou un antidéplacement ?

b) Si D et D' sont parallèles, démontrer que $s_{D'} \circ s_D$ est une translation dont on précisera le vecteur. (Utiliser la décomposition des demi-tours en produits de réflexions bien choisies.)

c) Si D et D' sont sécantes, démontrer que $s_{D'} \circ s_D$ est une rotation, dont on déterminera l'axe et l'angle. (Utiliser la décomposition des demi-tours en produits de réflexions bien choisies.)

d) Si D et D' sont non coplanaires, utiliser une droite auxiliaire et les résultats précédents pour démontrer que :

$$s_{D'} \circ s_D = r(L_{\vec{k}}, \alpha) \circ t_{\vec{u}}$$

où L est la perpendiculaire commune aux droites D et D' , orientée par un vecteur $\vec{k}$, et où, si on note H et H' les pieds de L sur D et D' ,

$$\alpha = 2\,(\widehat{D, D'}) \quad \text{(pour l'orientation donnée par } \vec{k}\text{)}$$

$$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{HH'}.$$

(Une telle isométrie s'appelle un vissage.) En utilisant une autre droite auxiliaire, démontrer que :

$$r(L_{\vec{k}}, \alpha) \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ r(L_{\vec{k}}, \alpha)$$

e) Dans chacune des positions relatives de D et D' , le produit $s_{D'} \circ s_D$ est-il commutatif ?

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

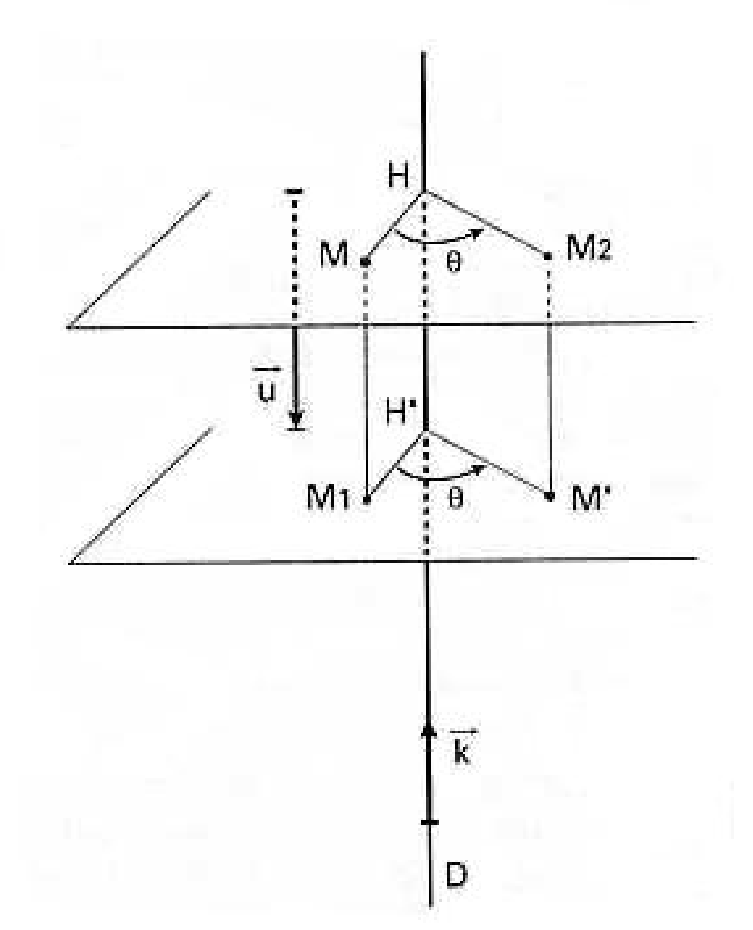
Vissages

Définition

On appelle *vissage* , ou encore *déplacement hélicoïdal* / ÇäÊÞÇá áæáÈí , le produit $r(D_{\vec{k}}, \theta) \circ t_{\vec{u}}$ d'une rotation et d'une translation, l'angle de la rotation étant différent de zéro modulo 2π, et le vecteur de la translation étant non nul et dans la direction de l'axe de la rotation. Le produit $r(D_{\vec{k}}, \theta) \circ t_{\vec{u}}$ s'appelle *forme réduite* du vissage.

Le vissage $r(D_{\vec{k}}, \theta) \circ t_{\vec{u}}$ ($\theta \neq 0 \; [2\pi]$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \parallel D$)

Pour obtenir l'image M' d'un point M , on translate M par $t_{\vec{u}}$, ce qui donne le point intermédiaire M_1 , puis on fait tourner



M_1 par la rotation $r(D_{\vec{k}}, \theta)$, ce qui donne M'.

(On peut aussi faire d'abord tourner M par $r(D_{\vec{k}}, \theta)$, ce qui donne M_2, puis translater M_2 par $t_{\vec{u}}$, ce qui donne également M'.)

Propriété

Un vissage est un déplacement.

Démonstration : un vissage est, par définition, le produit de deux déplacements.

Propriété

La forme réduite d'un vissage est commutative :

$$r(D_{\vec{k}}, \theta) \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ r(D_{\vec{k}}, \theta) \quad (\theta \neq 0\ [2\pi],\ \vec{u} \neq \vec{0},\ \vec{u}\ //\ D).$$

Cette propriété est visible sur le schéma. Pour une démonstration, voir l'exercice 3 page précédente.

Points fixes / äÞÇØ ËÇÈÊÉ

Un vissage n'admet pas de points fixes.

voir l'exercice 3

Invariants globaux / áÇãÊÛíøÑÉ ÅÌãÇáíÇ

Soit f un vissage :

$$f = r\,(D\,\overrightarrow{k}\,, \theta)\circ t\,\overrightarrow{u} \qquad (\text{où } \theta \neq 0\ [2\pi],\ \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{u}\ //\ D).$$

La **droite** D est globalement invariante par f, et c'est la seule.

1) Si l'angle θ est plat ($\theta = \pi\ [2\pi]$), les **plans** globalement invariants par f sont les plans contenant D. **2)** Si l'angle n'est pas plat, il n'existe aucun plan globalement invariant par f.

Voir les exercices 4 et 5

Un vissage n'est ni une translation, ni une rotation, ni une réflexion, ni une réflexion tournée.
Remarque et démonstration

Eléments caractéristiques / ÚäÇÕÑ ããíøöÒÉ

La forme réduite d'un vissage

$$r\,(D\,\overrightarrow{k}\,, \theta)\circ t\,\overrightarrow{u} \qquad (\text{où } \theta \neq 0\ [2\pi],\ \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{u}\ //\ D)$$

est unique. D, θ et $\overrightarrow{u}$ s'appellent *l'axe, l'angle et le vecteur du vissage* (θ est défini modulo 2π, et il change de signe lorsque l'on change l'orientation $\overrightarrow{k}$ de l'axe) ; D, θ et $\overrightarrow{u}$ sont les éléments caractéristiques du vissage.

Voir l'exercice 6

Suite

Accueil

Vissages

Exercices

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. Soit $r(D_{\vec{k}}, \pi/6) \circ t_{\vec{u}}$ un vissage, d'axe D orienté par $\vec{k}$, d'angle $\pi/6$, et de vecteur $\vec{u}$ donné ($\vec{u}$ est dans la direction de D, mais pas nécessairement de même sens que $\vec{k}$).

Faire un schéma représentant D et $\vec{k}$, $\vec{u}$, un point M de l'espace n'appartenant pas à D, et les images de M par :

$r(D_{\vec{k}}, \pi/6) \circ t_{\vec{u}}$

$r(D_{-\vec{k}}, -\pi/6) \circ t_{-\vec{u}}$

$r(D_{\vec{k}}, -\pi/6) \circ t_{-\vec{u}}$

$[\, r(D_{\vec{k}}, \pi/6) \circ t_{\vec{u}} \,]^{-1}$.

2. Soit $r(D_{\vec{k}}, \theta) \circ t_{\vec{u}}$ (où $\theta \neq 0\ [2\pi]$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{u}$ // D) un vissage quelconque.

Quelle est l'image de D par la translation $t_{\vec{u}}$? par la rotation $r(D_{\vec{k}}, \theta)$? par le vissage ?

3. Il est intuitivement évident qu'un vissage n'admet pas de points fixes : sous l'effet du vissage, chaque point de l'espace se déplace le long de l'axe en tournant, si bien que le point objet et le point image ne sont pas situés en face du même point de l'axe (penser par exemple à une vis dont l'axe est vertical et dont tous les points montent, ou descendent, sous l'effet du vissage). On demande de transformer cette idée en démonstration. On traduira par exemple *"être situé en face du même point de l'axe"* par *"avoir la même projection orthogonale sur l'axe"* (la projection orthogonale d'un point de l'espace sur l'axe est l'intersection de l'axe avec le plan orthogonal à l'axe passant par le point).

4. Soit $r(D_{\vec{k}}, \theta) \circ t_{\vec{u}}$ (où $\theta \neq 0\ [2\pi]$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{u}$ // D) un vissage quelconque.

L'exercice 2 ci-dessus prouve que D est une droite globalement invariante par le vissage. Nous allons démontrer que c'est la seule.

Soit Δ une droite quelconque de l'espace, dont on suppose qu'elle est globalement invariante par le vissage.

a) On suppose Δ // D . Quelle est l'image de Δ par $t_{\vec{u}}$? Quelle est par conséquent l'image de Δ par $r(D_{\vec{k}}, \theta)$? En conclure que $\Delta = D$ (en utilisant les propriétés des rotations).

b) Si Δ et D sont sécantes, quelle est nécessairement l'image de leur point d'intersection par le vissage ? En conclure que l'hypothèse est impossible.

c) Si Δ et D sont non coplanaires, soit L leur perpendiculaire commune. Quelle est nécessairement l'image de L par le vissage ? En conclure que l'hypothèse est impossible.

5. Soit $r(D_{\vec{k}}, \theta) \circ t_{\vec{u}}$ (où $\theta \neq 0\ [2\pi]$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{u}$ // D) un vissage quelconque.

Nous allons étudier les plans globalement invariants par le vissage.

Soit Q un plan quelconque de l'espace, dont on suppose qu'il est globalement invariant par le vissage.

a) Si Q est sécant avec D , quelle est nécessairement l'image de leur point d'intersection par le vissage ? En conclure que l'hypothèse est impossible.

b) On suppose Q // D . Quelle est l'image de Q par $t_{\vec{u}}$? Quelle est par conséquent l'image de Q par $r(D_{\vec{k}}, \theta)$? Conclure en utilisant les propriétés des rotations.

6. Soit $r(D_{\vec{k}}, \theta) \circ t_{\vec{u}}$ (où $\theta \neq 0\ [2\pi]$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{u}\ //\ D$) un vissage quelconque.

Nous allons démontrer que la forme réduite du vissage est unique.

Soit une autre forme réduite du vissage :

$$f = r(D'_{\vec{k}'}, \theta') \circ t_{\vec{u}'} \quad (\text{où } \theta' \neq 0\ [2\pi],\ \vec{u}' \neq \vec{0} \text{ et } \vec{u}'\ //\ D)\ .$$

D'après la première forme, quelles sont les droites globalement invariantes par le vissage ?

D'après la deuxième forme, quelles sont-elles ? En déduire que $D = D'$. En utilisant les points de cet axe commun, démontrer que $\vec{u} = \vec{u}'$, puis que $\theta = \theta'\ [2\pi]$ (en prenant $\vec{k} = \vec{k}'$) .

Suite

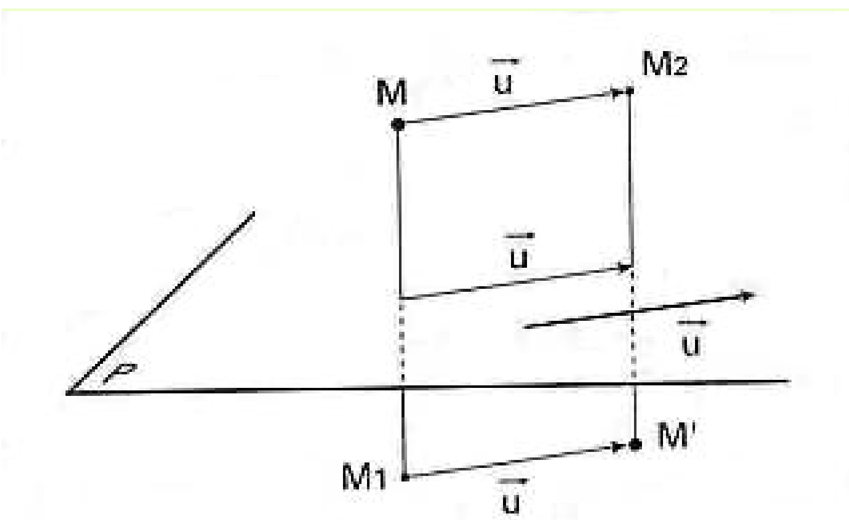
Accueil

Réflexions glissées

Dans les paragraphes précédents, nous avons rencontré tous les types d'isométries de l'espace, sauf les réflexions glissées. Pouvez-vous imaginer la définition d'une réflexion glissée ?

Définition

Une *réflexion glissée* est le produit $t_{\vec{u}} \circ s_P$ d'une réflexion et d'une translation, le vecteur de la translation étant non nul et appartenant à la direction du plan de la réflexion. Le produit $t_{\vec{u}} \circ s_P$ s'appelle *forme réduite* de la réflexion glissée.



La réflexion glissée $t_{\vec{u}} \circ s_P$

($\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}$ // P)

Pour obtenir l'image M' d'un point M , on réfléchit M par rapport à P , ce qui donne le point intermédiaire M_1 , puis on translate M_1 par $t_{\vec{u}}$, ce qui donne M' .

(On peut aussi translater d'abord M par $t_{\vec{u}}$, ce qui donne M_2 , puis réfléchir M_2 par rapport à P , ce qui donne également M' .)

Propriété

Une réflexion glissée est un antidéplacement.

Démonstration : une réflexion glissée est, par définition, le produit d'un déplacement et d'un antidéplacement.

Propriété

La forme réduite d'une réflexion glissée est commutative :

$$t_{\vec{u}} \circ s_P = s_P \circ t_{\vec{u}} \quad (\vec{u} \neq \vec{0} , \vec{u} \,//\, P) \ .$$

Cette propriété est visible sur le schéma. Pour une démonstration, voir l'exercice 1.

***Points fixes /* äÞÇØ ËÇÈÊÉ**

Une réflexion glissée n'admet pas de points fixes.

Voir l'exercice 4

Une réflexion glissée n'est ni une translation, ni une rotation, ni un vissage, ni une réflexion, ni une réflexion tournée. Démonstration

***Invariants globaux /* áÇãÊÛíÑÉ ÅÌãÇáíÇ**

Soit f une réflexion glissée :

$$f = t_{\vec{u}} \circ s_P = s_P \circ t_{\vec{u}} \quad (\text{où } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{u} \,//\, P).$$

Les **droites** globalement invariantes par f sont les droites qui sont à la fois incluses dans P et dans la direction de $\vec{u}$.

Les **plans** globalement invariants par f sont le plan P, et les plans orthogonaux à P dont la droite d'intersection avec P est dans la direction de $\vec{u}$.

Voir les exercices 5 et 6

***Eléments caractéristiques* / ÚäÇÕÑ ãåíøöÒÉ**

La forme réduite d'une réflexion gissée

$$t_{\vec{u}} \circ s_P \quad (\text{où } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{u} \,//\, P)$$

est unique. P et $\vec{u}$ s'appellent *le plan et le vecteur de la réflexion glissée* ; ce sont les éléments caractéristiques de la réflexion glissée.

Voir l'exercice 7

Réflexions glissées

Exercices

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. Soit $f = t_{\vec{u}} \circ s_P$ une réflexion glissée ($\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}$ // P) . En décomposant la translation en produit de réflexions, démontrer la commutativité du produit :

$$t_{\vec{u}} \circ s_P = s_P \circ t_{\vec{u}} \quad (\text{où } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{u} \,//\, P) .$$

(Voir : Composition de réflexions - exercice 4)

2. Soit $f = t_{\vec{u}} \circ s_P$ une réflexion glissée ($\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{u}$ // P) . Quel est le produit $f \circ f$ de la réflexion glissée par elle-même (nature et éléments caractéristiques) ?

3. Soit $f = t_{\vec{u}} \circ s_P$ une réflexion glissée ($\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{u}$ // P) . Quelle est l'image par f du plan P ? Quelle est la restriction / ÇÞÊÕÇÑ à P de f ? Quelle est l'image par f de chaque demi-espace limité par P ?

4. En utilisant les résultats de l'exercice précédent, démontrer que la réflexion glissée $t_{\vec{u}} \circ s_P$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}$ // P) ne possède aucun points fixes, ni dans P , ni en dehors de P .

5. Soit $f = s_P \circ t_{\vec{u}}$ une réflexion glissée ($\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{u}$ // P) . Nous allons démontrer que les droites globalement invariantes par f sont les droites qui sont à la fois incluses dans P et dans la direction de $\overrightarrow{u}$. Soit Δ une droite quelconque de l'espace, dont on suppose qu'elle est globalement invariante par f. Quelle est nécessairement l'image de Δ par $f \circ f$? En utilisant le résultat de l'exercice 2, démontrer que Δ est dans la direction de $\overrightarrow{u}$. Quelle est par conséquent l'image de Δ par $t_{\overrightarrow{u}}$? par s_P ? Conclure.

6. Soit $f = s_P \circ t_{\overrightarrow{u}}$ une réflexion glissée $(\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{u} \,//\, P)$. En s'inspirant de l'exercice précédent, démontrer que les plans globalement invariants par f sont le plan P, et les plans orthogonaux à P dont la droite d'intersection avec P est dans la direction de $\overrightarrow{u}$.

7. Soit $f = s_P \circ t_{\overrightarrow{u}}$ (où $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{u} \,//\, P$) une réflexion glissée quelconque. Nous allons démontrer que la forme réduite de la réflexion glissée est unique. Soit une autre forme réduite de la réflexion glissée :

$$f = s_{P'} \circ t_{\overrightarrow{u}'} \quad (\text{où } \overrightarrow{u}' \neq \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{u}' \,//\, P')\ .$$

D'après la première forme, quel est le produit $f \circ f$? (Voir l'exercice 2.) D'après la deuxième forme, quel est ce produit ? En déduire que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}'$, puis que $P = P'$.

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Liste complète des isométries

Les mathématiques démontrent (et nous l'admettrons) que le tableau complet des isométries de l'espace est le suivant.

DÉPLACEMENTS	ANTIDÉPLACEMENTS
Translations Rotations Vissages	Réflexions Réflexions tournées Réflexions glissées

Pour obtenir les définitions et les invariants, cliquer sur le nom de l'isométrie

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

EXERCICES

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. *Isométries et points invariants*

Quelle est la nature des isométries suivantes de l'espace :

a) un déplacement sans points invariants ?

b) un déplacement avec au moins un point invariant ?

c) un antidéplacement sans point invariants ?

d) un antidéplacement avec au moins un point invariant ?

2. *Symétrie*

Soit D une droite de l'espace. Donner la liste des isométries de l'espace qui appliquent la droite D globalement sur elle-même.

3. *Symétrie*

Soit P un plan de l'espace. Donner la liste des isométries de l'espace qui appliquent le plan P globalement sur lui-même.

4. *Symétrie*

Soit A et B deux points distincts de l'espace. Donner la liste des isométries de l'espace qui laissent la figure $\{ A , B \}$ globalement invariante.

5. *Demi-tours*

Dans l'espace, soit D_1 , D_2 et D_3 trois droites, concourantes en un point A , et orthogonales deux à deux. On désigne par s_1, s_2 et s_3 les demi-tours d'axes respectifs D_1, D_2 et D_3.

Démontrer que $\{ Id, s_1, s_2, s_3 \}$ muni de la loi de composition des applications, est un groupe.

6. *Produit d'une translation et d'une réflexion quelconques*

On veut étudier le produit $s_P \circ t_{\vec{v}}$ d'une translation et d'une réflexion, dans toutes les dispositions possibles du vecteur par rapport au plan.

a) On suppose $\vec{v} \perp P$. Démontrer que $s_P \circ t_{\vec{v}}$ est une réflexion dont on déterminera le plan en fonction de P et de $\vec{v}$. (On pourra décomposer $t_{\vec{v}}$ en produit de réflexions bien choisies.)

b) Si $\vec{v}$ est dans la direction de P, quelle est l'isométrie $s_P \circ t_{\vec{v}}$?

c) On ne suppose rien sur $\vec{v}$. Etudier $s_P \circ t_{\vec{v}}$ en décomposant $\vec{v}$ en une somme de deux vecteurs, l'un orthogonal à P, l'autre dans la direction de P.

7. *Produit d'une translation et d'une rotation quelconques*

On veut étudier le produit $r(D_{\vec{k}}, \theta) \circ t_{\vec{v}}$ d'une translation et d'une rotation, dans toutes les dispositions possibles du vecteur par rapport à l'axe de la rotation.

a) On suppose $\vec{v} \perp D$. Démontrer que $r(D_{\vec{k}}, \theta) \circ t_{\vec{v}}$ est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle en fonction de D, θ et $\vec{v}$. (On pourra décomposer $r(D_{\vec{k}}, \theta)$ et $t_{\vec{v}}$ en produits de réflexions bien choisies.) Faire deux schémas, l'un représentant en perspective cavalière les objets de l'espace, l'autre représentant les intersections de ces objets avec un plan orthogonal à D, ce plan étant dessiné à plat sur la feuille de papier.

b) Si $\vec{v}$ est dans la direction de D, quelle est l'isométrie $r(D_{\vec{k}}, \theta) \circ t_{\vec{v}}$?

c) On ne suppose rien sur $\vec{v}$. Etudier $r(D_{\vec{k}}, \theta) \circ t_{\vec{v}}$ en décomposant $\vec{v}$ en une somme de de deux vecteurs, l'un orthogonal à D, l'autre dans la direction de D.

8. *Produit d'une translation et d'une réflexion tournée quelconques*

Utiliser les résultats des exercices 6 et 7 précédents pour étudier un tel produit.

9. *Commutativité*

Le produit $s_P \circ t_{\vec{v}}$, où $\vec{v}$ **n'est pas** dans la direction de P, est-il commutatif ? (Utiliser les résultats de l'exercice 6.)

10. *Commutativité*

Le produit $r(D_{\vec{k}}, \theta) \circ t_{\vec{v}}$, où $\vec{v}$ **n'est pas** dans la direction de D, est-il commutatif ? (Utiliser les résultats de l'exercice 7.)

11. *Divers*

Soit un point O et une droite D quelconques de l'espace. On veut étudier le produit $s_D \circ s_O$ de la symétrie centrale s_O et de la symétrie axiale orthogonale s_D.

a) Le produit $s_D \circ s_O$ est-il un déplacement ou un antidéplacement ?

b) Si $O \in D$, quelle est l'isométrie $s_D \circ s_O$ (nature et éléments caractéristiques) ?

c) On suppose que $O \notin D$. Soit P le plan orthogonal à D et passant par O. Faire un schéma représentant D, O, et P. Dessiner un point M appartenant à P et son image M' par $s_D \circ s_O$. Quelle est la restriction au plan P de $s_D \circ s_O$?

Refaire un schéma représentant D, O et P, et dessiner un point N appartenant à D, et son image N' par $s_D \circ s_O$. A votre avis, quelle est l'isométrie de l'espace $s_D \circ s_O$ (nature et éléments caractéristiques) ? Démontrer que cette intuition est juste. (On pourra utiliser comme auxiliaire la symétrie centrale par rapport au point d'intersection de D et de P.)

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Symétrie dans l'espace

De la même manière qu'en géométrie plane, la régularité d'un objet de l'espace est décrite par le groupe de symétrie (mathématique) de cet objet. Ce groupe de symétrie est l'ensemble des similitudes de l'espace qui appliquent globalement l'objet sur lui-même.
L'étude détaillée des similitudes de l'espace ne figure pas dans les programmes de l'enseignement secondaire, mais tout le monde connait au moins les homothéties, dont la définition dans l'espace est la même qu'en géométrie plane.
Cependant, dans l'espace comme en géométrie plane, les groupes de symétrie d'objets bornés ne contiennent que des isométries. On peut donc étudier un grand nombre de symétries, en l'absence de toutes connaissances sur les similitudes.

Groupe de symétrie d'une figure

Définition
Une *figure / Ôßá* de l'espace est une partie de l'espace.

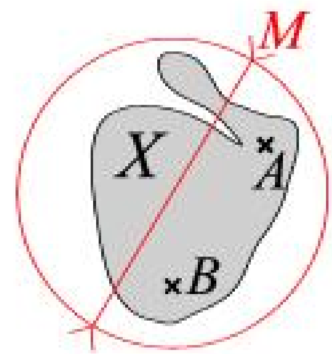
Définition
Le *groupe de symétrie / ÒãÑÉ ÇÚÊÏÇá* d'une figure de l'espace est l'ensemble des similitudes de l'espace qui laissent la figure globalement invariante.

Définition
Une figure X est *bornée* s'il existe une boule de l'espace qui la contienne, autrement dit, s'il existe un nombre réel M strictement positif tel que :

$$\forall\ A \in X \qquad \forall\ B \in X \qquad d(A, B) < M$$

où d est la distance de l'espace affine euclidien.

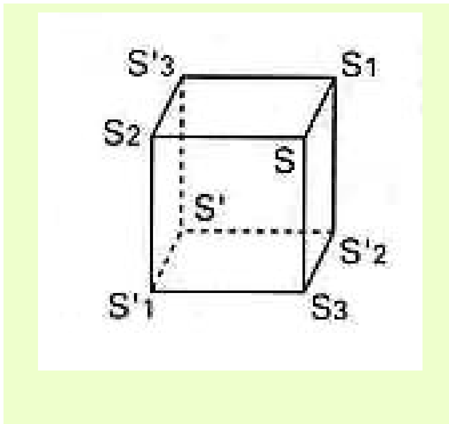
(Intuitivement, une figure bornée est une figure qui ne s'étend pas à l'infini.)



Propriété
Si X est une figure bornée et non réduite à un point, son groupe de symétrie ne contient que des isométries.

Le cube

Faces, arêtes, sommets



Un cube a 6 faces, 8 sommets, et 12 arêtes.

Les faces $S\,S_1\,S'_3\,S_2$ et $S_3\,S'_2\,S\,S'_1$ sont opposées. Les faces $S\,S_1\,S'_3\,S_2$ et $S\,S_1\,S'_2\,S_3$ sont adjacentes.

Les sommets S et S' sont opposés. Les sommets S et S_1 sont adjacents. Les sommets S et S'_1 ne sont ni opposés, ni adjacents.

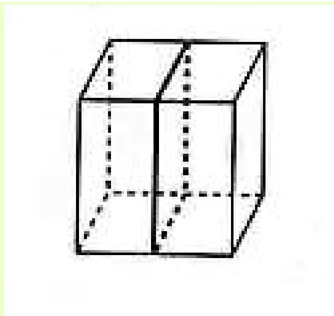
Les arêtes $S\,S_1$ et $S'_1\,S'$ sont opposées. Les arêtes $S\,S_1$ et $S_1\,S'_2$ sont adjacentes. Les arêtes $S\,S_1$ et $S'\,S'_2$ ne sont ni opposées, ni adjacentes.

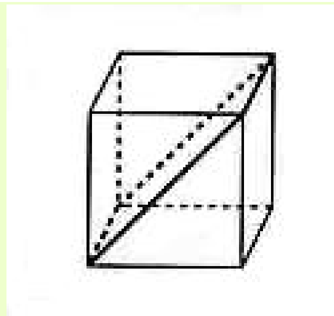
> ***Opposés, adjacents***
> Notons O le centre du cube.
> On appelle *opposés* deux éléments du cube qui sont symétriques par rapport à O.
> Deux faces sont dites *adjacentes* si elles ont en commun une arête, deux arêtes sont dites *adjacentes* si elles ont en commun un sommet, deux sommets sont dits *adjacents* s'ils appartiennent à une même arête.

Page précédente Page suivante

Groupe de symétrie du cube

Réflexions





Plan médiateur	Plan diagonal

Plans médiateurs, plans diagonaux
Un plan *médiateur* du cube est un plan médiateur de 4 arêtes parallèles.
Un plan *diagonal* du cube est un plan contenant deux arêtes opposées du cube.

Le cube possède 9 plans de symétrie : 3 plans médiateurs et 6 plans diagonaux.

Voir les exercices 1, 2 et 6

Suite

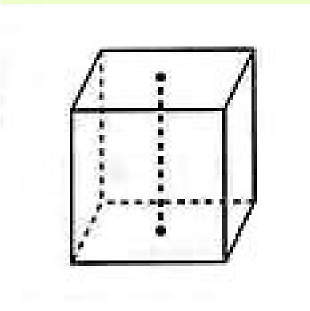
Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

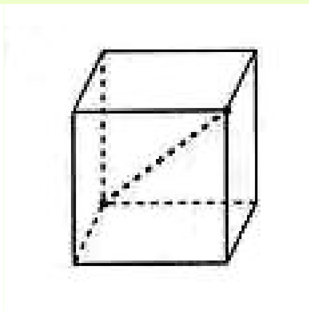
Page précédente Page suivante

Groupe de symétrie du cube

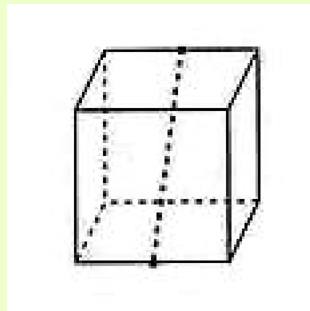
Rotations



Axe d'ordre 4



Axe d'ordre 3



Axe d'ordre 2

Axe de rotation d'ordre n d'une figure

Une droite est dite *axe de rotation d'ordre n* d'une figure si le groupe de symétrie de la figure contient exactement n rotations dont l'axe est cette droite.

Les n rotations constituent un sous-groupe du groupe de symétrie de la figure.

Les angles des n rotations sont les n multiples de $2\pi /n$ (c'est-à-dire : $2\pi /n$, $2(2\pi /n)$, $3(2\pi /n)$, ..., $(n -1)(2\pi /n)$, et 0).

Le cube possède 3 axes de rotation d'ordre 4 , 4 axes d'ordre 3 et 6 axes d'ordre 2 , ce qui fait en tout 24 rotations.

Les axes d'ordre 4 passent par les centres de deux faces opposées ; les axes d'ordre 3 passent par deux sommets opposés ; les axes d'ordre 2 passent par les milieux de deux arêtes opposées.

Pour les axes d'ordre 4, les angles des rotations sont $\pi /2$, π , $3\pi /2$ et 0 .

Pour les axes d'ordre 3, ce sont $2\pi /3$, $4\pi /3$ et 0 .

Pour les axes d'ordre 2, ce sont π et 0 .

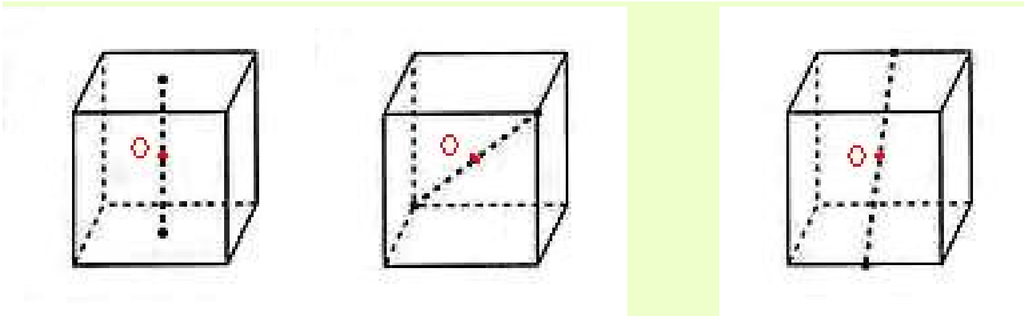
Voir les exercices 9 et 12

Suite

Accueil

Groupe de symétrie du cube

Réflexions tournées



Axe d'ordre 4 Axe d'ordre 3 Axe d'ordre 2

Le goupe de symétrie du cube contient 15 réflexions tournées, dont la symétrie centrale s_O .

Toutes les réflexions tournées du groupe ont pour centre O , et elles ont pour axes les axes de rotation du cube.

Pour les axes d'ordre 4, les angles des réflexions tournées sont $\pi/2$, $3\pi/2$ et π .
Pour les axes d'ordre 3, ce sont $\pi/3$, $-\pi/3$, et π .
Pour les axes d'ordre 2, il n'y a que π .

Voir les exercices 16 et 17

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

Groupe de symétrie du cube

Liste complète des éléments

Le groupe du cube est constitué des 48 éléments :

9 réflexions
24 rotations
15 réflexions tournées.

L'ensemble des 24 rotations est un sous-groupe du groupe de symétrie du cube.

Voir l' exercice 18

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Le cube

Exercices

Pour tous les exercices, on demande de faire des dessins en perspective cavalière. Lorsque deux droites, ou une droite et un plan, ou deux plans, sont sécants, il est nécessaire de dessiner les intersections. Lorsqu'un plan coupe un cube, les segments d'intersection du plan avec les faces du cube suffisent à représenter le plan.

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. Est-il facile de compter les plans médiateurs d'un cube ? (On pourra utiliser le fait que 12 : 4 = 3 .)

2. Est-il facile de compter les plans diagonaux d'un cube ?

3. On veut étudier l'intersection de deux plans de symétrie d'un cube. Dessiner en perspective cavalière un cube, deux plans de symétrie du cube (**il suffit de dessiner les segments d'intersection des plans avec les faces du cube**), et la droite d'intersection des deux plans, lorsque les plans sont :

a) deux plans médiateurs du cube

b) un plan diagonal et un plan médiateur orthogonaux à une même face du cube

c) un plan diagonal et un plan médiateur, qui ne sont pas orthogonaux à une même face

c) deux plans diagonaux orthogonaux à une même face du cube

d) deux plans diagonaux qui ne sont pas orthogonaux à une même face.

4. Soit S un sommet d'un cube. On nomme S' le sommet opposé à S, et on nomme S_1 , S_2 et S_3 les sommets adjacents à S. Existe-t-il des faces du cube orthogonales à la droite $(S S')$? (Si la réponse est oui, dire lesquelles.) La droite $(S_1 S_2)$ est-elle orthogonale au plan $(S S' S_3)$?

Que peut-on dire de la droite $(S S')$ et du plan $(S_1 S_2 S_3)$? En quel point remarquable du triangle $S_1 S_2 S_3$ cette droite perce-t-elle ce plan ?

5. Dessiner un cube en perspective cavalière, et deux plans diagonaux du cube, non perpendiculaires à une même face. Indiquer sur le dessin l'angle des deux plans. Que vaut cet angle ? (Utiliser un plan perpendiculaire à la droite d'intersection des deux plans.)

6. On veut démontrer que le groupe du cube ne contient pas d'autres réflexions que les 9 qu'on a déjà trouvées (exercices 1 et 2). Soit s_Q une réflexion par rapport à un plan Q quelconque. On suppose que s_Q applique globalement le cube sur lui-même.

Quelle est nécessairement l'image par s_Q du centre O du cube ? Où se trouve O par rapport à Q ?

Soit F une face donnée du cube. Si $s_Q(F)$ est la face opposée à F, quel est nécessairement le plan Q ?

Si $s_Q(F)$ est une face adjacente à F, quel est nécessairement le plan Q ?

Si $s_Q(F) = F$, quelle est nécessairement la direction du plan Q par rapport au plan P de la face ? Quelle est la restriction de s_Q à P ? Quelles sont par conséquent les droites $P \cap Q$ possibles ? Conclure.

7. On reprend les mêmes notations que pour l'exercice 4. On note de plus S'_1 , S'_2 et S'_3 les sommets respectivement opposés à S_1 , S_2 et S_3. Si r est une rotation d'axe $(S S')$ et d'angle quelconque, quelles sont les images des plans $(S_1 S_2 S_3)$ et $(S'_1 S'_2 S'_3)$ par r ?

Pour quels angles est-il possible que la rotation applique le triangle $S_1 S_2 S_3$ globalement sur lui-même ? Si θ est l'un de ces angles, et si r_θ est la rotation d'axe $S S'$ (orienté) et d'angle θ, quelle est l'image du triangle $S'_1 S'_2 S'_3$ par r_θ ? Quelle est l'image du cube par r_θ ?

8. Dessiner en perspective cavalière un cube, un axe de rotation du cube, et le plan médiateur du segment délimité par le cube sur cet axe,

a) pour un axe d'ordre 4,

b) pour un axe d'ordre 2,

c) pour un axe d'ordre 3.

Dans chaque cas, le plan est-il un plan de symétrie du cube ?

9. Dessiner en perspective cavalière un cube et l'un des axes de rotation du cube, et indiquer quelle est l'image de chacun des sommets du cube par chacune des rotations autour de cet axe,

a) si l'axe est d'ordre 4

b) s'il est d'ordre 3

c) s'il est d'ordre 2.

(Pour les cas b et c, voir les exercices 7 et 8b.)

10. Combien y a-t-il de plans de symétrie du cube passant par chaque axe de rotation du cube ?

11. Quelle est la rotation produit des réflexions par rapport à deux plans de symétrie du cube, lorsque les plans sont :

a) deux plans médiateurs du cube

b) un plan diagonal et un plan médiateur orthogonaux à une même face du cube

c) un plan diagonal et un plan médiateur, qui ne sont pas orthogonaux à une même face

c) deux plans diagonaux orthogonaux à une même face du cube

d) deux plans diagonaux qui ne sont pas orthogonaux à une même face.

(Indiquer dans chaque cas l'axe de la rotation, et préciser son angle en fonction de l'angle des deux plans.)

12. On veut démontrer que le groupe du cube ne contient pas d'autres rotations que les 24 qu'on a déjà trouvées (voir l'exercice 7) . Soit r une rotation, dont on suppose qu'elle applique globalement le cube sur lui-même.

Quelle est l'image du centre O du cube par r ? Si r n'est pas l'identité, est-il possible que O n'appartienne pas à l'axe de r ?

Dans toute la suite, on nomme S un sommet donné du cube, et S' le sommet opposé à S. On nomme S_1 , S_2 et S_3 les sommets adjacents à S, et on nomme S'_1 , S'_2 et S'_3 les sommets respectivement opposés à S_1 , S_2 et S_3.

a) On suppose que $r(S) = S$. Quel est nécessairement l'axe de r ? Quelles sont les images possibles de S_1 par r ? Quels sont les angles possibles de r ?

b) On suppose que $r(S) = S_1$. Quelle est la longueur du segment image de SS_1 par r ? Quelles sont les images possibles de S_1 par r ?

Si $r(S_1) = S$, quels sont nécessairement l'axe et l'angle de r ?

Si $r(S_1) \neq S$, quelles sont les images possibles de S_1 par r ? Quels sont les axes et les angles possibles de r ?

c) On suppose que $r(S) = S'_1$. Quelle est la longueur du segment image de SS'_1 par r ?

Si $r(S'_1) = S$, quels sont nécessairement l'axe et l'angle de r ?

Si $r(S'_1) \neq S$, quelles sont les images possibles de S'_1 par r ? Quels sont les axes et les angles possibles de r ?

d) On suppose que $r(S) = S'$. Quelle est la longueur du segment image de SS' par r ? Quelle est nécessairement l'image de S' par r ? Quel est nécessairement l'angle de r ?

Pour déterminer les axes possibles de r, on veut utiliser l'image de S_1 par r. A quelle distance de S' se trouve nécessairement cette image ? Quelles sont les images possibles de S_1 par r ?

Si $r(S_1) = S'_1$, quel est nécessairement l'axe de r ?

Si $r(S_1) = S'_2$, quel est nécessairement l'axe de r ? (Dessiner et utiliser l'intersection des plans médiateurs des segments SS' et $S_1S'_2$.)

Conclure.

$SS_1S'_3S_2$ et $S_3S'_2SS'_1$ S_1, S_2 et S_3 S'_1, S'_2 et S'_3

13. Dessiner un cube en perspective cavalière, et un axe de rotation d'ordre 3 du cube. On nomme Δ cet axe, et on l'oriente par un vecteur $\vec{k}$. On nomme S et S' les sommets du cube appartenant à Δ.

a) La rotation $r(\Delta_{\vec{k}}, \pi/3)$ appartient-elle au groupe de symétrie du cube ? Si S_1 est un sommet adjacent à S, quelle est l'image de S_1 par la rotation ?

b) Soit Q le plan orthogonal à Δ passant par O. La réflexion s_Q appartient-elle au groupe du cube ? Quelles est l'image par s_Q de l'image par $r(\Delta_{\vec{k}}, \pi/3)$ de S_1 ?

14. Si une réflexion tournée $s_P \circ r(D_{\vec{k}}, \theta)$ appartient au groupe de symétrie d'une figure donnée, est-il nécessaire que la rotation $r(D_{\vec{k}}, \theta)$, ou la réflexion s_P, appartiennent aussi au groupe de la figure ? (Voir l'exercice 13.)

15. Si une rotation $r(D_{\vec{k}}, \theta)$ et une réflexion s_P appartiennent au groupe de symétrie d'une figure donnée, est-il nécessaire que le produit $s_P \circ r(D_{\vec{k}}, \theta)$ appartienne aussi au groupe de la figure ?

16. Dessiner en perspective cavalière un cube, et l'un des axes de rotation du cube, soit D. Indiquer, dans chacun des cas indiqués ci-dessous, quelle est l'image de chaque sommet du cube par chacune des réflexions tournées admettant D pour axe, O pour centre, et dont les angles sont donnés à la page "Le cube - Réflexions tournées".

a) D est un axe d'ordre 4 (utiliser les exercices 15 et 8)

b) D est un axe d'ordre 3 (utiliser l'exercice 13)

c) D est un axe d'ordre 2 (utiliser les exercices 15 et 8).

17. On veut déduire la liste des réflexions tournées du groupe du cube de la liste des rotations du groupe. On nomme s_O la symétrie centrale par rapport au centre O du cube. Soit f une réflexion tournée quelconque. On suppose que f applique globalement le cube sur lui-même.

a) Quelle est nécessairement l'image de O par f ? En déduire que l'axe de f passe par O.

b) En utilisant une forme réduite bien choisie de s_O, démontrer que $s_O \circ f$ est une rotation, dont on déterminera l'axe et l'angle en fonction des éléments caractéristiques de f.

c) Démontrer que :

$$f \in G_C \quad \Leftrightarrow \quad s_O \circ f \in G_C$$

où G_C désigne le groupe du cube.

d) En déduire la liste des réflexions tournées du groupe. Combien y en a-t-il ? (Ne pas oublier que l'angle d'une réflexion tournée n'est pas nul. Ne pas compter plusieurs fois la symétrie centrale s_O.)

18. Pourquoi le groupe de symétrie d'un cube ne contient-il ni translations (mis à part l'identité), ni vissages, ni réflexions glissées, ni similitudes non isométriques ?

Accueil

Suite

EXERCICES

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. Quelle est la symétrie du corps humain ? Si on imagine que le dessin de Viollet-le-Duc représente la statue d'un personnage assis dans un décor en trois dimensions, comment peut-on en analyser la composition en termes mathématiques ?

2. Les bourgeons de marronnier sont des objets de l'espace. Analyser leur régularité en termes mathématiques.

3. Soit S une sphère, de centre O .

a) Soit D une droite passant par O . Faire un schéma représentant S , O , D , un point M de S , et l'image de M par une rotation autour de D dont on choisira l'angle. Quelle est la trajectoire de M sous le groupe des rotations d'axe D ? (Cette trajectoire est l'ensemble des images de M par l'ensemble des rotations d'axe D .)

b) Quel est l'ensemble des isométries de l'espace qui laissent la sphère globalement invariante ? Cet ensemble contient-il des symétries axiales orthogonales ? Peut-on dire que la sphère présente une symétrie bilatérale ?

4. Soit $[AB]$ un segment de l'espace. Quel est, dans l'espace, le groupe de symétrie de ce segment ?

5. Quel est le groupe de symétrie d'un cylindre droit dont la base est :

a) un cercle

b) un carré
c) un triangle équilatéral.

N.B.: un cylindre droit de base donnée est la figure constituée des droites (illimitées) passant par un point de la base et orthogonales au plan de la base. Ces droites s'appellent les génératrices du cylindre.

6. Soit P et P' deux plans de l'espace, parallèles et disjoints. Quel est le groupe de symétrie de la figure $P \sqcup P'$?

7. Soit T un tétraèdre régulier, c'est-a-dire un polyèdre régulier comportant quatre faces qui sont des triangles équilatéraux. On note A, B, C et D les sommets de T. On note $A * B$ le milieu de l'arête AB, $C * D$ le milieu de CD, etc. On note A' le centre de la face BCD, B' le centre de CDA, etc.

a) Démontrer que le plan $(A, B, C * D)$ est le plan médiateur du segment CD. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales. Démontrer que la droite (AA') est perpendiculaire au plan (BCD). Démontrer que la droite $(A * B, C * D)$ est la perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).

Soit O le centre du tétraèdre, c'est-a-dire l'isobarycentre des 4 points A, B, C et D. Où se trouve O par rapport aux points $A * B$ et $C * D$? Où se trouve O par rapport au plan $(B * C, B * D, A * D, A * C)$? Où se trouve O par rapport aux points A et A' ? Démontrer que le plan médiateur du segment $[A * B \quad C * D]$ est le plan $(B * C, B * D, A * D, A * C)$.

b) On veut déterminer le groupe de symétrie G_T du tétraèdre régulier.

Le groupe G_T contient-il des similitudes non isométriques ? Quelle est nécessairement l'image de O par un élément f quelconque de G_T ? G_T contient-il des translations ? des vissages ? des réflexions glissées ?

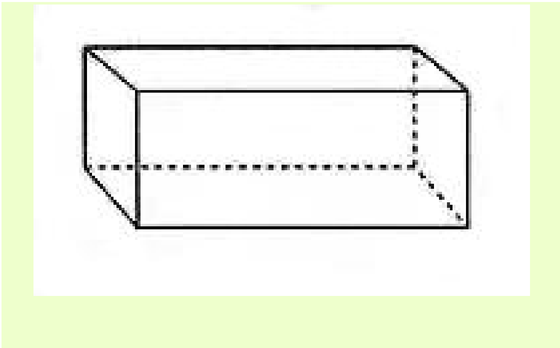
Donner la liste des plans de symétrie de T (on pourra chercher toutes les réflexions qui envoient un sommet sur lui-même, puis toutes les réflexions qui envoient un sommet sur un sommet adjacent).

Donner la liste des rotations de G_T (on pourra chercher toutes les rotations qui envoient un sommet sur lui-même, puis toutes les rotations qui envoient un sommet sur un sommet adjacent).

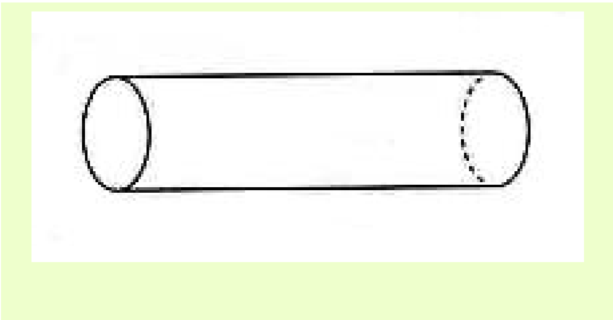
Démontrer que si f est une réflexion tournée, alors $f \circ f$ est une rotation, dont on déterminera l'axe et l'angle en fonction de l'axe et de l'angle de f. Utiliser ce résultat et la liste des rotations de G_T pour trouver la liste des rélexions tournées de G_T. Le centre O du tétraèdre est-il un centre de symétrie du tétraèdre ?

Combien G_T contient-il d'éléments ? Comparer ce nombre avec le nombre des permutations de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ des quatre sommets. (Une permutation d'un ensemble est une application bijective de l'ensemble sur lui-même. Le nombre des permutations de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ est le nombre des suites ordonnées de ces quatre points, dans un ordre relatif quelconque (les permutations ne sont pas nécessairement circulaires).)

8. Quel est le groupe de symétrie d'un parallélépipède rectangle ? (On discutera suivant le nombre de faces carrées du parallélépipède.)



9. Un cylindre, au sens usuel, est une portion de cylindre droit à base circulaire, comprise entre deux plans orthogonaux aux génératrices (voir l'exercice 5). Quel est le groupe de symétrie d'un cylindre usuel ?



10. Donner un exemple de figure de l'espace dont le groupe de symétrie contienne des réflexions tournées, mais pas de réflexions.

11. Existe-t-il des figures de l'espace dont le groupe de symétrie contienne des réflexions tournées, mais pas de rotations ?

12. La sphère était considérée par les pythagoriciens comme une figure (bornée) parfaite.

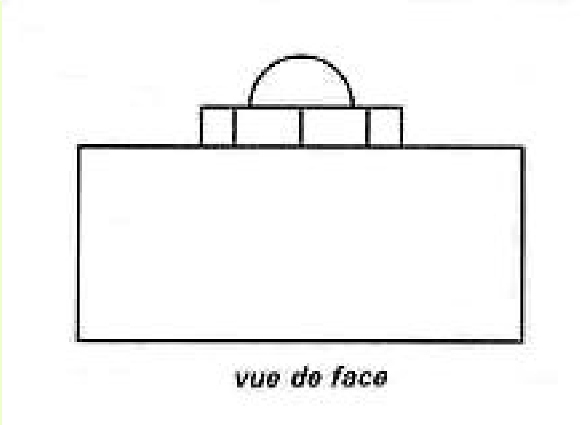
a) Enoncer une propriété mathématique traduisant cette idée.

b) Démontrer cette propriété. (On pourra s'inspirer des indications données en géométrie plane pour le cercle)

Dans l'espace physique, la direction verticale est une direction très particulière, qui n'est interchangeable avec aucune autre, alors qu'en mathématiques toutes les directions sont équivalentes (l'espace mathématique est "isotrope"). En architecture, la qualité physique de l'espace se superpose à sa qualité mathématique (de même qu'un coloriage **se superpose à des contours purs) si bien qu'une forme géométrique, dans un bâtiment, met en évidence deux groupes de symétrie au moins : le groupe de symétrie de la forme purement géométrique, et le sous-groupe obtenu en particularisant la verticale (et éventuellement d'autres directions).**

On tiendra compte de cette remarque dans l'exercice suivant.

13.



On considère un bâtiment composé d'un soubassement en forme de parallélépipède rectangle dont la face au sol est carrée, surmonté d'une partie octogonale, elle-même surmontée d'une coupole hémisphérique .

Analyser en termes mathématiques la régularité de ce bâtiment (voir la remarque ci-dessus). On étudiera la composition du bâtiment, ainsi que la progression de la symétrie du bas vers le haut.

14. On considère un escalier en colimaçon comportant 16 marches au tour, c'est-à-dire qu'il faut monter – ou descendre – 16 marches pour tourner d'un tour complet autour de l'axe de l'escalier. La hauteur entre les marches est de 20 cm. Le colimaçon est "droit", c'est-à-dire qu'on monte quand on tourne dans le sens direct, sens repéré sur un plan horizontal vu d'en haut. (Le colimaçon serait "gauche" si on montait en tournant dans le sens indirect.) Pour étudier la symétrie de cet escalier, on considère qu'il continue régulièrement et indéfiniment vers le haut et vers le bas.

a) Trouver une transformation géométrique qui applique chaque marche sur celle qui la suit immédiatement vers le haut. Même question pour appliquer chaque marche sur celle qui la suit immédiatement vers le bas.

b) L'escalier se réfléchit dans un miroir vertical. L'image de l'escalier par la réflexion est-elle un colimaçon "droit" ou un colimaçon "gauche" ? Et si le miroir est horizontal ?

c) On déplace l'escalier, le renversant d'un bloc pour amener le bas en haut et le haut en bas. Dans cette nouvelle position, le colimaçon est-il "droit" ou "gauche" ?

d) Quel est le groupe de symétrie de l'escalier ? Ce groupe contient-il des translations ? Contient-il des rotations ? Contient-il des antidéplacements ?

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

Similitudes de l'espace

Généralités

***Figures semblables* / ãÊÔÇÈåÇä**
Deux figures *semblables / ãÊÔÇÈåÇä* sont deux figures qui ont la même forme/ äÝÓ ÇáåíÆÉ (mais pas nécessairement la même dimension), par exemple : deux cubes, dont l'un est éventuellement plus petit que l'autre ; deux sphères, de rayons égaux ou différents ; deux tétraèdres de même forme ; deux secteurs angulaires de même angle ; deux droites ; deux plans ; etc.

***Similitude* / ÊÔÇÈå**
Une similitude / ÊÔÇÈå est une transformation géométrique qui transforme toute figure en une figure semblable.

Rapport de similitude
A chaque similitude est associée un rapport, c'est-à-dire un nombre réel strictement positif par lequel la similitude multiplie les distances. (Si le rapport est supérieur à 1, la similitude agrandit les figures ; si le rapport est inférieur à 1, la similitude rapetisse les figures ; si le rapport vaut 1, la similitude transforme chaque figure en une figure de même forme et de même dimension : c'est une isométrie).

Propriétés
Une similitude transforme une droite en droite et un plan en plan.
Elle conserve le parallélisme (mais pas nécessairement la distance des droites ou des plans parallèles).
Elle conserve l'orthogonalité des droites et des plans.

Propriété
Une similitude est une application bijective de l'espace sur lui-même.
Voir l'exercice 1

Propriété
L'ensemble S des similitudes de l'espace, muni de la loi de composition des applications, est un groupe.

A propos de la démonstration
Puisque S est un sous-ensemble du groupe des bijections de l'espace sur lui-même, il suffit de démontrer que S est un sous-groupe de ce groupe.
On peut exprimer la démonstration d'une manière intuitive évidente : **1.** si une certaine opération transforme une figure en une figure qui a la même forme, et si on la fait suivre d'une opération qui ne modifie pas non plus les formes, l'opération de passage de la première figure à la dernière n'a pas modifié les formes ; **2.** si une certaine opération transforme une figure en une figure qui a la même forme, l'opération de retour inverse ne modifie pas non plus les

formes ; **3.** l'opération qui consiste à ne rien changer ne modifie pas les formes.

Ces propriétés se démontrent en mathématiques par l'intermédiaire des propriétés plus précises suivantes.

Propriétés

Si f et g sont deux similitudes, de rapports respectifs h et k, alors $g \circ f$ est une similitude de rapport $k.h$.

Si f est une similitude de rapport h, alors f^{-1} est une similitude de rapport $1/h$.

L'**identité** est une similitude de rapport 1 .

Pour une démonstration, voir l'exercice 2

Suite

Accueil

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

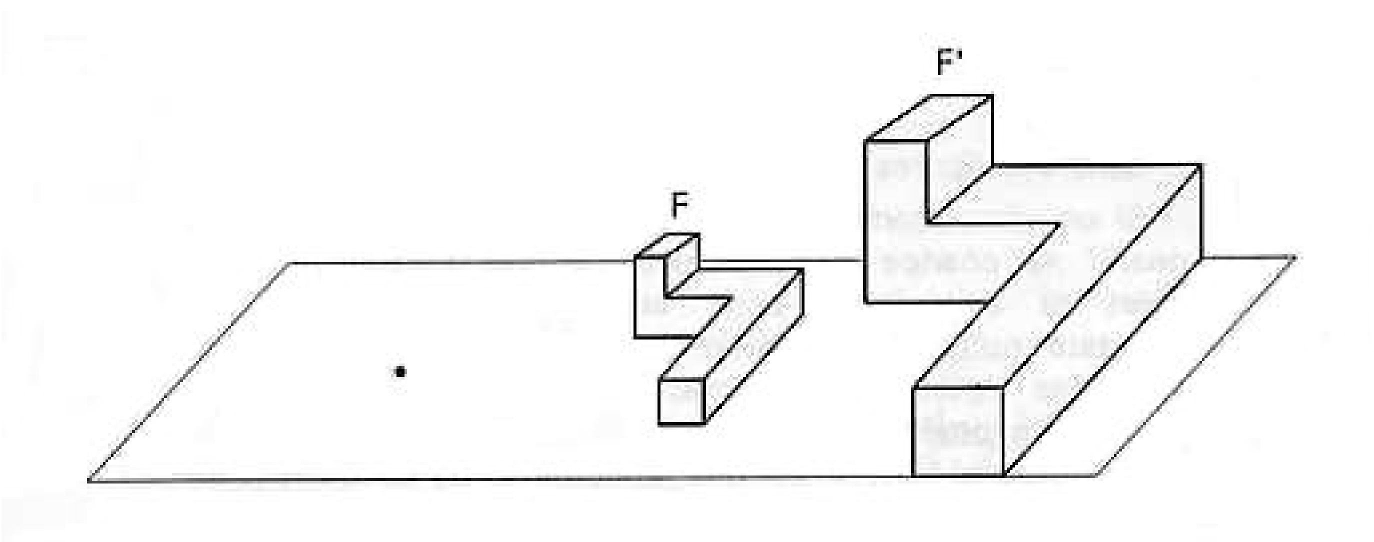
Homothéties

Dans l'espace comme en géométrie plane, les homothéties sont les exemples les plus simples de similitudes "agrandissantes" ou "rapetissantes". Leur définition dans l'espace est la même qu'en géométrie plane.

Définition

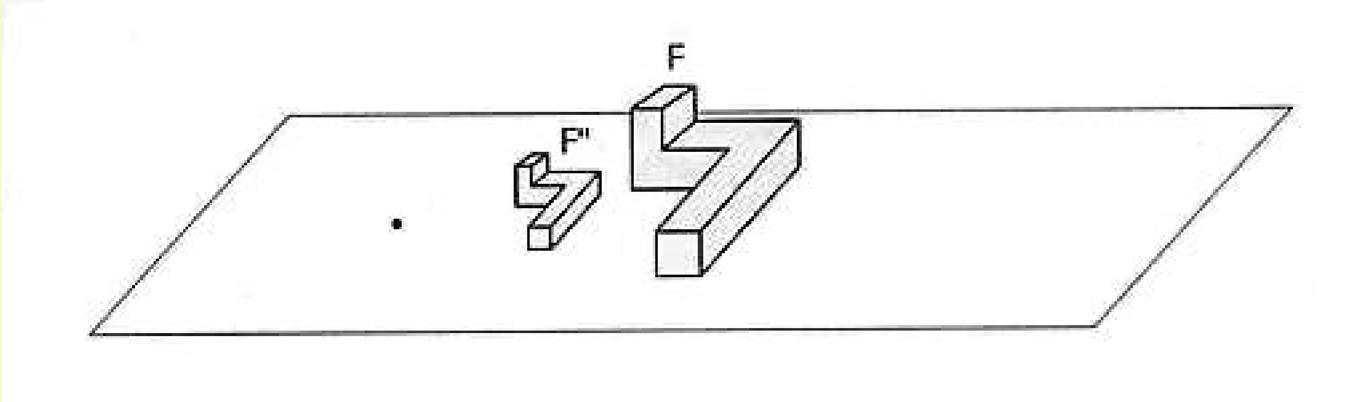
Etant donné un point A et un nombre réel k non nul, *l'homothétie* / ÊÍÇßò de centre A et de rapport k est l'application de l'espace dans lui-même qui associe à tout point M de l'espace le point M' tel que :

$$\overrightarrow{AM'} = k\ \overrightarrow{AM}$$



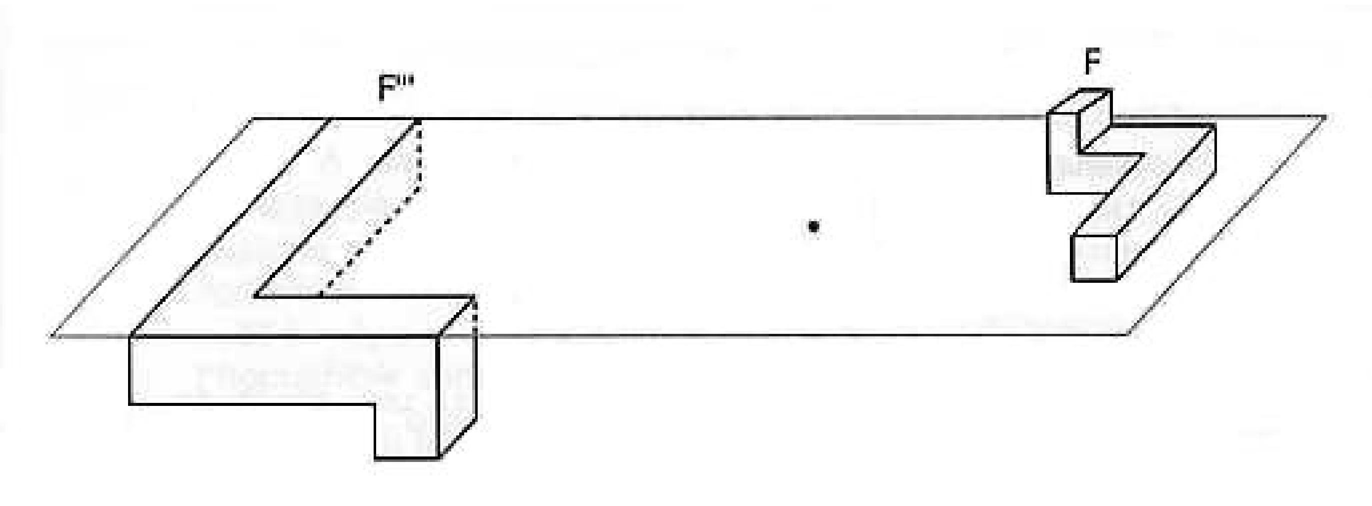
La figure F' est l'image de F par une homothétie de rapport 2

Les figures F et F' sont non seulement semblables, mais *"semblablement posées"* (comme en géométrie plane), et F' est plus grande que F .



La figure F'' est l'image de F par une homothétie de rapport 1/2

F et F'' sont semblables et *"semblablement posées"* , et F'' est plus petite que F .



La figure F''' est l'image de F par une homothétie de rapport -2

Les figures F et F''' ne sont pas *"semblablement posées"* , mais elles sont semblables et F''' est plus grande que F (les longueurs sont multipliées par 2).

Rapport d'homothétie, rapport de similitude

Une homothétie de rapport k (où $k \in \mathbf{R}$ et $k \neq 0$) est une similitude de rapport $|k|$ (les distances sont multipliées par $|k|$).

***Sens des figures* / ÇÊÌÇå ÇáÃÔßÇá**

Si on admet comme évident qu'une homothétie de rapport positif ne change pas le sens des figures (puisque la figure objet et son image sont *"semblablement posées"*), on constate qu'une homothétie de rapport négatif inverse le sens des figures asymétriques.

(Contrairement à ce qui se passe en géométrie plane.)

***Points fixes /* äÞÇØ ËÇÈÊÉ**

Une homothétie de rapport **différent de 1** possède un point fixe unique : son centre.
(Si le **rapport est 1**, l'homothétie est l'identité.)

***Invariants globaux /* áÇãÊÛíÑÉ ÅÌãÇáíÇ**

Les **droites** globalement invariantes par une homothétie distincte de l'identité sont les droites passant par le centre.

Les **plans** globalement invariants par une homothétie distincte de l'identité sont les plans passant par le centre.

Voir les exercices 3, 4 et 5

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Similitudes directes, similitudes indirectes

Similitudes directes, similitudes indirectes

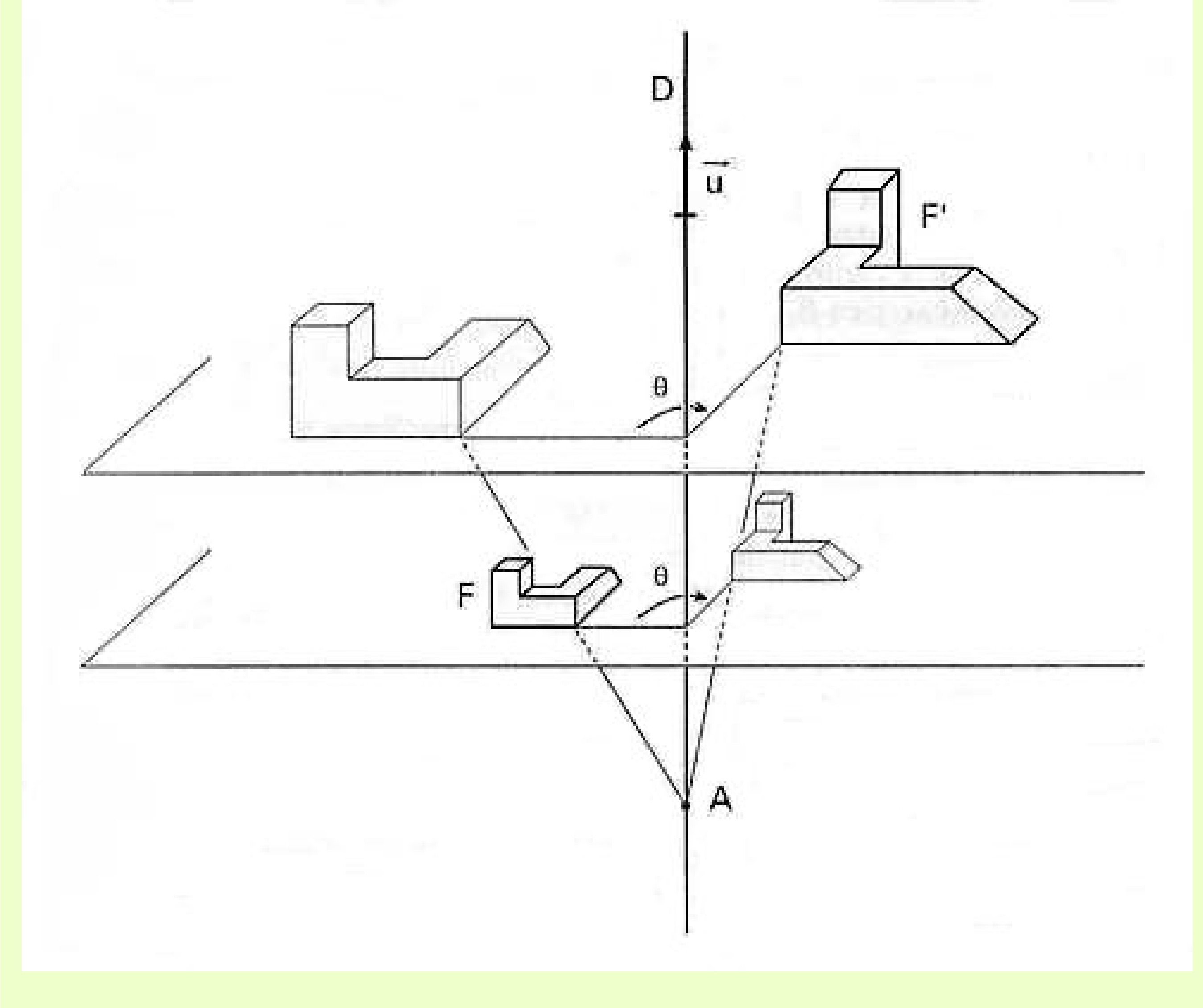
Une similitude directe est une similitude qui conserve le sens des figures.
Une similitude indirecte est une similitude qui inverse le sens des figures asymétriques.

Exemple : les homothéties

Une homothétie de rapport positif est une similitude directe.
Une homothétie de rapport négatif est une similitude indirecte.

(Une homothétie de rapport négatif inverse le sens des figures asymétriques, contrairement à ce qui se passe en géométrie plane.)

Autre exemple



Soit $h(A, k) \circ r(D\,\vec{u}, \theta)$ l'application composée d'une rotation, d'axe D orienté par $\vec{u}$ et d'angle θ, et d'une homothétie dont le centre A appartient à D et dont le rapport k est quelconque (différent de zéro).

Cette application est une similitude de rapport $|k|$: elle agrandit les figures – ou elle les rapetisse – dans le rapport $|k|$.

Si $k > 0$, c'est une similitude directe (puisque la rotation et l'homothétie conservent le sens des figures).

Si $k < 0$, c'est une similitude indirecte (puisque la rotation conserve le sens, et que l'homothétie l'inverse).

Suite

Accueil

Liste des similitudes

On démontre en mathématiques que la liste de similitudes que nous avons vues en exemples est complète. C’est ce qu’énonce le théorème suivant.

Théorème
Toute similitude, **si ce n'est pas une isométrie**, est toujours le produit d'une homothétie, de rapport positif ou négatif, et d'une rotation dont l'axe passe par le centre de l'homothétie. Ce produit est commutatif et s'appelle *forme réduite de la similitude*.

Points fixes / **äÞÇØ ËÇÈÊÉ**
Une similitude **non isométrique** de l'espace possède un point fixe et un seul, qui est le centre de l'homothétie intervenant dans une forme réduite de la similitude. Ce point s'appelle *le centre* de la similitude.
Voir l'exercice 6

Invariants globaux / **áÇãÊÛíÑÉ ÅÌãÇáíÇ**
Soit f une similitude **non isométrique** de l'espace, donnée sous forme réduite :
$f = h(A, k) \circ r(D_{\vec{u}}, \theta)$ $(k \neq 0,\ k \neq 1,\ k \neq -1,\ A \notin D)$.
Les **droites** globalement invariantes par f sont l'axe D de la rotation et : **1)** aucune autre, si la rotation n'est ni l'identité, ni un demi-tour ; **2)** les droites perpendiculaires à D en A, si la rotation est un demi-tour ; **3)** toutes les droites passant par A, si la rotation est l'identité (f est alors une homothétie).
Les **plans** globalement invariants par f sont le plan perpendiculaire à D en A et : **1)** aucun autre si la rotation n'est ni l'identité, ni un demi-tour ; **2)** les plans contenant D si la rotation est un demi-tour ; **3)** tous les plans passant par A si la rotation est l'identité (f est alors une homothétie).
Voir les exercices 7 et 8

EXERCICES

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. a) Si on imagine deux figures semblables, images l'une de l'autre par une similitude, comme deux figures "ayant la même forme", est-il possible d'imaginer deux points distincts de l'espace ayant des images confondues ?

b) En utilisant le rapport de similitude, démontrer qu'un similitude est une application injective.

(Une similitude est aussi surjective : l'image de l'espace est l'espace tout entier, mais la démonstration de cette propriété n'est pas simple.)

2. a) Soit f et g deux similitudes, de rapports respectifs h et k. Soit M et N deux points quelconques de l'espace, M' et N' leurs images par f, M'' et N'' les images de M' et N' par g.

Exprimer la distance $M''N''$ en fonction de la distance $M'N'$, puis en fonction de la distance MN. Par quel nombre l'application $g \circ f$ multiplie-t-elle les distances ?

b) On considère l'application f^{-1}, inverse de la similitude f de rapport h. Soit M et N deux points quelconques de l'espace, et M' et N' leurs images par f^{-1}. Quelles sont les images des points M' et M' par f ? Exprimer la distance MN en fonction de la distance $M'N'$, puis $M'N'$ en fonction de MN. Par quel nombre l'application f^{-1} multiplie-t-elle les distances ?

3. Soit $h(A, k)$ une homothétie de centre A et de rapport k ($k \neq 0$). Nous allons démontrer que les droites passant par A sont globalement invariantes par h. Soit D une droite contenant A.

a) Soit M un point de D. Où se trouve $h(M)$ par rapport à la droite (AM) ? En déduire que $h(D) \subset D$.

b) Soit M un point quelconque de D. Trouver un point N de D tel que $h(N) = M$. En déduire que $D \subset h(D)$. Conclure.

4. Soit $h(A, k)$ une homothétie de centre A et de rapport k ($k \neq 0$). Nous allons démontrer que les seules droites globalement invariantes par h sont les droites passant par A.

Soit D une droite quelconque de l'espace, dont on suppose qu'elle est globalement invariante par h. Soit M un point de D, distinct de A. Soit M' l'image de M par h. Les points M et M' peuvent-ils être confondus ? Où se trouve A par rapport à la droite (MM') ? Où se trouve M' par rapport à D ? Conclure.

5. Soit $h(A, k)$ une homothétie de centre A et de rapport k ($k \neq 0$). En s'inspirant des exercices 3 et 4 ci-dessus, démontrer que les plans passant par A sont globalement invariants par h, et que ce sont les seuls.

6. Soit une similitude non isométrique quelconque de l'espace, de rapport k ($k > 0$, $k \neq 1$). Soit B un point quelconque de l'espace, dont on suppose qu'il est fixe par la similitude. En utilisant le rapport de la similitude, démontrer que $B = A$.

7. $f = h(A, k) \circ r(D_{\vec{u}}, \theta)$ une similitude non isométrique quelconque de l'espace, donnée sous forme réduite ($k \neq 0$, $k \neq 1$, $k \neq -1$, $A \notin D$). Nous allons démontrer que les plans globalement invariants par f sont ceux qui sont énumérés dans la liste des similitudes.

Soit Q un plan quelconque de l'espace, dont on suppose qu'il est globalement invariant par f. Soit K la projection orthogonale de A sur Q. Quelle est l'image par f de la droite passant par A et orthogonale à Q ? Quelle est par conséquent l'image de K par f ? Où se trouve nécessairement le point K ? Quelle est l'image de Q par $h(A, k)$? par $r(D_{\vec{u}}, \theta)$? Conclure, en utilisant les invariants globaux connus des rotations.

8. Soit $f = h(A, k) \circ r(D_{\vec{u}}, \theta)$ une similitude non isométrique quelconque de l'espace, donnée sous forme réduite ($k \neq 0$, $k \neq 1$, $k \neq -1$, $A \notin D$).

En utilisant la projection orthogonale de A sur une droite quelconque de l'espace, supposée globalement invariante par f, et en s'inspirant de l'exercice précédent, démontrer que les droites globalement invariantes par f sont celles qui sont énumérées dans la liste des similitudes.

9. a) Soit $h(A, k)$ une homothétie de centre A et de rapport k (k est un réel non nul, positif ou négatif). Que peut-on dire de $h(A, k)$ si $k = 1$? ou si $k = -1$? Si $k > 0$, l'homothétie $h(A, k)$ est-elle une similitude directe ou indirecte ? Et si $k < 0$?

b) Soit P un plan de l'espace, contenant A. On note s_P la réflexion par rapport au plan P, et s_A la symétrie centrale par rapport à A. Démontrer que le produit $s_P \circ s_A$ est un demi-tour dont l'axe contient A. En déduire que la similitude $s_P \circ h(A, k)$ est le produit d'une rotation dont l'axe contient A et d'une homothétie de centre A.

c) Soit f une réflexion tournée, de centre A. En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer que la similitude $f \circ h(A, k)$ est le produit d'une rotation dont l'axe contient A et d'une homothétie de centre A.

Suite

Accueil

Page précédente Page suivante

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Problèmes et exercices généraux

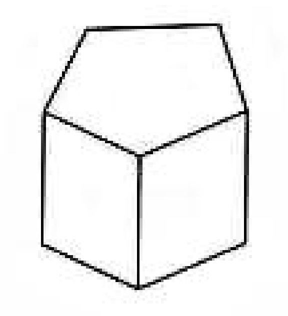
Page 1

Exercices 1 à 9

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. Doit D une droite et O un point appartenant à D. On note s_O la symétrie centrale par rapport à O et $r(D\,\overrightarrow{k}, \alpha)$ une rotation d'axe D, orienté par $\overrightarrow{k}$, et d'angle α non plat.
Démontrer que $r(D\,\overrightarrow{k}, \alpha) \circ s_O$ est une réflexion tournée dont on précisera les éléments caractéristiques.

2. Soit G un prisme droit, constitué de deux bases isométriques et parallèles en forme de pentagone régulier convexe, reliées entre elles par des faces latérales carrées orthogonales aux bases.



Quel est le groupe de symétrie de G ?
Même question si les faces latérales sont des rectangles non carrés.

3. Soit D et D' deux droites non coplanaires de l'espace. On cherche à déterminer l'ensemble $I_{D \cup D'}$ des isométries de l'espace qui laissent la figure $D \cup D'$ globalement invariante.

a) On note L la perpendiculaire commune aux droites D et D', et H et H' les points où la droite L rencontre respectivement D et D'. Si f est une isométrie quelconque de $I_{D \cup D'}$, que pensez-vous de $f(\{H, H'\})$? de $f(L)$?

b) Déterminer toutes les isométries de $I_{D \cup D'}$ qui laissent chacun des points H et H' invariants.

c) On suppose que f est une isométrie de $I_{D \cup D'}$ qui échange H et H'. On note O le milieu du segment HH', et d et d' les droites passant par O et respectivement parallèles à D et D'. Que pensez-vous de $f(O)$? de $f(d)$ et de $f(d')$? Déterminer toutes les isométries de $I_{D \cup D'}$ qui échangent H et H'.

4. Soit D une droite de l'espace. Trouver l'ensemble I_D des isométries de l'espace qui laissent D globalement invariante.

5. Soit P un plan de l'espace. Trouver l'ensemble I_P des isométries de l'espace qui laissent P globalement invariant.

6. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. Faire un schéma du repère, le sens direct étant le sens conventionnel habituel.

Le repère $(O, -\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{j}, -\overrightarrow{k})$ est-il direct ou indirect ? Par quelle isométrie de l'espace passe-t -on du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ au repère $(O, -\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{j}, -\overrightarrow{k})$? Donner les éléments caractéristiques de cette isométrie.

Le repère $(O, -\overrightarrow{j}, -\overrightarrow{k}, -\overrightarrow{i})$ est - il direct ou indirect ? Par quelle isométrie de l'espace passe-t-on du repère $(O, -\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{j}, -\overrightarrow{k})$ au repère $(O, -\overrightarrow{j}, -\overrightarrow{k}, -\overrightarrow{i})$? Donner les éléments caractéristiques de cette isométrie.

7. On considère une reflexion s_P par rapport à un plan P, et une rotation $r(D_{\overrightarrow{k}}, \alpha)$

d'axe D, orienté par $\overrightarrow{k}$, et d'angle α.

a) Le produit $s_P \circ r(D_{\overrightarrow{k}}, \alpha)$ est-il un déplacement ou un antidéplacement ?

b) On suppose $D \subset P$.

Démontrer que, dans ce cas, $s_P \circ r(D_{\overrightarrow{k}}, \alpha)$ est une réflexion dont on déterminera le plan. (On pourra décomposer la rotation en produit de réflexions bien choisies.)

c) On suppose maintenant que D n'est pas incluse dans P mais que $D // P$ et que l'angle α est plat.

Démontrer que, dans ce cas, $s_P \circ r(D_{\overrightarrow{k}}, \alpha)$ est une réflexion glissée dont on déterminera les éléments caractéristiques. (On pourra utiliser la projection orthogonale D' de D sur P, et le résultat de la question b).)

d) Qu'est-ce qu'une réflexion tournée ?

8. Soit $ABCD$ un carré situé dans un plan de l'espace. Soit O le centre du carré et Δ l'axe du carré (c'est-a-dire la droite perpendiculaire au plan du carré et passant par O). Soit E et F les deux points de Δ tels que EAB et FAB soient des triangles équilatéraux. Soit P le polyèdre dont les faces sont les triangles EAB, EBC, ECD, EDA, FAB, FBC, FCD et FDA. On se propose d'étudier ce polyèdre.

On appelle **sommets opposés** deux sommets qui ne sont pas adjacents par une arête, **arêtes opposées** deux arêtes telles que les extrémités de l'une soient des sommets opposés aux extrémités de l'autre, **faces opposées** deux faces qui n'ont pas de sommet commun.

a) Quel est le centre de gravité de P ? Démontrer que les triangles AOD et AOE sont isométriques. En utilisant ses diagonales, démontrer que le quadrilatère $ADFB$ est un carré. Démontrer que deux arêtes opposées de P sont parallèles. Démontrer que deux faces opposées de P sont parallèles. Démontrer que le point O appartient au plan médiateur de chaque arête. Démontrer que O appartient à l'axe de chaque face (**l'axe d'un triangle** est la droite perpendiculaire au plan du triangle et passant par le centre de gravité du triangle).

b) On se propose d'étudier le groupe de symétrie G de P.

Trouver tous les plans de symétrie de P. On pourra par exemple chercher toutes les réflexions de G :

1) qui appliquent A sur A ;

2) qui appliquent A sur le sommet opposé (qui est C) ;

3) qui appliquent A sur un sommet adjacent (par exemple B) .

Combien P possède-t-il de plans de symétrie ?

Trouver toutes les rotations qui laissent P globalement invariant (on pourra suivre la même démarche que pour les réflexions). Combien G contient-il de rotations ?

On note s_O la symétrie centrale par apport a O. Est-ce que s_O appartient à G ?

Soit g une réflexion tournée admettant O pour point fixe. Démontrer que

$$g \in G \quad \Leftrightarrow \quad g \circ s_O \in G \ .$$

Démontrer que $g \circ s_O$ est une rotation dont on déterminera les éléments caractéristiques en fonction de ceux de g. Utiliser ce résultat et la liste des rotations de G pour trouver la liste des réflexions tournées de G. Combien y en a-t-il ?

G contient-il d'autres isométries que les réflexions, les rotations et les réflexions tournées déja trouvées ?

9. Soit C un carré de l'espace (figure plane, située dans l'espace). Quel est l'ensemble des isométries de l'espace qui appliquent globalement le carré sur lui-même ?

Suite

Accueil

Problèmes corrigés

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Problèmes - page 1

Page précédente

Page suivante

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE
Problèmes et exercices généraux

Page 6
Exercice 25

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

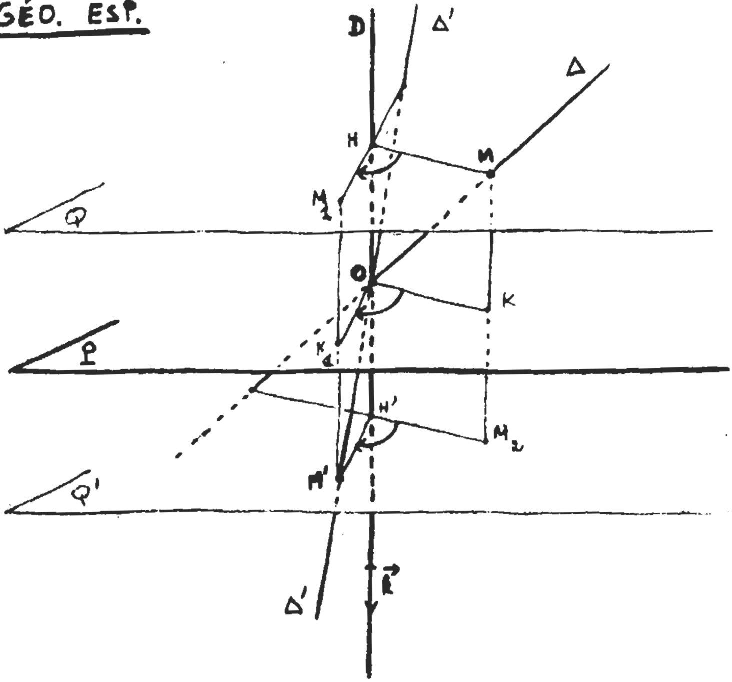
Texte 25	Corrigé 25

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

GÉO. ESP.

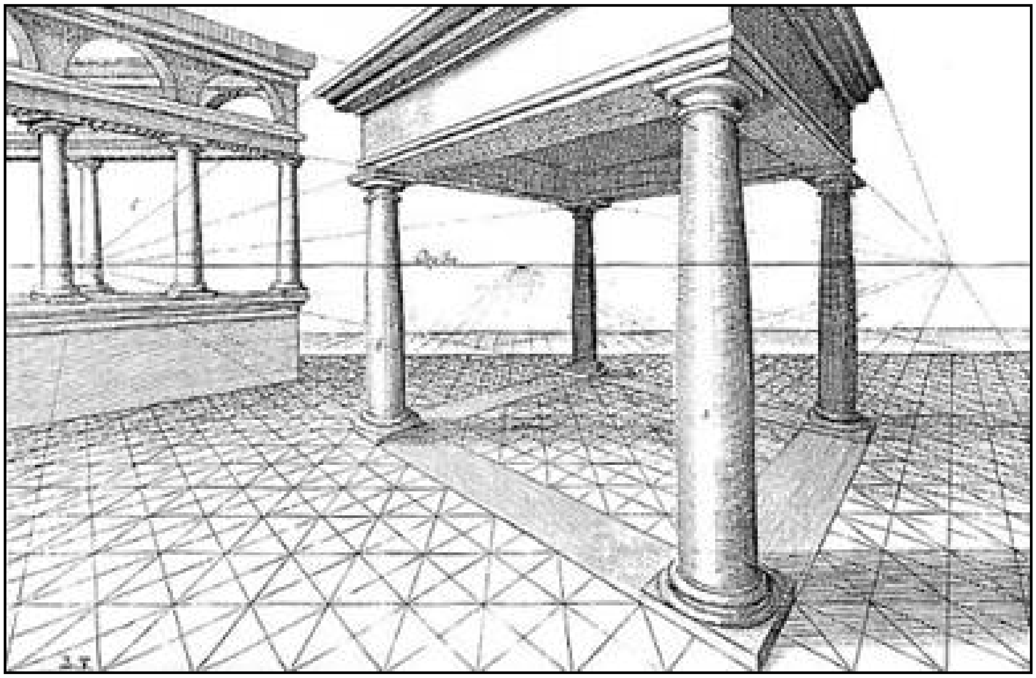


Accueil

Page suivante

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Coup d'œil introductif



Exercice de perspective, XVIe siècle

La *géométrie projective* / ÇáåäÏÓÉ ÇáÅÓÞÇØíÉ est une branche des mathématiques qui a commencé à se constituer au XVIIe siècle pour organiser les propriétés géométriques de l'espace qui sont conservées par *projection centrale* / ÅÓÞÇØ ãÑßÒí – d'où le nom de géométrie *projective* / ÅÓÞÇØíÉ . L'étude de ces propriétés provenait elle-même des problèmes posés par la *perspective* /ÇáãäÙæÑ, technique de représentation des objets de l'espace utilisée par les artistes et les praticiens, apparue au XVe siècle en Europe. Après plusieurs siècles d'une histoire complexe, dont les acteurs furent des peintres, des mathématiciens, des physiciens, des architectes – les quatre en même temps pour plusieurs d'entre eux –, la géométrie projective aboutit finalement, à la fin du XIXe siècle, à une théorie mathématique puissante dont les applications dépassent de très loin la seule perspective.

Cependant, notre but ici est seulement d'éclairer, pour les étudiants en architecture, les techniques de construction employées en perspective. En présentant d'abord quelques problèmes historiques de la perspective, on peut introduire d'une manière rapide et imagée les idées de la géométrie projective. En s'appuyant sur ces idées, on peut faire un peu de géométrie projective puis employer les mathématiques pour retourner à la perspective, dont les techniques apparaissent alors cohérentes et claires.

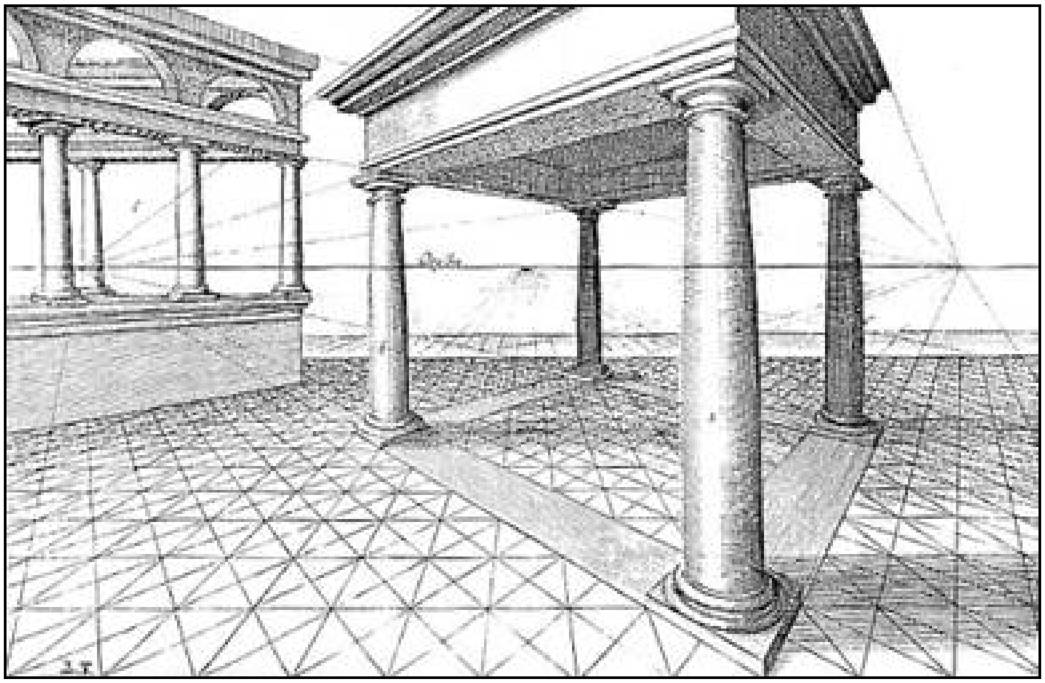
Accueil **Suite**

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page suivante

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Coup d’œil introductif



Exercice de perspective, XVI^e siècle

La *géométrie projective /* ÇáåäÏÓÉ ÇáÅÓÞÇØíÉ est une branche des mathématiques qui a commencé à se constituer au XVIIe siècle pour organiser les propriétés géométriques de l'espace qui sont conservées par *projection centrale /* ÅÓÞÇØ ãÑßÒí – d'où le nom de géométrie *projective /* ÅÓÞÇØíÉ . L'étude de ces propriétés provenait elle-même des problèmes posés par la *perspective /*ÇáãäÙæÑ, technique de représentation des objets de l'espace utilisée par les artistes et les praticiens, apparue au XVe siècle en Europe. Après plusieurs siècles d'une histoire complexe, dont les acteurs furent des peintres, des mathématiciens, des physiciens, des architectes – les quatre en même temps pour plusieurs d'entre eux –, la géométrie projective aboutit finalement, à la fin du XIXe siècle, à une théorie mathématique puissante dont les applications dépassent de très loin la seule perspective.

Cependant, notre but ici est seulement d'éclairer, pour les étudiants en architecture, les techniques de construction employées en perspective. En présentant d'abord quelques problèmes historiques de la perspective, on peut introduire d'une manière rapide et imagée les idées de la géométrie projective. En s’appuyant sur ces idées, on peut faire un peu de géométrie projective puis employer les mathématiques pour retourner à la perspective, dont les techniques apparaissent alors cohérentes et claires.

Accueil **Suite**

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

De la perspective à la géométrie projective

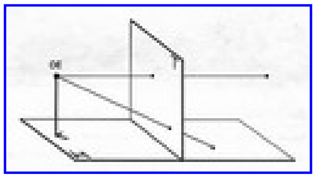
Page précédente

Page suivante

Images

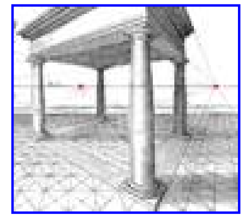
Cliquer sur les images

Qu'est-ce que la perspective - 1

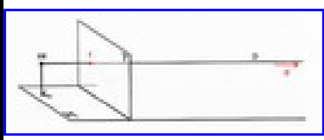


Qu'est-ce que la perspective - 2

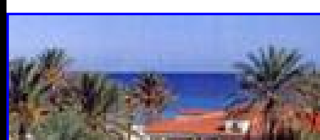
Routes et voies



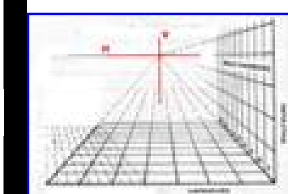
1 point à l'infini par direction de droite



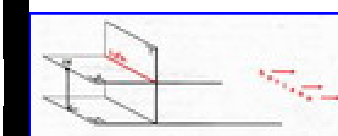
Point à l'infini et sa perspective



L'horizon



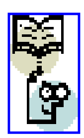
1 droite à l'infini par direction de plan



Horizon et ligne d'horizon

Confusions et distinctions

Ambiguïté



Terminologie

Suite

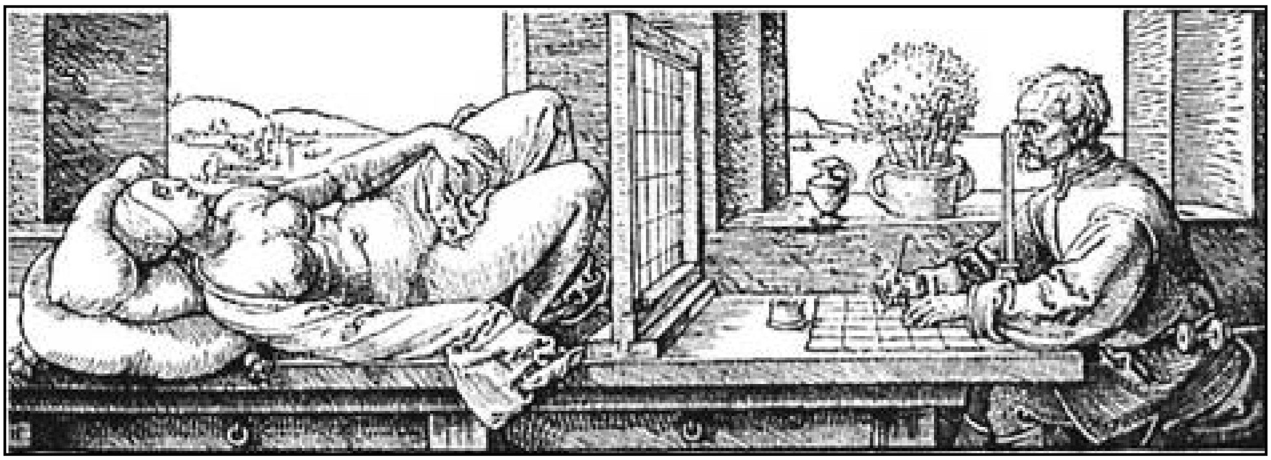
Page précédente

Retour à la planche d'images

Page suivante

Images

Qu’est-ce que la perspective - 1

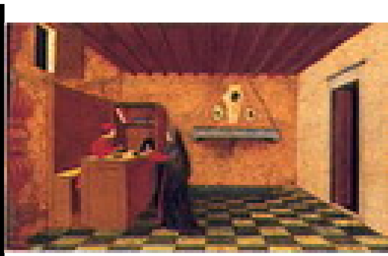


Perspective, par Albrecht Dürer, 1525

Les contours du personnage sont observés sur le plan défini par une vitre transparente, l'oeil de l'observateur étant fixé en un point matérialisé par l'extrémité d'une tige. Le quadrillage de la vitre permet de repérer les contours d'une manière assez précise et de les reproduire sur une feuille de papier elle-même quadrillée.

La *perspective /ÇáãäÙæÑ*, dite aussi *perspective conique /ÇáãäÙæÑ ÇáãÎÑæØí*, ou *perspective centrale* (par opposition aux perspectives cavalière et axonométriques dont il ne s'agit pas ici), c'est *"l'art de représenter les objets sur une surface plane, de telle sorte que leur représentation coïncide avec la perception visuelle qu'on peut en avoir, compte tenu de leur position dans l'espace par rapport à l'oeil de l'observateur" (*Dictionnaire de langue française *Petit Robert 1*).

Comme le montre le dispositif dessiné par Dürer, lorsqu'un observateur immobile regarde des objets à travers une vitre, la vitre est le tableau /áæÍÉ sur lequel les objets viennent se peindre / ÊÑÊÓã en perspective (conique) et le dessinateur reproduit sur le papier le tableau naturel qu'il voit sur la vitre.



Paolo Ucello
1469

Peinture en perspective

Giovanni Santi
Fin du XVe siècle

Peinture en perspective

Jacopo et Lorenzo Salimbeni
Début du XVe siècle

Peinture sans perspective

Accueil

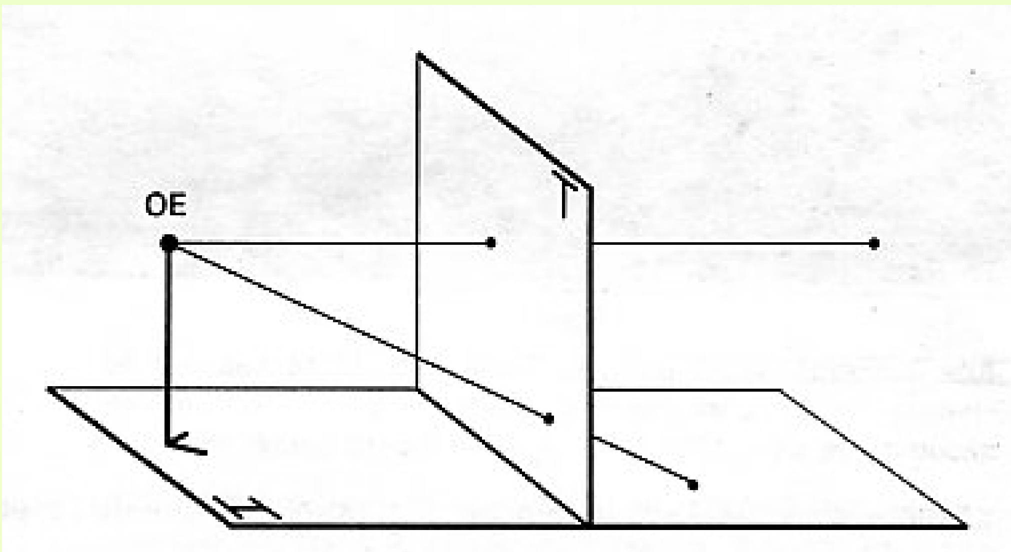
Retour à la planche d'images

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Images

Qu’est-ce que la perspective - 2



Nous ne parlerons que de l'aspect géométrique de la perspective, c'est-à-dire de la représentation des contours apparents des objets, et pas des autres techniques, comme les jeux de valeurs et de couleurs, qui contribuent aussi à restituer l'apparence de l'objet.

La géométrie réduit l'observateur à un oeil unique, figuré par un point, qui reçoit chaque rayon lumineux issu de chaque point de l'objet. Le tableau est un plan interposé entre l'oeil et l'objet. Chaque point de l'objet est représenté /ããËøóá sur le tableau /áæÍÉ par la trace /ÇáÃËÑ sur le tableau du rayon lumineux rectiligne qui joint le point à l'oeil.

Le schéma ci-dessus représente l'oeil OE d'un observateur debout sur le sol qui est un plan horizontal H. Le tableau T est vertical. L'oeil observe des points de l'espace et, en même temps, leur représentation sur le tableau. Il ne distingue pas les points de leur représentation.

Images

Routes et voies

Imaginons qu'on regarde un paysage où se trouvent des rails de chemin de fer, ou des bords de route ou de rue, rectilignes et parallèles. On voit les droites ... fuir au loin vers un point où elles ont l'air de concourir /ÊÊáÇÞì !

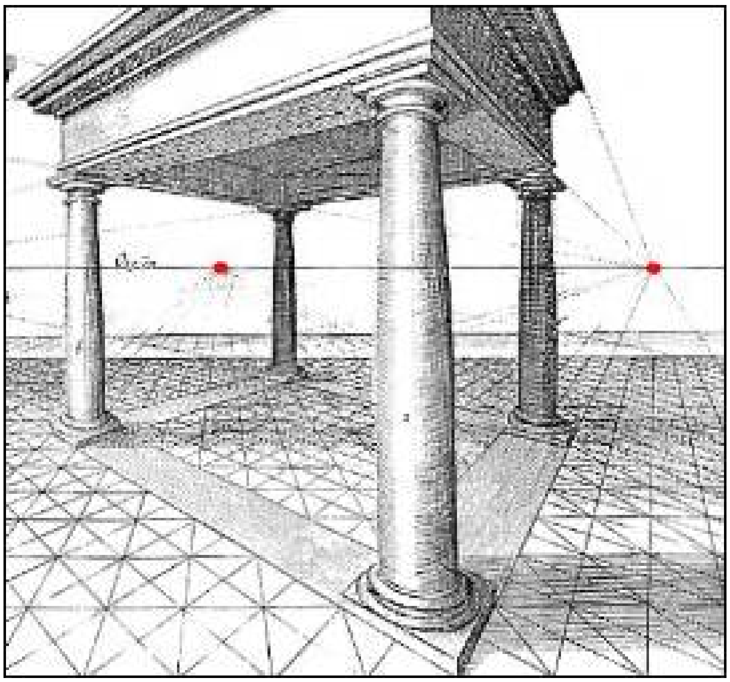
La géométrie projective rend compte de cet aspect de l'espace. Dans cette géométrie, on peut imaginer que les droites affines parallèles se rencontrent en un point "à l'infini" / Ýí ÇáâÇäåÇíÉ , c'est-à-dire en un point situé en dehors du champ / ÎÇÑÌ ãÌÇá de la géométrie affine, un point qu'on peut imaginer situé plus loin que tous les points de la géométrie affine.

On ajoute ainsi à chaque droite affine un point dit "à l'infini", et toutes les droites d'une direction donnée ont le même point "à l'infini". L'ensemble de toutes les droites d'une direction donnée constitue un faisceau / ÍÒãÉ de droites, qui sont parallèles pour la géométrie affine mais qui, pour la géométrie projective, concourent en un point (à l'infini).

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Images

1 point à l’infini par direction de droite



Des droites parallèles dans deux directions différentes semblent se rejoindre en deux points à l’infini différents.

On imagine ainsi facilement que la géométrie projective ajoute aux droites affines :
le même point à l’infini si les droites affines sont parallèles,
des points à l’infini différents si les droites affines ne sont pas parallèles.

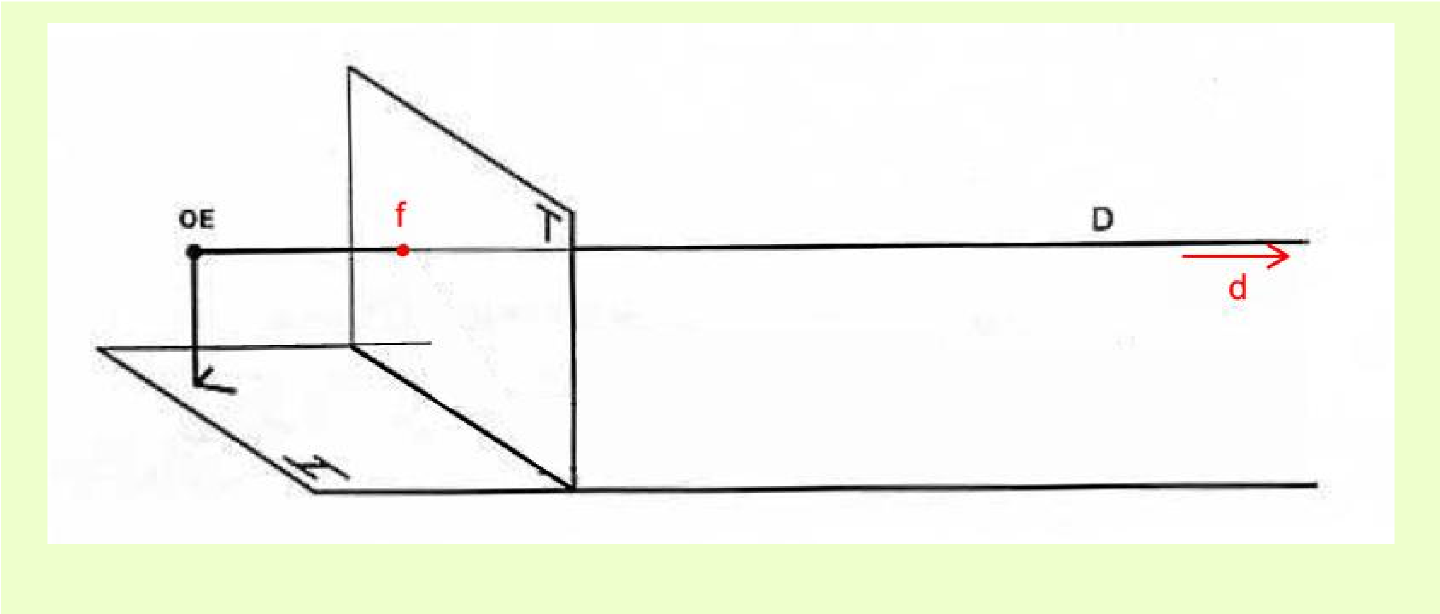
C’est-à-dire que la géométrie projective ajoute exactement un point à l’infini par direction de droite affine.

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente
Retour à la planche d'images
Page suivante

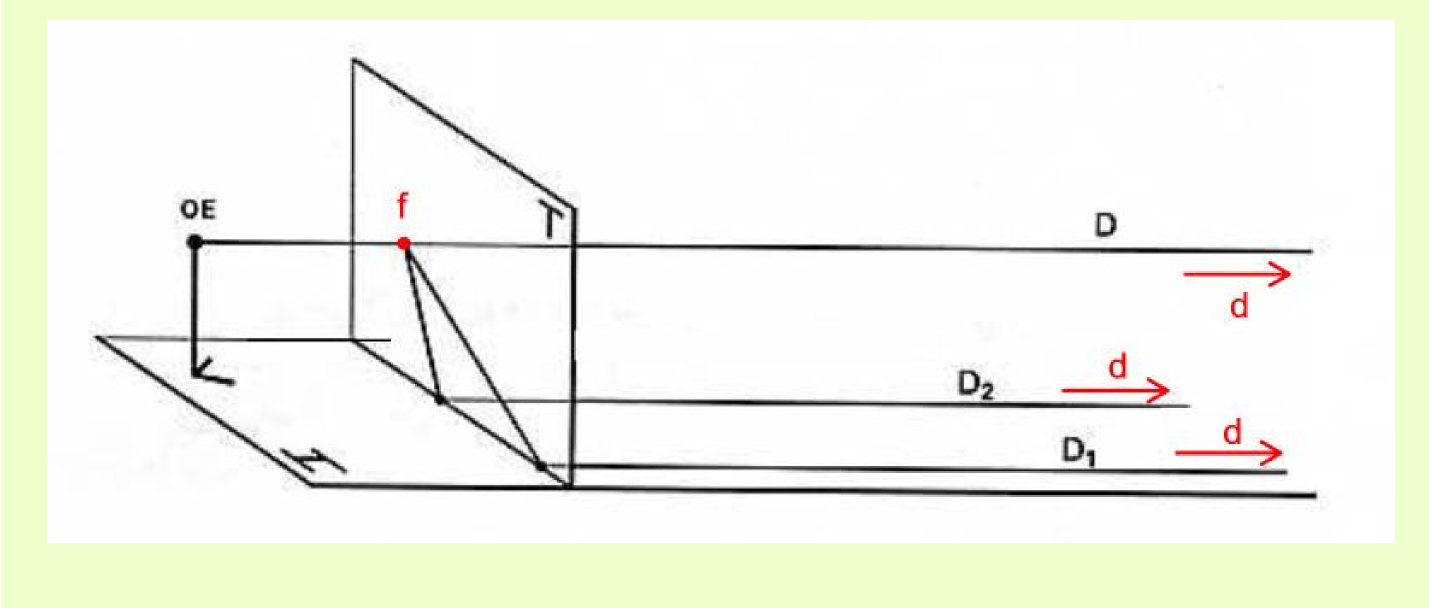
Images

Point à l'infini et sa perspective



Point à l'infini dans l'espace et sa perspective sur le tableau

La représentation /ÇáÊãËíá sur le tableau d'un point à l'infini de l'espace est, comme pour tous les points, la trace sur le tableau de la droite qui joint le point à l'oeil.
Soit par exemple la droite D, perpendiculaire au tableau et passant par l'œil, et soit d son point à l'infini (qu'on imagine très loin sur D). La droite D est le rayon visuel qui joint l'œil à d, si bien que f, trace de D sur T, est la perspective de d.



Droites parallèles dans l'espace et leur perspective sur le tableau

Toutes les droites de l'espace parallèles à D ont le même point à l'infini d, et leurs représentations sur le tableau passent toutes par le point f. Par exemple les droites D_1 et D_2, placées sur le sol dans la direction de D (des bords de route), sont représentées sur le tableau par des droites qui concourent au point f. Dans le vocabulaire du dessin technique, f s'appelle le *point de fuite principal /* äÞØÉ ÇáÊáÇÔí ÇáÑÆíÓíÉ : point *de fuite* parce que les droites semblent fuir vers ce point, perçu comme une borne jamais atteinte (ou *s'évanouir /* ÊÊáÇÔì en ce point) ; *principal /* ÇáÑÆíÓíÉ parce que c'est le point de fuite de la direction perpendiculaire au tableau, direction particulière considérée comme principale.

Retour à la planche d'images

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Images

L’horizon

On peut imaginer l'horizon comme une droite située très loin, "à l'infini", sur le plan horizontal de la mer.

Et on peut imaginer que l’horizon est constitué de points,

chaque point étant situé « à l’infini » sur une droite incluse dans le plan de la mer …

Les fils électriques, les barres du garde-fou, et même les bords en pierre de la jetée sont situés au dessus du plan de la mer. Pourtant, on voit toutes ces droites « fuir » vers le même point, appartenant à l’horizon sur la mer.

… ou sur n’importe quelle droite horizontale, incluse ou non dans le plan de la mer.

Retour à la planche d'images

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

De la perspective à la géométrie projective

Retour à la planche d'images

Page précédente

Page suivante

Images

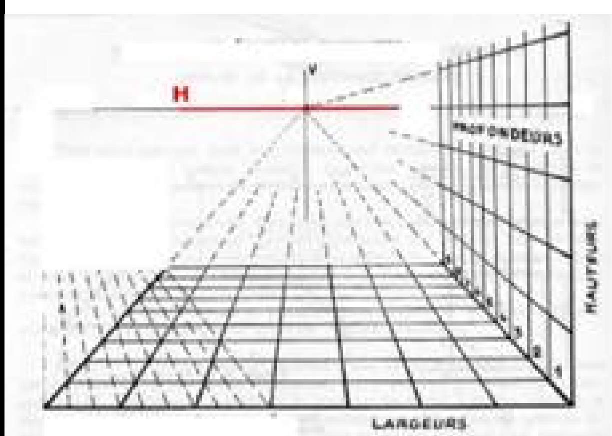
1 droite à l’infini par direction de plan

Sol et plafond

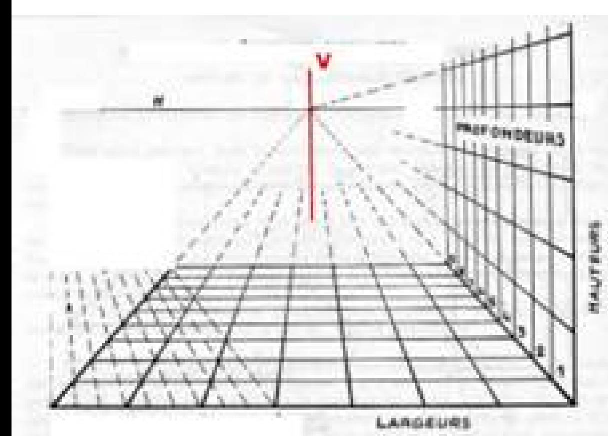
On peut imaginer l’horizon comme une droite où tous les plans horizontaux se rencontrent, « très loin », « à l’infini ».

Deux fils électriques situés à une même hauteur au dessus de la mer définissent un plan horizontal, situé au dessus de la mer, qui « rejoint » la mer sur l’horizon.

La géométrie projective ajoute ainsi à chaque plan affine une droite dite "à l'infini" / Ýí ÇáÇäåÇíÉ , située en dehors du champ / ÎÇÑÌ ãÌÇá de la géométrie affine, qu'on peut imaginer située « très loin », et cette droite est la même pour tous les plans d’une direction de plans donnée. Par contre, si on change de direction de plan, la droite à l’infini change :



Ce schéma représente un sol avec un mur à droite. On imagine facilement l’horizon, noté ici H, c'est-à-dire la droite « à l’infini » du plan du sol.



Avec un tout petit effort, par exemple en penchant la tête à gauche, on peut voir le mur « comme un sol » et on distingue alors sa droite « à l’infini », notée ici V, qui n’est pas H.

On peut ainsi imaginer que la géométrie projective ajoute aux plans affines :

la même droite à l'infini si les plans affines sont parallèles,
des droites à l'infini différentes si les plans affines ne sont pas parallèles.

C'est-à-dire que la géométrie projective ajoute exactement une droite à l'infini par direction de plan affine.

Accueil **Retour à la planche d'images** **Suite**

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

De la perspective à la géométrie projective

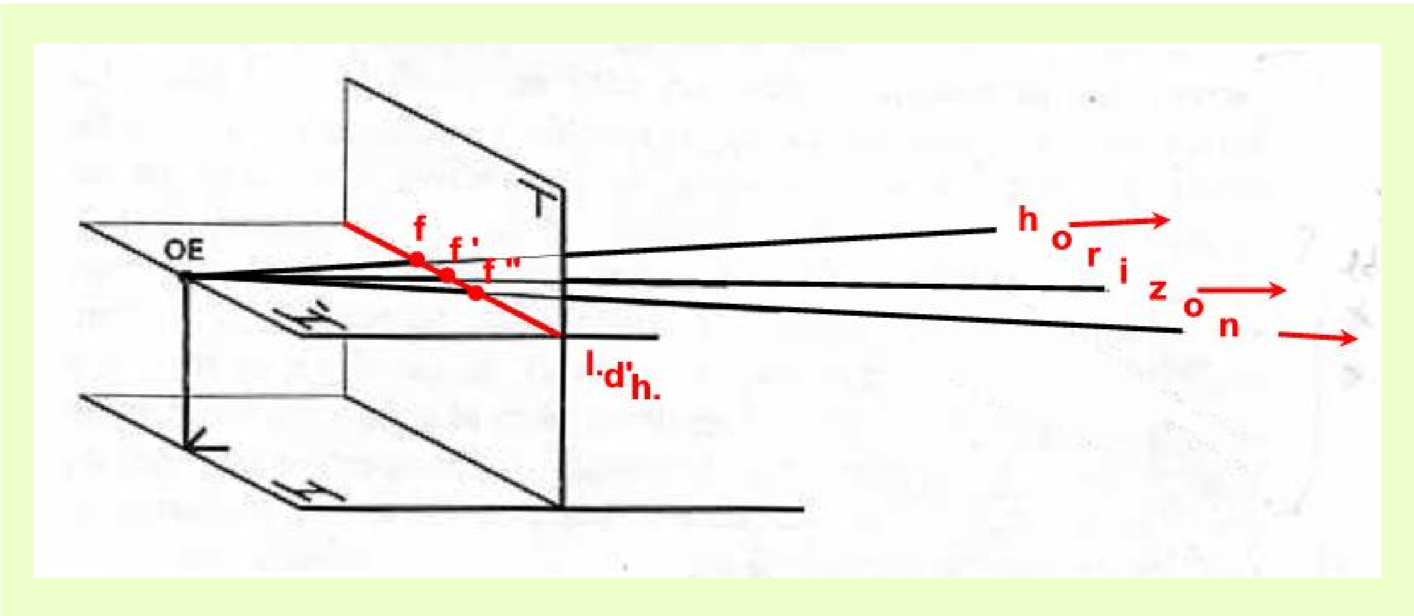
Page précédente

Retour à la planche d'images

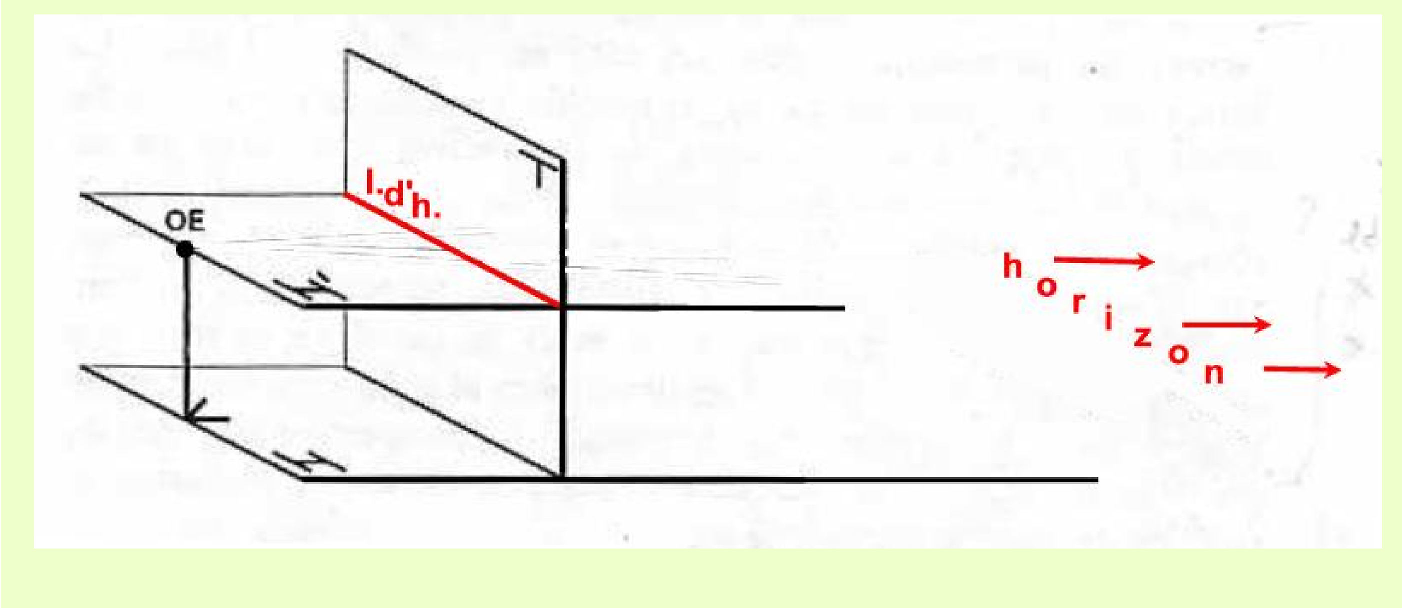
Page suivante

Images

Horizon et ligne d'horizon



La *ligne d'horizon* est la représentation sur le tableau de *l'horizon*. Elle est constituée des points de fuite de toutes les directions de droites horizontales



L'horizon est la droite à l'infini commune à tous les plans horizontaux, en particulier au plan du sol et au plan horizontal passant par l'oeil. La ligne d'horizon se nomme aussi la *ligne de fuite* des plans horizontaux : les plans semblent fuir vers cette droite où ils se rejoignent.

Accueil

Retour à la planche d'images

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

De la perspective à la géométrie projective

Retour à la planche d'images

Page précédente

Page suivante

Images

Confusions

Vanish 3

d *ou* f *?*

Dans le vocabulaire courant, l'expression *point de fuite* désigne deux points tout à fait différents : le point à l'infini des droites de l'espace (le point d) et sa représentation /ÇáÊãËíá sur le tableau (le point f). C'est vers le point d, au loin, dans l'espace, que les droites ont l'air de fuir (ou de s'évanouir /ÊÊáÇÔì). Le point f, qui n'est pas du tout "à l'infini", mais au contraire à notre portée, ici, sur la feuille de papier, devrait peut-être s'appeler "représentation du point de fuite sur le tableau".
Loin d'être néfaste, cette confusion de vocabulaire est utile, puisqu'elle aide le dessin en perspective à remplir sa fonction : faire oublier le plan matériel du tableau pour ne laisser subsister que l'idée de l'espace représenté.
C'est sur cette confusion que nous jouons nous-mêmes lorsque nous présentons une photographie de droites parallèles pour faire imaginer un point à l'infini. La photographie est une perspective. En regardant la photographie, nous avons oublié la feuille de papier matérielle (qui était pourtant la seule chose que nous pouvions voir !) pour ne plus imaginer que le paysage de l'espace, réellement visible ailleurs.

De même jouons-nous sur la confusion entre *l'horizon* et la *ligne d'horizon* pour faire imaginer des droites à l'infini. Le vocabulaire courant confond les deux termes, qui peuvent désigner tous les deux indifféremment la ligne imaginée à l'infini dans l'espace et la droite qui la représente sur le tableau.

Distinctions

Mais au cours des chapitres **Géométrie projective : étude mathématique** et **Géométrie projective appliquée à la perspective**, nous avons besoin de distinguer très clairement les objets de l'espace de leurs représentations sur le tableau, puisque notre but est de comprendre les mécanismes de la technique de représentation, c'est-à-dire de comparer les propriétés des objets de l'espace à celles des figures qui les représentent sur le tableau.

Nous avons donc choisi de particulariser le vocabulaire de la manière suivante :
point de fuite : dessin sur le tableau du point à l'infini
horizon : droite à l'infini (dans l'espace)
ligne d'horizon : dessin sur le tableau de l'horizon.

Retour à la planche d'images

Accueil **Suite**

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

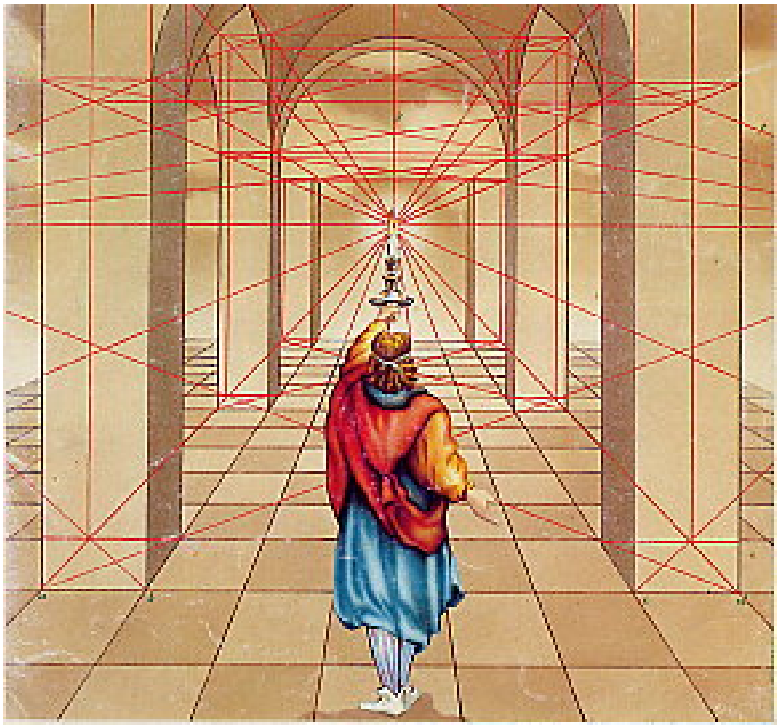
Page précédente

Retour à la planche d'images

Page suivante

Images

Ambiguïté



Dessin de Fernando Cunha, illustrant l'article
Espace et perspective au Quattrocento *de Pierre Thuillier*
La recherche *n° 160, Paris, novembre 1984.*

Pour montrer la manière complexe dont la géométrie projective – partie des mathématiques – et la perspective – technique de représentation – s'éclairent l'une l'autre, contemplons ce dessin. Il illustre à notre époque un article d'histoire des sciences dans une revue scientifique, et c'est une variation sur un dessin du XVIIe siècle illustrant un traité de perspective : *Manière universelle de Mr Desargues*, tome II, planche 15, écrit par un dessinateur graveur : Abraham Bosse, en étroite collaboration avec un architecte qui était aussi mathématicien : Girard Desargues.

On pourrait l'intituler ***"La Théorie Perspective éclairant le Dessin"***, et il mérite qu'on s'y attarde, car s'il est évident qu'il représente une forme humaine, tenant un candélabre, dont la flamme symbolise la théorie géométrique et éclaire un décor architectural dessiné en perspective, que représente le point situé au centre de la flamme et sur le point de fuite principal ?
Tout d'un coup l'esprit se perd dans l'interprétation des rayons qui y convergent : s'agit-il des lignes de construction qui ont permis de représenter le carrelage et les piliers, ou bien des

rayons lumineux issus de la flamme ? Et, finalement, à quelle distance dans l'espace se trouve cette flamme ? S'il s'agit d'un chandelier du modèle ordinaire connu, il doit être presque vertical et situé au bout du bras qui le tient. Mais alors le point de fuite principal se rapproche brutalement et donne au dessin un apparence de platitude incohérente avec l'idée de perspective manifestement affirmée. S'agit-il alors d'un candélabre monstrueux qui s'étend d'une manière fantastique jusqu'à l'infini ? L'esprit s'égare, et c'est sur cette indécision, sur cette oscillation vertigineuse entre la platitude et la profondeur infinie, que joue l'oeuvre d'art.

Or l'égarement provient de ce que notre esprit cherche à donner à chaque trait du dessin une signification univoque, contrairement aux propriétés fondamentalement équivoques de la perspective. La perspective, en effet, ne distingue pas les points de l'espace, mais seulement leurs classes d'équivalence par la relation d'alignement avec l'oeil. Si bien qu'un dessin en perspective est infiniment ambigu ; à moins qu'on ne dispose de renseignements extérieurs à la géométrie, permettant de choisir une interprétation de chaque point du tableau parmi l'infinité des points possibles de l'espace, le dessin est indéchiffrable. Qui nous dit, par exemple, que cette apparence humaine représente vraiment une forme humaine ? Seule l'habitude nous incite à le croire !

Ainsi l'artiste nous oblige-t-il à hésiter entre deux interprétations distinctes du point central, qu'il impose toutes les deux avec la même force. Centre de la lumière, ou point à l'infini principal ? Les deux sont évidents, et leur confusion donne tout son sens à l'oeuvre, non seulement parce que la lumière jaillit d'un point clé de la théorie géométrique, mais surtout parce que la confusion nous plonge dans le désarroi et nous oblige à percevoir, par un sentiment indistinct et immédiat, un mélange inextricable d'espace physique et de géométrie pure.

Cette expérience frappante, que nous devons à l'art, a certainement déjà imprimé dans notre esprit une propriété mathématique fondamentale : la perspective n'est pas une application injective. Cette conscience mathématique de l'ambiguïté nous permettra de lire avec dextérité des perspectives, c'est-à-dire d'utiliser consciemment des renseignements divers, qui ne sont pas tous contenus dans le dessin géométrique lui-même, pour restituer à partir du dessin l'objet qu'il représente.

Le dessin ci-dessus pourrait donc tout aussi bien s'intituler ***"Le Dessin éclairant les Mathématiques"*** et nous espérons avoir fait comprendre que nous ne choisirons pas entre *"La Science au secours de l'Art"* ou *"l'Art au secours de la Science"*.

Retour à la planche d'images

Accueil **Suite**

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente

Retour à la planche d'images

Page suivante

Terminologie

Géométries :
euclidienne, affine, non euclidienne, projective

La géométrie ***euclidienne*** (celle d'Euclide, mathématicien grec, IIIe siècle av. J.-C.) est celle de l'enseignement élémentaire que tout le monde connaît. Elle est historiquement fondée sur la notion de mesure (des longueurs et des angles). Cependant, un certain nombre de ses propriétés ne sont pas métriques (par exemple : "le point A appartient à la droite D" ou encore : "les droites D et D' sont parallèles"). En ne conservant que les propriétés non métriques de la géométrie euclidienne (en supprimant les notions de produit scalaire et de distance), on obtient ce qu'on appelle à l'heure actuelle la géométrie ***affine***. La géométrie euclidienne est une géométrie affine particulière. A l'heure actuelle, l'expression *"géométrie euclidenne"* est donc remplacée par *"géométrie **affine euclidienne**"*.

La géométrie ***projective*** est une branche des mathématiques qui s'est constituée pour organiser les propriétés géométriques de l'espace qui sont conservées par projection centrale / ÅÖÞÇØ ãÑßÒí – d'où le nom de géométrie *projective* / ÅÓÞÇØíÉ.

La géométrie projective est souvent dite ***"non-euclidienne"***, suivant le vocabulaire inventé au début du XIXe siècle (par Gauss, mathématicien allemand, 1777-1855) pour désigner les géométries qui diffèrent de la géométrie euclidienne sur les propriétés du parallélisme. Mais puisque le parallélisme n'est pas une notion métrique, le parallélisme de la géométrie euclidienne est en fait celui de la géométrie affine, si bien que la géométrie *projective*, dite *"non-euclidienne"* dans la terminologie de Gauss, est en fait une géométrie ***non-affine***.

On peut obtenir un modèle de géométrie projective en *complétant la géométrie affine* par des éléments dits "à l'infini". Signalons cependant que la géométrie projective peut aussi se faire *sans référence à la géométrie affine*.

Accueil

Retour à la planche d'images

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Géométrie projective : étude mathématique

Planche d'images

Page précédente

Page suivante

Introduction

On peut définir un *espace projectif* au moyen de l'algèbre, sans faire référence à la *géométrie affine* : un espace projectif est une *structure*, construite à partir de la structure d'*espace vectoriel* (qui utilise elle-même la structure de *groupe*).

La structure algébrique d'espace projectif peut aussi s'obtenir à partir de la structure d'espace affine, en la complétant par des éléments dits "à l'infini", d'une manière qui n'est ni très simple, ni très compliquée.

Mais notre but n'est pas de le faire ici.

Loin de donner des définitions et des démonstrations, nous nous contenterons de *nommer* les objets projectifs : voir la page de Vocabulaire, et d'*énoncer des propriétés* : voir les pages de De la géométrie affine à la géométrie projective et de Propriétés projectives fondamentales.
On peut se faire une idée immédiate des objets et des propriétés grâce aux images installées par le chapitre introductif De la perspective à la géométrie projective, par des schémas, et par analogie avec les connaissances en géométrie élémentaire acquises dans l'enseignement secondaire.
On peut ensuite facilement utiliser ces propriétés pour en démontrer d'autres : voir les Exercices.

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Géométrie projective : étude mathématique

Page précédente Page suivante

Vocabulaire

Espace projectif, points projectifs

Un *espace projectif* / ÝÖÇÁ ÅÓÞÇØí est un certain ensemble/ãÌãæÚÉ, dont les éléments/ÇáÚäÇÕÑ sont appelés *points projectifs* / äÞÇØ ÅÓÞÇØíÉ.

(On peut imaginer les points projectifs comme les points affines habituels : des petites taches sans étendue.)

Dimension d'un espace projectif

L'espace projectif qu'on utilise comme modèle de l'espace/ÇáÝÖÇÁ environnant est de *dimension 3*.

(On peut l'imaginer comme un volume illimité rempli de points.)

Un espace projectif de *dimension 2* est un *plan projectif* / ãÓÊæí ÅÓÞÇØí

(On peut l'imaginer comme quelque chose de plat et d'illimité.)

Un espace projectif de *dimension 1* est une *droite projective* / ãÓÊÞíã ÅÓÞÇØí .

(On peut l'imaginer comme quelque chose de rectiligne et d'illimité.)

Un espace projectif de *dimension 0* est un *singleton*

(ensemble possédant un élément unique : un point projectif).

Sous-espaces projectifs

Les sous-espaces de l'espace projectif de dimension 3 sont l'espace lui-même, les plans projectifs, les droites projectives, et les singletons.

Nous devrions donner ici les propriétés fondamentales des droites et des plans projectifs, propriétés projectives pures que les mathématiques démontrent indépendamment de toute relation avec la géométrie affine.
Cependant, comme nous voulons remplacer les mathématiques par des images, en commençant par le chapitre introductif De la perspective à la géométrie projective et en accrochant les images aux connaissances en géométrie affine acquises dans l'enseignement secondaire, il faut commencer par rendre naturelles les propriétés projectives en exposant d'abord leurs relations avec les propriétés affines. C'est l'objet des pages de De la géométrie affine à la géométrie projective. C'est seulement ensuite qu'on pourra revenir à la géométrie projective pure : celle des Propriétés projectives fondamentales.

Page précédente Page suivante

De la géométrie affine à la géométrie projective

Espace complété, points à l'infini

Soit E un espace affine de dimension 3.

Les mathématiques démontrent, et nous admettrons, qu'il existe un espace projectif de dimension 3, nommé *complété projectif de* E ãßÊãá ÅÓÞÇØí ÊÇÈÚ áÜ , que nous noterons $\widetilde{E}$, tel que :

$$E \subset \widetilde{E} \qquad (1).$$

Les points affines de E sont donc parmi les points projectifs de $\widetilde{E}$. Ceux des points projectifs qui ne sont pas affines s'appellent, *par définition*, *les points à l'infini pour* E äÞÇØ ÇáÇäåÇíÉ ÈÇáäÓÈÉ áÜ.

Si on note E_∞ l'ensemble des points à l'infini pour E , on peut remplacer l'inclusion (1) par l'égalité :

$$\widetilde{E} = E \cup E_\infty \qquad (2)$$

où la réunion est disjointe, c'est-à-dire qu'un *point projectif* est ou bien un *point affine* de E, ou bien un *point à l'infini* pour E, et qu'il ne peut pas être les deux à la fois.

> L'espace projectif $\widetilde{E}$ est associé à l'espace affine E de sorte qu'il existe exactement un point à l'infini par direction /ãäÍì de droite affine de E. Autrement dit, à chaque direction de droite affine correspond un point à l'infini et un seul, et à deux directions différentes correspondent deux points à l'infini distincts. Nous ne donnerons pas ici de sens mathématique précis à ces affirmations ; nous en resterons à une intuition globale, installée dans l'imagination par des considérations diverses, voir le chapitre : De la perspective à la géométrie projective.

L'ensemble E_∞ des points à l'infini pour E est un espace projectif de dimension 2. On l'appelle *le plan à l'infini pour* E ãÓÊæí ÇáÇäåÇíÉ ÈÇáäÓÈÉ áÜ de l'espace projectif $\widetilde{E}$.

> Nous ne tenterons pas de donner la moindre idée de la démonstration de cette propriété. Nous nous contenterons de faire remarquer qu'il est naturel qu'un espace affine de dimension 3 se trouve complété par / ãßãøóá ÈÜ un plan (à l'infini) puisque la géométrie projective ajoute /íÖíÝ à chaque droite affine un point (à

l'infini), et à chaque plan affine une droite (à l'infini), voir le chapitre : De la perspective à la géométrie projective.

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

De la géométrie affine à la géométrie projective

Droites complétées, droites à l'infini

Soit D une droite affine de l'espace affine E.

Notons d le point à l'infini de la direction /ãäÍì de D. Les mathématiques démontrent, et nous admettrons, que la réunion de D et du singleton à l'infini *{d} est un espace projectif de dimension 1*. On le nomme *la droite projective complétée /* ÇáãßÊãá *de la droite affine D dans l'espace projectif* $\tilde{E}$. Si on note $\tilde{D}$ la droite complétée/ÇáãßÊãá, et D_∞ le singleton à l'infini, on peut écrire l'égalité :

$$\tilde{D} = D \cup D_\infty .$$

La droite projective $\tilde{D}$ est donc constituée d'une partie affine (c'est-à-dire incluse dans E) qui est une droite affine (la droite D), et d'une partie à l'infini (c'est-à-dire disjointe de E) qui est réduite à un point (le point d).

Propriété

Soient D et D' deux droites affines de l'espace affine E. Alors,

$$D \,//\, D' \quad \Leftrightarrow \quad D_\infty = D'_\infty ,$$

ce qui se lit : *"Deux droites affines sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même point à l'infini".*

Nous venons de donner des propriétés concernant les droites *complétées de droites affines*, qui sont des droites projectives presque entièrement situées dans la partie affine de l'espace : tous leurs points, sauf un (leur point à l'infini), sont affines. Dans le chapitre De la perspective à la géométrie projective, nous avions fait imaginer ces droites, ainsi que d'autres droites projectives situées d'une autre manière par rapport à la partie affine de l'espace : l'"horizon" /ÇáÃÝÞ, par exemple, est une droite projective qui n'a pas de partie affine mais qui est, au contraire, située entièrement à l'infini.

Les mathématiques démontrent qu'il n'y a pas d'autre position possible d'une droite projective par rapport à la partie affine de l'espace. C'est ce qu'énonce la propriété suivante :

Inventaire des droites projectives

Etant donné une droite projective quelconque de l'espace projectif, de deux choses l'une :

• *ou bien* la droite est incluse dans le plan à l'infini (elle est entièrement située /æÇÞÚ à l'infini) ; on dit que c'est une *droite à l'infini /* ãÓÊÞíã Ýí ÇááÇäåÇíÉ ,

• *ou bien* la droite possède au moins un point affine (elle n'est pas entièrement située à l'infini) et dans ce cas c'est une *complétée de droite affine /* ãßÊãá áãÓÊÞíã ãÊÂáÝ (tous ses points sont affines, sauf un).

Accueil Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

De la géométrie affine à la géométrie projective

Plans complétés, plan à l'infini

Soit P un plan affine de l'espace affine E.

Notons P_∞ l'ensemble des points à l'infini des directions des droites de P. Les mathématiques démontrent, et nous admettrons, que P_∞ *est un espace projectif de dimension 1*, qu'on nomme *la droite à l'infini de* P, et que la réunion de P et de sa droite à l'infini *est un espace projectif de dimension 2*, qu'on nomme *le plan projectif complété /* ÇáãßÊãá *du plan affine* P *dans l'espace projectif* $\widetilde{E}$. Si on note $\widetilde{P}$ le plan complété / ÇáãßÊãá, on peut écrire l'égalité :

$$\widetilde{P} = P \cup P_\infty .$$

Le plan projectif $\widetilde{P}$ est donc constitué d'une partie affine (incluse dans E) qui est le plan affine P, et d'une droite à l'infini (notée P_∞).

Propriété

Soient P et P' deux plans affines de l'espace affine E. Alors,

$$P \,//\, P' \iff P_\infty = P'_\infty ,$$

ce qui se lit : *"Deux plans affines sont parallèles si, et seulement si, ils ont la même droite à l'infini".*

Propriété

Soit D une droite affine et P un plan affine de l'espace affine E. Alors,

$$D \,//\, P \iff D_\infty \subset P_\infty ,$$

ce qui se lit : *"Une droite affine est parallèle à un plan affine si, et seulement si, le point à l'infini de la droite appartient à la droite à l'infini du plan".*

La propriété suivante donne toutes les positions possibles d'un plan projectif de l'espace $\widetilde{E}$ par rapport à la partie affine E de l'espace :

Inventaire des plans projectifs

Etant donné un plan projectif quelconque de l'espace projectif, de deux choses l'une :

- *ou bien* le plan est *le plan à l'infini* (il n'y a qu'un seul plan projectif situé entièrement à l'infini).
- *ou bien* le plan possède au moins un point affine (il n'est pas situé entièrement à l'infini) et dans ce cas c'est *un complété* /ãßÊãá *de plan affine* (il est constitué d'un plan affine et d'une droite à l'infini).

Accueil

Suite

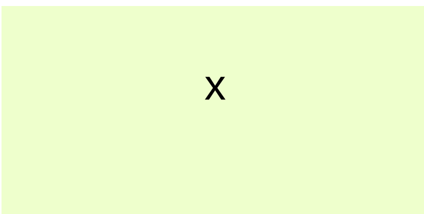
Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

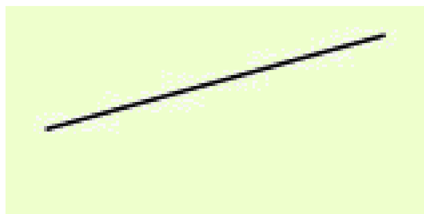
De la géométrie affine à la géométrie projective

Schémas d'objets projectifs

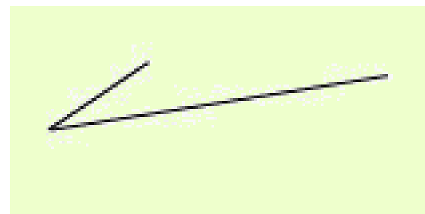
On a l'habitude, en géométrie affine, de représenter les points, les droites et les plans par des schémas.



Point affine



Droite affine

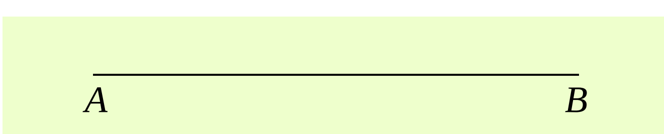


Plan affine

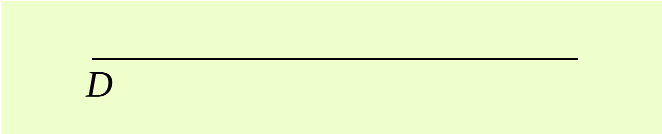
Bien entendu, les schémas ne sont pas les objets mathématiques ; les schémas *représentent /* ÊãËá les mathématiques, c'est-à-dire qu'ils permettent de les imaginer.

Le schéma d'une droite, par exemple, *suggère /* íæÍí ÈÜ , si on veut, la droite. Il suggère peut-être plus directement un segment de droite, puisqu'un dessin est toujours borné, alors qu'une droite est illimitée. Même si on admet que la trace d'une pointe de crayon est une bonne représentation d'un point, la "droite" tracée laisse à notre imagination l'infinité immense des points situés en dehors du champ du dessin.

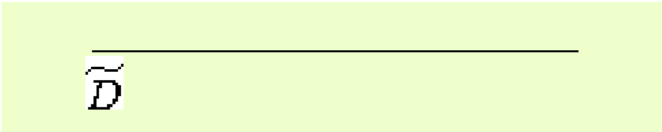
On peut tout aussi bien se servir du même schéma pour représenter la droite projective complétée de la droite affine : il suffit d'imaginer, en plus de l'infinité des points affines manquants, un point supplémentaire : le point à l'infini (imaginé très loin, "à l'infini", sur la droite). On peut même considérer que le schéma *indique /* íÔíÑ Åáì le point à l'infini de la droite, si bien que ce schéma peut représenter, suivant les besoins, une droite affine, une droite projective, ou un point à l'infini.



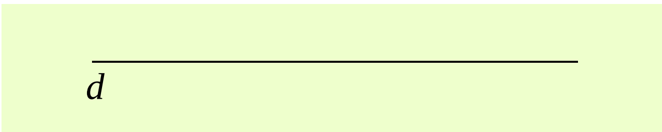
Segment de droite affine



Droite affine



Droite projective
(complétée de la droite affine représentée par le même schéma)



Point à l'infini
(celui de la direction de la droite affine représentée par le même schéma)

Attention : danger !

Cette construction mentale imagée présente cependant une difficulté. Une droite affine est complétée par *un seul* point à l'infini, si bien qu'on doit imaginer que, lorsqu'on regarde *dans la direction /ãäÍì* d'une droite affine et que, nécessairement, on regarde *dans l'un des deux sens / ÇÊÌÇå*, on voit à l'infini un point, qui est *le même* que celui qu'on voit quand on regarde *dans l'autre sens* **!**

La réponse à ce paradoxe apparent est *mathématique* : la structure d'espace projectif est une construction logique, vérifiant toutes les propriétés que nous avons exposées, sans contradiction. Nous n'avons pas donné la moindre idée de cette construction logique, mais nous pouvons faire un certain nombre de remarques rassurantes.

1. Puisque le point à l'infini est le même dans les deux sens de la droite, c'est que ce point "recolle les deux bouts" (image sans aucune prétention de rigueur !), si bien qu'*une droite projective est une ligne fermée*. Si on imagine un point, circulant sur la droite toujours dans le même sens, à partir d'un point affine situé à notre portée, il s'éloigne indéfiniment, atteint le point à l'infini, le traverse pour retomber dans l'espace affine par "l'autre côté" et, circulant toujours dans le même sens, revient à son point de départ. (Cette propriété peut s'exprimer en termes théoriques rigoureux ; nous n'essaierons pas de le faire ici.)

Pour se rassurer un peu plus, on peut imaginer la droite projective comme un cercle de rayon si grand ("infini") que la courbure est nulle, c'est-à-dire que la ligne est droite.

Il est prudent, dans cette construction imagée, de n'imaginer pour commencer que des morceaux de la droite projective, en conformité avec une intuition banale : puisque l'oeil humain a un champ de vision restreint (le cône visuel a une ouverture d'environ 38° si bien qu'on ne voit pas à la fois "devant" et "derrière") et puisque l'oeil n'est pas perçant au point de voir "au delà de l'infini" (où il retrouverait l'espace affine), on peut se contenter, pour commencer, de n'imaginer que certains segments de la droite projective (ceux qui sont "visibles").

2. Pour une meilleure compréhension de cet aspect topologique de la géométrie projective, d'une manière tout de même rapide, voir par exemple : Savin et Gik, Le plan projectif.

3. De toutes façons, notre intuition des droites et des plans projectifs deviendra de plus en plus naturelle, au fur et à mesure que nous connaîtrons mieux leurs propriétés et que nous les aurons employées. Nous demandons au lecteur un tout petit peu de patience.

Accueil **Suite**

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

De la géométrie affine à la géométrie projective

Premiers exercices

1. Soit $\tilde{\mathcal{A}}$ une droite projective quelconque. Existe-t-il une droite affine, canoniquement associée à $\tilde{\mathcal{A}}$, que l'on pourrait noter A ?

2. Faire des schémas représentant

a) un point projectif quelconque
b) une droite projective quelconque
c) un plan projectif quelconque

avec la convention que tous les points noircis sur le papier représentent des points affines, que les droites affines sont représentées par des traits rectilignes, et que les plans affines sont représentés par des "bords" rectilignes en perspective cavalière. (En d'autres termes, il s'agit de dessiner les objets *affines*, canoniquement associés aux objets *projectifs*, avec les conventions de schémas habituelles en géométrie affine.)

Accueil Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

Propriétés projectives fondamentales

Nous commençons à imaginer les droites et les plans projectifs suffisamment bien pour pouvoir trouver naturelles les propriétés ci-dessous (que les mathématiques démontrent, et que nous admettrons).

Positions relatives des droites et des plans

Dans un espace projectif de dimension 3, les propriétés suivantes sont vérifiées :

a) Deux droites projectives distinctes et coplanaires sont toujours sécantes, c'est-à-dire qu'elles se coupent suivant un point projectif.

b) Deux plans projectifs distincts sont toujours sécants, c'est-à-dire qu'ils se coupent suivant une droite projective.

c) Etant donné un plan et une droite projectifs, ou bien la droite est incluse dans le plan, ou bien la droite perce le plan (en un point projectif).

d) Deux droites projectives distinctes sont ou bien coplanaires et sécantes, ou bien non coplanaires et sans points communs.

On voit que la géométrie affine et la géométrie projective diffèrent en ce qui concerne le parallélisme : le parallélisme n'existe pas pour les droites et les plans projectifs.

Détermination des droites et des plans par des points

Dans un espace projectif de dimension 3, les propriétés suivantes sont vérifiées :

i) Par deux points projectifs distincts, il passe une droite projective et une seule.

ii) Par trois points projectifs non alignés, il passe un plan projectif et un seul.

iii) Une droite projective est incluse dans un plan projectif si, et seulement si, deux points distincts de la droite appartiennent au plan.

(Ces propriétés, dont nous ne donnons pas les démonstrations, sont faciles à retenir puisqu'elles sont exactement analogues à celles de la géométrie affine.)

Remarque fondamentale

Les propriétés a, b, c, d, ainsi que les propriétés i, ii, iii, sont des propriétés projectives pures, valables indépendamment de toute relation avec les propriétés affines. Pour la géométrie projective, tous les points, toutes les droites, tous les plans projectifs, sont analogues ; ils possèdent tous exactement les mêmes propriétés projectives, et il est bon de concevoir cette unité fondamentale.

Cependant, les relations que nous avons exposées entre la géométrie projective et la géométrie affine - qui nous ont servi à acquérir une intuition projective - nous seront utiles aussi par la suite parce que nous aurons continuellement besoin d'utiliser les deux géométries en même temps.

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

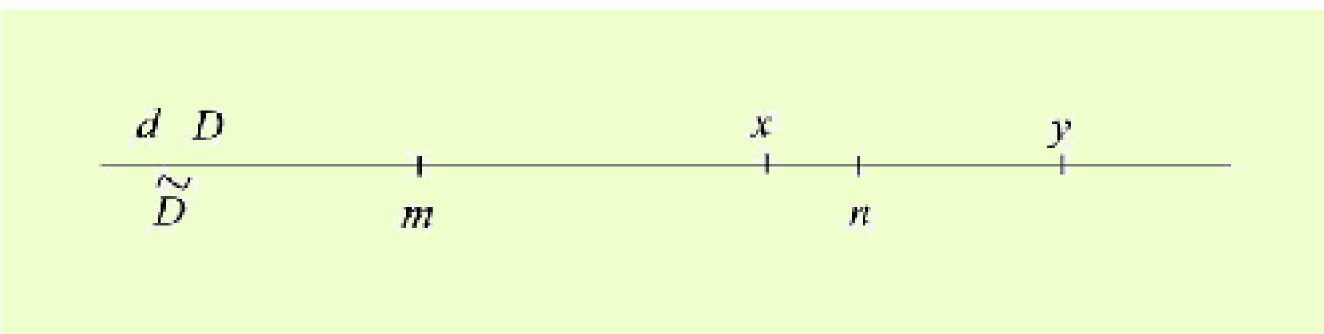
Propriétés projectives fondamentales

Segments projectifs

On imagine peut-être un segment de droite projective, analogue à un segment affine, comme la portion de droite située entre deux points distincts de la droite. Mais cette phrase ne constitue pas une définition, puisqu'une droite projective est une ligne fermée.

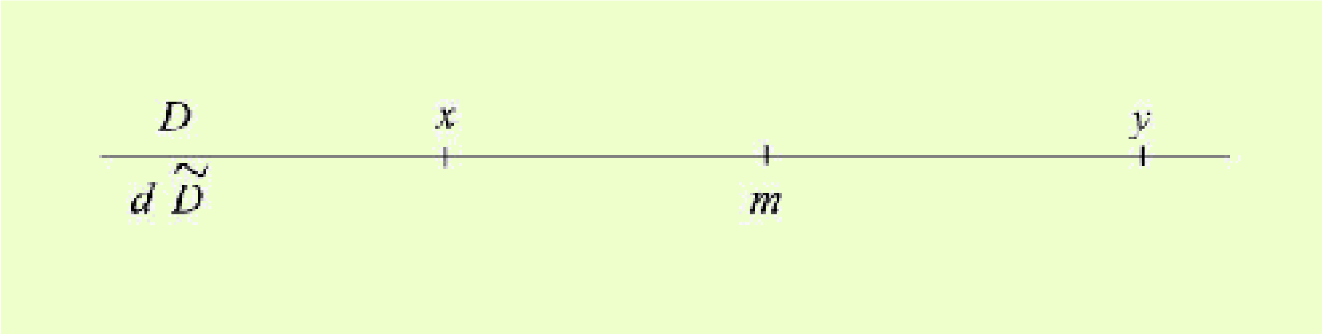
De même que sur un cercle, deux points distincts m et n d'une droite projective déterminent *deux segments projectifs* d'extrémités m et n.
Si on imagine par exemple deux points affines m et n, sur une droite projective complétée d'une droite affine, les deux segments d'extrémités m et n sont le segment affine [mn] et le segment qui passe par le point à l'infini de la droite.
Comme pour les arcs de cercle, on peut désigner chacun des deux segments projectifs d'extrémités m et n en nommant un point intérieur au segment voulu.

Exemples



$$[\overset{\frown}{mxn}] \neq [\overset{\frown}{myn}] \qquad [\overset{\frown}{mxn}] = [mn]_{aff} \qquad [\overset{\frown}{myn}] = [\overset{\frown}{mdn}]$$

$[\overset{\frown}{\ \ }]$ désigne un segment projectif et $[\ \ ]_{aff}$ un segment affine.
d est le point à l'infini de *D*.



$$[\overset{\frown}{mxd}] \neq [\overset{\frown}{myd}]$$

Cette méthode de notation est valable quelle que soit la droite projective (complétée de droite affine, ou à l'infini) et quels que soient les points m, n, x, et y (affines ou à l'infini).

Accueil **Suite**

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

EXERCICES

1. Soit un espace projectif $\widetilde{E}$, complété d'un espace affine E de dimension 3.
Soient D et D' deux droites affines de E.

Démontrer que D et D' sont coplanaires si et seulement si leurs complétées projectives $\widetilde{D}$ et $\widetilde{D'}$ sont coplanaires.
(N.B. Des droites affines *coplanaires* sont des droites affines telles qu'il existe au moins un plan *affine* les contenant toutes les deux ; des droites projectives *coplanaires* sont des droites projectives telles qu'il existe au moins un plan *projectif* les contenant toutes les deux.)

2. Dans l'espace projectif $\widetilde{E}$, complété de l'espace affine E de dimension 3, on considère deux droites projectives quelconques.
Faire des schémas, suivant les conventions déjà données, représentant les deux droites projectives dans tous les cas possibles de position des droites par rapport à la partie affine de l'espace, et de position relative des droites entre elles. Indiquer dans chaque cas l'intersection éventuelle, en précisant sa nature (à l'infini ou non).

3. Même question qu'à l'exercice 2, en remplaçant les droites par des plans projectifs.

4. Même question qu'à l'exercices 2, en remplaçant les deux droites par une droite et un plan.

5. Dans les Propriétés projectives fondamentales, démontrer la propriété iii) à l'aide de la propriété c).

6. Soit un espace projectif $\widetilde{E}$, complété d'un espace affine E de dimension 3.
Faire des schémas représentant la propriété i) des Propriétés projectives fondamentales, en respectant les conventions déjà données. (On trouve divers schémas, suivant la nature, affine ou à l'infini, des deux points.)
En remplaçant les objets projectifs par les objets affines qui leur sont canoniquement

associés, énoncer les propriétés affines qui sont équivalentes à la propriété i). (On trouve diverses propriétés affines, suivant la nature, affine ou à l'infini, des deux points.)

7. Même question qu'à l'exercice 6, en remplaçant la propriété i) par la propriété ii).

8. Même question qu'à l'exercice 6, en remplaçant la propriété i) par la propriété iii).

Corrigé

9. Utiliser les propriétés ii) et iii) des Propriétés projectives fondamentales pour démontrer que dans un espace projectif de dimension 3, étant donnés une droite et un point n'appartenant pas à la droite, il existe un plan et un seul contenant le point et la droite.

10. Même question qu'à l'exercice 6, en remplaçant la propriété i) par celle de l'exercice 9.

Corrigé

11. Faire un schéma, suivant les conventions déjà données, représentant une droite projective à l'infini, et un segment de cette droite.

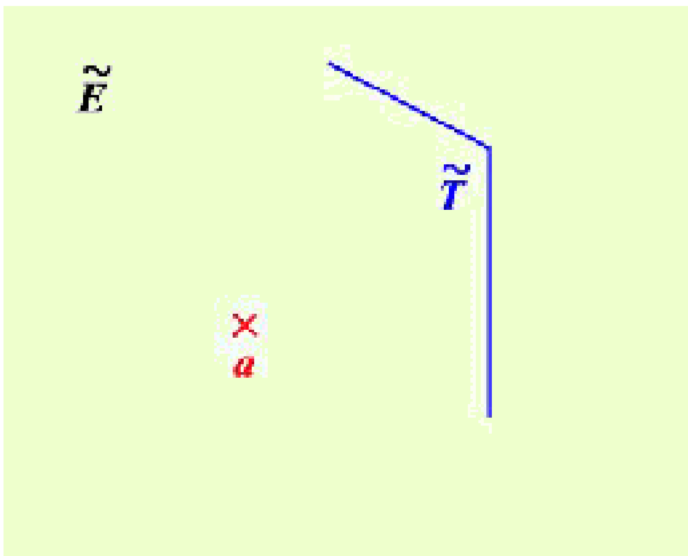
Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente   Page suivante

La perspective conique en termes de géométrie projective

Perspective, point de vue, tableau

Soit un espace projectif $\widetilde{E}$, complété d'un espace affine E de dimension 3.



Soit a un point affine de l'espace ($a \in E$) et T un plan affine de E. On note $\widetilde{T}$ le plan projectif complété de T dans $\widetilde{E}$. On suppose que $a \notin T$ (c'est-à-dire que $a \notin \widetilde{T}$).

Définition

On appelle *perspective conique /*ãäÙæÑ ãÎÑæØí de *point de vue /*äÞØÉ ÅÈÕÇÑ a sur le *tableau /* áæÍÉ $\widetilde{T}$ – ou encore *projection centrale /* ÅÓÞÇØ ãÑßÒí de *centre /* ãÑßÒ a sur le plan /ãÓÊæí $\widetilde{T}$ – l'application

$$\begin{aligned} p : \widetilde{E} \setminus \{a\} &\longrightarrow \widetilde{T} \\ x &\longrightarrow p(x) \end{aligned}$$

où $p(x)$ est le point d'intersection de la droite projective $\widetilde{(ax)}$ avec le plan $\widetilde{T}$.
L'image / ÇáÕæÑÉ $p(x)$ de x par p s'appelle la *perspective du point x sur le tableau* ãäÙæÑ

ÇáäÞØÉ Úáì ÇáäæÍÉ.

Voir l'exercice 1

Plan neutre

Propriété et définition

Soit T_a le plan affine parallèle à T et passant par a . On note $\widetilde{T_a}$ le plan projectif complété de T_a dans $\widetilde{E}$. Alors $\widetilde{T_a}$ est la réunion de $\{a\}$ (qui n'a pas d'image par p) et de l'ensemble des points de $\widetilde{E}$ dont l'image par p est à l'infini.

Le plan $\widetilde{T_a}$ se nomme le *plan neutre /* ÇáãÓÊæí ÇáãÍÇíÏ de la perspective.

> (Neutre / ãÍÇíÏ signifie : qui n'intervient pas, qui ne donne rien qu'on puisse dessiner sur la partie affine du tableau).

Pour une démonstration de la propriété, voir l'exercice 2.

Accueil

Suite

Page précédente Page suivante

La perspective conique en termes de géométrie projective

Exercices

1. Relire la définition de la perspective. Pourquoi l'application p n'est-elle pas définie au point a ? Pourquoi est-elle définie en tout point de $\widetilde{E}$ distinct de a ?

2. a) Faire un schéma en perspective cavalière, suivant les conventions déjà données, représentant le point a, les plans T et $\widetilde{T}$, et les plans T_a et $\widetilde{T}_\infty$.

b) Représenter un point affine x de l'espace, et sa perspective sur $\widetilde{T}$ (on fera divers schémas, suivant que $p(x)$ est affine ou à l'infini).

c) Représenter un point x à l'infini de l'espace, et sa perspective sur $\widetilde{T}$ (on fera divers schémas, suivant que $p(x)$ est affine ou à l'infini).

d) Démontrer que la perspective d'un point x quelconque de l'espace est à l'infini si, et seulement si, x est un point du plan $\widetilde{T}_\infty$.

3. Quels sont les points affines de $\widetilde{E}$ dont l'image par p est affine ?

4. Quels sont les points à l'infini de $\widetilde{E}$ dont l'image par p est affine ?

5. Soit x un point quelconque de $\widetilde{E}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p(x) = x$.

6. Est-ce qu'un point du tableau représente toujours un point de l'espace ? Est-ce qu'un point du tableau peut représenter deux points distincts de l'espace ? Existe-t-il des points de l'espace qui n'ont pas de représentation sur le tableau ?

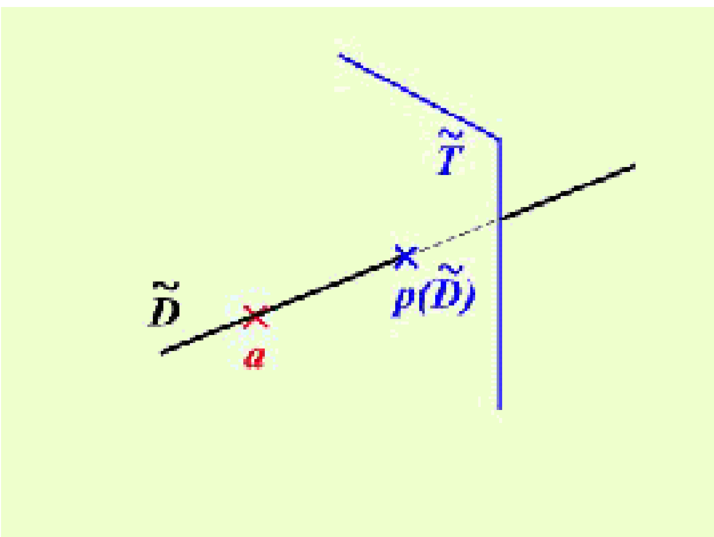
Accueil Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

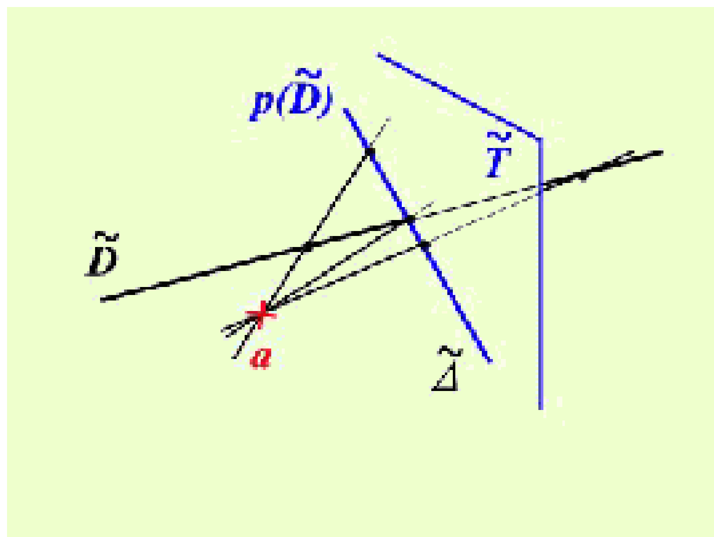
Page précédente Page suivante

Perspectives des droites

Soit $\widetilde{D}$ une droite projective quelconque de l'espace (ou bien $\widetilde{D}$ est la complétée d'une droite affine, ou bien $\widetilde{D}$ est une droite à l'infini). *La perspective de* $\widetilde{D}$ sur le tableau $\widetilde{T}$ est l'image $p(\widetilde{D})$ de $\widetilde{D}$ par p (c'est-à-dire l'ensemble des images par p des points de $\widetilde{D}$, pour les points de $\widetilde{D}$ où p est définie).



$\widetilde{D}$ *passe par le point de vue*



$\widetilde{D}$ *ne passe pas par le point de vue*

Propriété

Si $\widetilde{D}$ passe par le point de vue, $p(\widetilde{D})$ contient un point unique : le point où la droite $\widetilde{D}$ perce le plan $\widetilde{T}$.

Voir l'exercice 1

Propriété

Si $\widetilde{D}$ ne passe pas par le point de vue a,

i) $p(\widetilde{D})$ est la droite d'intersection $\widetilde{\Delta}$ du plan $\widetilde{T}$ et du plan projectif $(a,\widetilde{D})$ déterminé par la droite $\widetilde{D}$ et le point a.

ii) la restriction de p à $\widetilde{D}$ est une bijection de $\widetilde{D}$ sur $\widetilde{\Delta}$.

Voir l'exercice 3

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Pespectives des droites

Points de fuite

On a déjà l'idée que le point de fuite /äÞØÉ ÇáÊáÇÔí d'une droite est la perspective de son point à l'infini. On comprend que cette phrase ne constitue une définition que si le point à l'infini de la droite est unique, c'est-à-dire s'il s'agit d'une droite projective complétée d'une droite affine (on ne définit pas le point de fuite d'une droite à l'infini).

Soit D une droite affine de E , et $\widetilde{D}$ sa complétée projective dans $\widetilde{E}$.

Définition

Le *point de fuite /äÞØÉ ÇáÊáÇÔí* de $\widetilde{D}$ (on dit aussi "de D ") est l'image par p du point à l'infini de $\widetilde{D}$.

Propriété

Soit D_a la droite affine parallèle à D et passant par a . On note $\widetilde{D_a}$ la complétée projective de D_a dans $\widetilde{E}$. Le point de fuite de $\widetilde{D}$ est le point d'intersection de $\widetilde{T}$ et de $\widetilde{D_a}$.

Voir les exercices 6 et 7

Propriété

Le point de fuite de $\widetilde{D}$ est affine si, et seulement si, D n'est pas parallèle à T .

Voir l'exercice 8

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente   Page suivante

Pespectives des droites

Fuyantes

Soit D une droite affine de E, et $\widetilde{D}$ sa complétée projective dans $\widetilde{E}$.

Définition

La droite $\widetilde{D}$ est dite *fuyante* /ãÓÊÞíã ãÊáÇÔí lorsque sa perspective $p(\widetilde{D})$ sur le tableau est une droite, possédant une partie affine, et que son point de fuite est affine. (On dit aussi que la droite *affine* D est une fuyante.)

Propriété caractéristique

$\widetilde{D}$ est fuyante si, et seulement si, $a \notin D$ et $D \nparallel T$.

Propriétés

On suppose que D ne passe pas par le point de vue et qu'elle n'est pas incluse dans le plan neutre. On note Δ la partie affine de la perspective de $\widetilde{D}$.

1. Si $D \,//\, T$, alors $\Delta \,//\, D$ et la restriction de p à D est une bijection de D sur Δ, qui conserve les rapports de distances.

> (Les distances sont modifiées et l'image en perspective d'un segment de D est, par exemple, un segment plus court que le segment objet. Mais l'image du milieu du segment objet est au milieu du segment image, l'image du quart est au quart, etc.)

2. Si D est une fuyante, la perspective de D n'est pas la droite affine Δ, et la restriction de p à D ne conserve pas les rapports de distances.

> (L'image d'un segment de D n'est pas toujours un segment de Δ, et même lorsque c'en est un, l'image du milieu du segment objet n'est pas au milieu du segment image, etc.)

Voir les exercices 9 et 10

Accueil   Suite

Page précédente Page suivante

Perspectives des droites

Exercices

1. Soit $\widetilde{D}$ une droite projective de l'espace, passant par le point de vue. Pourquoi la droite $\widetilde{D}$ perce-t-elle le plan projectif $\widetilde{T}$? Existe-t-il des points de $\widetilde{D}$ qui n'ont pas d'image par p ? Quelle est l'image de $\widetilde{D}$ par p ?

2. Soit $\widetilde{D}$ une droite projective de l'espace, passant par le point de vue. Est-ce que $\widetilde{D}$ peut être une droite à l'infini ? Que peut-on dire de p($\widetilde{D}$) si $\widetilde{D}$ est incluse dans le plan neutre ? si $\widetilde{D}$ n'est pas incluse dans le plan neutre ?

3. Soit $\widetilde{D}$ une droite projective de l'espace, ne passant pas par le point de vue a .

a) Pourquoi a et $\widetilde{D}$ déterminent-ils un plan ? Pourquoi les plans (a , $\widetilde{D}$) et $\widetilde{T}$ ont-ils une droite d'intersection ? On nomme $\widetilde{\Delta}$ cette droite d'intersection.

b) On veut démontrer que p ($\widetilde{D}$) $\subset \widetilde{\Delta}$. Faire un schéma en perspective cavalière (suivant les conventions déjà données) représentant a , $\widetilde{T}$, $\widetilde{D}$, le plan (a , $\widetilde{D}$), et la droite $\widetilde{\Delta}$. Soit x un point de $\widetilde{D}$. Représenter sur le schéma le point x et sa perspective p (x). En utilisant la définition de la perspective et les propriétés fondamentales de la géométrie projective, démontrer que p (x) appartient à $\widetilde{\Delta}$.

c) On veut démontrer que $\widetilde{\Delta} \subset p$ ($\widetilde{D}$). Soit y un point de $\widetilde{\Delta}$. Représenter y sur le schéma. Dessiner un point z appartenant à $\widetilde{D}$ et dont la perspective est y . En utilisant la définition de la perspective et les propriétés fondamentales de la géométrie projective, démontrer qu'il existe un point de $\widetilde{D}$, et un seul, dont la perspective est y . En déduire que p (

$\widetilde{D}$) = $\widetilde{\Delta}$, et que la restriction de p à $\widetilde{D}$ est une bijection de $\widetilde{D}$ sur $\widetilde{\Delta}$.

4. Soit $\widetilde{D}$ une droite projective de l'espace, ne passant pas par le point de vue a . Que peut-on dire de p ($\widetilde{D}$) si $\widetilde{D}$ est incluse dans le plan neutre ? si $\widetilde{D}$ n'est pas incluse dans le plan neutre ? Dans le cas où $\widetilde{D} \not\subset \widetilde{T_a}$, de quel point de $\widetilde{D}$ le point à l'infini de p ($\widetilde{D}$) est-il l'image ?

5. On suppose que $\widetilde{D}$ est une droite à l'infini, et que ce n'est pas la droite à l'infini de $\widetilde{T_a}$. En utilisant les conventions déjà données, faire un schéma représentant le point de vue, le tableau, et la droite $\widetilde{D}$. Indiquer sur le schéma la droite p ($\widetilde{D}$).

6. Si $\widetilde{D}$ est une droite projective passant par le point de vue, quel est son point de fuite ?

7. Soit D une droite affine, ne passant pas par le point de vue a . Faire un schéma, suivant les conventions déjà données, représentant a , $\widetilde{T}$ et D . On nomme d le point à l'infini de D . Dessiner sur le schéma la droite projective $\widetilde{(ad)}$. Indiquer sur le schéma la perspective du point d . Où se trouve le point de fuite de D ?

8. Quels sont les points à l'infini dont la perspective est affine ? Quelles sont les droites affines dont le point à l'infini a une perspective affine ? Quelles sont les droites dont le point de fuite est affine ?.

9. Soit D une droite affine, ne passant pas par le point de vue, et non incluse dans le plan neutre.

a) Faire un schéma, suivant les conventions déjà données, représentant a , T et $\widetilde{T}$, T_a et $\widetilde{T_a}$. Représenter la droite D , sa complétée projective $\widetilde{D}$, et la perspective de $\widetilde{D}$ si :

i) D // T .

ii) D est une fuyante.

En vertu de quelle hypothèse la droite p ($\widetilde{D}$) admet-t-elle dans les deux cas une partie affine ? On nomme Δ cette partie affine.

b) Si D // T, quelle est la perspective du point à l'infini de D ? En déduire que la perspective de la droite affine D est la droite affine Δ, que la restriction de p à D est une bijection de D sur Δ, et que D // Δ.

c) Si D est une fuyante, trouver un point de D (affine) dont la perspective n'appartient pas à la droite affine Δ. Trouver un point de Δ (affine) qui n'est la perspective d'aucun point de D (affine).

10. Soit D une droite affine parallèle à T, ne passant pas par le point de vue, et non incluse dans le plan neutre. Soit Δ la perspective de D sur T. Comment sont situées l'une par rapport à l'autre les droites D et Δ ? Soit trois points distincts l, m et n, appartenant à D. On note l', m' et n' leurs perspectives sur Δ. Dessiner, à plat sur le papier, le plan (a, D) et les droites et points qui s'y trouvent. En faisant de la géométrie plane dans ce plan, démontrer que les rapports de distances ml / mn et $m'l' / m'n'$ sont égaux.

11. *Perspective d'un segment*

Soit b et c deux points affines distincts quelconques de l'espace. On veut étudier la perspective du segment affine $[bc]_{aff}$. On admettra la propriété (intuitivement évidente) que la perspective d'un segment projectif est un segment projectif. On rappelle que $[bc]_{aff}$ est celui des deux segments projectifs d'extrémités b et c qui ne contient pas le point à l'infini d de la droite (bc).

On suppose que (bc) ne passe pas par a et qu'elle n'est pas incluse dans le plan neutre.

On note D la droite (bc), $\widetilde{D}$ sa complétée projective, $\widetilde{\Delta}$ la perspective de $\widetilde{D}$ (pourquoi la perspective de $\widetilde{D}$ n'est-elle pas réduite à un point ?), Δ la partie affine de $\widetilde{\Delta}$ (pourquoi $\widetilde{\Delta}$ n'est-elle pas à l'infini ?), et f son point de fuite. La feuille de papier représentant le tableau *à plat* (on ne demande pas de schéma de T en perspective cavalière), tracer une droite affine représentant Δ. Indiquer sur Δ, d'une manière vraisemblable, les points $p(b)$, $p(c)$ et f, ainsi que celui des deux segments projectifs d'extrémités $p(b)$ et $p(c)$ qui est la perspective du segment $[bc]_{aff}$. On demande de distinguer tous les cas possibles, suivant les positions de b et de c par rapport au plan neutre.

Est-il possible que f appartienne au segment $p([bc]_{aff})$?

Dans quels cas la perspective d'un segment affine n'est-elle pas un segment affine ?

Lorsque $p(b)$ et $p(c)$ sont affines, est-il possible que f appartienne au segment affine $[p(b)p(c)]_{aff}$?

Lorsque f est à l'infini, est-il possible que la perspective de $[bc]_{aff}$ ne soit pas $[p(b)p(c)]_{aff}$? Comment sont situés l'un par rapport à l'autre ces deux segments affines ?

Par le dispositif expérimental de Dürer, ou par photographie, est-il possible que la perspective d'un segment affine ne soit pas un segment affine ?

12. *Perspective d'une fuyante*

Soit D une fuyante. Faire un schéma en perspective cavalière, suivant les conventions déjà données, représentant $\widetilde{T}$, a , $\widetilde{T_a}$, D et sa complétée projective $\widetilde{D}$ (la droite $\widetilde{D}$ passe-t-elle par a ?).

On nomme d le point à l'infini de $\widetilde{D}$, t son point d'intersection avec le tableau (pourquoi t est-il affine ?), n son point d'intersection avec le plan neutre, f son point de fuite (f est-il affine ou à l'infini ?), $\widetilde{\Delta}$ la perspective de $\widetilde{D}$ (pourquoi $p\,(\widetilde{D}\,)$ est-elle une droite ?), Δ la partie affine de $\widetilde{\Delta}$ (pourquoi cette partie affine existe-t-elle ?) et δ son point à l'infini.
Indiquer sur le schéma d , t et n . Représenter le point f . Trouver deux points affines remarquables par lesquels passe la droite $\widetilde{\Delta}$, tracer $\widetilde{\Delta}$, et indiquer le point δ . Quelle est la position relative des droites affines (an) et ($f\,t$) ? (Vérifier que le schéma est vraisemblable.)

On imagine un point x de la droite $\widetilde{D}$, circulant sur cette droite toujours dans le même sens, à partir du point t par exemple. Imaginer le mouvement correspondant de sa perspective $p\,(x\,)$ sur la droite $\widetilde{\Delta}$, jusqu'à ce que, circulant toujours dans le même sens, le point x soit revenu à son point de départ. Que se passe-t-il, en particulier, lorsque x traverse le plan à l'infini, et lorsque x traverse le plan neutre ?
Par le dispositif expérimental de Dürer ou par photographie (voir exercice ci-dessus), est-il possible qu'un segment affine soit la perspective d'un segment projectif non affine ?

Accueil

Suite

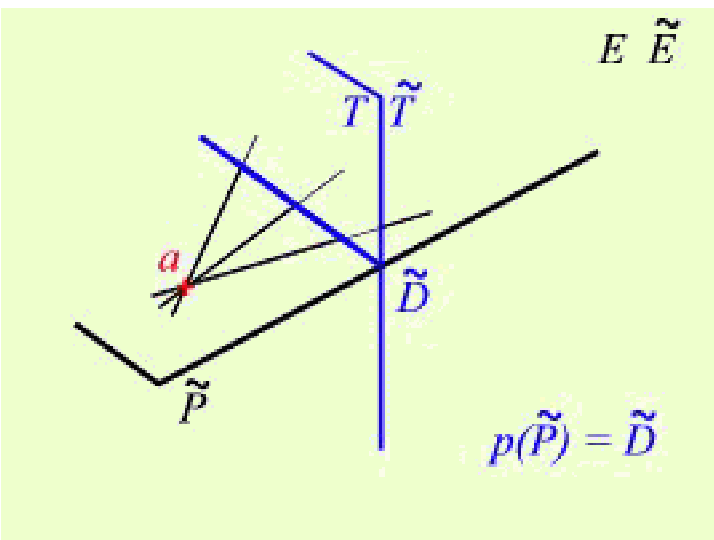
Géométrie projective appliquée à la perspective conique

Page précédente

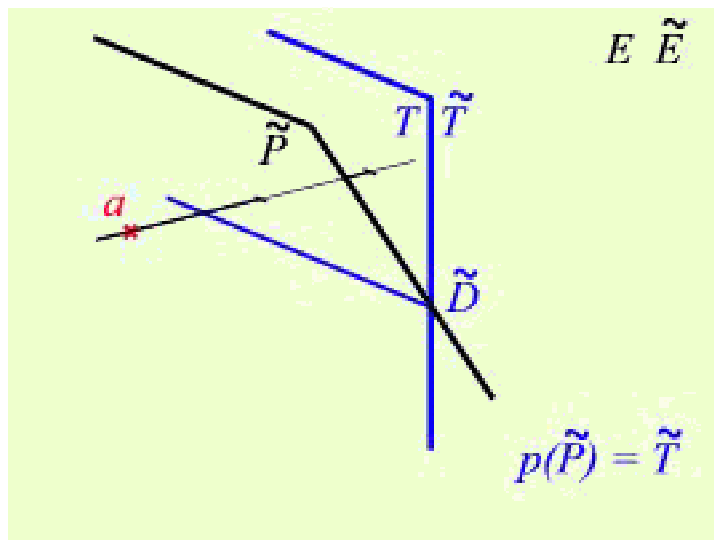
Page suivante

Perspectives des plans

Soit $\tilde{P}$ un plan projectif quelconque de l'espace ($\tilde{P}$ est ou bien un plan complété d'un plan affine, ou bien le plan à l'infini de l'espace). La perspective de $\tilde{P}$ sur le tableau $\tilde{T}$ est l'image $p(\tilde{P})$ de $\tilde{P}$ par p (c'est-à-dire l'ensemble des images par p des points de $\tilde{P}$, pour les points de $\tilde{P}$ où p est définie).



$\tilde{P}$ *passe par le point de vue*



$\tilde{P}$ *ne passe pas par le point de vue*

Propriété

Si $\tilde{P}$ passe par le point de vue, $p(\tilde{P})$ est la droite d'intersection des plans $\tilde{P}$ et $\tilde{T}$.
Voir l'exercice 1

Propriété

Si $\tilde{P}$ ne passe pas par le point de vue, la perspective de $\tilde{P}$ est le tableau $\tilde{T}$ tout entier, et la restriction de p à $\tilde{P}$ est une bijection de $\tilde{P}$ sur $\tilde{T}$.

Voir exercice 3

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

Perspectives des plans

Lignes de fuite

On a déjà l'idée que la ligne de fuite /Î∅ ÇáÊáÇÔí d'un plan est la perspective de sa droite à l'infini. On comprend que cette phrase ne constitue une définition que si le plan ne contient qu'une seule droite à l'infini, c'est-à-dire si le plan n'est pas le plan à l'infini de l'espace.

Soit $\widetilde{P}$ un plan projectif, complété d'un plan affine P .

Définition

La *ligne de fuite /Î∅ ÇáÊáÇÔí* de $\widetilde{P}$ (on dit aussi "de P ") est l'image par p de la droite à l'infini de $\widetilde{P}$.

Propriété

Soit P_a le plan affine parallèle à P et passant par a . On note $\widetilde{P_a}$ le complété projectif de P_a dans $\widetilde{E}$. La ligne de fuite de $\widetilde{P}$ est la droite d'intersection des plans $\widetilde{T}$ et $\widetilde{P_a}$.

Voir les exercices 5 et 6

Propriété

La ligne de fuite de $\widetilde{P}$ est à l'infini si, et seulement si, P est parallèle à T .

Voir l'exercice 7

Propriété

Soit P un plan affine non parallèle au tableau et ne passant pas par le point de vue. On note L_P la partie affine de sa ligne de fuite.

Soit D une droite affine incluse dans P . On note $\widetilde{D}$ la complétée projective de D . On suppose que la perspective de $\widetilde{D}$ n'est pas à l'infini et on note Δ sa partie affine.

Alors, Δ // L_P $\Leftrightarrow$ D // T .

Voir l'exercice 9

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Perspectives des plans

Exercices

1. Soit $\widetilde{P}$ un plan projectif passant par le point de vue. Pourquoi les plans $\widetilde{P}$ et $\widetilde{T}$ sont-ils sécants ? Soit $\widetilde{D}$ leur droite d'intersection. Démontrer que $p(\widetilde{P}) = \widetilde{D}$. Existe-t-il des points de $\widetilde{P}$ qui n'ont pas d'image par p sur le tableau ? Deux points de $\widetilde{P}$ distincts ont-ils sur le tableau des images distinctes ?

2. Soit $\widetilde{P}$ un plan projectif passant par le point de vue. Le plan $\widetilde{P}$ peut-il être le plan à l'infini de l'espace ? Quelle est la perspective de $\widetilde{P}$ si $\widetilde{P}$ est le plan neutre ? si $\widetilde{P}$ n'est pas le plan neutre ?

3. Soit $\widetilde{P}$ un plan projectif ne passant pas par le point de vue.

a) Faire un schéma en perspective cavalière (suivant les conventions déjà données) représentant a, $\widetilde{T}$, $\widetilde{P}$, un point x de $\widetilde{P}$, et la perspective $p(x)$ de x sur $\widetilde{T}$.

b) L'inclusion $p(\widetilde{P}) \subset \widetilde{T}$ est évidemment vérifiée. On veut démontrer que $p(\widetilde{P}) = \widetilde{T}$, et que la restriction de p à $\widetilde{P}$ est bijective de $\widetilde{P}$ sur $\widetilde{T}$. Dessiner sur le schéma un point y quelconque de $\widetilde{T}$, et un point z de $\widetilde{P}$ dont la perspective est y. En utilisant la définition de la perspective et les propriétés fondamentales de la géométrie projective, démontrer qu'il existe un point de $\widetilde{P}$, et un seul, dont la perspective est y.

4. Quelle est la perspective du plan $\widetilde{T}$? Quelle est la perspective du plan à l'infini de l'espace ?

5. Si $\widetilde{P}$ est un plan passant par le point de vue, quelle est sa ligne de fuite ?

6. Soit P un plan affine ne passant pas par le point de vue, et soit $\widetilde{P}$ son complété projectif. Faire un schéma en perspective cavalière (suivant les conventions déjà données) représentant a , $\widetilde{T}$ et $\widetilde{P}$. On nomme $\widetilde{D}$ la droite à l'infini de $\widetilde{P}$. Représenter sur le schéma le plan (a , $\widetilde{D}$). Quelle est la perspective de $\widetilde{D}$? Quelle est la ligne de fuite de $\widetilde{P}$?

7. Quelles sont les droites à l'infini dont la perspective est à l'infini ? Quels sont les plans affines dont la droite à l'infini a une perspective à l'infini ? Quels sont les plans affines dont la ligne de fuite est à l'infini ?

8. Soit P un plan affine ne passant pas par le point de vue, et soit $\widetilde{P}$ son complété projectif. On sait que la restriction de p au plan projectif $\widetilde{P}$ est une bijection de $\widetilde{P}$ sur $\widetilde{T}$. La restriction de p au plan *affine* P est-elle une bijection de P sur le tableau affine T :

a) si P est parallèle à T ?

b) si P n'est pas parallèle à T ?

9. Faire un schéma en perspective cavalière représentant le point de vue, le tableau, le plan neutre, un plan affine P ne passant pas par a et non parallèle à T (partie affine du tableau), et la ligne de fuite L_P de P . Pourquoi cette ligne de fuite n'est-elle pas à l'infini ? Comparer les droites L_P , $P \cap T$ et $P \cap T_a$. Quelles sont les droites, incluses dans P, dont la perspective est à l'infini ? Existe-t-il des droites, incluses dans P , dont la perspective est réduite à un point ?

Soit D une droite, incluse dans P, et dont la perspective n'est pas à l'infini. On note Δ la partie affine de la perspective de la complétée projective de D.

a) Dessiner une droite D dans le cas où $D \,//\, T$, et dessiner Δ.

b) Dessiner une droite D dans le cas où $D \not\parallel T$, et dessiner Δ.

c) Démontrer que :

$$\Delta \,//\, L_P \quad \Leftrightarrow \quad D \,//\, T .$$

Accueil

Suite

Page précédente Page suivante

Parallélisme et perspective

Parallélisme, points de fuites et lignes de fuite

Propriétés

Deux droites affines de l'espace sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même point de fuite.

Deux plans affines de l'espace sont parallèles si, et seulement si, ils ont la même ligne de fuite.

Etant donné une droite affine et un plan affine de l'espace, la droite est parallèle au plan si, et seulement si, le point de fuite de la droite appartient à la ligne de fuite du plan.

Voir les exercices 1, 2 et 3

Accueil Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Parallélisme et perspective

Exercices

1. Si deux droites affines de l'espace sont parallèles, que peut-on dire de leurs points à l'infini ? Que peut-on dire de leurs points de fuite ?

Réciproquement, démontrer que si deux droites affines de l'espace ont le même point de fuite, alors elles sont nécessairement parallèles. On utilisera le fait que la restriction de la perspective au plan à l'infini E_∞ de l'espace est une bijection de E_∞ sur $\widetilde{T}$.

2. Si deux plans affines de l'espace sont parallèles, que peut-on dire de leurs droites à l'infini ? Que peut-on dire de leurs lignes de fuite ?

Réciproquement, démontrer que si deux plans affines de l'espace ont la même ligne de fuite, alors ils sont nécessairement parallèles. On utilisera le fait que la restriction de la perspective au plan à l'infini E_∞ de l'espace est une bijection de E_∞ sur $\widetilde{T}$.

3. Si une droite affine de l'espace est parallèle à un plan affine, comment est situé le point à l'infini de la droite par rapport à la droite à l'infini du plan ? Comment est situé le point de fuite de la droite par rapport à la ligne de fuite du plan ?

Réciproquement, démontrer que si le point de fuite d'une droite affine de l'espace appartient à la ligne de fuite d'un plan affine, alors la droite est nécessairement parallèle au plan.

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

Eléments remarquables

Ligne d’horizon, point de fuite principal, plan vertical principal

Définition
La *ligne d'horizon* / ÎØ ÇáÃÝÞ est la ligne de fuite des plans horizontaux.

Définition
Le *point de fuite principal* / äÞØÉ ÇáÊáÇÔí ÇáÑÆíÓíÉ est le point de fuite des droites orthogonales au tableau.

Propriété
Le point de fuite principal appartient à la ligne d'horizon si, et seulement si, le tableau est vertical.
Voir l'exercice 2

Définition
Si le tableau n'est pas horizontal, on nomme *plan vertical principal* le plan vertical orthogonal au tableau et passant par le point de vue.

(Si le tableau est horizontal, il existe une infinité de plans verticaux orthogonaux au tableau et passant par le point de vue.)

Accueil Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente   Page suivante

Eléments remarquables

Exercices

1. Soit H un plan affine horizontal de l'espace, passant par le point de vue. On suppose le tableau non parallèle à H (le plus souvent, le tableau est vertical, mais ce n'est pas nécessairement le cas).

a) Faire un schéma, suivant les conventions déjà données, représentant T, a, H et la ligne d'horizon.

b) Soit H' un plan horizontal distinct de H. Représenter H' sur le schéma et indiquer sa ligne de fuite.

c) Soit P un plan affine de l'espace dont la ligne de fuite est la ligne d'horizon. Quelle est la direction de P ?

d) Soit D une fuyante horizontale, incluse dans H. Représenter D sur le schéma, et indiquer son point de fuite et la perspective de sa complétée projective.

e) Soit D' et D'' deux fuyantes horizontales incluses dans H'. On suppose que :

$$D' \parallel D \quad \text{et} \quad D'' \not\parallel D.$$

Représenter D' et D'' sur le schéma, et indiquer leurs points de fuite et les perspectives de leurs complétées projectives.

f) Soit A une droite affine de l'espace. On suppose que A est une fuyante, et que son point de fuite appartient à la ligne d'horizon. Quelle est la direction de A ?

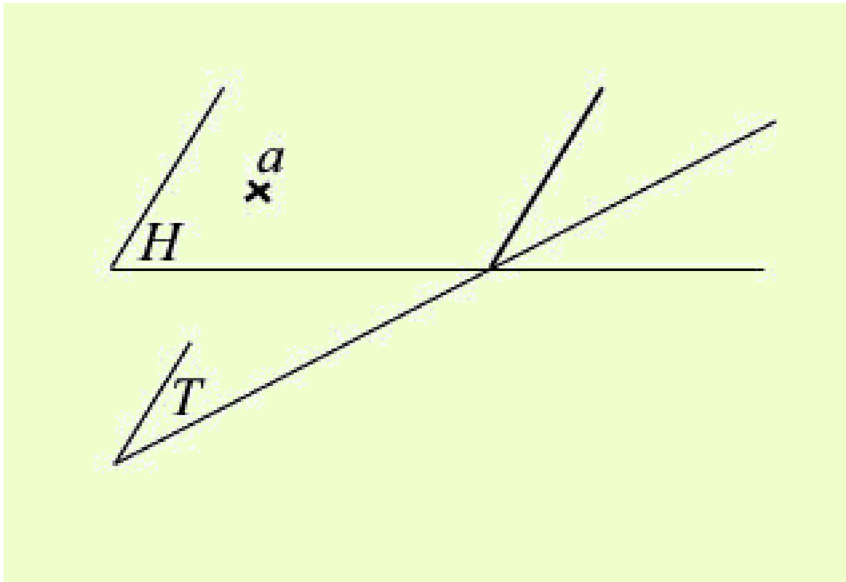
2. Faire un schéma, suivant les conventions déjà données, représentant T, a, la ligne d'horizon et le point de fuite principal :

a) dans le cas où le tableau est vertical,

b) dans le cas où le tableau n'est pas vertical.

Démontrer que le point de fuite principal appartient à la ligne d'horizon si, et seulement si, le tableau est vertical.

3. On suppose que T n'est ni vertical, ni horizontal.



Le schéma ci-dessus représente en perspective cavalière T, a et le plan horizontal H passant par a . On considère que les "bords" fictifs qui matérialisent les plans sont comme les bords des pages d'un cahier ouvert : dans l'espace, les uns sont parallèles à la droite d'intersection des plans, les autres perpendiculaires à cette droite.

a) Reproduire le schéma. Indiquer sur le schéma la partie affine L_H de la ligne d'horizon (pourquoi la ligne d'horizon n'est-elle pas à l'infini ?).

b) On note f_1 le point de fuite de la direction de droite horizontale orthogonale à L_H .

Dans l'espace, quelle est la direction de la droite ($a\, f_1$) par rapport aux "bords" du plan H ? Représenter f_1 sur le schéma.

Le point f_1 n'est pas le point de fuite principal ; pourquoi ?

c) On note f_v l e point de fuite de la direction de droite verticale, et f_p le point de fuite principal.

Le point f_v n'est pas à l'infini ; pourquoi ?

Les points f_v et f_p ne sont pas confondus ; pourquoi ?

Démontrer que le plan ($a\, f\ \ f$) est le plan vertical principal. On note V ce plan.

Quelle est la direction de $V_v \cap T_p$ par rapport à L_H ? Quelle est la direction de $V \cap T$ par rapport aux "bords" du plan T ? Représenter cette intersection sur le schéma et représenter correctement f_v et f_p .

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente Page suivante

EXERCICES

Pour tous les exercices qui suivent, on se trouve dans l'espace projectif $\widetilde{E}$ complété de l'espace affine E de dimension 3, et on considère la perspective de point de vue a sur le tableau $\widetilde{T}$: a est un point affine de l'espace, $\widetilde{T}$ est un plan projectif complété d'un plan affine T, et a n'appartient pas à T. On note p cette perspective.

1. On suppose que Δ_1 et Δ_2 sont deux droites affines strictement parallèles dessinées sur le tableau, et que leurs complétées projectives $\widetilde{\Delta_1}$ et $\widetilde{\Delta_2}$ sont les perspectives de deux droites de l'espace $\widetilde{D_1}$ et $\widetilde{D_2}$, complétées de deux droites affines D_1 et D_2. On veut étudier la position des droites D_1 et D_2 dans l'espace.

a) Faire un schéma en perspective cavalière, suivant les conventions déjà données, représentant , $\widetilde{T}$, a , $\widetilde{\Delta_1}$ et $\widetilde{\Delta_2}$.

b) Représenter le plan dans lequel se trouve nécessairement la droite $\widetilde{D_1}$. La droite $\widetilde{D_1}$ passe-t-elle par a ? Dessiner une droite $\widetilde{D_1}$ convenable. De quel point de $\widetilde{D_1}$ le point à l'infini de $\widetilde{\Delta_1}$ est-il la perspective ?

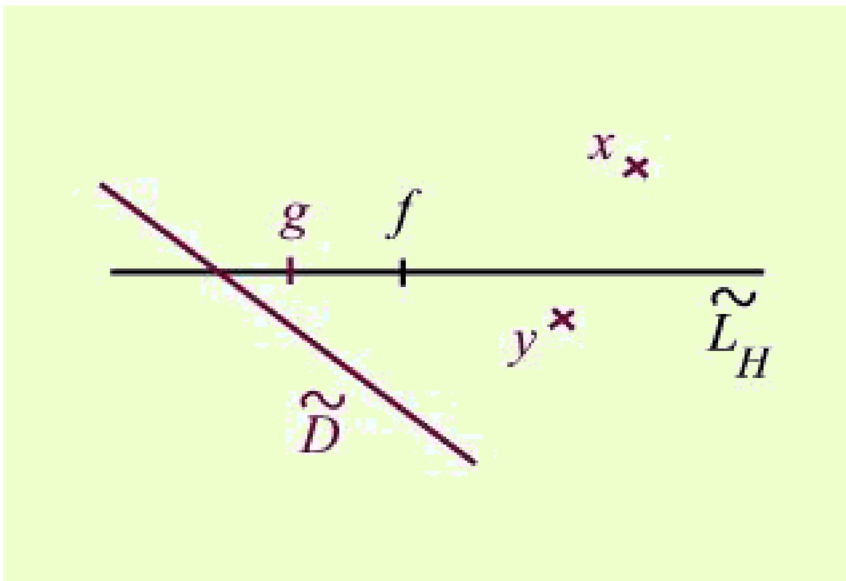
c) Représenter de même une droite $\widetilde{D_2}$ convenable. Si $\widetilde{D_1}$ et $\widetilde{D_2}$ sont sécantes, quelle est nécessairement la perspective de leur point d'intersection ? Sur quelle droite remarquable se trouve nécesairement ce point d'intersection, s'il existe ?

d) Les droites affines D_1 et D_2 peuvent-elles être sécantes ? parallèles ? non coplanaires ? On demande d'illustrer chacun des cas par un schéma.

2. On suppose que Δ_1 et Δ_2 sont deux droites affines sécantes dessinées sur le tableau, et que leurs complétées projectives $\widetilde{\Delta_1}$ et $\widetilde{\Delta_2}$ sont les perspectives de deux droites de l'espace $\widetilde{D_1}$ et $\widetilde{D_2}$, complétées de deux droites affines D_1 et D_2.

Les droites affines D_1 et D_2 peuvent-elles être parallèles ? sécantes ? non coplanaires ? Comparer avec l'exercice précédent.

3. Dans le schéma ci-dessous,



on suppose que la feuille de papier représente le tableau de la perspective **à plat**, et que $\widetilde{L_H}$ est la ligne d'horizon et f le point de fuite principal.

Le point g est-il un point de fuite ? Les points x et y sont-ils des points de fuite ? La droite $\widetilde{D}$ est-elle une ligne de fuite ? Si la réponse est non, dire pourquoi. Si la réponse est oui, dire de quelles droites les points sont les points de fuite, ou de quels plans la droite $\widetilde{D}$ est la ligne de fuite.

4. On considère deux plans de l'espace dont les lignes de fuite sont des complétées de droites affines sécantes. Démontrer que les deux plans sont sécants. Quel est le point de fuite de leur droite d'intersection ?

5. Que peut-on dire de deux plans de l'espace dont les lignes de fuite sont des complétées de droites affines parallèles ?

6. Soit P un plan non parallèle à T. De quels points de $\vec{P}$ le point à l'infini de sa ligne de fuite est-il la perspective ?

7. ***Directions horizontales, directions verticales***

Deux plans verticaux sont-ils nécessairement parallèles ? Deux droites verticales sont-elles nécessairement parallèles ? Deux droites horizontales sont-elles nécessairement parallèles ? Deux plans horizontaux sont-ils nécessairement parallèles ?

On suppose le tableau vertical.
Que peut-on dire des lignes des fuite de deux plans horizontaux ? de deux plans verticaux ?
Que peut-on dire des points de fuite de deux droites horizontales ? de deux droites verticales ?

8. Quelle est la perspective du plan à l'infini de l'espace ?

9. ***Perspective d'un carrelage***

On suppose le tableau vertical. Soit H le plan horizontal du sol. On suppose connus la cote h du point de vue (c'est-à-dire sa hauteur h au dessus du sol) et la distance d du point de vue au tableau. On note f le point de fuite principal, L_H la ligne d'horizon, et L_T la *ligne de terre* / ÎØ ÇáÃÑÖ , c'est-à-dire l'intersection du tableau avec le plan du sol.

a) Faire un **schéma en perspective cavalière** représentant T, a et H. Indiquer L_T. Dessiner f et L_H.

On suppose que le carrelage est un quadrillage du sol fait de carrés tous isométriques, alignés en rangées parallèles à la ligne de terre, et en rangées perpendiculaires à cette ligne. On suppose que l'un des bords de rangées est confondu avec la ligne de terre. Représenter le carrelage sur le schéma.

Dessiner la projection orhogonale a' de a sur H, ainsi que la projection orthogonale a'' de a' et de f sur L_T. Quelle est la direction du plan affine (afa') ? Indiquer h et d.

b) On suppose maintenant que la feuille de papier représente **le plan du sol à plat**. Dessiner une droite représentant L_T. Dessiner le carrelage. Dessiner a' et a''. Indiquer d.

Dessiner une diagonale Δ du carrelage

Représenter Δ sur le schéma de la question a). Dessiner sur ce schéma le point de fuite δ de Δ. Utiliser des propriétés remarquables du triangle $af\delta$ pour trouver la distance du point δ au point f.

c) On suppose enfin que la feuille de papier représente **le plan du tableau à plat**, et que L_T, L_H et f sont déjà dessinés.

Représenter L_T, L_H et f d'une manière vraisemblable, en indiquant h sur le dessin.

Dessiner a'' et les coins des carreaux situés sur la ligne de terre. Dessiner la perspective des bords de rangées perpendiculaires à la ligne de terre.

Dessiner δ. Dessiner la perspective de Δ, puis celle des bords de carreaux parallèles à la ligne de terre.

On voit, par exemple par l'exercice précédent, que la perspective modifie les longueurs et même, en général, les rapports de longueurs : les côtés des carreaux ne sont égaux en perspective que sur les droites parallèles à la ligne de terre ; sur les droites perpendiculaires, les côtés des carreaux sont inégaux en perspective (de plus en plus petits au fur et à mesure qu'on s'éloigne sur le carrelage vers l'horizon). Il n'est donc pas immédiat, en général, de dessiner en perspective la division d'un segment en plusieurs parties égales. Il existe plusieurs techniques permettant de le faire. Le but des deux exercices suivants est de faire comprendre l'une de ces techniques (différente de celle que nous avons employée pour le carrelage).

10. *Division des fuyantes horizontale*

On suppose le tableau vertical.

Soit $[bc]$ un segment affine horizontal de l'espace, non inclus dans le plan horizontal passant par le point de vue, et non parallèle au tableau.

a) La feuille de papier représentant le **plan du tableau à plat**, dessiner la ligne d'horizon et la perspective de [bc] , d'une manière vraisemblable.

b) Dessiner la perspective de la droite Δ horizontale, passant par b et parallèle au tableau.

c) Représenter **ailleurs**, **à plat** sur le papier, **le plan (Δbc)** et une construction utilisant Δ qui permette de diviser [bc] en trois parties égales.

d) Dessiner, sur le schéma des questions a) et b), la perspective de la construction de la question c).

11. ***Division des fuyantes quelconques***

On ne suppose rien sur la direction du tableau.

Soit [bc] un segment affine de l'espace ; on suppose que la perspective de [bc] est un segment affine [$p(b)\,p(c)$] , déjà dessiné sur le tableau, et que le point de fuite f de la droite (bc) est affine et déjà dessiné sur le tableau.

La feuille de papier représentant le plan du tableau à plat, faire un schéma représentant [$p(b)\,p(c)$] et f .

En s'inspirant de l'exercice précédent, trouver une construction, effectuée sur le tableau à plat, donnant la perspective des points qui divisent le segment [bc] en trois parties égales.

Dans les problèmes de *"restitution perspective"*, il ne s'agit pas d'effectuer le dessin en perspective d'un objet donné, dans une perspective dont les éléments caractéristiques (point de vue et tableau) sont donnés. Il s'agit au contraire de partir d'un dessin donné pour retrouver (*"restituer"*) les éléments caractéristiques de la perspective, en utilisant des informations diverses qui ne sont pas toutes contenues dans le dessin géométrique lui-même.
L'exercice suivant en est un exemple.

12. ***Restitution perspective*** (voir la remarque précédente)

Le dessin ci-contre est la perspective conique d'un bâtiment dont les angles sont évidemment droits et les arêtes horizontales et verticales (opinion très probablement juste, qui n'est pas due à la géométrie pure mais à une grande habitude des bâtiments usuels, voir Ambiguité).

a) Imprimer la feuille

Construire sur la feuille imprimée le point de fuite des arêtes verticales. Situé dans l'espace relativement au bâtiment, le plan du tableau est-il vertical ? Pourquoi ?

b) Construire sur la feuille la ligne d'horizon.

c) Où est le point de fuite principal ? On demande de construire exactement ce point de fuite en utilisant les droites et les points situés dans deux plans remarquables :

1. le plan horizontal passant par le point de vue ;
2. le plan vertical principal ;

on utilisera la ligne de fuite du plan vertical principal, et le point de fuite de la direction de droite horizontale incluse dans le plan vertical principal.

Le point de fuite principal est-il situé d'une manière usuelle dans le champ du tableau ?

Accueil Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente

Page suivante

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Problèmes et exercices généraux

Page 1

Exercices 1 à 5

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

1. Soit $\widetilde{E}$ le complété projectif d'un espace affine E de dimension 3. Soit a un point affine de $\widetilde{E}$, et soit $\widetilde{T}$ un plan projectif de $\widetilde{E}$, complété d'un plan affine T de E. On suppose que $a \notin \widetilde{T}$. On note p la perspective de point de vue a sur le tableau $\widetilde{T}$.

Soit $\widetilde{D}$ une droite à l'infini de l'espace. On suppose que $\widetilde{D}$ n'est pas la droite à l'infini de $\widetilde{T}$. Par quel objet affine peut-on suggérer la droite $\widetilde{D}$? Caractériser, au moyen d'objets affines, l'image en perspective $p(\widetilde{D})$ de $\widetilde{D}$ sur le tableau.

2. On se trouve dans un espace projectif de dimension 3. Si deux droites projectives de l'espace ne sont pas sécantes, peuvent-elles être coplanaires ? Que peut-on dire de deux plans projectifs qui ne sont pas sécants ?

3. Soit $\widetilde{E}$ le complété projectif d'un espace affine E de dimension 3. Quelles sont toutes les positions relatives possibles d'une droite et d'un plan projectifs de l'espace $\widetilde{E}$? Si la droite et le plan sont les complétés projectifs d'une droite et d'un plan affines de E, comparer les positions relatives de la droite et du plan affines avec celles de leurs complétés projectifs (préciser la nature, à l'infini ou non, de l'intersection).

4. Soit $\widetilde{E}$ le complété projectif d'un espace affine E de dimension 3. Soit a un point affine de $\widetilde{E}$, et soit $\widetilde{T}$ un plan projectif de $\widetilde{E}$, complété d'un plan affine T de E. On suppose que $a \notin \widetilde{T}$. On note p la perspective de point de vue a sur le tableau $\widetilde{T}$.

Soit P un plan affine de l'espace E. On note $\widetilde{P}$ son complété projectif dans $\widetilde{E}$.

a) Quelle est l'image en perspective du plan $\widetilde{P}$ sur le tableau :

i) si le plan passe par le point de vue ?

ii) si le plan ne passe pas par le point de vue ?

b) On suppose que P n'est pas parallèle à T. Que peut-on dire de la droite d'intersection de P et de T et de la ligne de fuite de $\widetilde{P}$:

i) si $\widetilde{P}$ passe par le point de vue ?

ii) si $\widetilde{P}$ ne passe pas par le point de vue ?

5. Dans l'espace projectif $\widetilde{E}$, complété de l' espace affine E de dimension 3, soit a un point affine et T un plan affine, tels que a $\notin$ T. On note $\widetilde{T}$ le complété projectif de T dans $\widetilde{E}$, et on considère la perspective p de point de vue a sur le tableau $\widetilde{T}$.
On suppose que T est vertical.
Soit H un plan affine horizontal de l'espace, représentant par exemple le plan du sol. On suppose que $a \notin H$, et on note $\widetilde{H}$ le complété projectif de H dans $\widetilde{E}$. On note $\widetilde{L_T}$ la ligne de terre, c'est-à-dire la droite d'intersection de $\widetilde{H}$ et de $\widetilde{T}$, et $\widetilde{L_H}$ la ligne d'horizon, c'est-à-dire la ligne de fuite de $\widetilde{H}$. On note L_T et L_H leurs parties affines.

a) Existe-t-il des points de $\widetilde{H}$ qui n'ont pas de perspective affine ? Soit b un point de $\widetilde{H}$, dont la perspective est affine ; on note b' cette perspective. On demande de dire où se trouve le point b dans chacun des 5 cas suivants :

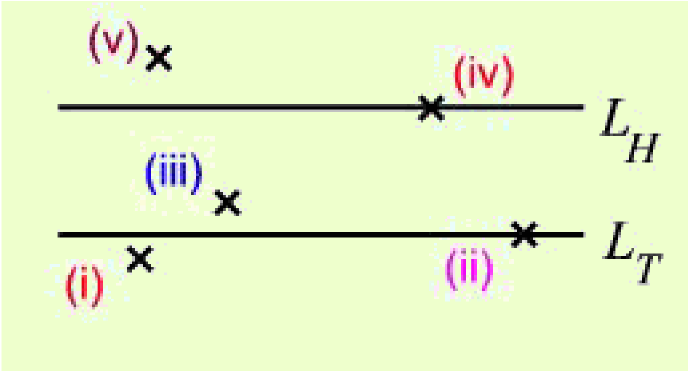


Schéma où la feuille de papier repésente le plan du tableau à plat.

(i) L_T est entre b' et L_H

(ii) $b' \in L_T$

(iii) b' est entre L_T et L_H

(iv) $b' \in L_H$

(v) L_H est entre L_T et b' .

b) Soit c le point affine de l'espace tel que le segment $[bc]$ soit vertical, de longueur l , et que c et a soient du même côté de H ($[bc]$ représente par exemple un homme, debout sur le sol au point b). L_T , L_H et la perspective b' du point b' étant donnés, on cherche à construire sur le tableau la perspective c' du point c . Justifier par les propriétés mathématiques convenables la construction suivante :

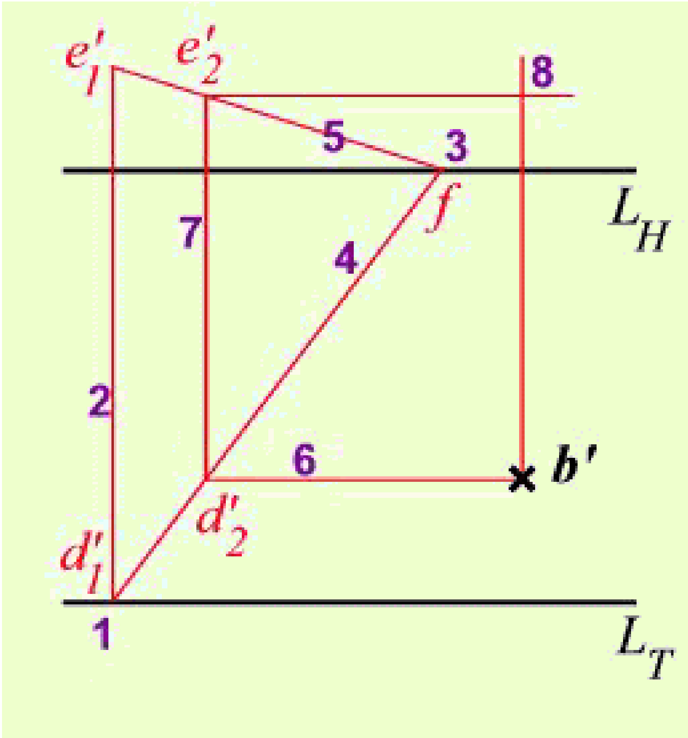
1 : Soit d'_1 un point quelconque de L_T .

2 : Soit $d'_1e'_1$ le segment perpendiculaire à L_T , de longueur l , et tel que e'_1 et L_H soient du même côté de L_T .

3 : Soit f un point de L_H n'appartenant pas à la droite $(d'_1e'_1)$.

4 et **5** : On trace les droites $(d'_1 f)$ et $(e'_1 f)$.

6 : Soit d'_2 le point d'intersection de $(d'_1 f)$ et de la droite horizontale passant par b' .



La feuille de papier représente le plan du tableau à plat.

7 : Soit e'_2 le point d'intersection de $(e'_1 f)$ et de la droite verticale passant par d'_2 .

8 : Le point d'intersection de la droite horizontale passant par e'_2 et de la droite verticale passant par b' est le point c' .

c) Reproduire la figure de la question b) et construire sur la même figure la perspective du segment $[bc]$ quand b se trouve dans les situations **(i)** et **(v)** de la question a).

d) Soit P un plan affine de l'espace, non parallèle à T , ne contenant pas le point de vue, et par ailleurs quelconque. Soit m , n , r , s quatre points affines de l'espace tels que :

$$m \in P \qquad r \in P \qquad (mn) \nparallel T \qquad \overrightarrow{mn} = \overrightarrow{rs} .$$

La feuille de papier représentant le plan du tableau à plat, on suppose que la ligne de fuite L_P de P est déjà dessinée, et que les perspectives m' , n' et r' des points m , n et r , ainsi que le point de fuite g de la droite (mn) , sont affines et déjà dessinés sur T .

Trouver une construction sur T de la perspective s' du point s :

α) dans le cas où le point r' n'appartient pas à la droite $(m'n')$

β) dans le cas où le point r' appartient à la droite $(m'n')$.

Accueil

Suite

Page suivante

Page précédente

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Problèmes et exercices généraux

Page 2

Exercices 6 à 9

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

6. Soit $\widetilde{E}$ l'espace projectif complété d'un espace affine E de dimension 3. Soit a un point affine et T un plan affine de l'espace, tels que $a \notin T$. On note $\widetilde{T}$ le complété projectif de T dans $\widetilde{E}$. Soit p la perspective de point de vue a sur le tableau $\widetilde{T}$.

a) La relation R définie sur $\widetilde{E} \setminus \{a\}$ par :

$$x \ \mathrm{R} \ x' \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = p(x')$$

est une relation d'équivalence. Quelles sont ses classes d'équivalence ?

b) La perspective sur le tableau d'une droite projective de l'espace est-elle une droite projective du tableau? La perspective sur le tableau d'une droite affine de l'espace est-elle une droite affine du tableau?

7. Dans l'espace projectif $\widetilde{E}$, complété de l'espace affine E de dimension 3, soit a un point affine et T un plan affine, tels que a $\notin T$. On note $\widetilde{T}$ le complété projectif de T dans $\widetilde{E}$, et on considère la perspective p de point de vue a sur le tableau $\widetilde{T}$.
On suppose que T est vertical.
Soit H un plan affine horizontal de l'espace, ne contenant pas le point de vue. On considère un triangle bcd, inclus dans le plan H et disjoint du plan neutre. On suppose que le triangle est rectangle en d, et que l'hypothénuse $[bc]$ est incluse dans la droite $H \cap T$. Le triangle étant déja dessiné en perspective sur le tableau, on cherche à dessiner la perspective d'un

point i de $[dc]$ situé à un distance l donnée de d.

a) ***Schéma I*** **:** La feuille de papier représentant le plan T à plat, on suppose que la ligne de fuite de H est dessinée, ainsi que la droite $H \cap T$, le point de fuite principal f, et les points b, c et $p(d)$. Dessiner la perspective de la hauteur $[dh]$ du triangle (h est le pied de la hauteur sur le côté $[bc]$). On demande de justifier la construction en précisant quelle est la direction de la droite (dh).

b) ***Schéma II*** **:** La feuille de papier représentant le plan H à plat, construire en vraie grandeur le triangle bcd en utilisant h et le demi-cercle de diamètre $[bc]$ passant par d. Placer le point i sur $[dc]$.

c) Dessiner sur le schéma II et sur le schéma I les points d' et i' de $[bc]$ tels que :

$cd' = cd$ et $ci' = ci$.

Dessiner $p(i)$ sur le schéma I.

8. Dans l'espace projectif $\widetilde{E}$, complété de l'espace affine E de dimension 3, soit a un point affine et T un plan affine, tels que $a \notin T$. On note $\widetilde{T}$ le complété projectif de T dans $\widetilde{E}$, et on considère la perspective p de point de vue a sur le tableau $\widetilde{T}$.
On suppose que T est vertical.

a) On note f le point de fuite principal. De quel point à l'infini f est-il la perspective ? On note $\widetilde{L_H}$ la ligne d'horizon. Quel est l'ensemble des points à l'infini dont $\widetilde{L_H}$ est la perspective ? Pourquoi f appartient-il à $\widetilde{L_H}$?

b) Soit P un plan affine de l'espace, non parallèle à T. Démonter que P est vertical si et seulement si la partie affine L_P de sa ligne de fuite est verticale.

c) Que peut-on dire de la ligne de fuite de P :

i) si P est vertical et orthogonal à T ?

ii) si P est vertical et non orthogonal à T ?

d) Soit V et W deux plans affines verticaux de l'espace, tels que V soit orthogonal à T et que la valeur absolue de l'angle (V,W) soit $\pi/3$. La feuille de papier représentant le plan

$\widetilde{T}$ à plat, on suppose que $\widetilde{L_H}$ et f sont dessinés. Dessiner la ligne de fuite $\widetilde{L_V}$ de V. Dessiner la ligne de fuite $\widetilde{L_W}$ de W, sachant que a est à la distance 3 cm de T (on pourra s'aider d'un dessin auxiliaire représentant, à plat sur la feuille de papier, le plan H_a horizontal passant par a et les objets remarquables qui se trouvent dans ce plan).

9. a) Dans l'espace projectif $\widetilde{E}$ complété de l'espace affine E de dimension 3, existe-t-il deux droites à l'infini disjointes ?

b) Soit D une droite affine et $\widetilde{\Delta}$ une droite à l'infini. On nomme $\widetilde{D}$ la complétée projective de D. Est-il possible que $\widetilde{D}$ et $\widetilde{\Delta}$ soient coplanaires ? Est-il possible qu'elles soient non coplanaires ? On demande d'illustrer les réponses par des schémas, en respectant la convention suivante : tous les points de l'espace $\widetilde{E}$ représentés par des "points" du papier sont affines.

Page précédente

Page suivante

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Problèmes et exercices généraux

Page 3

Exercices 10 et 11

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

10. Dans l'espace projectif $\widetilde{E}$, complété de l'espace affine E de dimension 3, on considère la perspective p de point de vue a sur le tableau $\widetilde{T}$ ($\widetilde{T}$ est le complété d'un plan affine T de l'espace et a est un point affine de l'espace n'appartenant pas à T). La feuille de papier représentant T à plat, on suppose que Δ et Δ' sont deux droites affines dessinées sur T , sécantes en un point affine c . Soit D et D' deux droites affines de l'espace, parallèles entre elles et telles que Δ (respectivement : Δ') soit la partie affine de la perspective de la complétée projective de D (respectivement : D'). On nomme P le plan (D , D') . On se propose d'étudier les positions de la ligne d'horizon (on nomme L_H sa partie affine) et de la ligne de fuite de P (on nomme L_P sa partie affine).

a) Si P est horizontal, dessiner Δ , Δ' , c , L_H et L_P sur la feuille de papier représentant T à plat.

b) On suppose que P n'est pas horizontal, mais que D et D' sont horizontales. Dessiner Δ , Δ' , c , L_H et L_P d'une manière vraisemblable (T à plat sur le papier).

c) On suppose que D et D' ne sont pas horizontales.

Est-il possible que les droites L_H et L_P soient parallèles ? Dans ce cas, que pourrait-on dire du plan P ?

Est-il possible que les droites L_H et L_P soient sécantes ? Dans ce cas, de quelle direction le point d'intersection de L_H et L_P serait-il le point de fuite ?

Dessiner dans tous les cas possibles Δ , Δ' , c , L_H et L_P d'une manière vraisemblable (T à plat sur le papier).

11. Dans l'espace projectif $\widetilde{E}$, complété de l'espace affine E de dimension 3, on considère la perspective p de point de vue a sur le tableau $\widetilde{T}$ (a est un point affine de l'espace, $\widetilde{T}$ est le complété projectif d'un plan affine T, a n'appartient pas à T). On suppose T vertical. Soit H le plan horizontal du sol. On suppose connues la distance d du point de vue au tableau et sa hauteur h au dessus du sol. On suppose $h \neq 0$.

Le problème consiste à étudier la perspective sur le tableau d'une droite affine D faisant un angle α donné avec H .

1. a) **Schéma I :** Faire un schéma en perspective cavalière représentant T, a, H, la ligne de terre L_T ($L_T = H \cap T$) , la ligne d'horizon L_H et le point de fuite principal f .
Indiquer d et h sur le schéma.

b) **Schéma II :** La feuille de papier représentant T à plat, dessiner L_T , L_H et f .

2. On note $\widetilde{D}$ la complétée projective de la droite affine D , et $\widetilde{D'}$ la perspective de $\widetilde{D}$ sur $\widetilde{T}$. On suppose que $\widetilde{D'}$ est une droite, et qu'elle n'est pas à l'infini. On note D' la partie affine de $\widetilde{D'}$.

Sous ces hypothèses, quelle est la position de D par rapport au plan neutre ? Quelle est la position de D par rapport au point a ?

Dans toute la suite, on suppose que la droite affine D perce H en un point i n'appartenant pas au plan neutre, et que D n'est pas verticale. On suppose connu l'angle d'inclinaison α de D sur H :

$$\alpha = \widehat{(H, D)} = \widehat{(D_1, D)}$$

où D_1 est la projection orthogonale de D sur H .

3. Sur le schéma I, représenter D , i , D_1 et α . On note V le plan vertical contenant D ($D_1 = V \cap H$) . Indiquer V sur le schéma. Représenter la projection orthogonale k de i

sur L_T . Représenter la perspective sur le tableau de la droite (ki) . Représenter la perspective i' de i .

Le but du problème est de comprendre comment on peut construire D' sur le schéma II (T à plat) en utilisant i', dont on suppose qu'il est déjà placé, et l'angle α .

4. On suppose V // T .

a) Quelle est la position relative de D et de T ? de D et de D' ? Quel est l'angle de D' et de L_H ?

b) Sur le schéma II, placer un point i' . Représenter l'angle α . Dessiner D' .

c) Le point d'intersection de D' et de L_H est-il le point de fuite de D ? Pourquoi ?

5. On suppose $V \perp T$.

a) Si V passe par a (V est le plan vertical principal), quelle est la droite D' ?

b) On suppose que V ne passe pas par a . Refaire le schéma I sous ces hypothèses (T , a , H , L_T , L_H , f , V , D_1 , D , i , α , i') . Dessiner sur le schéma la ligne de fuite L_V de V , et le point de fuite f_D de D . Comment peut-on tracer D' sur ce schéma?

c) La feuille de papier représentant T à plat (schéma II), dessiner L_T , L_H et f . Placer un point i' . Dessiner L_V . En utilisant α et d , dessiner f_D . Dessiner D' .

6. On suppose que V n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à T .

a) Refaire le schéma I sous ces hypothèses (T , a , H , L_T , L_H , f , V , D_1 , D , i , α , i') . Dessiner le point de fuite f_{D_1} de D_1 . Dessiner L_V et f_D .

On nomme β l'angle du plan V avec le plan vertical principal. Indiquer cet angle sur le schéma.

b) La feuille de papier représentant T à plat (schéma II), dessiner L_T , L_H et f . Placer un point i' .

On suppose connu l'angle β . En utilisant β et d , dessiner f_{D1} . Dessiner L_V .

En utilisant α , dessiner f_D . Dessiner D' .

[Corrigé 11](#)

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente

Page suivante

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Problèmes et exercices généraux

Page 4

Exercices 12 à 14

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

12. On considère l'espace projectif $\widetilde{E}$ complété de l'espace affine E de dimension 3.

a) Quelles sont, dans l'espace projectif, toutes les positions relatives possibles de deux droites projectives non confondues ?

b) Préciser la nature, à l'infini ou non, des points d'intersection éventuels, suivant la nature des droites projectives.

c) Avec la convention que tous les points figurés par une petite tache sur la feuille de papier sont des points affines, faire des schémas représentant les deux droites projectives et leur point d'intersection éventuel, dans tous les cas possibles.

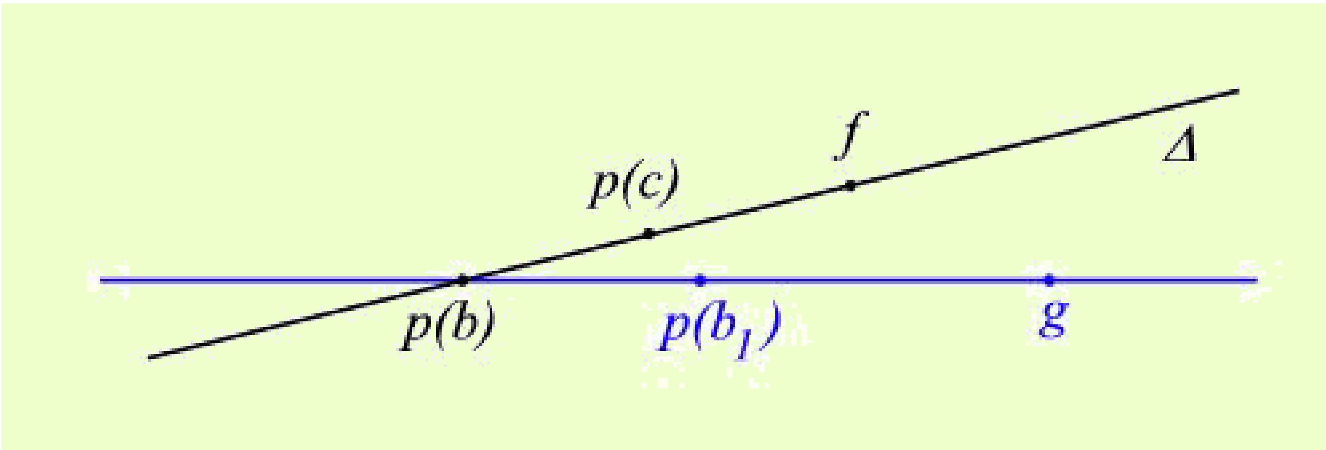
13. Dans l'espace projectif $\widetilde{E}$, complété de l'espace affine E de dimension 3, on considère la perspective p de point de vue a sur le tableau $\widetilde{T}$ (a est un point affine de l'espace, $\widetilde{T}$ est le complété d'un plan affine T, et a n'appartenant pas à T).

a) Soit Δ une droite affine quelconque du tableau. On note $\widetilde{\Delta}$ sa complétée projective. Quelles sont les droites projectives $\widetilde{D}$ de l'espace don't $\widetilde{\Delta}$ est la perspective ?

b) Faire un schéma en perspective cavalière représentant a, $\widetilde{T}$, $\widetilde{\Delta}$, et une droite projective $\widetilde{D}$ de l'espace, complétée d'une droite affine D non parallèle à T et ne pasant pas par a, telle que $p(\widetilde{D}) = \widetilde{\Delta}$. On nomme t le point où D perce T. Dessiner le point de fuite f de D et le point n où D perce le plan neutre.

On nomme d le point à l'infini de D et δ le point à l'infini de Δ. Quelle est la perspective du segment projectif $\overline{[tdn]}$? Quelle est la perspective du segment affine $[nt]_{a//}$?

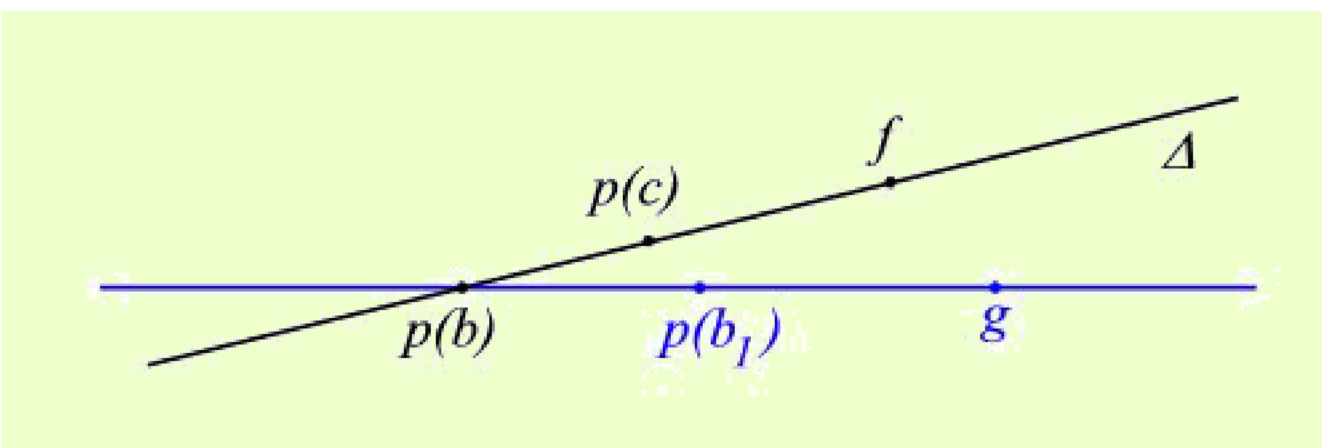
c) Dans cette question, on dessine sur la feuille de papier qui représente T à plat. On suppose qu'on a déjà obtenu le dessin ci-dessous, où $[bc]$ est un segment affine de D et où $[bb_1]$ est un segment affine d'une droite de l'espace dont g est le point de fuite.



Les segments affines $[bc]$ et $[bb_1]$ ont-ils des points communs avec le plan neutre ? Pourquoi ?

Dessiner le point de fuite de la droite $(b_1 c)$ et justifier le dessin.

d) Comme dans la question précédente, on suppose maintenant qu'on a obtenu le dessin ci-dessous.



Où se trouve maintenant le point de fuite de la droite $(b_1 c)$? Dans l'espace, comment est située la droite $(b_1 c)$ par rapport au tableau ?

14. On se trouve dans l'espace projectif $\tilde{E}$ complété de l'espace affine E de dimension 3, et on considère la perspective p de point de vue a sur le tableau $\tilde{T}$: a est un point affine de l'espace, $\tilde{T}$ est un plan projectif complété d'un plan affine T, et a n'appartient pas à T.

a) Faire un schéma en perspective cavalière représentant $\tilde{T}$, a, et le plan neutre de la perspective. Où se trouve la perspective des points du plan neutre ? Y a-t-il des points de l'espace dont la perspective n'est pas définie ? Quels sont les points à l'infini de l'espace dont la perspective est affine ?

b) Donner la définition du point de fuite d'une droite affine de l'espace. Quelles sont les droites dont le point de fuite est à l'infini ? Représenter sur le schéma précédent une droite affine D ne passant pas par le point de vue, et son point de fuite f, dans le cas où f est affine.

c) Soit D, D' et D'' trois droites affines de l'espace, ne passant pas par le point de vue. On suppose que leurs points de fuite sont alignés. Quelle propriété les trois droites vérifient-elles nécessairement dans l'espace affine ?

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page suivante

Page précédente

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Problèmes et exercices généraux

Page 5

Exercices 15 et 16

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

15. Dans l'espace projectif $\widetilde{E}$, complété de l'espace affine E de dimension 3, on considère la perspective p de point de vue a sur le tableau $\widetilde{T}$ (a est un point affine de l'espace, $\widetilde{T}$ est le complété d'un plan affine T , et a n'appartenant pas à T).

On suppose le tableau vertical.

Dans toute la suite, on notera $\widetilde{Z}$ la complétée projective d'une droite affine notée Z , et Y la partie affine, si elle existe, d'une droite projective notée $\widetilde{Y}$.

I

1. a) Comment s'appelle l'ensemble des points de $\widetilde{T}$ qui n'appartiennent pas à T ? Faire un schéma en perspective cavalière représentant a , T et $\widetilde{T}$.

b) On nomme f le point de fuite principal de la perspective. Quelles sont les droites de l'espace admettant f pour point de fuite ? Représenter f sur le schéma.

c) On nomme $\widetilde{L_H}$ la ligne d'horizon. Quels sont les plans de l'espace admettant $\widetilde{L_H}$ comme ligne de fuite ? Représenter $\widetilde{L_H}$ sur le schéma.

d) On nomme V le plan vertical principal, c'est-à-dire le plan vertical passant par a et perpendiculaire à T . Représenter sur le schéma le plan V et sa ligne de fuite $\widetilde{L_V}$, ainsi que le plan H horizontal passant par a .

2. Soit Q un plan affine non parallèle à T , et passant par a . On nomme L sa droite d'intersection avec T.

a) Représenter sur le schéma la droite L et les droites d'intersection $D = Q \cap H$ et $G = Q \cap V$, si elles existent. Quelle est la ligne de fuite de Q ? Quels sont les plans de l'espace admettant $\widetilde{L}$ pour ligne de fuite ?

b) Soit B la droite affine passant par a, incluse dans Q et perpendiculaire à L. Représenter sur le schéma la droite B et son point de fuite f_1.

II

Pour diverses positions du plan Q, on cherche maintenant à **construire, sur la feuille de papier représentant le tableau T à plat, la partie affine L_Q de la ligne de fuite de Q, et le point de fuite f_1 de B**. On suppose que la ligne d'horizon et le point de fuite principal sont déjà dessinés sur T, et on suppose connue la distance d de a à T.

On appelle **dessin II** le dessin de L_H et de f, sur la feuille de papier représentant T à plat. On reprendra pour chaque question un nouveau “dessin II”, que l'on complètera à chaque fois de la manière convenable.

1. On suppose Q horizontal.
Indiquer L_Q et f_1 sur le dessin II.

2. On suppose Q “montant” ou “descendant”, c'est-à-dire que Q n'est pas horizontal, mais que la droite $Q \cap T$ est horizontale. On suppose connu l'angle $\alpha = \widehat{(H, Q)}$.

a) Faire un schéma en perspective cavalière représentant T, a, H, L_H, f, V, L_V, Q, L_Q, D, G, B et f_1, α et d.

b) En utilisant α et d, construire f_1 et L_Q sur le **dessin II**.

3. On suppose Q vertical. Si Q n'est pas le plan vertical principal V, on suppose connu l'angle $\beta = \widehat{(V, Q)}$.

a) Faire un schéma en perspective cavalière représentant T, a, H, L_H, f, V, L_V,

Q, L_Q , D , G , B et f_1 , β et d.

b) En utilisant β et d , construire f_1 et L_Q sur le **dessin II**. Si $Q = V$, où se trouve f_1 ?

4. On suppose que Q est “oblique”, c'est-à-dire que Q n'est ni horizontal, ni montant, ni descendant, ni vertical. On suppose connu l'angle $\alpha = (\widehat{H, Q})$.

a) Dans le cas où Q est oblique et **orthogonal à T**, utiliser α pour dessiner L_Q sur le **dessin II**. Indiquer f_1 .

b), c) et d) On suppose dans ces questions que Q est oblique et qu'il **n'est pas orthogonal à T**.

b) Faire un schéma en perspective cavalière représentant T , a , H , L_H , f , D , L_Q et le point de fuite f_D de D .

On nomme K et J les droites affines passant par a , perpendiculaires à D , et situées respectivement dans H et dans Q . Représenter sur le schéma les droites K et J , et leurs points de fuite f_K et f_J . Pourquoi la droite ($f_K f_J$) est-elle verticale ?

On suppose connu l'angle $\theta = (\widehat{L_H, K})$. Indiquer α et θ sur le schéma.

c) Représenter sur le schéma la droite B et son point de fuite f_1 . Pourquoi la droite ($f f_1$) , définie si $f_1 \neq f$, est-elle perpendiculaire à L_Q ?

d) En utilisant d , α et θ , construire sur le **dessin II** les points de fuite f_K et f_D , puis f_J . En déduire L_Q , puis f_1 .

5. En supposant que le plan Q est dans l'une quelconque des positions précédentes (en choisir une, et indiquer laquelle), soit Q' un plan affine strictement parallèle à Q . Dessiner, sur le **dessin II du cas choisi**, la perspective d'un segment affine [bc] inclus dans Q' , parallèle à T , et non inclus dans le plan neutre. Dessiner la perspective des deux demi-droites affines d'origines b et c , incluses dans Q' , perpendiculaires à $Q' \cap T$, qui ne traversent pas le plan neutre. Quelle est la perspective des demi-droites de mêmes origines et de même direction, qui traversent le plan neutre ?

16. Soit $\widetilde{E}$ le complété projectif d'un espace affine E de dimension 3.

Soit $\widetilde{D}$ une droite projective à l'infini. Avec la convention que tous les points représentés par des "points" du papier sont affines, faire un schéma représentant $\widetilde{D}$.

Soit $\widetilde{Q}$ un plan projectif quelconque de l'espace. Quelles sont toutes les positions relatives possibles de $\widetilde{D}$ et de $\widetilde{Q}$?

Faire des schémas représentant toutes les positions relatives possibles de $\widetilde{D}$ et de $\widetilde{Q}$, dans toutes les situations possibles de $\widetilde{Q}$ par rapport à la partie affine de l'espace. Si la droite perce le plan, indiquer le point d'intersection.

Corrigé 16

Accueil

Suite

Page suivante

Page précédente

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Problèmes et exercices généraux

Page 6

Exercices 17 à 20

Corrigés : certains sont déjà installés.
Pour d'autres, installation prévue, suivre les mises à jour du site.

17. Dans l'espace projectif $\tilde{E}$, complété de l'espace affine E de dimension 3, on considère la perspective p de point de vue a sur le tableau $\tilde{T}$ (a est un point affine de l'espace, $\tilde{T}$ est le complété d'un plan affine T , et a n'appartenant pas à T).

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites affines du tableau, sécantes en un point b . On note $\widetilde{\Delta_1}$ et $\widetilde{\Delta_2}$ leurs complétées projectives.

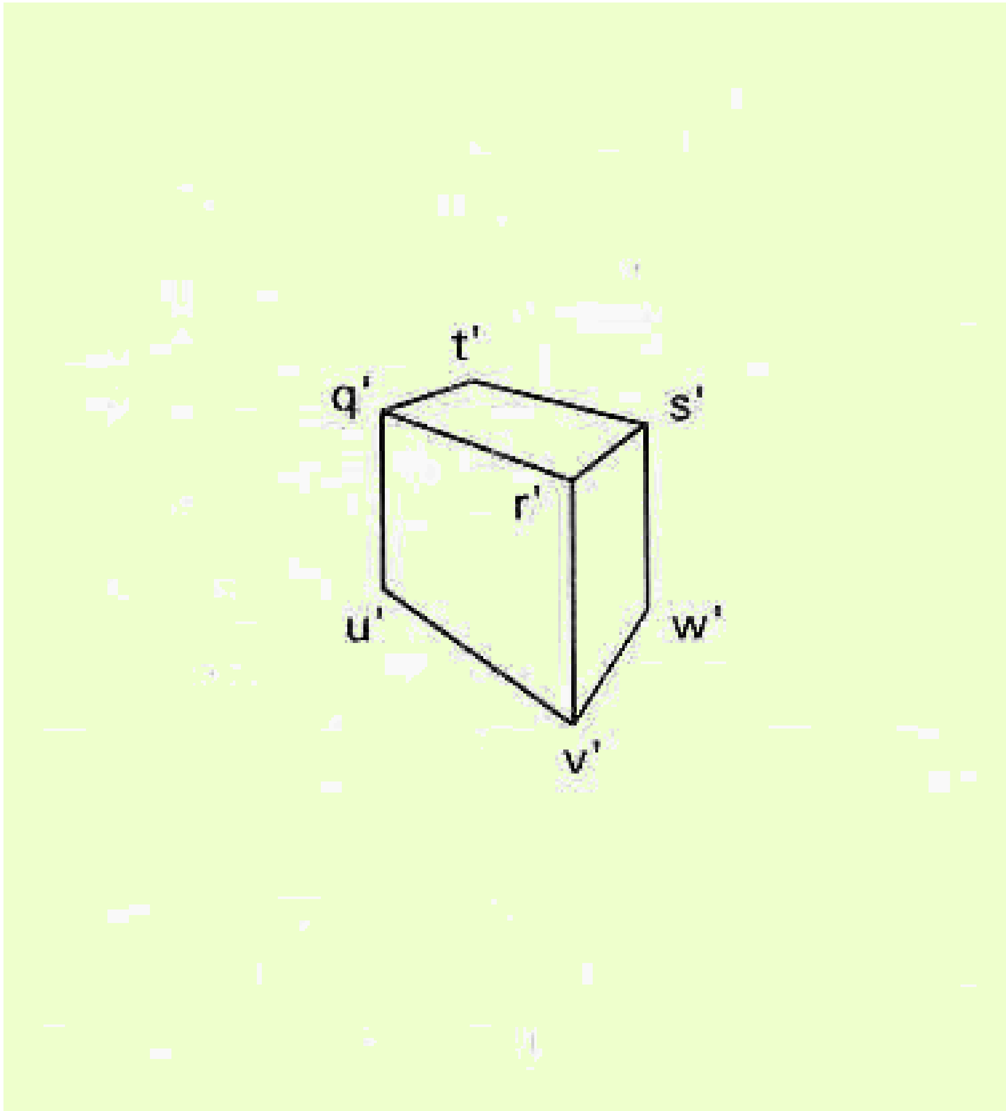
Soit D_1 une droite affine de l'espace dont la complétée projective $\widetilde{D_1}$ a pour perspective $\widetilde{\Delta_1}$: $p(\widetilde{D_1}) = \widetilde{\Delta_1}$. Soit de même D_2 une droite affine de l'espace dont la complétée projective $\widetilde{D_2}$ a pour perspective $\widetilde{\Delta_2}$.

a) Dans quel plan se trouve nécessairement $\widetilde{D_1}$? La droite $\widetilde{D_1}$ passe-t-elle par a ? De quel point de $\widetilde{D_1}$ le point à l'infini de $\widetilde{\Delta_1}$ est-il la perspective ?

b) Est-il possible que D_1 et D_2 ne soient pas des fuyantes ? Illustrer la réponse par un schéma.

On suppose que D_1 et D_2 sont des fuyantes. Est-il possible que b soit le point de fuite de D_1 et pas celui de D_2 ? Illustrer la réponse par un schéma.

18. Le dessin ci-dessous représente un cube posé sur un sol horizontal, en perspective conique. Les points q , r , s , t , u , v , w sont des sommets du cube, dont q' , r' , ... , w' sont les perspectives.



a) Les arêtes (qu) , (rv) et (sw) sont verticales dans l'espace.
Le tableau de la perspective est-il vertical ? Justifier la réponse.
Construire sur le dessin la ligne d'horizon.
Le centre du rectangle qui encadre le dessin est-il un point de fuite ? Si oui, dire lequel ; si non, dire pourquoi.
Si on imagine que ce dessin est une photographie, dont les bords sont les côtés du cadre rectangulaire, la photographie a-t-elle été découpée pour modifier le cadrage ou bien s'agit-il d'un tirage de la vue entière ?

b) On suppose que ce sont les arêtes (st) , (rq) et (vu) qui sont verticales dans l'espace (tourner le dessin !). Le tableau de la perspective est-il vertical ? Comment est disposé le tableau par rapport au cube ?

19. On se trouve dans l'espace projectif $\widetilde{E}$ complété de l'espace affine E de dimension 3.

a) Un point projectif peut-il être un point affine de l'espace ?

b) Quelles sont toutes les positions possibles d'une droite projective par rapport à la partie affine de l'espace ?

c) Existe-t-il des plans projectifs dont l'intersection avec la partie affine de l'espace est vide ? Si la réponse est oui, dire lesquels ; si la réponse est non, dire pourquoi.

d) Faire des schémas représentant :

i) deux droites affines parallèles et distinctes, et leurs complétées projectives,

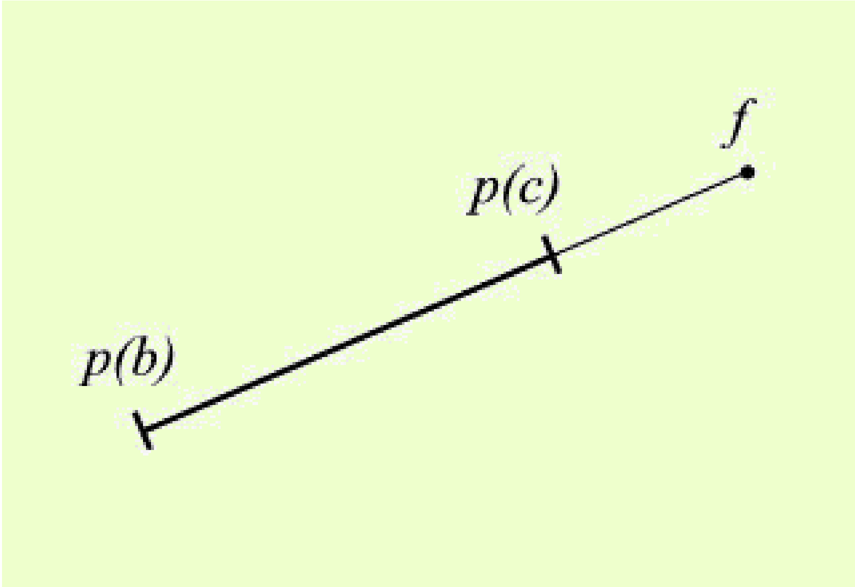
ii) deux droites affines sécantes, et leurs complétées projectives,

iii) deux droites à l'infini distinctes,

avec la convention que tous les points noircis sur le papier représentent des points affines, que les droites affines sont représentées par des traits rectilignes et que les plans affines sont représentés par des "bords" rectilignes orthogonaux, en perspective cavalière.

Dans chacun des trois cas, dire si les droites projectives ont des points communs. Si la réponse est oui, indiquer ces points sur les schémas ; si la réponse est non, dire pourquoi.

20. On suppose que la perspective d'un segment affine $[\,bc\,]$ de l'espace est dessinée sur le tableau, ainsi que le point de fuite f de la droite $(\,bc\,)$, comme sur le schéma ci-dessous (la feuille de papier représente le tableau à plat).



Construire la perspective du milieu de [*bc*] .

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

Page précédente

Page suivante

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Problèmes et exercices généraux

Page 7

Exercices 21 à 24

Texte 21	Corrigé 21
Texte 22	Corrigé 22
Texte 23	Corrigé 23
Texte 24	Corrigé 24
Texte 25	Corrigé 25

Accueil

Suite

Marie Bouazzi - ENAU & UVT

BIBLIOGRAPHIE

Mathématiques (présentations élémentaires)

CARREGA J. C., *Théorie des corps, la règle et le compas*, Hermann, Paris, 1981. À consulter : chapitre VIII, pp. 119 à 139.

EFIMOV N., *Géométrie supérieure*, Editions de Moscou, 1981. À consulter : 2ème partie : *Géométrie projective*, chapitre V, § 1 : *Objet de la géométrie projective*, pp. 243 à 249.

SAVIN A. et GIK E., *Le plan projectif*, pp. 40 à 44 de la revue *Mathématiques venues d'ailleurs, divertissements mathématiques en URSS, chroniques extraites de la revue QUANT*, Belin, Paris, 1982.

Dessin technique

FRADIN M., *Perspective conique, tracé des ombres*, Dessain et Tolra, Paris, 1980.

PILLET J. J., *Traité de perspective linéaire*, Vrin, Paris, 1953.

Culture générale

DAMISCH H., *L'origine de la persective*, Champs, Flammarion, Paris, 1987, 1993.

DEFORGES Y., *Le graphisme technique : son histoire et son enseignement*, Champ Vallon, Paris, 1981.

ERNST B., *Le monde des illusions d'optique* (titre original : *Het begoochelde oog*), Taschen, Berlin, 1986, 1994.

FLOCON A. et TATON R., *La perspective*, Que sais-je PUF, Paris, 1963, 1990.

VIOLLET-LE-DUC, *Histoire d'un dessinateur – comment on apprend à dessiner*, Pierre Mardaga, Bruxelles, 1978.

Pour aller plus loin (mathématiques)

COXETER H. S. M., *Introduction to Geometry*, Wiley, New York, 1961, 1980.

FRENKEL J., *Géométrie pour l'élève professeur*, Hermann, Paris, 1973.

LELONG-FERRAND J., *Les fondements de la géométrie*, PUF, Paris, 1985.

MUTAFIAN C., *La structure vectorielle*, Vuibert, Paris, 1979.

SIDLER J. C., *Géométrie projective*, InterEditions, Paris, 1993.

YAGLOM I. M., *Geometric Transformations* III, Random House, New York, 1973.

On se touve dans l'espace projectif $\widetilde{\mathrm{E}}$ complété de l'espace affine E de dimension 3.

a) Comment se nomment les points projectifs qui ne sont pas à l'infini ?

b) Qu'est-ce qu'une droite projective à l'infini ? Comment se nomment les droites projectives qui ne sont pas à l'infini ?

Quelle est l'intersection d'une droite projective quelconque avec la partie affine de l'espace ? Quelle est l'intersection de cette droite avec le plan à l'infini de l'espace ? (Donner tous les cas possibles.)

N.B. On ne demande pas de schémas.

a) Les points projectifs qui ne sont pas à l'infini sont les points affines.

b) Une droite projective à l'infini est une droite entièrement incluse dans le plan de l'infini. Les droites projectives qui ne sont pas à l'infini sont les droites complétées de droites affines.

Soit $\widetilde{D}$ une droite projective quelconque, on note E_∞ le plan à l'infini de l'espace.
Ou bien $\widetilde{D}$ est à l'infini, donc $\widetilde{D} \cap E_\infty = \widetilde{D}$ et $\widetilde{D} \cap E = \emptyset$.
Ou bien $\widetilde{D}$ est complétée d'une droite affine D, notons d son point à l'infini :

$$\widetilde{D} \cap E_\infty = \{d\} \text{ et } \widetilde{D} \cap E = D.$$

Le schéma *(a)* représente un parallélépipède rectangle en perspective cavalière. Le schéma *(b)* représente la perspective conique – incomplète – du même parallélépipède ; les lettres b', c', ..., désignent les perspectives coniques des points b, c, ..., de l'espace. La droite $L_{(bmc)}$ est la ligne de fuite du plan (bmc) ; le point $f_{(be)}$ est le point de fuite de la droite (be).

1. Le tableau de la perspective est-il parallèle à l'une des faces du parallélépipède ? Justifier la réponse.

2. Quel est le point de fuite de la droite (cd) ? Justifier la réponse. Quel est le point de fuite de la droite (bc) ? Justifier la réponse. Construire le point d' sur le schéma.

3. Où se trouve le point de fuite de la diagonale (mc) de la face (bmnc) ? Quelle est la position de la droite (mc) par rapport au tableau ? Justifier la réponse. Dessiner les perspectives m'_1 et m'_2 des deux point m_1 et m_2 qui divisent le segment [mc] en trois parties égales. Dessiner les perspectives b'_1 et b'_2 des deux points qui divisent [bc] en trois parties égales.

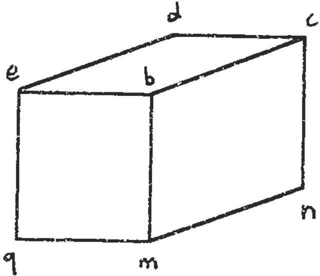


Schéma (a)

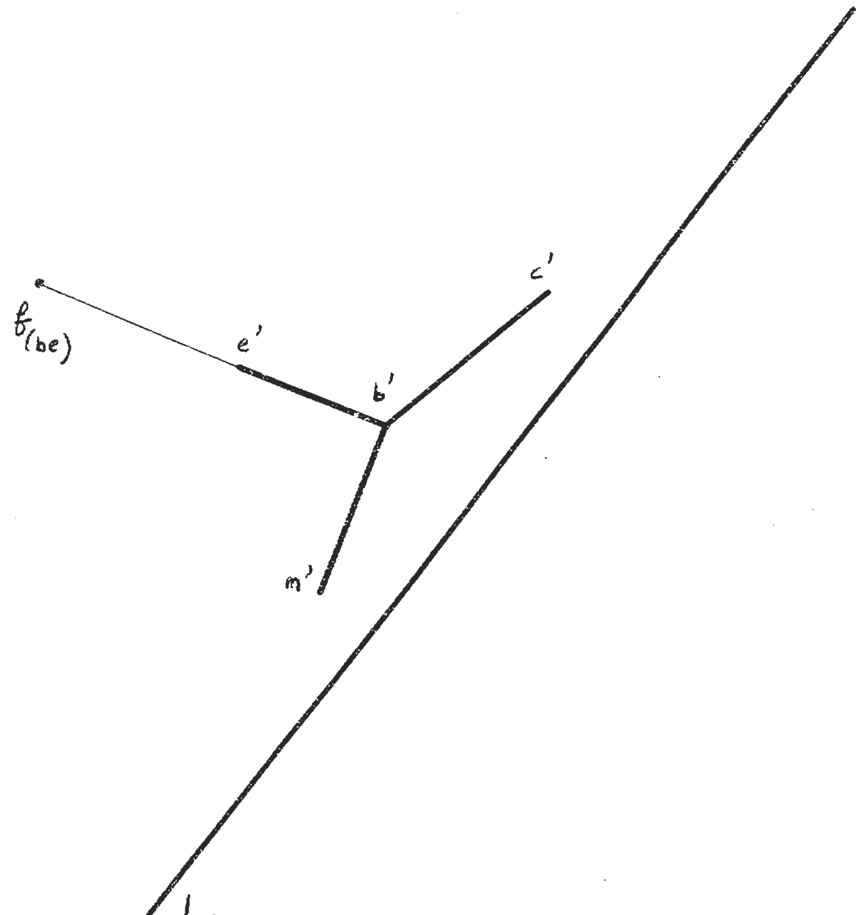


Schéma (b)

1. Il y a trois directions de faces pour le parallélépipède, qui sont celles des plans (bmc), (bec) et (bem). Aucun de ces plans n'est parallèle au tableau T puisque la ligne de fuite $\tilde{L}_{(bmc)}$ de (bmc) a une partie affine $L_{(bmc)}$ et que, si (bec) ou (bem) était parallèle à T, nécessairement la droite (be) serait parallèle à T, ce qui n'est pas le cas puisque $f_{(be)}$ est affine.

2. $f_{(cd)} = f_{(be)}$ puisque $(cd) \parallel (be)$.

$f_{(bc)}$ est le point de $(b'c') \cap \tilde{L}_{(bmc)}$ (voir schéma (b)) puisque $(bc) \subset (bmc)$.

Voir la construction de d' sur le schéma (b) : d' est le point de $(c'f_{(be)}) \cap (e'f_{(bc)})$.

3. Le point de fuite $f_{(mc)}$, qui est le point de $(m'c') \cap \tilde{L}_{(bmc)}$, est à l'infini puisque $(m'c') \parallel L_{(bmc)}$. Donc $(mc) \parallel T$.

Sur la droite (mc), la perspective conserve les rapports de longueurs, puisque $(mc) \parallel T$, si bien que m'_1 et m'_2 divisent $[m'c']$ en trois parties égales : voir schéma (b). On peut déduire b'_1 et b'_2 de m'_1 et m'_2 en utilisant les droites parallèles $(mb) \parallel (m_1b_1) \parallel (m_2b_2)$ (qui admettent toutes le même point de fuite : $f_{(mb)}$), voir les schémas (a) et (b). [Les points b'_1 et b'_2 ne divisent pas $[b'c']$ en trois parties égales puisque (bc) est une fuyante.]

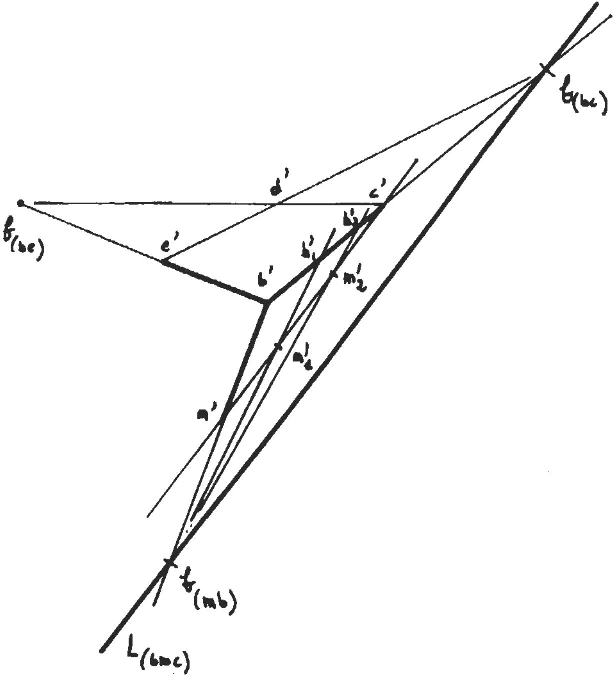


Schéma (b)

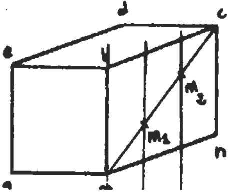


schéma (a)

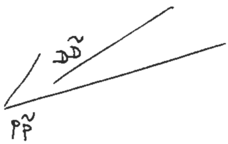
Dans l'espace projectif $\widetilde{E}$ complété de l'espace affine E de dimension 3, on considère une droite et un plan projectifs quelconques.
Faire des schémas, suivant les conventions habituelles de la géométrie affine*, représentant le plan et la droite projectifs, dans tous les cas possibles de position de la droite et du plan par rapport à la partie affine de l'espace, et dans tous les cas de position relative de la droite et du plan. Indiquer dans chaque cas l'intersection de la droite et du plan, en précisant si cette intersection est à l'infini ou non.

* Tous les points noircis sur le papier représentent des points affines, les droites affines sont représentées par des traits rectilignes, les droites affines parallèles sont représentés par des traits parallèles, les plans sont représentés par des "bords" rectilignes en perspective cavalière, etc.

Soient $\tilde{D}$ et $\tilde{P}$ la d^te et le p^l.

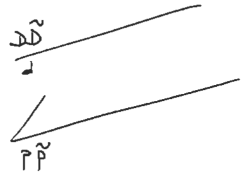
1) $\tilde{D}$ complétée de D affine, $\tilde{P}$ complété de P affine

Si $D \subset P$,



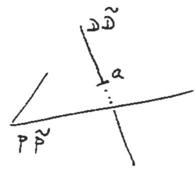
$\tilde{D} \cap \tilde{P} = \tilde{D}$

si $D /\!/ P$ et $D \not\subset P$,



soit d le pt à l'∞ de D.
$\tilde{D} \cap \tilde{P} = \{d\}$.

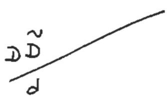
Si $D \not\parallel P$,



soit a le pt de $D \cap P$.
$\tilde{D} \cap \tilde{P} = \{a\}$

$\underbrace{\qquad}_{\tilde{D} \subset \tilde{P}}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\tilde{D} \text{ perce } \tilde{P}}$

2) $\tilde{D}$ c^té de D aff, $\tilde{P}$ est <u>le</u> p^l à l'∞.

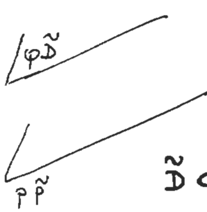


Soit d le pt à l'∞ de D.
$\tilde{D} \cap \tilde{P} = \{d\}$.

$\tilde{D}$ perce $\tilde{P}$.

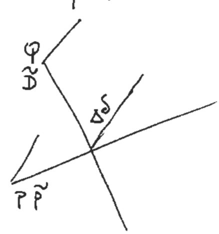
3) $\tilde{D}$ à l'∞, $\tilde{P}$ c^té de P aff.
Soit Q un p^l aff. dont $\tilde{D}$ est la d^te à l'∞.

Si $Q /\!/ P$ (y compris $Q = P$),



$\tilde{D} \subset \tilde{P}$

Si $Q \not\parallel P$



Soit $\Delta = P \cap Q$,
soit δ le pt à l'∞ de Δ.

$\tilde{D} \cap \tilde{P} = \{\delta\}$

$\tilde{D}$ perce $\tilde{P}$.

4) $\tilde{D}$ et $\tilde{P}$ à l'∞.

$\tilde{D} \subset \tilde{P}$

Q est un plan dont $\tilde{D}$ est la d^te à l'∞.

Dans l'espace projectif $\widetilde{\mathtt{E}}$ complété de l'espace affine $\mathtt{E}$ de dimension 3, on considère la perspective p de point de vue $\mathtt{a}$ sur le tableau $\widetilde{\mathtt{T}}$ ($\mathtt{a}$ est un point affine de l'espace, $\widetilde{\mathtt{T}}$ est le complété projectif d'un plan affine $\mathtt{T}$, $\mathtt{a}$ n'appartient pas à $\mathtt{T}$).

On suppose le tableau vertical.
On nomme $\mathtt{f}$ le point de fuite principal et $\mathtt{L_H}$ la ligne d'horizon.
On nomme $\mathtt{H}$ le plan horizontal passant par $\mathtt{a}$, et $\mathtt{V}$ le plan vertical principal (vertical, perpendiculaire à $\mathtt{T}$, et passant par $\mathtt{a}$).

1. Faire un schéma en perspective cavalière, suivant les conventions habituelles (tous les points noircis sur le papier représentent des points affines, les droites affines parallèles sont représentées par des traits rectilignes parallèles, etc.), représentant $\mathtt{T}$ et $\widetilde{\mathtt{T}}$, le point $\mathtt{a}$ et le plan neutre, les plans $\mathtt{H}$ et $\mathtt{V}$, la droite $\mathtt{L_H}$ et le point $\mathtt{f}$.

2. Soit $\mathtt{D}$ une droite affine de l'espace ; on note $\widetilde{\mathtt{D}}$ sa complétée projective. On suppose que $p(\widetilde{\mathtt{D}})$ est une droite projective, notée $\widetilde{\Delta}$; on suppose que $\widetilde{\Delta}$ n'est pas à l'infini et on note Δ sa partie affine ; on suppose que Δ est orthogonale à $\mathtt{L_H}$, et qu'elle ne passe pas par $\mathtt{f}$. Dessiner Δ sur le schéma.
Dessiner le plan $(\mathtt{a}, \Delta)$ par ses intersections avec le plan neutre et avec le plan $\mathtt{H}$.
Quelle est la position de $\mathtt{D}$ par rapport au plan (a, Δ) ? Quelle est la position de $\mathtt{D}$ par rapport à $\mathtt{a}$? Quelle est la position de $\mathtt{D}$ par rapport au plan neutre ? Justifier rapidement les réponses.

3. Dans toute la suite, on suppose que $\mathtt{D}$ n'est ni horizontale, ni verticale. On nomme $\mathtt{i}$ le point d'intersection de $\mathtt{D}$ avec $\mathtt{H}$ et $\mathtt{n}$ le point d'intersection de $\mathtt{D}$ avec le plan neutre. Dessiner $\mathtt{D}$ sur le schéma, d'une manière vraisemblable. Indiquer $\mathtt{i}$ et $\mathtt{n}$. Dessiner le point de fuite $\mathtt{f_D}$ de $\mathtt{D}$. Quelle est la perspective de $\mathtt{i}$? Quelle est la perspective de $\mathtt{n}$?

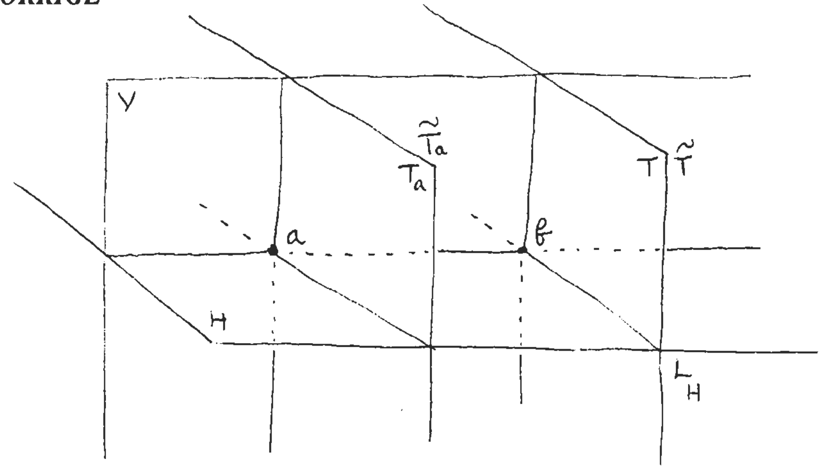
4. On demande maintenant de faire un schéma (*schéma n°2*) où le feuille de papier représente le plan du tableau *à plat*. On suppose que $\mathtt{L_H}$ et $\mathtt{f}$ sont déjà dessinés, ainsi que Δ et $\mathtt{f_D}$.
Quelle est la perspective du segment affine $[\mathtt{ni}]_{\text{aff}}$? Indiquer cette perspective sur le schéma n°2 et justifier rapidement la réponse.

5. On cherche à dessiner sur le schéma n°2 la perspective $\mathtt{m}'$ du milieu $\mathtt{m}$ du segment affine $[\mathtt{ni}]_{\text{aff}}$, en utilisant une construction classique fondée sur le théorème de Thalès. Dessiner sur le schéma n°2 les perspectives de :
- la droite $\mathtt{J}$ horizontale, parallèle au tableau et passant par $\mathtt{i}$;
- deux points $\mathtt{j_1}$ et $\mathtt{j_2}$, situés sur $\mathtt{J}$ dans l'ordre $\mathtt{i}, \mathtt{j_1}, \mathtt{j_2}$, vérifiant l'égalité des distances $\mathtt{i\,j_1} = \mathtt{j_1\,j_2}$;
- la droite $(\mathtt{j_2\,n})$ et la parallèle à cette droite passant par $\mathtt{j_1}$;
- $\mathtt{m}$.

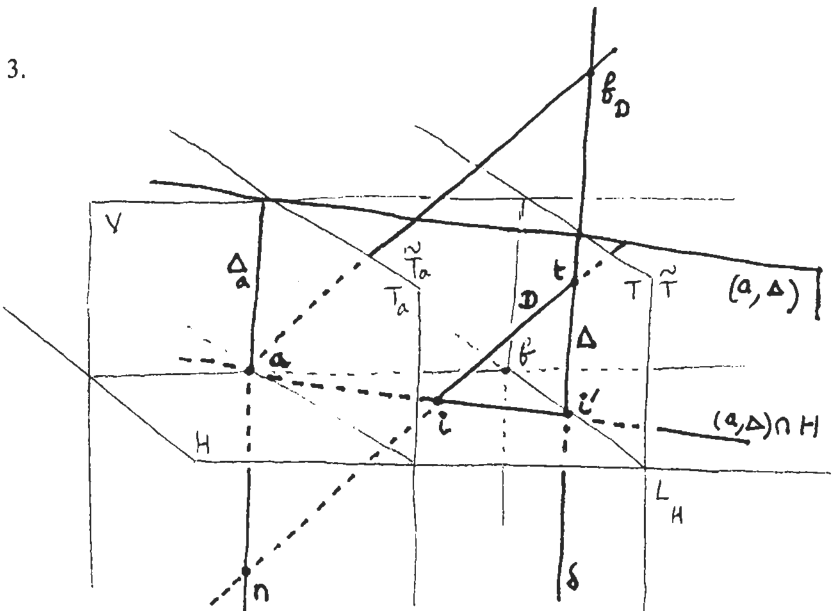
(On pourra s'aider d'un schéma auxiliaire (*schéma n°3*) représentant le plan $(\mathtt{D}, \mathtt{J})$ à plat sur la feuille de papier.)

CORRIGÉ

1.



2 et 3.

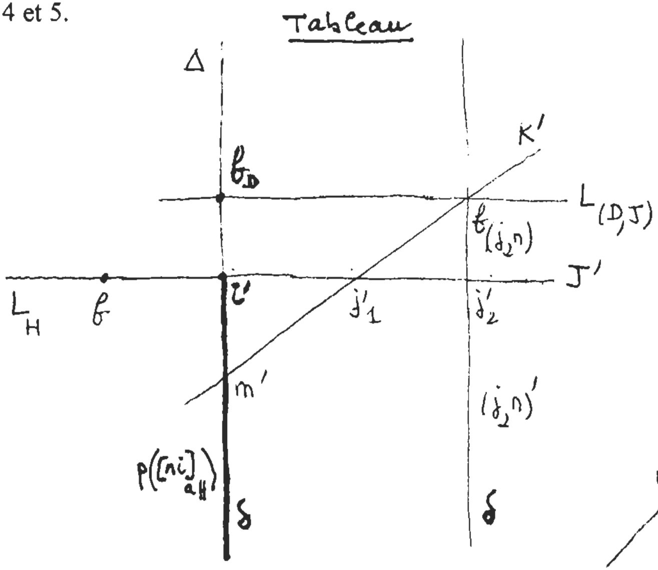


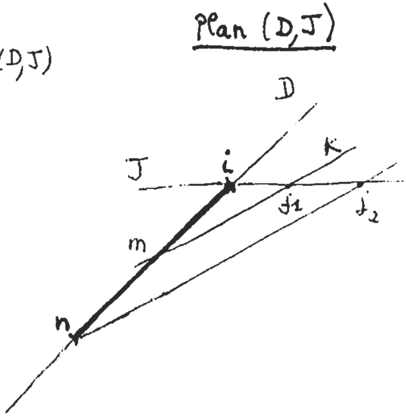
2. La droite D est incluse dans le plan (a, Δ) car $\Delta = (a, D) \cap T$. La droite D ne passe pas par a car la perspective de D n'est pas réduite à un point. Notons $\tilde{T}_a$ le plan neutre projectif et T_a le plan neutre affine. La droite $\tilde{D}$ n'est pas incluse dans $\tilde{T}_a$ car sa

perspective n'est pas à l'infini. Donc $\tilde{D}$ perce $\tilde{T}_a$ et, ou bien D perce T_a, ou bien D est strictement parallèle à T_a.

3. La perspective de i est le point i' indiqué sur le schéma. La perspective de n est le point à l'infini δ de la droite Δ.

4 et 5.





4. La perspective du segment affine $[ni]_{aff}$ est celui des deux segments projectifs d'extrémités i' et δ (de Δ) qui ne contient pas f_D, puisque le segment $[ni]_{aff}$ est celui des deux segments projectifs d'extrémités i et n (de D) qui ne contient pas le point à l'infini de D.

5. Nommons J' la perspective de J. Puisque J est horizontale et contient i, J est incluse dans H_a, donc $J' = L_H$.

Les perspectives j_1' et j_2' des points j_1 et j_2 sont situées sur L_H et vérifient l'égalité des distances $i'j_1' = j_1'j_2'$ puisque la droite J est parallèle à T.

La perspective $(\widetilde{j_2 n})'$ de la droite $(\widetilde{j_2 n})$ passe par j_2' et par la perspective de n, qui est δ, donc la partie affine de $(\widetilde{j_2 n})'$ est la parallèle à Δ passant par j_2'.

Puisque J est parallèle à T, la ligne de fuite du plan (D, J) a pour partie affine la droite $L_{(D,\,J)}$ parallèle à L_H et passant par f_D.

Puisque la droite $(j_2\, n)$ est incluse dans le plan (D, J), son point de fuite $f_{(j_2 n)}$ appartient à $L_{(D,\,J)}$. C'est donc le point d'intersection de $(j_2\, n)'$ et de $L_{(D,J)}$.

Soit K la parallèle à $(j_2\, n)$ passant par j_1 et soit $\tilde{K}$ sa complétée projective. La perspective $\tilde{K}'$ de $\tilde{K}$ est la droite $(\widetilde{j_1' f_{(j_2 n)}})$. Cette droite coupe le segment $p([ni]_{aff})$ au point m', perspective de m.

La construction ci-jointe figure dans un manuel technique de perspective. Il s'agit de la perspective conique d'un édifice constitué de voûtes surmontant des piliers verticaux dont les arêtes horizontales sont à angles droits. Le dessin du bâtiment est supposé donné sans aucune des lignes de construction (c'est, par exemple, une photographie) et le technicien détermine la ligne d'horizon, qu'il nomme H, le point de fuite principal qu'il nomme P, et la distance du point de vue au tableau, qu'il nomme DISTANCE. Notre but est de justifier la construction du technicien.

1. D'après le dessin des piliers, où se trouve le point de fuite des droites verticales ? Le tableau est-il vertical ? Pourquoi ?

2. Comment le technicien a-t-il obtenu la ligne d'horizon ?

3. De quels plans de l'espace la droite nommée Ligne de fuite est-elle la ligne de fuite ? Pourquoi ?

4. La droite projective $(\tilde{A}O)$ est la perspective de la diagonale $\tilde{\Delta}$ d'un carré dont une moitié, représentée en pointillés, est circonscrite au demi-cercle d'une voûte en plein cintre.

Le technicien n'indique pas comment il a obtenu la perspective O du centre du carré. Dessinez sur la figure votre construction du centre, et justifiez-la.

De quel point de $\tilde{\Delta}$ le point F_2 est-il la perspective ? Pourquoi ?

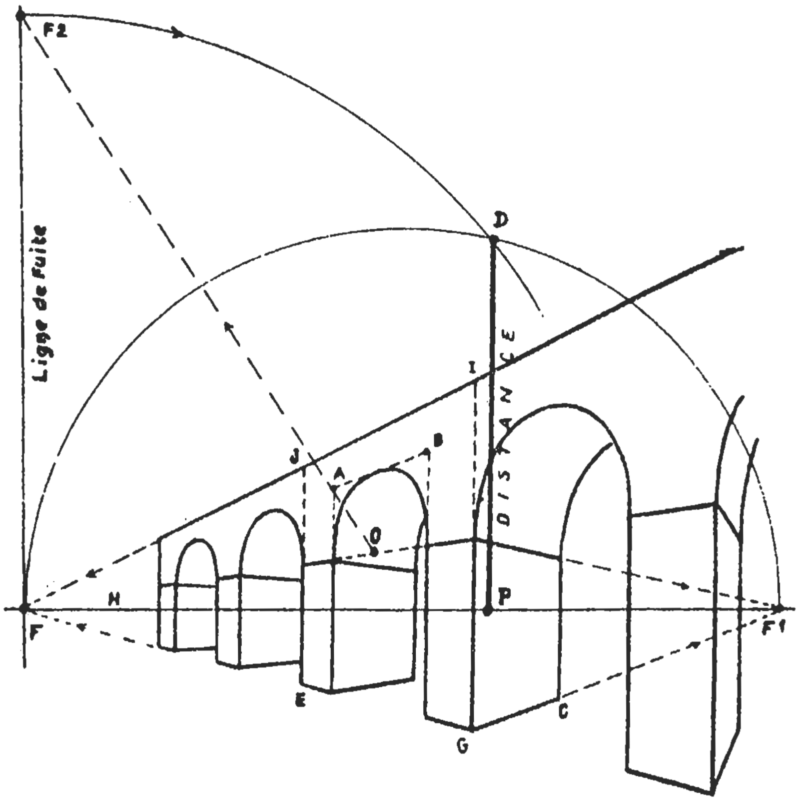
5. Faire un schéma en perspective cavalière représentant le tableau T, la ligne d'horizon H, le plan horizontal H_a passant par H, les points F et F_1, les lignes de fuite des plans de deux faces orthogonales verticales des piliers, et le point F_2.

Si a est le point de vue, quel est l'angle $\widehat{FaF_1}$? Indiquer a sur le schéma, ainsi que le point de fuite principal P, d'une manière approximative mais vraisemblable. Indiquer les valeurs des angles $\widehat{FaF_2}$, et $a\widehat{F}F_2$. Comparer les distances Fa et FF_2.

6. Justifier la construction du technicien, qui obtient D, puis P et la DISTANCE (du point de vue au tableau), au moyen de la longueur FF_2 et d'un demi-cercle de diamètre $[FF_1]$.

7. Les autres voûtes sont-elles aussi en plein cintre ? Justifier la réponse en utilisant les directions des diagonales analogues à (AO) sur chaque voûte.

LA RESTITUTION PERSPECTIVE. RECHERCHE
DE L'HORIZON DU POINT PRINCIPAL ET DE LA DISTANCE

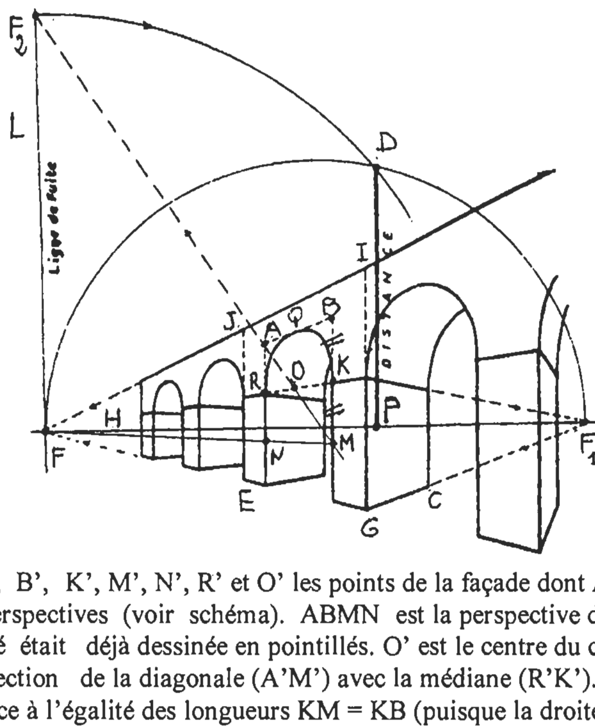


1. Le point de fuite F_v des droites verticales est à l'infini, puisque les parties affines des perspectives des droites verticales sont parallèles entre elles. Puisque F_v est à l'infini, le tableau est parallèle aux droites verticales, c'est-à-dire qu'il est vertical.

2. F est le point de fuite d'une direction de droites horizontales, et F_1 le point de fuite d'une autre direction de droites horizontales (les deux directions sont orthogonales entre elles car les bases des piliers sont rectangulaires). La ligne d'horizon est $H = (FF_1)$.

3. Soit L la droite nommée Ligne de fuite par le technicien. L est parallèle aux perspectives des arêtes verticales des piliers ; elle passe donc par le point de fuite F_v des verticales ; par conséquent $L = (FF_v)$, et L est la ligne de fuite des plans verticaux parallèles à l'arête (E'G'), c'est-à-dire des plans parallèles à la façade (J'E'G') du bâtiment (on note J', E' et G' les points de la façade dont J, E et G sont les perspectives).

4.



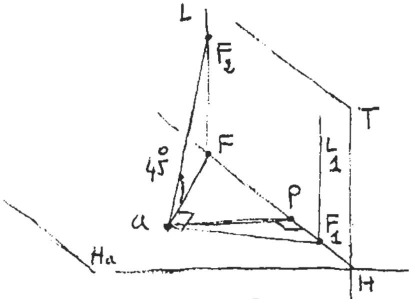
Nommons A', B', K', M', N', R' et O' les points de la façade dont A, B, K, M, N, R et O sont les perspectives (voir schéma). ABMN est la perspective du carré A'B'M'N', dont la moitié était déjà dessinée en pointillés. O' est le centre du carré, c'est-à-dire le point d'intersection de la diagonale (A'M') avec la médiane (R'K'). En perspective, on obtient M grâce à l'égalité des longueurs KM = KB (puisque la droite verticale (BM) est parallèle au tableau). Le point O est l'intersection des droites (AM) et (RK).

Notons que le technicien a obtenu les poins A et B en menant de F la tangente à l'arc $\overset{\frown}{RK}$, et en prenant ensuite les points d'intersection de la tangente avec les perspectives des arêtes verticales des piliers. En effet, dans le plan de la façade, la tangente au sommet du demi-cercle $\widehat{R'K'}$ est la droite (A'B'), qui est parallèle à (R'K'), si bien que son point de fuite est F.

(On peut obtenir O par d'autres constructions que celle que nous avons donnée. Par exemple, on peut prendre l'intersection de la droite (RK) avec la parallèle à L passant par Q, puisque ces deux droites sont les perspectives des deux médianes du carré. Mais cette construction est peu précise, à cause de la mauvaise précision sur le point de contact Q.)

F_2 est le point de fuite de la diagonale (A'M'). En effet, cette diagonale est incluse dans le plan de la façade dont L est la ligne de fuite, si bien que son point de fuite est l'intersection de sa perspective (AM) avec L. Le point F_2 est donc la perspective du point à l'infini de $\widetilde{\Delta}$ ($\widetilde{(A'M')}$ est la droite $\widetilde{\Delta}$ du texte).

5.



L et L_1 sont les lignes de fuite de deux faces orthogonales verticales des piliers.

$a \in H_a$

L'angle $\widehat{FaF_1}$ est droit : voir question 2.

L'angle $\widehat{FaF_2}$ vaut 45° puisque F_2 est le point de fuite de la diagonale d'un carré et que F est le point de fuite d'un côté de ce carré.

L'angle $\widehat{aFF_2}$ est droit puisque (aF) est horizontale et que (FF_2) est verticale. Le triangle FaF_2 est donc rectangle en F, et il est isocèle puisque ses deux autres angles valent tous les deux à 45°. Donc $Fa = FF_2$ (côtés de même longueur).

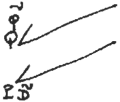
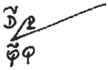
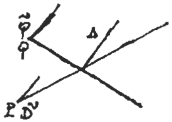
6. Le technicien dessine sur le tableau des objets qui se trouvent en réalité dans le plan H_a :
   le demi cercle de diamètre $[FF_1]$, sur lequel se trouve le point a puisque l'angle $\widehat{FaF_1}$ est droit,
   le point a (qu'il nomme D), situé sur le demi-cercle, à la distance FF_2 de F : il trace un arc de cercle de centre F passant par F_2, qui coupe le demi-cercle en D,
   la projection orthogonale de a sur H, qui est le point de fuite principal P. La longueur DP est donc la distance du point de vue au tableau.

7. Les autres voûtes ne sont pas en plein cintre, c'est-à-dire que leurs arcs ne sont pas des demi-cercles. En effet, on constate que la droite (FAB) est tangente à tous les arcs des voûtes, dont les sommets en perspective sont les points de contact de (FAB) avec chaque arc. Mais lorsqu'on effectue sur chaque arc la construction analogue à celle qui fournit A, B et M, on constate que les droites analogues à (MA) ne coupent pas L au point F. Les diagonales analogues à (A'M') ne sont donc pas parallèles à (A'M'), c'est-à-dire qu'elles ne sont pas inclinées à 45° sur la droite horizontale (A'B'). Les analogues de A'B'K'R' ne sont donc pas des demi-carrés, et les arcs analogues à $\widehat{R'K'}$ ne sont pas des demi-cercles.

Positions relatives possibles de $\tilde{D}$ et d'un plan projectif $\tilde{\varphi}$ quelconque : ou bien $\tilde{D}$ est incluse dans $\tilde{\varphi}$, ou bien $\tilde{D}$ perce $\tilde{\varphi}$.

Ce schéma représente $\tilde{D}$, droite à l'infini du plan affine P.

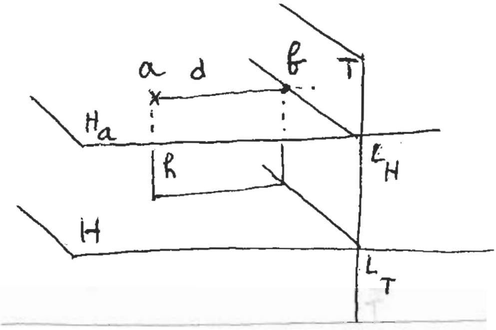
Schémas représentant les positions relatives de $\tilde{D}$ et $\tilde{\varphi}$, dans toutes les situations possibles de $\tilde{\varphi}$ par rapport à la partie affine de l'espace :

	$\tilde{D} \subset \tilde{\varphi}$	$\tilde{D}$ perce $\tilde{\varphi}$
$\tilde{\varphi}$ est le complété d'un plan affine φ	 φ est strictement parallèle à P  $\varphi = P$ $\underbrace{\qquad\qquad}$ $\tilde{D} \subset \tilde{\varphi} \iff \varphi /\!/ P$	 $\Delta = P \cap \varphi$ $\tilde{D}$ perce $\tilde{\varphi}$ au point à l'infini de Δ.
$\tilde{\varphi}$ est le plan de l'infini	 Nécessairement, $\tilde{D} \subset \tilde{\varphi}$. (Et il est inutile de représenter $\tilde{\varphi}$.)	impossible

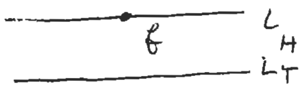
2. Puisque $\tilde{D}'$ a une partie affine, $\tilde{D}$ n'est pas incluse dans le plan neutre, c'est-à-dire que : ou bien D perce le plan neutre, ou bien D est strictement parallèle à ce plan.

Puisque D' n'est pas réduite à un point, D ne passe pas par a.

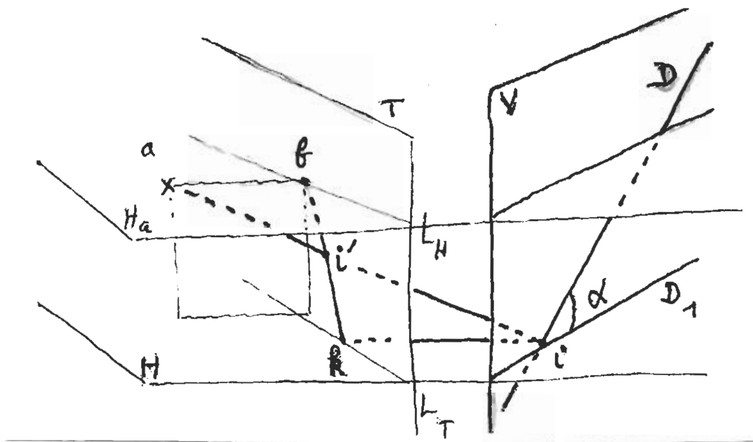
1. a)



b)

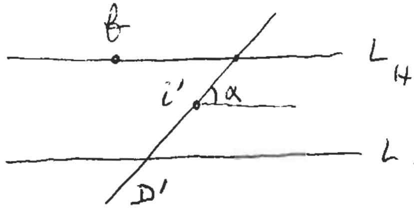


3.



4. a) Puisque D est incluse dans V et que V est parallèle à T, D est parallèle à T. Puisque D est parallèle à T, D' est parallèle à D. Puisque D' est parallèle à D et que D_1 est parallèle à L_T (puisque V est parallèle à T), $(\widehat{L_T, D'}) = (\widehat{D_1, D'}) \simeq \alpha$.

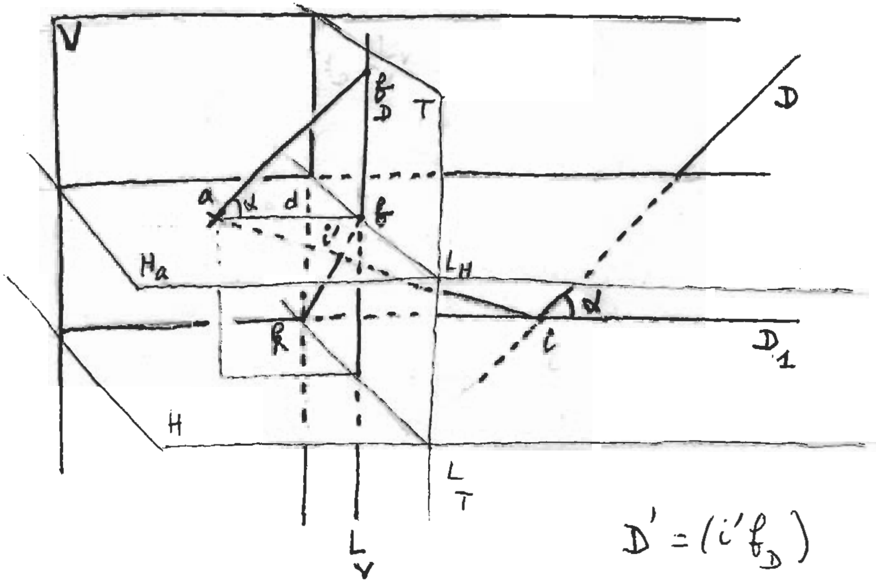
b)



c) Le point de fuite de D n'appartient pas à L_H car D n'est pas horizontale (on peut dire aussi : car D est parallèle à T si bien que son point de fuite est à l'infini, alors que le point d'intersection de D' et de L_H est affine).

5. a) Si V passe par a, D' = L_V (et L_V est la droite orthogonale à L_H en f).

b)



c)