Analyse Complexe

Hajer Bahouri,Mohamed Majdoub,Amor Nakouri

Université Virtuelle de Tunis

2009

Ce module porte sur l'analyse complexe. On se concentre sur l'étude des fonctions holomporphes et leurs propriétés particulières : propriétés a priori surprenantes, au sens ou rien d'analogue n'existe pour les fonctions différentiables même indéfiniment différentiables. Le principal but du cours est de définir la notion de fonctions holomorphes et de mettre à jour les premières propriétés particulières.

Introduction

Le module s'adresse d'abord aux étudiants de Licence(L3) de Mathématiques. Il s'inscrit dans le programme du diplôme L3 de Mathématiques. L'étudiant ou l'étudiante devrait avoir une connaissance de base en L1 et L2. Il a comme préalable tous le(s) module(s) de L1 et L2. **C**e « Guide d'étude » a pour objectif de vous préparer à suivre le cours. Il définit en quelque sorte un mode d'emploi, non seulement pour le matériel didactique du cours, mais aussi pour le cheminement que vous devez adopter et les différentes exigences auxquelles vous devez répondre.

But et objectifs du cours

Le but de ce module est de mettre à jour les propriétés des fonctions holomorphes. Plus spécifiquement, au terme de ce module, l'étudiant ou l'étudiante sera en mesure :

• De se familiariser avec la notion d'holomorphie : Définition de la notion d'holomorhie se traduisant par les conditions de Cauchy-Riemann.

• De noter la relation entre l'holomorphie et les applications conformes : si on transforme par une fonction holomorhe de dérivée non nulle deux courbes se coupant en faisant un angle orienté, les courbes images font entre elles le meme angle orienté.
• Etudier les séries entières : rayon de convergence, étude sur le cercle de convergence…
• D'être capable de développer une fonction holomorphe en une série entière.
• Calculer les résidus.

• Calculer certaines intégrales par la méthode des résidus : outil puissant pour le calcul de certaines intégrales.

• Bien retenir les propriétés particulières des fonctions holomorphes : zéros isolés, prolongement unique, principe du maximum, principe du minimum, lemme de Shwarz, caractérisation des automorphismes du disque unité,…• Etudier et caractériser les fonctions méromorphes.

• Poser le problème des primitives pour les fonctions holomorhes.• Topologie de l'espace des fonctions holomorhes.

• Construction d'une fonction holomorphe ayant des zéros fixés par la méthode des produits infinis.

Chapitre 1

Fonctions holomorphes

1 Complexe différentiabilité

Définition 1.1
On dit que $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \in \overset{o}{\Omega}$ s'il existe une application $\mathbb{C}$-linéaire $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{C}^*}} \frac{|f(z_0+h) - f(z_0) - L(h)|}{|h|} = 0. \tag{1}$$

Si f est $\mathbb{C}$-différentiable au point z_0, alors l'application L vérifiant (1) est unique. Le nombre complexe $L(1)$ s'appelle la dérivée (par rapport à z) de f au point z_0, on la note

$$\frac{df}{dz}(z_0) = f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Exercice

Vérifier que la fonction puissance $f(z) = z^n$, où $n \in \mathbb{N}$, est partout $\mathbb{C}$-différentiable dans $\mathbb{C}$ et donner sa dérivée.

Solution

En effet, on a pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$z^n = z_0^n + (z - z_0) f_1(z)$$

avec

$$f_1(z) = z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1}$$

ce qui montre que $f'(z_0) = n z_0^{n-1}$.

Exercice

Montrer que la fonction conjuguée $f(z) = \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-différentiable en aucun point de $\mathbb{C}$.

Solution

En effet, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}, \quad h \neq 0,$$

or $\dfrac{\bar{h}}{h}$ a pour valeur 1 lorsque $h \in \mathbb{R}$ et pour valeur -1 lorsque $h \in i\mathbb{R}$ et par conséquent n'admet pas de limite lorsque $h \to 0$.

2 Complexe et réel-différentiabilité

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \Omega \subset \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \end{array}$$

une application d'un ouvert non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$.

Proposition 2.1
Si f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0 alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ existent et vérifient l'équation de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

ou, de manière équivalente

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{array} \right. \tag{2}$$

$\boxed{\text{Preuve}}$

Le résultat découle trivialement du fait que la limite obtenue en approchant z_0 parallèlement à l'axe des x est la même que celle obtenue en approchant z_0 parallèlement à l'axe des y. En effet, on a par définition

$$\begin{array}{rcl} f'(z_0) & = & \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h \to 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \\ & = & \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{ih} + i \lim_{h \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{ih} \end{array}$$

Ce qui entraîne que u et v admettent des dérivées partielles en (x_0, y_0) satisfaisant les équations différentielles de Cauchy-Riemann (2). ■

La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie. Il existe des fonctions non $\mathbb{C}$-différentiables qui admettent des dérivées partielles vérifiant les équations de Cauchy-Riemann. Par exemple, si on considére la fonction

$$f(z) = f(x, y) = \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{xy(x + iy)}{x^2 + y^2} & \text{si} & z \neq 0 \quad 0 \quad \text{si} \quad z = 0. \\ & & \\ 0 & \text{si} & z = 0. \end{array} \right.$$

Il est clair que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$. Cependant $\dfrac{f(z) - f(0)}{z}$ n'a pas de limite en zéro.
La réciproque partielle suivante est vraie.

Proposition 2.2
Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent dans un voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$.
Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en z_0 et $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ alors f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0.

$\boxed{\text{Preuve}}$

Soit $f = u + iv$, $h = \xi + i\eta$. Il s'agit de démontrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f_x(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0).$$

Par le théorème des accroissements finis (pour les fonctions numériques à variable réelle), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{u(z_0 + h) - u(z_0)}{h} &= \frac{u(x_0 + \xi, y_0 + \eta) - u(x_0, y_0)}{\xi + i\eta} \\
&= \frac{u(x_0 + \xi, y_0 + \eta) - u(x_0 + \xi, y_0)}{\xi + i\eta} + \frac{u(x_0 + \xi, y_0) - u(x_0, y_0)}{\xi + i\eta} \\
&= \frac{\eta}{\xi + i\eta} u_y(x_0 + \xi, y_0 + \theta_1 \eta) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} u_x(x_0 + \theta_2 \xi, y_0),
\end{aligned}$$

et

$$\frac{v(z_0 + h) - v(z_0)}{h} = \frac{\eta}{\xi + i\eta} v_y(x_0 + \xi, y_0 + \theta_3 \eta) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} v_x(x_0 + \theta_4 \xi, y_0)$$

où θ_k, $k = 1, 2, 3, 4$, sont des nombres réels vérifiant $0 < \theta_k < 1$.
Il vient alors

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\eta}{\xi + i\eta}\Big[u_y(z_1) + iv_y(z_2)\Big] + \frac{\xi}{\xi + i\eta}\Big[u_x(z_3) + iv_x(z_4)\Big]$$

avec $|z_k - z_0| \to 0$ si $h \to 0$, $k = 1, 2, 3, 4$.
Puisque $f_y = if_x$ en z_0, on peut écrire $f_x(z_0) = \dfrac{\eta}{\xi + i\eta} f_y + \dfrac{\xi}{\xi + i\eta} f_x$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f_x(z_0) &= \frac{\eta}{\xi + i\eta}\Big[u_y(z_1) - u_y(z_0)\Big] + \frac{i\eta}{\xi + i\eta}\Big[v_y(z_2) - v_y(z_0)\Big] \\
&+ \frac{\xi}{\xi + i\eta}\Big[u_x(z_3) - u_x(z_0)\Big] + \frac{i\xi}{\xi + i\eta}\Big[v_x(z_4) - v_x(z_0)\Big].
\end{aligned}$$

Enfin comme toutes les expressions entre crochets tendent vers 0 lorsque $h \to 0$ et

$$\Big|\frac{\eta}{\xi + i\eta}\Big|, \Big|\frac{\xi}{\xi + i\eta}\Big| \leq 1$$

on obtient

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f_x(z_0).$$

$\blacksquare$

En fait, on a les équivalences suivantes.

Théorème 2.1
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f = u + iv$ une application de Ω dans $\mathbb{C}$ et $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) *f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0.*
(ii) *f est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0 et la $\mathbb{R}$-différentielle de f en z_0, $Tf(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, est $\mathbb{C}$-linéaire.*
(iii) *f est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0 et satisfait en ce point les conditions de Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases} u_x(z_0) & = v_y(z_0), \\ u_y(z_0) & = -v_x(z_0). \end{cases}$$

Si l'une des assertions est vérifiée, alors

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0).$$

PREUVE

L'équivalence entre **(i)** et **(ii)** découle de la définition.
(ii) $\Longleftrightarrow$ **(iii)**: La différentielle $Tf(z_0)$ est donnée par la matrice carrée d'ordre 2

$$\begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix}.$$

L'application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée à cette matrice est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si $u_x(z_0) = v_y(z_0)$ et $u_y(z_0) = -v_x(z_0)$. L'équation pour $f^{'}(z_0)$ est déjà obtenue dans la proposition 2.2. $\blacksquare$

Exemple 1

La fonction $f(z) = x^3y^2 + ix^2y^3$ est $\mathbb{R}$-différentiable dans $\mathbb{C}$, cependant les conditions de Cauchy-Riemann ont lieu exactement aux points (a, b) vérifiant $3a^2b^2 = 3a^2b^2$ et $2a^3b = -2ab^3$, donc l'ensemble des points où f est $\mathbb{C}$-différentiable se réduit aux deux axes des coordonnées.

Exemple 2

La fonction $f(z) = \exp z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ est $\mathbb{R}$-différentiable dans $\mathbb{C}$ et satisfait clairement les équations de Cauchy-Riemann en tout point, elle est donc $\mathbb{C}$-différentiable partout.

3 Fonctions holomorphes

Définition 3.1
On dit que $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe en z_0 s'il existe un voisinage ouvert U de z_0 dans $\mathbb{C}$ sur lequel f est $\mathbb{C}$-différentiable.

Une fonction qui est holomorphe en z_0 est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0 mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Par exemple, la fonction

$$f(z) = x^3y^2 + ix^2y^3$$

est exactement $\mathbb{C}$-différentiable sur les deux axes des coordonnées . Elle n'est donc holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

NOTATION

Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, on désignera par $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω. Un élément de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est appelé fonction entière.

Les trois exercices suivants sont faciles à vérifier et laissés au lecteur.

EXERCICE

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f, g deux fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$. Montrer que pour tous a et b dans $\mathbb{C}$, les fonctions $af + bg$ et $f.g$ sont dans $\mathcal{H}(\Omega)$ avec

$$(af + bg)' = af' + bg',$$
$$(f.g)' = f'g + f.g'.$$

EXERCICE

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f, g deux fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$. Si g ne s'annule pas sur Ω, montrer que la fonction quotient $\frac{f}{g}$ appartient à $\mathcal{H}(\Omega)$ avec

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

EXERCICE

Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega), g \in \mathcal{H}(\Omega')$ avec $f(\Omega) \subset \Omega'$. Montrer que la fonction composée $g\,o\,f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et pour tout $z \in \Omega$,

$$(g\,o\,f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

Comme pour les fonctions $\mathbb{C}$-différentiables, on a la condition nécessaire et suffisante d'holomorphie suivante.

Théorème 3.1
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f = u + iv$ une application de Ω dans $\mathbb{C}$.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) *$f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

(ii) *u et v sont $\mathbb{R}$-différentiables et satisfont dans Ω les conditions de Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases} u_x & = v_y, \\ u_y & = -v_x. \end{cases}$$

Intuitivement, une fonction holomorphe est "une fonction de la variable z". Les équations de Cauchy-Riemann traduisent le fait qu'une fonction holomorphe ne dépend pas de la variable $\bar{z}$.

Plus précisémment, en introduisant les variables z et $\bar{z}$, il est clair que si

$$\partial := \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$$

et

$$\bar{\partial} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}),$$

les conditions de Cauchy Riemann s'écrivent

$$\bar{\partial} f = 0.$$

EXERCICE

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\overline{\partial}\,\overline{f} = \overline{\partial f} \quad \textbf{et} \quad \partial\overline{f} = \overline{\overline{\partial} f}.$$

SOLUTION

Rappelons d'abord que les opérateurs de Cauchy-Riemann ∂ et $\overline{\partial}$ sont définis par

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned} \overline{\partial}\,\overline{f} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{f}}{\partial x} + i\frac{\partial\overline{f}}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)} \\ &= \overline{\partial f} \end{aligned}$$

De même on obtient $\partial\overline{f} = \overline{\overline{\partial} f}$.

Le théorème suivant montre que toute fonction réelle $\mathbb{R}$-différentiable n'est pas forcément la partie réelle d'une fonction $\mathbb{C}$-différentiable.

Théorème 3.2
Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe et si $u = Re(f)$ et $v = Im(f)$ sont de classe C^2 alors

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{4}$$

PREUVE

Ce théorème est une conséquence immédiate des équations de Cauchy-Riemann et du théorème de Schwarz.
En effet, f étant holomorphe, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

On en déduit que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

■

EXERCICE 1.1

Montrer que la fonction $u : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ définie par $u(z) = \log |z|$ est harmonique mais n'est la partie réelle d'aucune fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

SOLUTION

La fonction u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, et on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

On en déduit que u est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
Supposons qu'il existe une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ telle que $u(z) = \mathrm{Re} f(z)$. Ecrivons $f(z) = u(z) + i\ v(z)$. Les équations de Cauchy-Riemann entraînent que

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Donc il existe deux réels c_1 et c_2 tels que

$$v(x,y) \quad = \quad \begin{cases} c_1 - \arctan(\frac{x}{y}) & \text{si} \quad y > 0, \quad c_2 - \arctan(\frac{x}{y}) \quad \text{si} \\ c_2 - \arctan(\frac{x}{y}) & \text{si} \quad y < 0. \end{cases}$$

La continuité de v sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ implique que

$$c_1 - \frac{\pi}{2} = c_2 + \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad c_1 + \frac{\pi}{2} = c_2 - \frac{\pi}{2}.$$

Ceci est manifestement impossible.

EXERCICE 1.2

1. **Toute fonction holomorphe ne prenant que des valeurs réelles (resp. des valeurs purement imaginaires) est localement constante.**
2. **Toute fonction holomorphe admettant un module constant est localement constante.**

SOLUTION

La partie 1. de l'exercice découle trivialement des équations de Cauchy-Riemann.

Soit à présent $f = u + iv$ une fonction holomorphe telle que $u^2 + v^2 = C$ une constante non nulle. On en déduit, en vertu des équations de Cauchy-Riemann, que

$$0 = u(uu_x + vv_x) = u^2 u_x + v(uv_x) = u^2 u_x + v(-uu_y).$$

Enfin, comme $uu_y + vv_y = 0$, on obtient

$$0 = u^2 u_x + v(vv_y) = (u^2 + v^2)u_x$$

ce qui achève la solution.

EXERCICE 1.3

Déterminer le domaine de $\mathbb{C}$-différentiabilité des fonctions suivantes.

1. $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$.
3. $f(z) = |z|^2(|z|^2 - 2)$.
4. $f(z) = \sin(|z|^2)$.
5. $f(z) = x^2 + iy^2$.

6. $f(z) = z\text{Re}(z)$.
7. $f(z) = \sin x \text{ ch}y + i \cos x \text{ sh}y$.
8. $f(z) = \dfrac{\cos z}{\cos z - \sin z}$.

SOLUTION

1. Il est clair que la fonction $f(z) = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$ n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable en 0. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{z}{2|z|}$ donc f n'est $\mathbb{C}$-différentiable en aucun point de $\mathbb{C}$.

2. Pour $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$, on a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = z$, donc f n'est $\mathbb{C}$-différentiable qu'en 0.

3. Pour $f(z) = |z|^2(|z|^2 - 2) = z\bar{z}(z\bar{z} - 2)$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z(z\bar{z} - 2) + z\bar{z}(z) = 2z|z|^2 - 2z = 2z(|z|^2 - 1)$$
D'où
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Longleftrightarrow (z = 0 \text{ ou } |z| = 1)$$
Donc le domaine de $\mathbb{C}$-différentiabilité de f est la réunion de $\{0\}$ et du cercle unité.
Remarque : Cette fonction f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

4. Pour $f(z) = \sin(|z|^2) = \sin(z\bar{z})$, on a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z\cos(|z|^2)$
Donc f est $\mathbb{C}$-différentiable en 0 et sur les cercles d'équations
$$|z| = \sqrt{(\frac{2k+1}{2})\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

5. Pour $f(z) = x^2 + iy^2$, posons $u = x^2$ et $v = y^2$. Ce sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Les équations de Cauchy-Riemann de f en 0 sont vérifiées, donc f est $\mathbb{C}$-différentiables en 0. Par contre, sur tout voisinage de 0, les équations de Cauchy-Riemann de f
$$\begin{cases} 2x & = 2y \\ 0 & = 0 \end{cases}$$
ne sont vérifiées que pour $x = y$, donc f est $\mathbb{C}$-différentiable en tout point de la droite $x = y$. Cependant, f n'est pas holomorphe en 0.

6. On a $f(z) = \frac{z}{2}(z + \bar{z})$. Donc $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{z}{2}$. Par suite f n'est $\mathbb{C}$-différentiable qu'en 0.

7. On vérifie facilement que $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{C}$. Donc f est partout $\mathbb{C}$-différentiable et donc holomorphe sur $\mathbb{C}$.

8. Cette fonction est $\mathbb{C}$-différentiable sur son domaine de définition i.e. sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}; \quad \cos(z) - \sin(z) \neq 0\}$.

EXERCICE 1.4

Soit $f(z) = \sqrt{|xy|}$, où $z = x + iy$. Montrer que les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées au point $z = 0$, mais que $f^{'}(0)$ n'existe pas.

SOLUTION

Posons $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$ et $v(x, y) = 0$. Comme $u(x, 0) = u(0, y) = u(0, 0) = 0$ alors les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées en 0. Par contre

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy}$$

n'a pas de limite quand z tend vers 0 (prendre $y = x$).

EXERCICE 1.5

Soit $f = \mathbf{Re}f + i\mathbf{Im}f$ une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. Montrer que si l'une des conditions suivantes est satisfaite alors f est constante sur Ω.

1. **$f' = 0$ sur Ω.**
2. **$\mathbf{Re}f$ est constante sur Ω.**
3. **$\mathbf{Im}\, f$ est constante sur Ω.**
4. **$a\, \mathbf{Re}f + b\, \mathbf{Im}f + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 > 0$.**
5. **$|f|$ est constant sur Ω.**
6. **$\bar{f}$ est holomorphe sur Ω (i.e. f est anti-holomorphe sur Ω).**

SOLUTION

Notons $u = \mathrm{Re}f$ et $v = \mathrm{Im}f$.

1. Si $f'(z) = 0 \ \forall \ z \in \Omega$ alors $f = cte$ sur Ω.
2. Si $\mathrm{Re}f = u = cte$ sur Ω alors par les équations de Cauchy-Riemann $\mathrm{Im}f = v = cte$ sur Ω et donc $f = cte$ sur Ω.

3. De même si $v = cte$ sur Ω alors $u = cte$ sur Ω et donc $f = cte$ sur Ω.
4. Si $|f| = cte$ sur Ω alors $u^2 + v^2 = cte$ sur Ω. Lorsque la constante est nulle alors f est nulle sur Ω.
   Lorsque la constante n'est pas nulle, alors
$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} & +v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \\ u\dfrac{\partial u}{\partial y} & +v\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$
   Par les équations de Cauchy-Riemann on a
$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} & = 0, \\ \\ v\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial y} & = 0. \end{cases}$$
   Il s'agit d'un système de Cramer (car $u^2 + v^2 = cte \neq 0$), par suite $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ d'où $u =$ cte sur Ω et de même $v = cte$ sur Ω, c'est à dire que $f = cte$ sur Ω.
5. Si $\bar{f} = u - iv$ est holomorphe sur Ω alors par les équations de Cauchy-Riemann
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = -\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & = \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

d'où $v = cte$ et $u = cte$ sur Ω donc $f = cte$ sur Ω.

$\boxed{\text{EXERCICE 1.6}}$

Soit $f(z) = u(x + iy) + i\ v(x + iy)$ une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. On suppose que

$$u = F(v)$$

où F est une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction f est constante sur Ω.

$\boxed{\text{SOLUTION}}$

Par les équations de Cauchy-Riemann on a le système de Cramer suivant

$$\begin{cases} F'(v)\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + F'(v)\ \dfrac{\partial v}{\partial y} & = 0 \end{cases}$$

Donc $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ sur Ω. Par conséquent v est constante sur Ω. Par suite f est constante.

$\boxed{\text{Exercice 1.7}}$

Soit $z \longmapsto f(z)$ une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Montrer que la fonction $z \to \overline{f(\bar{z})}$ est holomorphe sur

$$\Omega' = \Big\{ z \in \mathbb{C} \quad ; \quad \bar{z} \in \Omega \Big\}$$

$\boxed{\text{Solution}}$

D'abord $\Omega' = \{z \in \mathbb{C} \quad ; \quad \bar{z} \in \Omega\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, car c'est l'image réciproque de l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ par l'homéomorphisme conjugaison $z \mapsto \bar{z}$.
On pose pour $z \in \Omega'$, $\quad g(z) = \overline{f(\bar{z})}$.
Si

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

avec

$$z = x + iy$$

alors

$$f(\bar{z}) = u(x, -y) + iv(x, -y)$$

et par suite, pour $z \in \Omega'$,

$$g(z) = u(x, -y) - iv(x, -y)$$

donc on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(z) & = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\bar{z}) - i\dfrac{\partial v}{\partial x}(\bar{z}) = \overline{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\bar{z})} \\ \\ i\dfrac{\partial g}{\partial y}(z) & = -i\dfrac{\partial u}{\partial y}(\bar{z}) - \dfrac{\partial v}{\partial y}(\bar{z}) = -i\overline{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\bar{z})} \end{cases}$$

on en déduit que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(z) + i\frac{\partial g}{\partial y}(z) = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{z}) + i\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{z})} = 0$$

car $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{z}) + i\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{z}) = 0$ (puisque f est holomorphe en $\bar{z} \in \Omega$). Par conséquent g est holomorphe sur Ω'.

$\boxed{\text{Exercice 1.8}}$

1.

2. **Montrer qu'en coordonnées polaires (r,θ) les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent :**

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial r} & = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial r} & = -\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{array}\right.$$

3. **Montrer qu'en coordonnées polaires le Laplacien s'écrit**

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Solution

1. Pour $z = x + iy = re^{i\theta}$ et $f(z) = u(z) + iv(z)$ on a

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} & = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial r} & = \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \theta} & = -r\,\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{array}\right.$$

car on a

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial}{\partial x} & = \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial \theta}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} & = \sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial \theta}. \end{array}\right.$$

2. On a

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial}{\partial r} & = \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \theta} & = -r\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial y}. \end{array}\right.$$

D'où

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} & = & \cos^2\theta\,\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \sin^2\theta\,\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\sin\theta\cos\theta\,\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} & = & r^2\sin^2\theta\,\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + r^2\cos^2\theta\,\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\,\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} \\[2ex] & - & r\cos\theta\,\dfrac{\partial}{\partial x} - r\sin\theta\,\dfrac{\partial}{\partial y}. \end{array}$$

Par conséquent

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Exercice 1.9

Soit $P(z)$ **un polynôme complexe. On pose**

$$u(x,y) = \mathrm{Re}(P(x+iy)) \quad \text{et} \quad v(x,y) = \mathrm{Im}(P(x+iy)).$$

1. **Montrer qu'on a**

   a) $P(z) = 2u(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) - \overline{P(0)}$

   b) $P(z) = 2iv(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) + \overline{P(0)}$

   •

   a) **Retrouver le polynôme** $P(z)$ **tel que** $\mathrm{Re}(P(z)) = x - x^2 + y^2$.

   b) **Peut-on trouver** $P(z)$ **tel que** $\mathrm{Re}(P(z)) = x + y^2$?

2. **Reconstituer la fonction holomorphe** $f(z)$ **sur** $\mathbb{C}$ **par la donnée de sa partie réelle** $\mathrm{Re}(f) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, **avec** $f(0) = 0$.

Solution

Posons $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ où $a_j \in \mathbb{C}$ et $\tilde{P}(z) = \sum_{j=0}^{n} \overline{a_j} z^j$, on a :

$$\overline{P(z)} = \tilde{P}(\bar{z}).$$

1. a) Pour $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$u(x,y) = \frac{1}{2}[P(z) + \tilde{P}(\bar{z})] \Leftrightarrow$$

$$2u(x,y) = P(x+iy) + \tilde{P}(x-iy)$$

d'où, en remplaçant x par $\frac{z}{2}$ et y par $\frac{z}{2i}$, on obtient

$$\begin{aligned} 2u(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) &= P(\frac{z}{2} + \frac{z}{2}) + \tilde{P}(\frac{z}{2} - \frac{z}{2}) \\ &= P(z) + \tilde{P}(0) \end{aligned}$$

Finalement comme $\tilde{P}(0) = \bar{a}_0 = \overline{P(0)}$, on trouve

$$P(z) = 2u(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) - \overline{P(0)}.$$

b) De même, puisqu'on a $v(x,y) = \frac{1}{2i}[P(z) - \tilde{P}(0)]$

$$2iv(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) = P(z) - \tilde{P}(0)$$

et donc

$$P(z) = 2iv(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) + \overline{P(0)}.$$

-

a) La fonction $u(x,y) = x - x^2 + y^2$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$ ($\Delta u = 0$), donc
$$P(z) = 2u(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) - \overline{P(0)}.$$
Comme $P(0) = i$, il vient que
$$P(z) - 2[\frac{z}{2} - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^2}{(2i)^2}] + i = z - z^2 + i$$
On a bien
$$u(x,y) = \mathrm{Re}(P(x+iy)).$$

b) Il n'existe aucun polynôme $P(z)$ tel que Re $(P(z)) = x + y^2$ car $u(x,y) = x + y^2$ n'est pas harmonique (puisque $\Delta u \neq 0$).

2. Par 1. a), on a :
$$\begin{aligned} f(z) &= 2u(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) - \overline{f(0)} \\ &= 2\Big[\frac{z^3}{8} + 6\frac{z^2}{4}\frac{z}{2i} - 3\frac{z}{2}\frac{z^2}{(2i)^2} - 2\frac{z^3}{(2i)^3}\Big] \\ &= 2[\frac{z^3}{8} - \frac{3}{4}iz^3 + \frac{3}{8}z^3 - \frac{1}{4}iz^3] \end{aligned}$$
ou encore
$$f(z) = (1-2i)z^3.$$

Exercice 1.10

On se donne un polynôme harmonique $g(x,y)$ sur $\mathbb{R}^2$, et $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
Montrer que toute fonction $P(z)$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ vérifiant
$$a \text{ Re } (P(z)) + b\mathrm{Im}(P(z)) = g(x,y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$
est de la forme
$$P(z) = \frac{2}{a-ib} g(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) - \left(\frac{a+ib}{a-ib}\right)\overline{P(0)}.$$

Solution

On écrit
$$\begin{aligned} g(x,y) &= aReP(z) + bImP(z) \\ &= \frac{a}{2}[P(z) + \overline{P(\bar{z})}] + \frac{b}{2i}[P(z) - \overline{P(\bar{z})}] \end{aligned}$$

d'où

$$2g(x,y) = a[P(x+iy) + \overline{P(x-iy)}] - ib[P(x+iy) - \overline{P(x-iy)}]$$

donc

$$\begin{aligned} 2g(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) &= a[P(z) + \overline{P(0)}] - ib[P(z) - \overline{P(0)}] \\ &= (a-ib)P(z) + (a+ib)\overline{P(0)} \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$P(z) = \frac{2}{a-ib} g(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) - \left(\frac{a+ib}{a-ib}\right) \overline{P(0)}.$$

Chapitre 2

Holomorphie et conformalité

1 Applications conformes

Définition 1.1
Soit $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire injective. On dit que T préserve les angles si, pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a

$$|z_1||z_2| < T(z_1), T(z_2) >= |T(z_1)||T(z_2)| < z_1, z_2 >$$

où $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$, soit

$$\langle z_1, z_2 \rangle = Re(z_1 \bar{z}_2).$$

Les applications $\mathbb{R}$-linéaires injectives préservant les angles admettent une caractérisation simple. Plus précisement, on a

Lemme 1.1
Soit $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire injective. Les assertions suivantes sont équivalentes:
i) *T préserve les angles.*
ii) *Il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $T(z) = az$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ ou bien $T(z) = a\bar{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

PREUVE

Il est clair que **ii)** entraîne **i)**.
Réciproquement, comme T est injective $T(1) = a \in \mathbb{C}^*$. Pour $b = a^{-1}T(i)$, il s'en suit que

$$0 = \langle i, 1 \rangle = \langle T(i), T(1) \rangle = \langle ab, a \rangle = |a|^2 Re(b),$$

donc b est imaginaire pur, $\quad b = ir, \quad r \in \mathbb{R}$.
On en déduit que pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $T(z) = a(x + iry)$. Enfin, comme T préserve les angles, on a

$$|1||z|\langle T(1), T(z) \rangle = |T(1)||T(z)|\langle 1, z \rangle$$

soit

$$|x + iy||a|^2 x = |a|^2 |x + iry| x$$

ce qui entraîne que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $x \neq 0$ $|x + iy| = |x + iry|$.
Par conséquent $r = \pm 1$ et donc soit T est de la forme $T(z) = az$ ou $T(z) = a\bar{z}$.
∎

EXERCICE 2.1

1. **Montrer que l'application**

$$\begin{array}{rcl}\langle ./. \rangle : \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (\omega, z) & \longmapsto & < z/\omega >:= \mathbf{Re}(\omega\bar{z})\end{array}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En déduire la norme induite par ce produit scalaire.

2. **Montrer que pour tous a, z et ω dans $\mathbb{C}$, on a**

   i) $< a\omega/az >= |a|^2 < w/z >$
   ii) $< \bar{\omega}/\bar{z} >=< \omega/z >$
   iii) $< \omega/z >^2 + < i\omega/z >^2= |z|^2|\omega|^2$.

   En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$| < \omega/z > | \leq |\omega||z|$$

   et l'identité

$$|\omega + z|^2 = |\omega|^2 + |z|^2 + 2 < \omega/z >$$

3. **Montrer que pour tous $z, \omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $< \omega/z >= |z||\omega|\cos\theta$.**

SOLUTION

1. Il est clair que l'application $(z, w) \rightarrow \langle z/w\rangle = Re(z\bar{w})$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, symétrique et définie positive ; elle définit alors un produit scalaire sur $\mathbb{C}$. De plus, la norme induite par ce produit scalaire est $|z| = \sqrt{\langle z/z\rangle} = \sqrt{z\bar{z}}, \quad z \in \mathbb{C}$.

2. Pour tous $a, z, w \in \mathbb{C}$, on a

   (i) $\langle aw/az\rangle = \text{ Re } (aw\bar{a}\bar{z}) = |a|^2\langle w/z\rangle$
   ii) $\langle\bar{w}/\bar{z}\rangle = \text{ Re } (\bar{w}z) = \langle z/w\rangle = \langle w/z\rangle$
   iii)

$$\begin{array}{rcl}\langle w/z\rangle^2 + \langle iw/z\rangle^2 & = & \text{Re }^2(w\bar{z}) + \text{ Re }^2(iw\bar{z})\\ & = & |w|^2|\bar{z}|^2 - \text{Im}^2(w\bar{z}) + \text{Re}^2(iw\bar{z})\\ & = & |w|^2|z|^2 \quad \text{car} \quad \text{Re}(iw\bar{z}) = -\text{Im}(w\bar{z})\end{array}$$

On en déduit que
$$0 \leq \langle \omega/z \rangle^2 \leq |w|^2|z|^2$$
d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$|\langle w/z \rangle| \leq |w||z|.$$
D'autre part, on a
$$|w+z|^2 = \langle w+z/w+z \rangle = |w|^2 + |z|^2 + 2\langle w/z \rangle.$$

3. Il vient en vertu de 2. iii) que
$$\forall \ w, z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad \frac{|\langle w/z \rangle|}{|w||z|} \leq 1$$
Il existe alors un unique réel $\theta \in [0, \pi]$ appelé angle entre le vecteur w et le vecteur z, tel que
$$\langle w/z \rangle = |w||z| \cos \theta.$$

$\boxed{\text{EXERCICE 2.2}}$

1. **Montrer que l'application conjugaison $z \longmapsto \bar{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, est $\mathbb{R}$-linéaire et non $\mathbb{C}$-linéaire.**
2. **Montrer que pour toute application $\mathbb{C}$-linéaire $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que**
$$T(z) = \lambda z, \qquad z \in \mathbb{C}.$$
3. **Soit $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application. Montrer que T est $\mathbb{R}$-linéaire si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que**
$$T(z) = \lambda z + \mu \bar{z} \quad , \ z \in \mathbb{C}.$$
En déduire que T est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si
$$T(z) = T(1)z \quad , z \in \mathbb{C}.$$

$\boxed{\text{SOLUTION}}$

1. L'application conjugaison $z \longmapsto \bar{z}$ est évidemment $\mathbb{R}$-linéaire mais non $\mathbb{C}$-linéaire (car $\overline{iz} = -i\bar{z}$).

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

2. L'application T étant $\mathbb{C}$-linéaire, donc pour tout $z = x + iy$ dans $\mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned} T(z) &= T(x) + T(iy) = xT(1) + iyT(1) \\ &= (x + iy)T(1) = \lambda z \end{aligned}$$

où

$$\lambda = T(1) \in \mathbb{C}.$$

3. Il est clair que si T est de la forme

$$T(z) = \lambda z + \mu \bar{z} \quad (\text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{C})$$

alors T est $\mathbb{R}$-linéaire.
Réciproquement, si T est $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ alors

$$\begin{aligned} T(z) &= T(x + iy) = T(x) + T(iy) \\ &= xT(1) + yT(i) \end{aligned}$$

et puisqu'on a $\quad 2x = z + \bar{z}$ et $2y = i(\bar{z} - z)$ alors

$$T(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$$

où

$$\lambda = \frac{1}{2}(T(1) - iT(i)) \text{ et } \mu = \frac{1}{2}(T(1) + iT(i)).$$

On en déduit grâce à la question 2. les équivalences suivantes
T est $\mathbb{C}$-linéaire $\Leftrightarrow (\mu = 0$ et $\lambda = T(1)) \Leftrightarrow (T(z) = T(1)z, \ \ z \in \mathbb{C})$.

Exercice 2.3

Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on pose

$$T(z) = \lambda z + \mu \bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Montrer que

1. T **est bijective si et seulement si** $|\lambda| \neq |\mu|$**.**

2. T **est une isométrie (i.e** $|T(z)| = |z|, \ \ z \in \mathbb{C})$ **si et seulement si**

$$\lambda\mu = 0 \quad \textbf{et} \quad |\lambda + \mu| = 1.$$

Solution

1. T est bijective $\Leftrightarrow$ le système $(T(z) = 0$ et $\overline{T(z)} = 0)$ est un système de Cramer.
Ceci est équivalent à

$$|\lambda|^2 - |\mu|^2 \neq 0$$

2. T est une isométrie si et seulement si sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est orthogonale. Ceci est équivalent à

$$|T(1)| = |T(i)| = 1 \quad \text{et} \quad \text{Re}\Big(T(1)\overline{T(i)}\Big) = 0.$$

Ou encore

$$\lambda\mu = 0 \quad \text{et} \quad |\lambda + \mu| = 1.$$

Par conséquent T est de la forme

$$\Big(T(z) = \lambda\, z \quad \text{avec} \quad |\lambda| = 1\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(T(z) = \mu\, z \quad \text{avec} \quad |\mu| = 1\Big).$$

EXERCICE 2.4

Soit $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire injective. On dit que T conserve les angles si pour tous $\omega, z \in \mathbb{C}$

$$|z||\omega| < Tz/T\omega >= |Tz||T\omega| < z/\omega > .$$

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

i) T **conserve les angles.**

ii) $\exists\, a \in \mathbb{C}^*$ **tel que** $Tz = az$ **ou** $Tz = a\bar{z}$**.**

iii) $\exists\, \alpha > 0$ **tel que** $< Tz/T\omega >= \alpha < z/\omega >, \quad z, \omega \in \mathbb{C}$**.**

SOLUTION

L'application T étant $\mathbb{R}$-linéaire injective, d'après un exercice précédent T est de la forme $T(z) = \lambda z + \mu\bar{z}$ avec $|\lambda| \neq |\mu|$.

• *i) $\Rightarrow$ ii)*
Posons $a = T(1) = \lambda + \mu \in \mathbb{C}^*$ et $b = a^{-1}T(i)$, on a

$$0 = \langle i/1 \rangle = \langle T(i)/T(1) \rangle = \langle ab/a \rangle = |a|^2 \text{ Re } b.$$

D'où Re$b = 0$ donc $b = i\beta$ est imaginaire pur.
On a

$$\begin{aligned} T(z) &= T(x+iy) = T(x) + T(iy) = xT(1) + yT(i) \\ &= xa + y(ai\beta) = a(x + iy\beta). \end{aligned}$$

Par suite

$$\langle T(1)/T(z) \rangle = \langle a/a(x+iy\beta) \rangle = |a|^2 x$$

et puisque T conserve les angles, on a

$$\begin{aligned}|x+iy||a|^2x &= |1||z|\langle T(1)/T(z)\rangle = |T(1)||T(z)|\langle 1/z\rangle \\ &= |a|^2|x+iy\beta|x\end{aligned}$$

Donc, pour tous $z = x+iy$ tel que $x \neq 0$, on a

$$|x+iy| = |x+iy\beta|$$

donc $\beta = \pm 1$ et on obtient alors $T(z) = a(x \pm iy)$ et ($T(z) = az$ ou $T(z) = a\bar{z}$ où $a \in \mathbb{C}^*$) d'où $ii)$.
• $ii) \Rightarrow iii)$
En effet si $T(z) = az$ (où $a \in \mathbb{C}^*$) alors pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\langle T(z)/T(w)\rangle = \langle az/aw\rangle = |a|^2\langle z/w\rangle = \alpha\langle z/w\rangle$$

Il suffit de prendre $\alpha = |a|^2 > 0$. Il en est de même si $T(z) = a\bar{z}$.
• L'implication $iii) \Rightarrow i)$ est évidente.

Plus généralement on a

Définition 1.2
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On dit que f préserve les angles ou encore f est une application conforme, si pour tout $z \in \Omega, Tf(z)$ la $\mathbb{R}$-différentielle de f au point z conserve les angles.

Cette termonologie se justifie par le fait que si f est une application conforme alors l'image par f de deux courbes se coupant selon l'angle φ_0 sont deux courbes se coupant selon le même angle.

Définition 1.3
On appelle courbe différentiable régulière de Ω, toute application différentiable $\gamma : [0,1] \to \Omega$ vérifiant $\gamma'(t) \neq 0$, pour tout $t \in]0,1[$.

On dit que la courbe γ passe par un point z_0 s'il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $\gamma(t_0) = z_0$.

La courbe étant régulière, elle va admettre une tangente au point z_0 donnée par

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & z_0 + \gamma'(t_0)s\end{array}$$

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une application $\mathbb{R}$-différentiable alors $f\,o\,\gamma$ est une courbe différentiable. Si de plus $Tf(\gamma(t)) \neq 0$, pour tout $t \in]0,1[$, alors $f\,o\,\gamma$ est une courbe différentiable régulière. Elle admet alors en tout point $f(\gamma(t)), t \in]0,1[$, une tangente donnée par

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & f(\gamma(t)) + Tf(\gamma(t)).(\gamma'(t))s\end{array}$$

Définition 1.4
Soient γ_1 et γ_2 deux courbes différentiables régulières de Ω. On dit que γ_1 et γ_2 se croisent au point z_0 avec l'angle φ_0 s'il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que

$$\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0$$

et l'angle entre $\gamma_1'(t_0)$ et $\gamma_2'(t_0)$ noté $(\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0))$ est égal à φ_0.

Proposition 1.1
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application conforme, alors si γ_1 et γ_2 sont deux courbes différentiables régulières de Ω se croisant au point z_0 avec un angle φ_0 alors les courbes $f\,o\,\gamma_1$ et $f\,o\,\gamma_2$ se croisent au point $f(z_0)$ avec le même angle φ_0.

Evidemment, on doit distinguer deux cas. Le cas où le sens de l'angle φ_0 est conservé, on dit qu'on a une application conforme directe et le cas où le sens de l'angle φ_0 est inversé, on dit qu'on a une application conforme indirecte.

2 Applications antiholomorphes

Définition 2.1
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application. f est dite anti-holomorphe sur Ω si l'application $\bar{f}$ qui à z associe $\overline{f(z)}$ est holomorphe sur Ω.

Une application $\mathbb{R}$-différentiable est anti-holomorphe si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in \Omega.$$

Les seules fonctions qui sont à la fois holomorphes et anti-holomorphes sont les fonctions constantes.

$\boxed{\text{EXERCICE 2.5}}$

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \Omega & \to & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \mapsto & f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \end{array}$$

une application $\mathbb{R}$-différentiable. Alors la $\mathbb{R}$-différentielle Tf de f vérifie pour tout $z \in \Omega$ et $h \in \mathbb{C}$

$$Tf(z).h = \frac{\partial f}{\partial z}(z)h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\bar{h} \tag{1}$$

et le Jacobien de f satisfait

$$\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = |\frac{\partial f}{\partial z}|^2 - |\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}|^2. \tag{2}$$

On en déduit que le Jacobien d'une fonction anti-holomorphe est toujours négatif tandis qu celui d'une fonction holomorphe est toujours positif.

SOLUTION

Pour $z = x + iy \in \Omega$ et pour $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$ on a

$$Tf(z).h = (u_x h_1 + u_y h_2) + i(v_x h_1 + v_y h_2).$$

Mais, puisqu'on a

$$\frac{\partial}{\partial x} = \partial + \overline{\partial} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} = i(\partial - \overline{\partial}) \tag{3}$$

alors

$$\begin{aligned} Tf(z).h &= (\partial u + i\partial v)(h_1 + ih_2) + (\overline{\partial} u + i\overline{\partial} v)(h_1 - ih_2) \\ &= \partial f(z).h + \overline{\partial} f(z).\overline{h}. \end{aligned}$$

De même

$$det(Tf(z)) = u_x v_y - v_x u_y.$$

Par la relation (3), on a

$$det(Tf(z)) = 2i\Big[\overline{\partial} u \partial v - \partial u \overline{\partial} v\Big].$$

Or $u = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ et $v = \frac{1}{2i}(f - \overline{f})$.
On en déduit que

$$det(Tf(z)) = \partial f \overline{\partial}\, \overline{f} - \overline{\partial} f \partial \overline{f} = |\partial f|^2 - |\overline{\partial} f|^2$$

où l'on a utilisé le fait que (voir Chapitre 1)

$$\overline{\partial}\, \overline{f} = \overline{\partial f} \quad \text{et} \quad \partial \overline{f} = \overline{\overline{\partial} f}.$$

---

3 Holomorphie, conformalité et antiholomorphie

Le théorème suivant caractérise les applications conformes sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$.

Théorème 3.1
Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application continûment $\mathbb{R}$-différentiable, alors les assertions suivantes sont équivalentes:
i) *f est une application conforme dans Ω.*
ii) *f est soit une application holomorphe de dérivée ne s'annulant pas, soit une application anti-holomorphe de dérivée ne s'annulant pas.*

PREUVE

Il vient en vertu du Lemme 1.1 que **ii)** $\Rightarrow$ **i)**. Il reste à prouver que **i)** $\Rightarrow$ **ii)**.
On sait par (1) que pour tout $z \in \Omega$,

$$\begin{array}{rcl} Tf(z) : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ h & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial z}(z)h + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\bar{h} \end{array}$$

On en déduit, par le Lemme 1.1 que $Tf(z)$ préserve les angles si

$$\overline{\partial} f(z) = 0 \quad \text{et} \quad \partial f(z) \neq 0$$

ou bien

$$\partial f(z) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\partial} f(z) \neq 0.$$

La fonction

$$\frac{\partial f(z) - \overline{\partial} f(z)}{\partial f(z) + \overline{\partial} f(z)}, \quad z \in \Omega$$

est par conséquent bien définie et ne prend que les valeurs 1 ou -1. Comme elle est continue par hypothèse et Ω est connexe, elle doit être constante, ce qui achève la preuve du théorème. ■

Exemples

1. L'application $z \longmapsto z^2$ est conforme sur $\mathbb{C}^*$.
2. L'application $z \longmapsto \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ est conforme sur $\mathbb{C}^* \setminus \Big\{ -1, +1 \Big\}$.

Il vient en vertu de (2) que les applications conformes directes sont les fonctions holomorphes de dérivée non nulle tandis que les applications conformes indirectes sont les fonctions anti-holomorphes de dérivée non nulle. Ceci est dû au fait qu'une fonction $\mathbb{R}$-différentiable préserve l'orientation si son Jacobien est positif.

4 Applications biholomorphes

Définition 4.1
Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ une application. On dit que f est une application biholomorphe de Ω sur Ω' si et seulement si:
f est une bijection holomorphe de Ω sur Ω' et f^{-1} est holomorphe sur Ω'.

Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier.

1. L'inverse d'une application biholomorphe est une application biholomorphe.
2. La composée de deux applications biholomorphes est une application biholomorphe.

3. Une application biholomorphe est une application conforme.

En fait, on verra que "toute bijection holomorphe est une application biholomorphe". Evidemment, ce résultat est faux pour les applications $\mathbb{R}$-différentiables comme le montre l'exemple de la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

On a le théorème suivant qui est une version holomorphe du théorème d'inversion locale.

Théorème 4.1
Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Alors f est localement une application biholomorphe prés de chaque point z_0 où $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) \neq 0$.

Il vient en vertu de la remarque précèdente que toute application conforme est localement une application biholomorphe.

Définition 4.2
Deux ouverts Ω et Ω' sont dits conformément équivalents s'il existe une application biholomorphe de Ω sur Ω'.

On démontrera au Chapitre 7 le théorème important suivant dû à Riemann.

Théorème 4.2
Tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ différent de $\mathbb{C}$ est conformément équivalent au disque unité ouvert $D = D(0, 1)$.

Comme toute fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$ est constante (théorème de Liouville), $\mathbb{C}$ ne peut être conformément équivalent au disque unité.

EXEMPLE

Transformations de Cayley, voir section suivante.

---

5 Transformations Homographiques Transformation de Cayley

Définition 5.1
On appelle transformation homographique, toute application de la forme

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes donnés.

Une telle application est holomorphe dans l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$, avec

$$\Omega = \mathbb{C} \quad \text{si} \quad c = 0 \text{ et } d \neq 0, \quad \Omega = \mathbb{C} \backslash \Big\{ -\frac{d}{c} \Big\} \quad \text{si} \quad c \neq 0.$$

Notation

On notera $\mathbf{H}$ l'ensemble de transformations homographiques et $\mathsf{GL}(2, \mathbb{C})$ le groupe de matrices complexes inversibles d'ordre 2.

EXERCICE 2.6

L'application de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ dans $\mathbf{H}$ qui à une matrice inversible

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

associe la fonction homographique h_A définie par

$$h_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

vérifie

1. $h_{AB} = h_A \circ h_B, \qquad \forall A, B \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$.
2. **Pour tout** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **dans** $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$**,** h_A **est biholomorphe de** Ω **dans** $h_A(\Omega)$**. Sa réciproque est**

$$h_A^{-1} = h_{A^{-1}}$$

et sa dérivée est

$$h_A'(z) = \frac{\mathbf{det}(A)}{(cz + d)^2}.$$

SOLUTION

Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice.

Exemples

1. La transformation de Cayley est définie par

$$h : \quad z \longmapsto \frac{z - i}{z + i}.$$

2. Pour α donné dans le disque unité D, on définit la transformation homographique φ_α par

$$\varphi_\alpha : \quad z \longmapsto \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}.$$

EXERCICE 2.7

Montrer que deux disques ouverts sont conformément équivalents.

SOLUTION

En effet, soient $D(a,r)$ et $D(b,\rho)$ deux disques ouverts de $\mathbb{C}$. Alors l'application

$$z \longmapsto \frac{\rho}{r}(z-a)+b$$

est biholomorphe de $D(a,r)$ sur $D(b,\rho)$.

EXERCICE 2.8

La transformation de Cayley h est biholomorphe du demi-plan supérieur $P = \Big\{z \in \mathbb{C}; \quad Im(z) > 0\Big\}$ dans le disque unité D.
Elle applique de manière homéomorphe la frontière de P sur la frontière de D privé de 1.

SOLUTION

On remarque que $h = h_A$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

h est une fonction holomorphe sur l'ouvert P de $\mathbb{C}$, de plus, on a pour $z \in P$

$$|h(z)|^2 = \frac{|z|^2+1-2Im(z)}{|z|^2+1+2Im(z)} < 1$$

donc $h(P) \subset D$.
D'autre part, pour tout $\omega \in D$, l'équation $h(z) = \omega$ admet la seule solution dans P: $\quad z = h_{A^{-1}}(\omega) = i\Big(\dfrac{1+\omega}{1-\omega}\Big)$, car

$$Im(z) = \frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2} > 0.$$

Par suite h est bijective et holomorphe de P sur D, son inverse

$$h^{-1} = h_{A^{-1}} : \quad z \longmapsto i\Big(\frac{1+z}{1-z}\Big)$$

est aussi holomorphe sur D.
Finalement, montrons qu'on a

$$h(\partial P) = \partial D \backslash \Big\{1\Big\}$$

avec

$$\partial P = \Big\{z \in \mathbb{C}; \quad Im(z) = 0\Big\} : \quad \text{la frontière de} \quad P$$

et

$$\partial D = \Big\{z \in \mathbb{C}; \quad |z| = 1\Big\} : \quad \text{la frontière de} \quad D.$$

En effet, si $z = x \in \mathbb{R}$, on a

$$|h(x)|^2 = \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1 \quad \text{et} \quad h(x) \neq 1$$

donc

$$h(\partial P) \subset \partial D \backslash \Big\{1\Big\}.$$

D'autre part, pour tout $\omega \in \partial D \backslash \Big\{1\Big\}$, l'équation $h(z) = \omega$ admet la seule solution dans ∂P: $\quad z = i\Big(\frac{1+\omega}{1-\omega}\Big)$, car

$$Im(z) = \frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2} = 0.$$

On peut alors conclure que la droite réelle $\partial P = \mathbb{R}$ est homéomorphe au cercle unité privé du point 1.

Exercice 2.9

Pour tout $\alpha \in D$, l'application

$$\varphi_\alpha : \quad z \longmapsto \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

est biholomorphe du disque unité D dans lui même.
Elle applique la frontière de D dans elle même.

Solution

On a

$$\varphi_\alpha(D) \subset D$$

car pour $z \in D$

$$|\varphi_\alpha(z)|^2 = \frac{|z|^2 + |\alpha|^2 - 2Re(\alpha\overline{z})}{1 + |z|^2|\alpha|^2 - 2Re(\alpha\overline{z})} < 1.$$

De même, puisque $-\alpha \in D$, on a

$$\varphi_{-\alpha}(D) \subset D.$$

Mais

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_{-\alpha} = id_D.$$

Donc φ_α est bijective de D dans lui même, et son inverse est $\varphi_{-\alpha}$.
D'autre part, φ_α est holomorphe et conforme sur D (car $\varphi'_\alpha(z) = \dfrac{1-|\alpha|^2}{(1-\overline{\alpha}z)^2} \neq 0, \quad \forall\, z \in D$.)
Enfin, montrons que

$$\varphi_\alpha(\partial D) = \partial D.$$

On a

$$\varphi_\alpha(\partial D) \subset \partial D$$

car $|z| = 1$ implique $|\varphi_\alpha(z)| = 1$.
D'autre part, pour tout $\omega \in \partial D$, l'équation $\varphi_\alpha(z) = \omega$ admet la seule solution dans ∂D: $\quad z = \varphi_{-\alpha}(\omega) = \dfrac{\omega+\alpha}{1+\overline{\alpha}\omega}$, car

$$|z|^2 = \frac{|\omega|^2 + |\alpha|^2 + 2Re(\alpha\overline{\omega})}{1+|\omega|^2|\alpha|^2 + 2Re(\alpha\overline{\omega})} = 1.$$

D'où l'égalité

$$\varphi_\alpha(\partial D) = \partial D.$$

REMARQUE

L'application φ_α (pour $\alpha \in D$) représente un automorphisme du disque unité D, c'est-à-dire une transformation biholomorphe de D dans lui même.
Comme on le verra dans la suite du cours (voir Chapitre 5), tout automorphisme f de D est de la forme $\lambda\varphi_\alpha$, où $|\lambda| = 1$ et $\alpha \in D$.

EXERCICE 2.10

1. **Montrer que la transformation de Cayley**

$$h: \quad z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$$

est une application biholomorphe de

$$\Big\{z \in \mathbb{C}; \quad \mathbf{Re}z > 0 \quad \textbf{et} \quad \mathbf{Im}z > 0\Big\}$$

sur

$$\Big\{z \in D; \quad \mathbf{Im}z < 0\Big\}.$$

2. **Construire alors une application biholomorphe de** $\Big\{z \in \mathbb{C}; \quad \mathbf{Re} z > 0 \quad \mathbf{et} \quad \mathbf{Im} z > 0\Big\}$ **sur** D**.**

SOLUTION

Notons

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Big\{z \in \mathbb{C}; \quad \mathrm{Re} z > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im} z > 0\Big\} \\ \Omega_2 &= \Big\{z \in D(0,1); \quad \mathrm{Im} z < 0\Big\} \end{aligned}$$

1. Il est clair que h est holomorphe sur Ω_1. Il reste à démontrer que h est une bijection de Ω_1 sur Ω_2.
Soit $z \in \Omega_1$. Puisque $|z+i|^2 - |z-i|^2 = 4\mathrm{Im}(z) > 0$, alors $|h(z)| < 1$. Par ailleurs, $\mathrm{Im}(h(z)) = \frac{-2\mathrm{Re}(z)}{|z+i|^2} < 0$. Par suite, $h(z) \in \Omega_2$.
Réciproquement, soit $\omega \in \Omega_2$. L'équation $h(z) = \omega$ d'inconnue z admet comme unique solution $z = i\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right) = i\left(\frac{1-|\omega|^2+2i\mathrm{Im}(\omega)}{|1-\omega|^2}\right)$. Donc $\mathrm{Re}(z) = -2\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{|1-\omega|^2} > 0$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2} > 0$. Par conséquent $z \in \Omega_1$. En conclusion, h est bien une application biholomorphe de Ω_1 sur Ω_2.

2. Pour obtenir une application biholomorphe de Ω_1 sur $D(0,1)$, il suffit de considérer
$$f: \; z \longmapsto \frac{z^2 - i}{z^2 + i}.$$

EXERCICE 2.11

Soit l'application $q : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ **définie par**

$$q(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1}).$$

1. **Montrer que:**

   a) q **est surjective.**

   b) **Pour tout** $c \in \mathbb{C}^*$**, on a:**
   $$q(c) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow c \in \mathbb{R}^* \quad \mathbf{ou} \quad |c| = 1.$$

   c) $q(S^1) = [-1,1]$**, où** $S^1 = \Big\{z \in \mathbb{C}; \quad |z| = 1\Big\}$**.**

2. **Montrer que pour tout ω dans $\mathbb{C}\backslash\{+1,-1\}$ l'ensemble**

$$q^{-1}(\omega) = \Big\{z \in \mathbb{C}^*; \quad q(z) = \omega\Big\}$$

est de cardinal égal à 2.
De plus, si $\omega \in \mathbb{C}\backslash[-1,+1]$, un des points de $q^{-1}(\omega)$ appartient à $D\backslash\{0\}$, l'autre est dans $\mathbb{C}\backslash D$.

3. **Montrer que la restriction de q à $D\backslash\{0\}$ est une application biholomorphe de $D\backslash\{0\}$ sur $\mathbb{C}\backslash[-1,+1]$.**

4. **Montrer que q est une application biholomorphe du demi-plan supérieur**

$$H = \Big\{z \in \mathbb{C}; \quad Im(z) > 0\Big\}$$

sur

$$\mathbb{C}\backslash\Big\{x \in \mathbb{R}; \quad |x| \geq 1\Big\}.$$

Solution

1. a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Il est clair que

$$q(z) = w \Leftrightarrow z^2 - 2wz + 1 = 0.$$

Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, la dernière équation admet deux solutions (distinctes ou confondues) dans $\mathbb{C}^*$ ce qui entraîne que q est surjective.

b) Soit $c \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$\begin{aligned} q(c) \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{q(c)} = q(c) \\ &\Leftrightarrow \bar{c} + |c|^2 c = c + |c|^2 \bar{c} \\ &\Leftrightarrow (c - \bar{c})(|c|^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow c = \bar{c} \text{ ou } |c| = 1 \\ &\Leftrightarrow c \in \mathbb{R}^* \text{ ou } |c| = 1. \end{aligned}$$

c) Soit $z = e^{i\theta} \in S^1$. Alors

$$q(z) = \cos(\theta) \in [-1, 1].$$

Inversement, si $z \in [-1,1]$ alors $z = \cos(\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Par suite $z = q(e^{i\theta})$. On en déduit que $q(S^1) = [-1,1]$.

2. Soit $w \in \mathbb{C}\backslash\{+1,-1\}$. Alors

$$(\spadesuit) \qquad q(z) = w \Leftrightarrow z^2 - 2wz + 1 = 0.$$

Comme $w^2 - 1 \neq 0$ alors cette dernière équation admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}^*$. Supposons maintenant que $w \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$ et posons $q(w) = \{z_1, z_2\}$. Il vient en vertu de ($\spadesuit$) que $z_1 z_2 = 1$, donc $|z_1||z_2| = 1$. Par ailleurs, comme $q(e^{i\theta}) \in [-1,1]$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $|z_1| \neq 1$ et $|z_2| \neq 1$. On en déduit alors que ($|z_1| < 1$ et $|z_2| > 1$) ou ($|z_2| < 1$ et $|z_1| > 1$). D'où le résultat.

3. Soit $z = r\ e^{i\theta} \in D\backslash\{0\}$ où $0 < r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Il est clair que

$$(\spadesuit\spadesuit) \qquad \mathrm{Re}(q(z)) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(q(z)) = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

En utilisant le fait que $\sin\theta = 0 \Longleftrightarrow |\cos\theta| = 1$ il vient

$$\begin{aligned} q(z) \in [-1,1] &\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \leq 1 \\ &\Longleftrightarrow (r-1)^2 \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow r = 1 \end{aligned}$$

Ceci est impossible, donc $q(D\backslash\{0\}) \subset \mathbb{C}\backslash[-1,1]$.
La question 2. montre que q est une bijection de $D\backslash\{0\}$ sur $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$. Comme q est clairement holomorphe sur $D\backslash\{0\}$, on en déduit que q est une application biholomorphe de $D\backslash\{0\}$ sur $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$.

4. Soit $z = r\ e^{i\theta} \in H$ avec $r > 0$ et $\theta \in]0,\pi[$. Supposons que $q(z) \in \mathbb{R}$ et $|q(z)| \geq 1$. Il vient en vertu de $(\spadesuit\spadesuit)$ que $r = 1$ et $q(z) = \cos\theta \in]-1,1[$. Donc
$$q(z) \notin \{x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1\}$$
Ainsi
$$q(H) \subset \mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 1\}$$
Réciproquement : si $z \in \mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 1\}$, alors l'équation $z^2 - 2wz + 1 = 0$ admet une unique solution dans H. Enfin, q est une bijection de H sur $\mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 1\}$.

Exercice 2.12

1.

2. **Soient** $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$ **et**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) = az + b \end{aligned}$$

   •

   i) **Montrer que si** $a \neq 1$, f **est une similitude dont on précisera le centre, le rapport et l'angle.**
   Etudier le cas $a = 1$.

ii) **Quelles sont les images par f des droites**

$$D_0: \ \mathbf{Re}\ z = 0$$

$$D_1: \ \mathbf{Re}\ z = 2$$

iii) **Montrer que f transforme toute droite en une droite et tout cercle en un cercle.**

3. **On pose $g(z) = \dfrac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C}^*$.**

•

i) **Montrer que g transforme toute droite en une droite ou un cercle.**

ii) **Montrer que g transforme tout cercle en un cercle ou une droite.**

4. **Montrer, en utilisant 1) et 2), que la fonction homographique**

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

(avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}; \quad bc - ad \neq 0$)
transforme tout cercle en un cercle ou une droite et toute droite en une droite ou en un cercle.

SOLUTION

1. (i) Le point fixe de f est donné par $z_0 = \frac{b}{1-a}$ (pour $a \neq 1$). Il est clair qu'on peut écrire $f(z) - z_0 = a(z - z_0)$. f est alors une similitude de centre $z_0 = \frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.
Dans le cas où $a = 1$, f est une translation.

ii) Si $z \in D_0$, c'est à dire $z + \bar{z} = 0$, alors

$$Z = f(z) = az + b \Leftrightarrow z = \frac{Z-b}{a}$$

Comme $\mathrm{Re}(z) = 0$, on a

$$\frac{\bar{Z} - \bar{b}}{\bar{a}} + \frac{Z-b}{a} = 0$$

ou encore $a\bar{Z} + \bar{a}Z = \bar{a}b + a\bar{b}$. Par suite

$$f(D_0) = \Big\{ Z \in \mathbb{C}; \quad \mathrm{Re}\ (\bar{a}Z - \bar{a}b) = 0 \Big\}$$

c'est la droite d'équation

$$\mathrm{Re}\ (a)X + \mathrm{Im}(a)Y = \ \mathrm{Re}\ (\bar{a}b)$$

Pour $z \in D_1$, c'est à dire $z + \bar{z} = 1$, on a

$$\begin{aligned} Z = f(z) = az + b \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{Z-b}{a} + \frac{\bar{Z}-\bar{b}}{\bar{a}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \bar{a}Z + a\bar{Z} = |a|^2 + 2 \text{ Re } (\bar{a}b) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} f(D_1) \quad &= \quad \Big\{ Z \in \mathbb{C}; \quad 2 \text{ Re } (a\bar{Z}i\frac{1}{2}) = |a|^2 + 2 \text{ Re } (\bar{a}b) \Big\} \\ &= \quad \Big\{ Z \in \mathbb{C}; \quad \text{Re}(\bar{a}Z - \bar{a}b) = \frac{1}{2}|a|^2 \Big\} \end{aligned}$$

c'est la droite d'équation :

$$\text{Re } (a)X + \text{Im}(a)Y = |a|^2 + 2 \text{ Re } (\bar{a}b)$$

(iii) Puisque f est une similitude ou une translation, elle transforme toute droite en une droite et tout cercle en un cercle. En effet, si D est une droite d'équation $\mu z + \bar{\mu}\bar{z} = \alpha$ (où $\mu \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$) alors

$$\begin{aligned} f(D) \quad &= \quad \Big\{ Z \in \mathbb{C}; \quad \mu(\frac{Z-b}{a}) + \bar{\mu}(\frac{\bar{Z}-\bar{b}}{\bar{a}}) = \alpha \Big\} \\ &= \quad \Big\{ Z \in \mathbb{C}; \quad \text{Re}(\bar{a}\mu Z - \bar{a}b) = \frac{|a|^2\alpha}{2} \Big\}, \end{aligned}$$

par suite $f(D)$ est une droite.
De même, si $C(v_0, R) = \{z = v_0 + Re^{i\theta}; \quad \theta \in [0, 2\pi]\}$ est le cercle de centre $v_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $R > 0$ alors

$$f(C(v_0, R)) = \big\{ Z = f(v_0) + aRe^{i\theta}; \quad \theta \in [0, 2\pi] \big\}$$

donc

$$f(C(v_0, R)) = C(f(v_0), |a|R)$$

le cercle de centre $f(v_0) = av_0 + b$ et de rayon $|a|R$ (pour $a \neq 0$).

2. (i) Si D est la droite d'équation $\mu z + \bar{\mu}\bar{z} = \alpha$ (où $\mu \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$) alors son image par l'inversion g est soit une droite (dans le cas où $\alpha = 0$), soit un cercle (dans le cas où $\alpha \neq 0$) . En effet, si $\alpha = 0$, pour $Z = g(z) = \frac{1}{z}$ et $z \in D$ on a $\mu\bar{Z} + \bar{\mu}Z = 0$ donc $g(D)$ est une droite.
Si $\alpha \neq 0$, pour $z \in D$, $Z = g(z) = \frac{1}{z}$ vérifie $\mu\bar{Z} + \bar{\mu}Z = \alpha|Z|^2$ ou bien

$$|Z|^2 - 2 \text{ Re } (\frac{\bar{\mu}}{\alpha}Z) = 0$$

c'est à dire $|Z - \frac{\mu}{\alpha}| = |\frac{\mu}{\alpha}|$ donc $g(D) = C(\frac{\mu}{\alpha}, |\frac{\mu}{\alpha}|)$ le cercle de centre $\frac{\mu}{\alpha}$ et de rayon $|\frac{\mu}{\alpha}|$.

ii) Puisque l'inversion g est une involution ($g^{-1} = g$) il vient en vertu de ce qui précède, que pour $v_0 \in \mathbb{C}^*$, $g(C(v_0, |v_0|) = D$: c'est la droite d'équation $v_0Z + \bar{v}_0\bar{Z} = 1$. Par suite, l'image par l'inversion g de tout cercle passant par l'origine est une droite.

D'autre part, si $C(v_0, R)$ est un cercle de centre $v_0 = x_0 + iy_0$ et de rayon $R \neq |v_0|$, alors son image par l'inversion g est

$$g(C(v_0, R)) = \left\{ Z = X + iY = \frac{\bar{z}}{|z|^2}; \quad z \in C(v_0, R) \right\}$$

Mais

$$\begin{aligned} z = x + iy \in C(v_0, R) \quad &\Leftrightarrow \quad |z - v_0| = R \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y = R^2 - |v_0|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - 2x_0X + 2y_0Y = (R^2 - |v_0|^2)(X^2 + Y^2) \end{aligned}$$

où

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ et } Y = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Par suite

$$z \in C(v_0, R) \Leftrightarrow \left(X + \frac{x_0}{R^2 - |v_0|^2} \right)^2 + \left(Y - \frac{y_0}{R^2 - |v_0|^2} \right)^2 = \frac{R^2}{(R^2 - |v_0|^2)^2}$$

Par conséquent, lorsque $R \neq |v_0|$, on a

$$g(C(v_0, R)) = C\left(\frac{\overline{v_0}}{|v_0|^2 - R^2}, \frac{R}{||v_0|^2 - R^2|} \right).$$

C'est à dire que l'image d'un cercle ne passant pas par l'origine par l'inversion g, est un cercle.

3. La fonction homographique

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $bc - ad \neq 0$, est holomorphe (et conforme) sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \backslash \{-\frac{d}{c}\}$ pour $c \neq 0$, et $\Omega = \mathbb{C}$ pour $c = 0$.
<u>Si $c = 0$</u> :

$$h(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

La fonction h est alors une similitude, elle transforme d'après 1., toute droite en une droite et tout cercle en un cercle.
<u>Si $c \neq 0$</u>, on a pour $z \neq -\frac{d}{c}$,

$$h(z) = \frac{a}{c} + \frac{1}{c}\left(\frac{bc - ad}{cz + d} \right) = \left(\frac{bc - ad}{c} \right) g(cz + d) + \frac{a}{c}$$

En posant $f_{\alpha,\beta}(z) = \alpha\, z + \beta$, il vient que

$$h = \left(f_{\frac{bc-ad}{c}, \frac{a}{c}} \right) \; o \; g \; o f_{c,d}$$

En utilisant cette formule, 1. et 2., on déduit que la fonction homographique h transforme toute droite en une droite ou un cercle, et tout cercle en un cercle ou une droite.

Chapitre 3

Séries entières

1 Définition

Définition 1.1
Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$. La série de fonctions de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

est appelée série entière (formelle) de centre z_0 et de coefficients a_n.

La notion de série entière est donc une généralisation de la notion de polynôme.

Une série entière est une série de fonctions particulières.

Pour $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ et $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$, la somme et le produit sont définis par

$$f+g = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(z-z_0)^n$$

$$f.g = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{avec} \quad c_n = \sum_{k+m=n} a_k b_m$$

Pour simplifier les notations on va supposer dans ce qui suit que $z_0 = 0$.

Lemme 1.1 (Lemme de convergence d'Abel)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée.
Alors la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

est normalement convergente sur tout disque fermé $\overline{D(0,\rho)}$ de centre 0 et de rayon $\rho < |z_0|$.

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

PREUVE

Il est clair que
$$\sup_{D(0,\rho)} |a_n z^n| = |a_n|\rho^n \leq |a_n||z_0|^n (\frac{\rho}{|z_0|})^n$$
ce qui entraîne aisément le résultat. ■

---

2 Rayon de convergence

Définition 2.1
Etant donnée une série entière $\sum a_n z^n$, on appelle rayon de convergence de cette série
$$R := \sup\{ \quad r \in \mathbb{R}_+ \,; (a_n r^n) \quad \textit{soit bornée} \quad \} \in [0, +\infty].$$

L'existence de R résulte du fait que l'ensemble
$$I := \left\{ \quad r \in \mathbb{R}_+ \,; (a_n r^n) \quad \text{soit bornée} \quad \right\}$$
est non vide puisqu'il contient 0. Si I est borné, R est fini, sinon il est infini.

Si $r_0 \in I$, il vient en vertu du lemme de convergence d'Abel que $[0, r_0] \subset I$. De même, si $r_1 \notin I$ le lemme d'Abel entraîne que $[r_1, +\infty[\cap I = \emptyset$.

Les deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

Théorème 2.1
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit R son rayon de convergence. Alors
i) *Si $R = 0$, la série n'est convergente que pour $z = 0$.*
ii) *Si R est fini et non nul, la série est normalement convergente sur tout disque fermé $\overline{D(0,r)}$ pour tout $r < R$ et est divergente en tout point de $\mathbb{C} \backslash \overline{D(0,R)}$.*
iii) *Si $R = \infty$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé.*

PREUVE

Si $R = 0$, il n'y a rien à démontrer.
Supposons $R > 0$ et soit $0 < r < R$. La suite $|a_n|\rho^n$ est alors bornée pour tout $0 < r < \rho < R$, d'où la convergence normale de la série $\sum a_n z^n$ sur $\overline{D(0,r)}$ par le lemme d'Abel .
Enfin, si R est fini, pour $|z| > R$ la suite $|a_n||z|^n$ est non bornée donc la série $\sum a_n z^n$ est nécessairement divergente. ■

Définition 2.2
Soit R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.
Si $0 < R < \infty$, le disque ouvert $D(0, R)$ est appelé le disque de convergence de la série.
Le cercle $\mathcal{C}(0, R)$ est appelé cercle de convergence.

Si R est fini, on ne sait pas *a priori* si la série $\sum a_n z^n$ converge sur son cercle de convergence.
Les exemples qui suivent, montrent qu'il existe des séries convergeant (ou divergeant) en tout point de ce cercle, ou sur une partie de ce cercle .

Exemples

1. La série géométrique
$$\sum z^n$$
est absolument convergente pour $|z| < 1$, divergente pour $|z| \geq 1$. Son rayon de convergence est donc 1 et elle est divergente en tout point de son cercle de convergence.

2. La série
$$\sum \frac{z^n}{n}$$
converge absolument pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$. En effet, si on pose $u_n(z) = \dfrac{z^n}{n}$ alors
$$\frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = |z| \frac{n}{n+1} \to |z|.$$
Son rayon de convergence est donc $R = 1$. De plus, elle converge sur $\mathcal{C}(0, 1) \backslash \{1\}$. (cf. Lemme d'Abel pour les séries.)

3. La série
$$\sum \frac{z^n}{n^2}$$
a pour rayon de convergence $R = 1$ et elle converge sur $\mathcal{C}(0, 1)$.

On a les différentes caractérisations suivantes du rayon de convergence.

Proposition 2.1
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors on a:
i) $R = R_1 := \sup \Big\{ r \in \mathbb{R}_+;$ *la suite* $(|a_n| r^n)$ *soit bornée* $\Big\}$.

ii) $R = R_2 := \sup \Big\{ r \in \mathbb{R}_+;$ *la suite* $(|a_n| r^n)$ *tend vers* $0 \Big\}$.

iii) $R = R_3 := \sup \Big\{ r \in \mathbb{R}_+;$ *la série* $\sum |a_n| r^n$ *soit convergente* $\Big\}$.

$\boxed{\text{PREUVE}}$

On a clairement

$$R_3 \leq R_2 \leq R_1.$$

Pour achever la preuve de la proposition, il suffit de montrer que $R_1 \leq R_3$.
Soit $r < R_1$, il existe alors ρ tel que $r < \rho < R_1$. Par définition de R_1, la suite $(|a_n|\rho^n)$ est bornée, on en déduit que

$$|a_n| r^n = |a_n| \rho^n (\frac{r}{\rho})^n \leq M (\frac{r}{\rho})^n,$$

M étant un majorant de la suite $(|a_n|\rho^n)$. Par conséquent $\sum |a_n| r^n$ est convergente, donc $r \leq R_3$. Par suite

$$\sup\{r < R_1\} \leq R_3,$$

soit

$$R_1 \leq R_3.$$

■

3 Détermination pratique du rayon de convergence

Proposition 3.1
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont les coefficients sont non nuls à partir d'un certain rang.
i) *Si la suite $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ tend vers ℓ lorsque n tend vers l'infini,*
alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = \dfrac{1}{\ell}$ (avec la convention $R = +\infty$ si $\ell = 0$ et $R = 0$ si $\ell = \infty$).
ii) *De même, si la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers ℓ lorsque n tend vers l'infini, alors $R = \dfrac{1}{\ell}$ avec la même convention.*

PREUVE

Lorsque $\ell = 0$ ou $\ell = \infty$ les règles usuelles de convergence pour les séries permettent de conclure. On va supposer que $0 < \ell < \infty$.

i) Soit $r < \frac{1}{\ell}$ et notons $u_n = |a_n|r^n$.
Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $(\ell + \varepsilon)r < 1$ (ce qui est possible car $\ell r < 1$). Comme $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \to \ell$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \ell + \varepsilon.$$

On en déduit que pour $n \geq N$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= |a_{n+1}|r^{n+1} \\ &= \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} r|a_n|r^n \\ &\leq (\ell + \varepsilon)r|a_n|r^n \\ &\leq u_n. \end{aligned}$$

Par conséquent la suite (u_n) est bornée, ceci prouve par définition de R que $\frac{1}{\ell} \leq R$.
Soit à présent $r > \frac{1}{\ell}$, fixons alors $\varepsilon > 0$ de sorte que $r(\ell - \varepsilon) > 1 + \varepsilon$.
La convergence de $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ vers ℓ assure l'existence d'un entier N tel que pour tout $n \geq N$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq \ell - \varepsilon.$$

On en déduit que pour $n \geq N$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} r u_n \geq (\ell - \varepsilon) r u_n \\ &\geq (1 + \varepsilon) u_n \end{aligned}$$

donc

$$u_{N+k} \geq (1 + \varepsilon)^k u_N \longrightarrow +\infty \quad \text{l}orsque \quad k \longrightarrow +\infty.$$

Par suite la série $\sum u_n$ diverge ce qui entraîne que $\frac{1}{\ell} \geq R$ et achève la preuve de **i)**.

ii) Comme précédemment, soit $r < \frac{1}{\ell}$ et choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $(\ell + \varepsilon)r < 1$.
Notons $v_n = \sqrt[n]{|a_n|}$ et $u_n = |a_n|r^n = (v_n r)^n$.
La suite (v_n) converge vers ℓ lorsque n tend vers l'infini, il existe alors un entier N tel que pour tout $n \geq N$

$$v_n \leq \ell + \varepsilon.$$

On en déduit que pour $n \geq N$

$$u_n \leq ((\ell + \varepsilon)r)^n \to 0.$$

Par conséquent $\dfrac{1}{\ell} \leq R$.
Maintenant si $r > \dfrac{1}{\ell}$, choisissons $\varepsilon > 0$ de sorte que $(\ell - \varepsilon)r > 1$.

De même, pour n assez grand $v_n \geq \ell - \varepsilon$ et donc

$$u_n \geq ((\ell - \varepsilon)r)^n \to \infty$$

ce qui conduit aisément à $\dfrac{1}{\ell} \geq R$ et achève la preuve de **ii)**. ■

Attention, la proposition précédente n'admet pas de réciproque et le fait que le rayon de convergence soit R n'implique pas que la suite $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ ou $\sqrt[n]{|a_n|}$ tende vers $\frac{1}{R}$ comme le montre l'exemple de la série entière $\sum (\sin n)^n z^n$.

En fait R est donné par la formule suivante dite formule de Hadamard.

Proposition 3.2
Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

PREUVE

Si $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$, alors

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N, \quad \forall\, n \geq N, \qquad \sqrt[n]{|a_n|} \leq \ell + \varepsilon.$$

Si $(\ell + \varepsilon)r < 1$, alors

$$u_n = |a_n| r^n = (\sqrt[n]{|a_n|} r)^n \leq ((\ell + \varepsilon)r)^n \to 0, \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

On en déduit que $\dfrac{1}{\ell} \leq R$.
Soit $r > \dfrac{1}{\ell}$, il existe ε tel que $r(\ell - \varepsilon) > 1$.
Comme $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$, il existe une sous-suite (n_k) telle que $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq \ell - \varepsilon$.
Par conséquent la sous-suite $(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} r)^{n_k} \to +\infty$, donc la suite $(a_n r^n)$ n'est pas bornée, r étant arbitrairement choisi $> \dfrac{1}{\ell}$, on a nécessairement $R \leq \dfrac{1}{\ell}$.
D'où la formule de Hadamard. ■

Exemple

Le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} 2^{2n} z^{2n}$$

est $R = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.1

Trouver le rayon de convergence R des séries entières suivantes:

1. $\sum \frac{z^n}{n!}$
2. $\sum \frac{z^n}{n}$
3. $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$
4. $\sum (n^2 + a^n) z^n \quad (a \in \mathbb{C})$
5. $\sum \frac{(n!)^k}{(kn)!} z^n \qquad (k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$
6. $\sum \frac{n!}{2^n (2n)!} z^n$
7. $\sum \sin(n) z^n$
8. $\sum n! z^{n^2}$
9. $\sum 2^n z^{n!}$
10. $\sum a_n z^n$ **où** $a_n = \begin{cases} \alpha^n & \textbf{si } n \textbf{ est pair} \\ \beta^n & \textbf{si } n \textbf{ impair} \end{cases}$ **et** $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$**.**
11. $\sum a_n z^n$ **où** $a_n = \begin{cases} 2 & \textbf{si } n \textbf{ pair} \\ 3 & \textbf{si } n \textbf{ impair} \end{cases}$

Solution

1. La règle de d'Alembert entraîne que $R = +\infty$. En fait on sait que la somme de cette série entière est la fonction exponentielle complexe.
2. La règle de d'Alembert entraîne que $R = 1$.
3. La règle de d'Alembert entraîne que $R = e$.

4. On obtient $R = \text{Min}\left(1, \frac{1}{|a|}\right)$ avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$.

5. La règle de d'Alembert entraîne que $R = k^k$.

6. La règle de d'Alembert entraîne que $R = +\infty$.

7. L'ingalité $|\sin(n)| \leq 1$ entraîne que $R \geq 1$, et la divergence de la série $\sum \sin(n)$ montre enfin que $R = 1$.

8. Posons $u_n(z) = n!\ z^{n^2}$. Pour $z \neq 0$ on a $\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = (n+1)z^{2n+1}$. Il vient que

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \longrightarrow \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad |z| < 1 \qquad +\infty \quad \text{si} \quad |z| \geq 1 \\ \\ +\infty \quad \text{si} \quad |z| \geq 1 \end{cases}$$

Par suite $R = 1$.

9. le même raisonnement que précédemment montre que $R = 1$.

10. On a

$$|a_n|^{1/n} = \begin{cases} |\alpha| \quad \text{si } n \text{ est pair} \qquad |\beta| \quad \text{si } n \text{ est impair} \\ \\ |\beta| \quad \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La règle de Hadamard entraîne que $\dfrac{1}{R} = \text{Max}(|\alpha|, |\beta|)$.

11. La règle de Hadamard entraîne que $R = 1$.

---

4 Holomorphie des séries entières

Théorème 4.1
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière et soit* R *son rayon de convergence.*
Alors la série entière $\sum n a_n z^{n-1}$ *a le même rayon de convergence* R.
De plus, si on note pour $z \in D(0, R)$

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

alors f *est holomorphe et*

$$f'(z) = \sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1}.$$

PREUVE

En désignant respectivement par R et R' les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$, on a

$$|a_n z^n| \leq |n a_n z^{n-1}||z| \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1,$$

ce qui montre que la convergence absolue de $\sum n a_n z^{n-1}$ entraîne celle de $\sum a_n z^n$ et donc $R \geq R'$.
Par ailleurs, si $|z| < R$, en choisissant r de sorte que $|z| < r < R$, on sait qu'il existe M tel que $|a_n r^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On en déduit que

$$|n a_n z^{n-1}| = |n a_n r^n (\frac{z}{r})^{n-1} \frac{1}{r}| \leq n \frac{M}{r} (\frac{|z|}{r})^{n-1}.$$

Comme la série de terme général

$$n k^{n-1}, 0 < k < 1$$

est convergente, la série

$$\sum n a_n z^{n-1}$$

est absolument convergente. D'où $R' \geq R$ et donc $R' = R$.
Soit à présent pour $z, z_0 \in D(0, R)$

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n \geq 1} a_n (z^n - z_0^n)$$

or,

$$z^n - z_0^n = (z - z_0) q_n(z)$$

avec

$$q_n(z) = z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1}.$$

On en déduit que

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0) f_1(z)$$

avec

$$f_1(z) = \sum_{n \geq 1} a_n q_n(z), \quad f_1(z_0) = \sum_{n \geq 1} n a_n z_0^{n-1}.$$

Pour conclure la preuve du théorème, il suffit de montrer que pour z_0 fixé, la série

$$\sum a_n q_n(z)$$

est normalement convergente dans $D(0, r)$, pour tout $r < R$. Or, pour $|z_0| < r < R$

$$\sup_{D(0,r)} |a_n q_n(z)| \leq n |a_n| r^{n-1}.$$

D'où le résultat en vertu de la première partie. ■

Corollaire 4.1
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$*. Alors la fonction*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

est indéfiniment holomorphe sur $D(0, R)$*.*
De plus, pour tout entier k

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k}$$

et en particulier

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \tag{1}$$

Le théorème suivant traite le cas des points du cercle de convergence.

Théorème 4.2
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*. Soit* z_0 *un point du cercle de convergence et supposons que la série* $\sum a_n z_0^n$ *soit convergente de somme* S_0*. Alors, la fonction*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

holomorphe sur $D(0, R)$ *a pour limite* S_0 *lorsque* z *tend vers* z_0 *sur le rayon qui joint l'origine au point* z_0*.*

$\boxed{\text{Preuve}}$

Posons $b_n = a_n z_0^n$ et $z = rz_0, 0 \leq r \leq 1$. Il s'agit donc de prouver que

$$f(rz_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n$$

tend vers

$$f(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

lorsque r tend vers 1 sur l'intervalle $[0, 1]$. Cela résulte du lemme d'Abel suivant.

Lemme 4.1
Soit (a_n) *une suite complexe telle que la série* $\sum a_n$ *soit convergente.*
Alors la série $\sum a_n r^n$ *est uniformément convergente sur* $[0, 1]$*.*

$\boxed{\text{Preuve du Lemme}}$

Nous allons montrer que $\sum a_n r^n$ est uniformément de Cauchy sur $[0, 1]$.
Posons, pour tout entier n,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

On a alors pour $m > n$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} a_k r^k - \sum_{k=0}^{n} a_k r^k &= r^{n+1}a_{n+1} + r^{n+2}a_{n+2} + \cdots + r^m a_m \\
&= r^{n+1}(R_n - R_{n+1}) + \cdots + r^m(R_{m-1} - R_m) \\
&= r^{n+1}R_n + \sum_{k=n+1}^{m-1}(r^{k+1} - r^k)R_k - r^m R_m.
\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un entier N tel que pour tout entier $n > N$, $|R_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (R_n est le reste d'une série convergente), on en déduit que pour m et $n > N$

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=0}^{m} a_k r^k - \sum_{k=0}^{n} a_k r^k| &\leq \frac{\varepsilon}{2}(r^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1}|r^{k+1} - r^k| + r^m) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}(r^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1}(r^k - r^{k+1}) + r^m) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\Big[r^{n+1} + (r^{n+1} - r^{n+2}) + \cdots + (r^{m-1} - r^m) + r^m\Big] \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}(2r^{n+1}) \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

ce qui achéve la preuve du lemme. ■

Exemples

Les applications de ce théorème pour le calcul des sommes des séries sont bien connues.

1. Nous savons que pour $x \in]-1,1[$, on a

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

La série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ étant convergente, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x\to 1}\log(1+x) = \log 2.$$

2. Nous savons également que pour $x \in]-1,1[$, on a

$$Arctgx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

La série alternée $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ étant convergente, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1} Arctgx = \frac{\pi}{4}.$$

5 Les applications exponentielle et logarithme complexes

5.1 L'application exponentielle complexe

Proposition 5.1
La série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

est absolument convergente sur $\mathbb{C}$ *et uniformément convergente sur tout compact de* $\mathbb{C}$.

Définition 5.1
L'application exponentielle complexe est définie par

$$\begin{array}{rcl} \exp : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \exp(z) = e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array}$$

Proposition 5.2
L'application $\exp$ *est une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}$, *sa dérivée est elle même*

$$\exp'(z) = \exp(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

et vérifie

$$\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z'), \quad \forall z, z' \in \mathbb{C}.$$

Comme

$$\exp(0) = 1$$

on obtient

$$(\exp(z))^{-1} = \exp(-z) \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

et puisque

$$\exp(z) = \exp(Re(z))\exp(iIm(z))$$

il vient

$$|\exp(z)| = \exp(Re(z)) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

et donc

$$\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^*.$$

Plus précisement, on a

Proposition 5.3
L'application exponentielle est un homomorphisme du groupe additif $\mathbb{C}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.

La dérivée de l'application exponentielle est partout non nulle, elle induit alors un difféomorphisme local en chaque point de $\mathbb{C}$.

Proposition 5.4
φ la restriction de l'application exponentielle au groupe additif $\mathbb{R}$ est un isomorphisme de groupes, c'est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

$\boxed{\text{Preuve}}$

En effet, $\forall t \in \mathbb{R} \quad \exp(t) \in \mathbb{R}^*$ et comme $\exp(t) = (\exp(\frac{t}{2}))^2$ on obtient $\exp(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
De plus, $\varphi = \exp_{|\mathbb{R}}$ est dérivable de dérivée elle même, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et envoie tout voisinage ouvert de 0 dans un voisinage ouvert de 1 dans $]0, +\infty[$, par suite $\exp(\mathbb{R}) = \{\exp(t), \quad t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $]0, +\infty[$ contenant un voisinage de 1, donc $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.
De plus, puisque $\varphi = \exp_{|\mathbb{R}}$ est injective, c'est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.
■

On a pour tout réel t: $\exp(it)\overline{\exp(it)} = \exp(it)\exp(-it) = 1$ donc $\exp(it) \in S^1 := \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1\}$ et

$$\exp(z) \in S^1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}.$$

L'exponentielle complexe induit un difféomorphisme d'un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{C}$ sur un voisinage ouvert V' de 1 dans $\mathbb{C}^*$, il induit alors une bijection de $V \cap (i\mathbb{R})$ dans $P = V' \cap S^1$. Donc l'application

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & \exp(it) \end{array}$$

est un homomorphisme de groupes surjectif vérifiant

$$\psi(\mathbb{R}) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Big(\exp(it).P \Big)$$

qui est un ouvert de S^1.
D'autre part, son noyau $Ker\psi$ qui est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, différent de $\mathbb{R}$, est de la forme $Ker\psi = 2\pi\mathbb{Z}$.
Il en résulte que ψ est 2π-périodique et $\psi([0, 2\pi]) = \psi(\mathbb{R})$ est un compact de S^1, et par connexité du cercle unité S^1 on a l'égalité

$$\psi(\mathbb{R}) = S^1.$$

Ainsi

Proposition 5.5
L'application

$$\begin{array}{rcl}\psi : \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & \exp(it)\end{array}$$

est un homomorphisme de groupes surjectif, de noyau égal à $2\pi\mathbb{Z}$*.*

L'application exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective, de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$. En particulier l'application $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ induit une bijection de la bande

$$\mathbb{R}\times]-\pi,+\pi[=\{z=x+iy, \quad x\in\mathbb{R} \quad et \quad |y|<\pi\}$$

dans son image. Comme on a $-1 = \exp(i\pi) \neq 1$ alors $\exp(\mathbb{R}+i\pi) =]-\infty, 0[$. L'application exponentielle induit alors un difféomorphisme de la bande $\mathbb{R}\times]-\pi,+\pi[$ dans le plan fendu $\mathbb{C}_- = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$.

5.2 Notion d'angle et notion d'argument

L'application

$$\begin{array}{rcl}\psi : \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & \exp(it)\end{array}$$

étant un homomorphisme de groupes surjectif, de noyau égal à $2\pi\mathbb{Z}$, induit alors par passage au quotient un isomorphisme de groupes $\gamma : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow S^1$ tel que $\gamma \circ \Pi = \psi$ où $\Pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est la projection canonique.

Définition 5.2
Pour z, $z' \in \mathbb{C}^*$ on définit l'angle de z et z' par

$$\textit{angle}(z,z') := \gamma^{-1}\Big(\frac{z/z'}{|z/z'|}\Big)$$

et on définit l'argument d'un nombre complexe z non nul noté arg(z) comme étant

$$\textit{arg}(z) := \textit{angle}(1,z) = \gamma^{-1}\Big(\frac{z}{|z|}\Big) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Un représentant $\theta = \theta(z)$ de la classe arg(z) s'appelle une détermination de l'argument de z.

Dans l'intervalle $]-\pi,+\pi]$, il y a une seule détermination de l'argument de z, appelée détermination principale de l'argument de z, et notée par Arg(z).

L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Arg} : \mathbb{C}^* & \longrightarrow &]-\pi, +\pi] \\ z & \longmapsto & \mathrm{Arg}(z) \end{array}$$

n'est pas continue.
En effet $\mathrm{Arg}(-1) = \pi$ et en notant par $y_n = -\pi + \frac{\pi}{n}$ et $z_n = \exp(iy_n)$ alors $\mathrm{Arg}(z_n) = y_n \to -\pi$ bien que $z_n \to -1$ lorsque $n \to +\infty$.

Par contre, l'application Arg est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, comme étant la partie imaginaire de la fonction réciproque du difféomorphisme, induit par l'exponentielle complexe

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R} \times]-\pi, +\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \\ (x, y) & \longmapsto & \exp(x + iy). \end{array}$$

En fait, on a

$$\Phi^{-1}(z) = \mathrm{Log}|z| + i\mathrm{Arg}(z), \quad \text{pour tout} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

On posera $\Phi^{-1} = \mathrm{Log}$ (application logarithme complexe), c'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ de dérivée la fonction $z \longrightarrow \frac{1}{z}$.

---

6 Détermination du logarithme

Définition 6.1
On appelle détermination du logarithme toute fonction holomorphe l d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0 à valeurs dans $\mathbb{C}$, qui vérifie

$$\exp \circ l = id_\Omega.$$

Les déterminations du logarithme l sont caractérisées par l'équation différentielle

$$l'(z) = \frac{1}{z}, \quad \text{pour tout} \quad z \in \Omega.$$

Exemples

1. Dans le disque ouvert $D(1, 1)$ la série entière

$$l(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$$

est une détermination du logarithme.

2. Dans le domaine $\Omega = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_- = \{z = re^{i\theta}, \quad r > 0 \quad \text{et} \quad |\theta| < \pi\}$ la fonction $l(z) = \text{Log}r + i\theta$
est la détermination principale du logarithme, et on a $l = \text{Log}$.

3. Plus généralement, pour tout réel α, dans le domaine
$$\Omega_\alpha = \{z = re^{i\theta}, \quad r > 0 \quad \text{et} \quad \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\},$$
la fonction $l(z) = \text{Log}r + i\theta$ est une détermination du logarithme.

En général, pour z, $z' \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$,
$$\text{Log}(zz') \neq \text{Log}(z) + \text{Log}(z').$$

Par exemple, si on note $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$, on a
$$\text{Log}(j^2) = \text{Log}(\exp(-\frac{2i\pi}{3})) = -\frac{2i\pi}{3}$$
et
$$2\text{Log}(j) = \frac{4i\pi}{3}.$$

7 Fonctions Trigonométriques et Hyperboliques

7.1 Fonctions Trigonométriques

La fonction $z \mapsto \exp(iz)$ de la variable complexe z est évidemment une fonction entière égale dans tout $\mathbb{C}$ à la série entière
$$\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!}.$$

On peut donc prolonger à $\mathbb{C}$ tout entier les fonctions cosinus et sinus usuelles, en posant, pour tout z complexe, par définition
$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$
et
$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$
On en déduit que
$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$$
et
$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1.$$

Mais il ne faut pas croire que $\cos(z)$ et $\sin(z)$ sont les parties réelle et imaginaire de $\exp(iz)$ pour z complexe!!
Pour $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) = \frac{1}{2}e^{-y}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{y}e^{-ix}$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\cos(z) = \cos(x)\mathsf{ch}(y) - i\sin(x)\mathsf{sh}(\mathsf{y}).$$

On obtient de même

$$\sin(z) = \sin(x)\mathsf{ch}(y) + i\cos(x)\mathsf{sh}(y).$$

D'où les modules

$$|\cos(z)| = \sqrt{\cos^2(x)\mathsf{ch}^2(y) + \sin^2(x)\mathsf{sh}^2(y)}$$

$$|\sin(z)| = \sqrt{\sin^2(x)\mathsf{ch}^2(y) + \cos^2(x)\mathsf{sh}^2(y)}$$

En particulier, pour $x = 0$, on a

$$\cos(iy) = \mathsf{ch}(y) \quad \text{et} \quad \sin(iy) = i\ \mathsf{sh}(y).$$

On notera enfin que les fonctions $\cos(z)$ et $\sin(z)$ sont des fonctions entières égales dans $\mathbb{C}$ tout entier aux séries convergentes

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

et vérifient les relations classiques:

$$\cos(z+2\pi) = \cos(z); \quad \sin(z+2\pi) = \sin(z)$$

$$\cos(z+\pi) = -\cos(z); \quad \sin(z+\pi) = -\sin(z)$$

$$\cos(z+\frac{\pi}{2}) = -\sin(z); \quad \sin(z+\frac{\pi}{2}) = \cos(z)$$

$$\cos(-z) = \cos(z); \quad \sin(-z) = -\sin(z)$$

$$\cos(z+z') = \cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z')$$

$$\sin(z+z') = \sin(z)\cos(z') + \cos(z)\sin(z')$$

Remarquons que

$$\sin(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \pi\mathbb{Z}$$

$$\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \pi(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$$

où on a noté

$$\pi\mathbb{Z} = \{\pi n / n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z} + \frac{1}{2} = \{n + \frac{1}{2} / n \in \mathbb{Z}\}.$$

On définit la tangente et la cotangente d'un nombre complexe z par

$$\mathsf{tg}(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C} \backslash \pi(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$$

$$\mathsf{cotg}(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \quad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C} \backslash \pi\mathbb{Z}.$$

Ces sont des fonctions qui prolongent donc aux valeurs non réelles de z les fonctions connues pour x réel; chacune d'elles est une fonction holomorphe dans l'ouvert où elle est définie.
On a d'après les relations classiques précédentes du cosinus et sinus:

$$\mathsf{tg}(z) = \frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}; \quad \mathsf{cotg}(z) = i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}$$

$$\mathsf{tg}(z+\pi) = \mathsf{tg}(z)$$

$$\mathsf{tg}(z+\frac{\pi}{2}) = -\mathsf{cotg}(z)$$

$$\mathsf{tg}(-z) = -\mathsf{tg}(z)$$

7.2 Fonctions Hyperboliques

On définit les fonctions cosinus hyperbolique (ch) et sinus hyperbolique (sh) sur $\mathbb{C}$ par

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \mathsf{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathsf{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Ce sont deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ qui prolongent les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique usuelles. Elles vérifient

$$(\mathsf{ch})' = \mathsf{sh} \quad \text{et} \quad (\mathsf{sh})' = \mathsf{ch}.$$

Les propriétés suivantes se démontrent facilement (elles sont laissées à titre d'exercices):

- $\sin(iz) = i\,\mathsf{sh}(z)$ et $\cos(iz) = \mathsf{ch}(z)$.
- $\mathsf{ch}^2(z) - \mathsf{sh}^2(z) = 1$.
- $\mathsf{sh}(-z) = -\mathsf{sh}(z)$ et $\mathsf{ch}(-z) = \mathsf{ch}(z)$.
- $\mathsf{ch}(z+z') = \mathsf{ch}(z)\mathsf{ch}(z') + \mathsf{sh}(z)\mathsf{sh}(z')$.
- $\mathsf{sh}(z+z') = \mathsf{sh}(z)\mathsf{ch}(z') + \mathsf{ch}(z)\mathsf{sh}(z')$.

• $|\text{ch}(z)| = \sqrt{\text{sh}^2(x) + \cos^2(y)}$ et $|\text{sh}(z)| = \sqrt{\text{sh}^2(x) + \sin^2(y)}$.
On voit en particulier que

$$|\text{ch}(z)| \to +\infty \quad \text{et} \quad |\text{sh}(z)| \to +\infty \quad \text{lorsque} \quad |\text{Re}(z)| \to +\infty.$$

On définit aussi les fonctions tangente hyperbolique (th) et cotangente hyperbolique (coth) par:

$$\text{th}(z) = \frac{\text{sh}(z)}{\text{ch}(z)} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} \quad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C} \backslash i\pi(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}).$$

$$\text{coth}(z) = \frac{\text{ch}(z)}{\text{sh}(z)} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1} \quad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C} \backslash i\pi\mathbb{Z}.$$

Les fonctions th et coth sont holomorphes dans leur domaine de définition et on a:

$$\text{th}'(z) = \frac{1}{\text{ch}^2(z)} = 1 - \text{th}^2(z).$$

$$\text{coth}'(z) = -\frac{1}{\text{sh}^2(z)} = 1 - \text{coth}^2(z).$$

Exercice 3.2

1. **Montrer que pour** $z = x + i\,y \in \mathbb{C} \backslash \pi\mathbb{Z}$ **on a**

$$\left|\textbf{cotg}(z)\right|^2 = \frac{\cos^2 x + \textbf{sh}^2 y}{\sin^2 x + \textbf{sh}^2 y}.$$

2. **Montrer que pour tout** $z = x + iy$ **dans** $\mathbb{C} \backslash i\pi(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ **on a**

$$|\textbf{th}(z)|^2 = \frac{\textbf{sh}^2(x) + \sin^2(y)}{\textbf{ch}^2(x) - \sin^2(y)}.$$

Solution

1. On a

$$\left|\mathsf{cotg}(z)\right|^2 = \frac{|\cos z|^2}{|\sin z|^2} = \frac{\cos^2 x\,\mathsf{ch}^2 y + \sin^2 x\,\mathsf{sh}^2 y}{\sin^2 x\,\mathsf{ch}^2 y + \cos^2 x\,\mathsf{sh}^2 y}$$
$$= \frac{\cos^2 x\,\mathsf{ch}^2 y + (1-\cos^2 x)\,\mathsf{sh}^2 y}{\sin^2 x\,\mathsf{ch}^2 y + (1-\sin^2 x)\,\mathsf{sh}^2 y} = \frac{\cos^2 x + \mathsf{sh}^2 y}{\sin^2 x + \mathsf{sh}^2 y}$$

2. Il suffit de remarquer que
$$\mathsf{cotg}(i\,z) = \frac{-i}{\mathsf{th} z}$$
et d'appliquer la question précédente en changeant x par $-y$ et y par x.

EXERCICE 3.3

1. **Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes:**
   a) $\sum (a_n)^p z^n \quad (p \in \mathbb{N}, \quad p \geq 2)$**;**
   b) $\sum a_n z^{np} \quad (p \in \mathbb{N}, \quad p \geq 2)$**;**
   c) $\sum \dfrac{a_n}{1+|a_n|} z^n$.
2. a) **Montrer que**
$$\forall\ x \in [-1/2, 1/2], \quad |\sin(\pi x)| \geq 2|x|.$$
   b) **En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a**
$$\left|\frac{1}{\sin(n\pi\sqrt{3})}\right| \leq n\sqrt{3} + \frac{1}{4}.$$
   c) **Déterminer alors le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$.**

SOLUTION

1. a) La règle de Hadamard entraîne que le rayon de convergence de la série $\sum (a_n)^p z^n$ est égal à R^p.

b) En écrivant $z^{np} = (z^p)^n$ on voit que le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^{np}$ est $R^{1/p}$.

c) Posons $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$ et notons R' le rayon de convergence de la série $\sum b_n z^n$. Comme $|b_n| \leq 1$ et $|b_n| \leq |a_n|$, on a nécessairement $R' \geq$ Max$(1, R)$. Nous allons montrer que $R' =$ Max$(1, R)$. Supposons que $R' >$ Max$(1, R)$. En particulier $R' > 1$ et donc $\sum b_n$ converge. Par suite $b_n \longrightarrow 0$ et comme $|a_n| = \frac{|b_n|}{1-|b_n|}$ alors $a_n \longrightarrow 0$, d'où $|a_n| \sim |b_n|$. Ceci entraîne que $R = R'$. D'où la contradiction puisque $R' > R$.

2. a) Rappelons que

$$\forall \ x \in [-1/2, 1/2], \quad |\sin(\pi x)| \geq 2|x|.$$

b) Fixons un entier $n \geq 1$. Il existe un entier positif m tel que

$$-1/2 \leq n\sqrt{3} - m \leq 1/2$$

Ecrivons alors

$$|\sin(n\pi\sqrt{3})| = |\sin \pi(n\sqrt{3} - m)| \geq 2|n\sqrt{3} - m| = 2\frac{|3n^2 - m^2|}{n\sqrt{3} + m}.$$

Pour conclure il suffit de remarquer que

$$|3n^2 - m^2| \geq 1 \quad \text{et} \quad m \leq n\sqrt{3} + 1/2$$

c) Notons par R le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$.

L'encadrement

$$1 \leq \left|\frac{1}{\sin(n\pi\sqrt{3})}\right| \leq n\sqrt{3} + \frac{1}{4}$$

entraîne que $R = 1$.

$\boxed{\text{Exercice 3.4}}$

Soit α un réel donné.

1.

2. **Quel est le rayon de convergence R de la série entière**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{1 + n^\alpha} z^n$$

3. **Etudier, selon le réel α, la convergence de cette série entière sur le cercle $|z| = R$.**

SOLUTION

1.
2. En notant par $a_n = \frac{\log n}{1+n^\alpha}$ où $n \geq 1$, on a
$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{\log(1+n)}{\log n} \frac{1+n^\alpha}{1+(1+n)^\alpha}$$
qui tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ est alors $R = 1$.
3. Pour $\alpha \leq 0$ et $|z| = 1$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} |z^n \frac{\log n}{1+n^\alpha}| = +\infty,$$
la série entière est divergence sur le cercle unité.

Pour $\alpha > 1$ posons $\alpha = 1 + 2\beta$ où $\beta > 0$. On a
$$a_n = \frac{\log n}{1+n^\alpha} = \frac{1}{n^{1+\beta}} \frac{\log n}{(1+n^\alpha)n^{-1-\beta}} = 0(\frac{1}{n^{1+\beta}}), \quad n \to +\infty$$
d'où la convergence uniforme de la série entière sur tout le cercle unité.

Pour $0 < \alpha \leq 1$, posons $f(t) = \frac{\log t}{1+t^\alpha}, t > 0$ on a
$$f'(t) = \frac{1}{t(1+t^\alpha)} - \frac{\alpha t^{\alpha-1}\log t}{(1+t^\alpha)^2} = \frac{1+t^\alpha(1-\alpha\log t)}{(1+t^\alpha)^2},$$
donc $f'(t) \leq 0$ pour $t > 0$ assez grand . En posant $z = e^{i\theta}$, on a

Pour $\theta \neq 0$ (modulo 2π) les sommes partielles $S_{p,q} = \sum_{n=p}^{q} e^{in\theta}$ (où $q \geq p$) sont bornées en p et q, et $f(\pi) = a_n$ tend vers zéro en décroissant : par le critère d'Abel, la série convergence sur le cercle unité privé de 1.

Pour $\theta = 0$ (modulo 2π) $f(n) = a_n \wedge \frac{\log n}{n^\alpha}$ à l'infini, et $\frac{\log n}{n^\alpha}$ est le terme général d'une série de Bertrand divergente (car $0 < \alpha \leq 1$), d'où la convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ sur le disque unité fermé privé de 1.

EXERCICE 3.5

On pose , pour tout entier $n \geq 0$, $a_n = \int_0^1 (tgx)^n dx$.

1. **Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$**
2. **Calculer la somme**

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad \textbf{pour } |z| < R$$

SOLUTION

1. On sait, par la formule d'Alembert, que

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim} |a_n|^{1/n}$$

puisqu'on a $|a_n|^{1/n} \leq tg1$ donc $R \geq \frac{1}{tg1}$ D'autre part pour $z = \frac{1}{tg1}$, la somme partielle

$$S_p(\frac{1}{tg1}) = \sum_{n=0}^{q} (\int_0^1 (\frac{tgx}{tg1})^n dx)$$

s'écrit, par le changement de variable $y = \frac{tgx}{tg1}$ où $x \in [0,1]$

$$_p(\frac{1}{tg1}) = \int_0^1 \frac{tg1(1-y^{p+1})dy}{(1-y)(1+y^2+tg1)}$$

qui , par le théorème de convergence dominé de Lebesgue, convergence lorsque p tend vers $+\infty$ vers l'intégrale divergente $tg1 \int_0^1 \frac{dy}{(1-y)(1+y^2tg^21)}$ cela montre que le rayon de donvergence R est inférieur ou égal à $\frac{1}{tg1}$, et par l'inégalité $R \geq \frac{1}{tg1}$ on a l'inégalité

$$R = \frac{1}{tg1}$$

2. Calcul de la somme $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $|z| < \frac{1}{tg1}$ on a pour tous $x \in [0,1]$ et $|z| < tg1$ '$|z^n tg^n x| \leq |z|^n tg^n 1 < 1$. La s'erie converge alors normalement et donc uniformément par rapprot à x dans l'intervalle $[0,1]$ vers la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-ztg1}$. Par conséquent on a :

$$S(z) = \int_0^1 \frac{dx}{1-ztgx} \qquad \text{pour } |z| < \frac{1}{tg1}.$$

Cette intégrale se calcule en posant $v = tgx$ pour $x \in [0,1]$, donc

$$S(z) = \int_0^{tg1} \frac{dv}{(1+v^2)(1-zv)} \qquad \text{pour } |z| < \frac{1}{tg1}$$

Par décomposition en éléments simples, ceci conduit à

$$S(z) = \frac{1}{1+z^2} \int_0^{tg1} \left[\frac{z^2}{1-zv} + \frac{zv+1}{1+v^2} \right] dv$$

ou bien

$$S(z) = \frac{1}{1+z^2} [1 - z\log(\cos 1 - z\sin 1)]$$

pour $|z| < \frac{1}{tg1}$ (où $\log$ désigne la détermination principale du logarithme).

Chapitre 4

Calcul intégral complexe

1 Définitions

Définition 1.1
On appelle chemin de $\mathbb{C}$, une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue et C^1 par morceaux, $\gamma(a)$ est appelé l'origine du chemin γ et $\gamma(b)$ son extrémité.
Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, le chemin γ est dit fermé.
L'image de γ dans $\mathbb{C}$ notée $|\gamma|$ est appelée trace de γ.
On confond souvent un chemin avec sa trace.

Exemples

1. Pour tous $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, le segment $[z_0, z_1]$ est un chemin de classe C^1. On peut le paramètrer comme suit

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,1] & \longrightarrow & [z_0, z_1] \subset \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1 \end{array}$$

2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, le chemin

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = z_0 + re^{it} \end{array}$$

est une paramétrisation du cercle de centre z_0 et de rayon r.

Définition 1.2
Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin de $\mathbb{C}$. On désigne par γ^- le chemin parcouru dans le sens inverse

$$\begin{array}{rcl} \gamma^- : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \gamma^-(t) = \gamma(a+b-t). \end{array}$$

Définition 1.3
Soit γ un chemin de classe C^1 de $\mathbb{C}$ et $f \in C(|\gamma|)$ l'ensemble des fonctions continues sur $|\gamma|$ la trace de γ. On appelle intégrale de f le long de γ le nombre complexe défini par

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{1}$$

Si γ est C^1 par morceaux et $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ telle que

$$\text{pour} \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad \gamma_k = \gamma_{|]a_k,a_{k+1}[} \quad \text{soit de classe} \quad C^1,$$

alors pour tout $f \in C(|\gamma|)$, on pose

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

Vu la remarque précédente, il suffit de travailler sur les chemins de classe C^1. Il est clair qu'on peut voir γ comme un paramètrage de sa trace $|\gamma|$.

$\boxed{\text{EXERCICE 4.1}}$
Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\gamma^-} z^2\, dz, \quad I_2 = \int_{\gamma^-} |z^2|\, dz, \quad I_3 = \int_{\gamma^-} z^2\, |dz|, \quad I_4 = \int_{\gamma^-} |z^2|\, |dz|,$$

où γ^- est le demi cercle $z = e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$ orienté négativement.

$\boxed{\text{SOLUTION}}$

Pour $z = e^{i\theta} \in \gamma^-$, on a

$$|dz| = |ie^{i\theta}d\theta| = |d\theta| = -d\theta.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_\pi^0 e^{i2\theta}\, i\, e^{i\theta}\, d\theta = \left[\frac{1}{3}e^{i3\theta}\right]_\pi^0 = \frac{2}{3}, \\
I_2 &= \int_\pi^0 |e^{i2\theta}|\, i\, e^{i\theta}\, d\theta = \left[e^{i\theta}\right]_\pi^0 = 2, \\
I_3 &= \int_\pi^0 e^{i2\theta}\, |i\, e^{i\theta}\, d\theta| = \int_\pi^0 -e^{i2\theta}\, d\theta = \left[\frac{i}{2}\, e^{i2\theta}\right]_\pi^0 = 0, \\
I_4 &= \int_\pi^0 |e^{i2\theta}|\, |i\, e^{i\theta}\, d\theta| = \int_\pi^0 -d\theta = \pi.
\end{aligned}$$

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

Exercice 4.2

1. **Calculer** $\int_\gamma f(z)dz$ **où** $f(z) = x^2 + iy^2$ **et** γ **est le chemin dans** $\mathbb{C}$ **donné par** $\gamma(t) = t^2 + it^2$ **pour** $0 \leq t \leq 1$**.**
2. **Même question pour**

   i) $f(z) = \frac{1}{z}$ **et** $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$
   ii) $f(z) = z - i$ **et** $\gamma(t) = t + it^2, -1 \leq t \leq 1$

Solution

1.

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_0^1 (t^4 + it^4)(2t + 2it)dt \\ &= \int_0^1 4it^5 dt = \frac{2}{3}i\end{aligned}$$

2. i)

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i$$

ii)

$$\begin{aligned}\int_\gamma (z - i)dz &= \int_{-1}^1 (t + it^2 - i)(1 + 2it)dt \\ &= \int_{-1}^1 [(3t - 2t^3) + i(3t^2 - 1)]dt \\ &= 0\end{aligned}$$

Définition 1.4
$\tilde{\gamma}$ est dit un reparamétrage de $|\gamma|$ s'il existe un difféomorphisme $\varphi : \tilde{I} \to I$ vérifiant $\varphi'(t) > 0$ pour tout $t \in \tilde{I}$ et tel que $\tilde{\gamma} = \gamma \, o \, \varphi$.

La condition $\varphi'(t) > 0$ signifie intuitivement qu'on parcourt $|\gamma|$ dans le même sens par les deux paramétrages.

γ et $\tilde{\gamma}$ sont alors dits deux chemins équivalents.

Il est clair qu'en vertu du théorème de changement de variables on a le résultat d'indépendance suivant.

Proposition 1.1
Si γ et $\tilde{\gamma}$ sont deux chemins de classe C^1 équivalents alors pour tout $f \in C(|\gamma|)$:=ensemble des fonctions continues sur $|\gamma|$,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz.$$

Le théorème suivant montre la connection entre les intégrales le long des chemins complexes et les intégrales curvilignes réelles.

Théorème 1.1
Soit

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = x(t) + iy(t) \end{array}$$

un chemin de classe C^1 et $f = u + iv \in C(|\gamma|)$ alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (vdx + udy). \tag{2}$$

$\boxed{\text{Preuve}}$

Comme $f = u + iv$ et $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ alors

$$f(z(t))z'(t) = [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))][x'(t) + iy'(t)]$$

d'où (2). ■

Comme les intégrales le long des chemins complexes se ramènent à des intégrales sur des intervalles réels, on obtient aisément les propriétés suivantes.

Proposition 1.2
Soit γ un chemin de $\mathbb{C}$ de classe C^1. Alors pour tous $f, g \in C(|\gamma|)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\int_\gamma (f + \lambda g)dz = \int_\gamma f dz + \lambda \int_\gamma g dz. \tag{3}$$

$$\int_{\gamma^-} f dz = -\int_\gamma f dz. \tag{4}$$

Définition 1.5
Si

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [a,b] & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \gamma(t) = x(t) + iy(t) \end{array}$$

est un chemin de classe C^1 alors l'intégrale réelle

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \tag{5}$$

est appelée longueur de γ.

Il est clair que la longueur d'un chemin est indépendante du paramétrage choisi.

Exemples

1. Comme un paramétrage du segment $[z_0, z_1]$ est donné par

$$z(t) = (1-t)z_0 + tz_1, \quad t \in [0,1],$$

sa longueur

$$L([z_0, z_1]) = \int_0^1 |z'(t)|dt = \int_0^1 |z_1 - z_0|dt = |z_1 - z_0|.$$

2. Comme un paramétrage du cercle $\mathcal{C}(z_0, r)$ est donné par

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

sa longueur

$$L(\mathcal{C}(z_0, r)) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

L'estimation standard suivante est trés utile.

Proposition 1.3
Pour tout chemin de classe C^1 et toute fonction f de $C(|\gamma|)$, on a

$$\left|\int_\gamma f dz\right| \leq |f|_\gamma L(\gamma) \tag{6}$$

où

$$|f|_\gamma = \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|.$$

2 Intégration d'une limite uniforme

Grâce à l'estimation standard (6), on peut intervertir les signes intégrales et limites.

Théorème 2.1
Soit γ un chemin de classe C^1 et (f_n) une suite de fonctions de $C(|\gamma|)$ qui converge uniformément sur $|\gamma|$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n dz = \int_\gamma (\lim_{n\to\infty} f_n) dz. \tag{7}$$

$\boxed{\text{Preuve}}$

La suite (f_n) converge uniformément sur $|\gamma|$, sa limite f appartient à $C(|\gamma|)$. Par ailleurs, il vient en vertu de l'estimation standard (6)

$$\left|\int_\gamma f_n dz - \int_\gamma f dz\right| \leq |f_n - f|_\gamma L(\gamma) \to 0$$

ce qui achéve la preuve du théorème. ■

Théorème 2.2
Soit γ un chemin de classe C^1 et (f_n) une suite de fonctions de $C(|\gamma|)$.
Si la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $|\gamma|$, alors

$$\sum_n \int_\gamma f_n dz = \int_\gamma (\sum_n f_n) dz. \tag{8}$$

A titre d'application, voir la formule de Gutzmer au Chapitre 5.

3 Intégrales dépendant d'un paramètre

Le théorème suivant est trés important et peut être vu, en vertu des équations de Cauchy Riemann, comme un corollaire du théorème général des intégrales dépendant d'un paramètre.

Théorème 3.1
Soit E un espace mesuré, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\varphi : E \times \Omega \to \mathbb{C}$ une application telle que

•

i) Pour presque tout $t \in E$, $\quad z \mapsto \varphi(t,z)$ est holomorphe sur Ω.

ii) Pour tout $z \in \Omega$, $\quad t \mapsto \varphi(t,z)$ est mesurable.

iii) Pour tout compact K de Ω, il existe une fonction positive intégrable g_K sur E telle que

$$|\varphi(t,z)| \leq g_K(t), \quad \forall\ (t,z) \in E \times K.$$

Alors

i) Pour tout $z \in \Omega$, $\quad t \mapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(t,z)$ est intégrable sur E.

ii) $F : z \mapsto \displaystyle\int_E \varphi(t,z)dt$ est holomorphe sur Ω et l'on a

$$F'(z) = \int_E \frac{\partial \varphi}{\partial z}(t,z)dt. \tag{9}$$

$\boxed{\text{Preuve}}$

Soit $z_0 \in \Omega$ et $R_0 > 0$ tels que $K = \overline{D(z_0,R_0)} \subset \Omega$. En posant $r = \dfrac{1}{2}R_0$, il vient en vertu des estimations de Cauchy

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial z}(t,z)\right| \leq \frac{1}{r} g_K(t), \quad \forall\ (t,z) \in E \times D(z_0,r).$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(t,z) = \lim_n \left[n[\varphi(t,z+\frac{1}{n}) - \varphi(t,z)]\right]$$

et par suite, pour tout $z \in \Omega$, l'application qui à t associe $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(t,z)$ est mesurable comme limite d'une suite de fonctions mesurables.
Il s'ensuit que, pour tout $z \in \Omega$, les applications $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(t,z)$ et $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t,z) = i\frac{\partial \varphi}{\partial z}(t,z)$ sont mesurables et dominées par $\frac{1}{r}g_K(t)$ pour tout $z \in D(z_0,r)$.
Comme pour tout $t \in E$, les applications $z \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,z)$ et $z \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t,z)$ sont continues, on en déduit que $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ existent et sont continues sur $D(z_0,r)$ avec

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \int_E \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,z)dt$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z) = \int_E \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t,z))dt.$$

D'une manière évidente, F est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0 et

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z_0) = i\frac{\partial F}{\partial x}(z_0),$$

ce qui assure que F est holomorphe en z_0 avec

$$F'(z_0) = \int_E \frac{\partial \varphi}{\partial z}(t,z_0)dt.$$

■

Exercice 4.3

Soit Γ la fonction définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt.$$

Montrer que Γ est holomorphe sur $\Omega = \{\, z \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{Re} z > 0\,\}$.

Solution

On a pour $t \in]0,+\infty[$, $\; t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$. Notons que

$$|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}e^{+\mathrm{Re} z-1},$$

donc si $0 < \alpha < \text{Re}z < \beta$ alors

$$|e^{-t}t^{z-1}| \leq g(t)$$

avec

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t}t^{\beta-1} & \text{si } t \geq 1 \\ t^{\alpha-1} & \text{si } 0 < t < 1. \end{cases}$$

On a $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge (puisque $\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$ converge et $\int_1^\infty e^{-t}t^{\beta-1}dt$ converge pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$). Cela prouve (en appliquant le théorème 3.1) que la fonction Γ est holomorphe dans l'ouvert $\{\, z \in \mathbb{C}, \quad \text{Re}z > 0 \,\}$ de $\mathbb{C}$. De plus, on peut dériver sous le signe intégrale, et on a pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que Re$z > 0$

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^\infty e^{-t}(\log t)^n t^{z-1}dt.$$

---

4 Théorème intégral de Cauchy

Théorème 4.1 (Théorème de Cauchy)
Soit f une fonction holomorphe sur Ω et K un compact de Ω. On suppose que sa frontière ∂K est un chemin C^1 par morceaux orienté de manière positive.
Alors

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 0. \tag{10}$$

PREUVE

Supposons d'abord que f est de classe C^1 (ce qui est une hypothèse superflue puisqu'on verra par la suite que toute fonction holomorphe est indéfiniment holomorphe).
Alors on a en vertu de la formule de Green-Riemann

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} f(z)dz &= \int_{\partial K} f(z)(dx + idy) \\ &= \int\int_K \left(i\frac{\partial f}{\partial x}(z) - \frac{\partial f}{\partial y}(z)\right) dxdy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dans le cas général, on sait que f est limite uniforme d'une suite de fonctions holomorphes de classe C^1. Le résultat découle alors de la première partie et du Théorème 2.1. ∎

---

5 Formule intégrale de Cauchy

Théorème 5.1
Soit f une fonction holomorphe sur Ω et $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$. Alors pour tout $z \in D(z_0,r)$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \tag{11}$$

$\boxed{\text{Preuve}}$

En désignant par $K_\varepsilon = \overline{D(z_0,r)} \backslash D(z,\varepsilon)$ où ε est assez petit, il est clair que K_ε est un compact de Ω et que la fonction

$$h(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

est holomorphe au voisinage de K_ε. En orientant ∂K_ε de manière positive, il vient que

$$\int_{\partial K_\varepsilon} h(\zeta)d\zeta = \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \int_{\mathcal{C}(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Par le théorème de Cauchy, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \\
&= f(z)
\end{aligned}$$

en vertu de la continuité de f. ■

Si f est une fonction de classe C^1 sur l'ouvert Ω et $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$, alors pour tout $z \in D(z_0,r)$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\int\int_{D(z_0,r)} \frac{\overline{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z}dxdy.$$

---

6 Le développement des fonctions holomorphes en séries entières

Théorème 6.1
Soit f une fonction holomorphe sur Ω et soit $z_0 \in \Omega$. On pose

$$R = \sup\{r > 0; \quad D(z_0,r) \subset \Omega\}.$$

Alors pour tout $z \in D(z_0, R)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Preuve

On peut supposer que $z_0 = 0$ en considérant la fonction $\tilde{f}(z) = f(z_0 + z)$. Soit à présent $0 < r < R$, on a en vertu de (11) pour $|z| < r$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Puisque $|\frac{z}{\zeta}| < 1$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\Big(\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}\Big) = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{\zeta})^n.$$

Comme la série $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{\zeta})^n$ est normalement convergente sur $\mathcal{C}(0, r)$ (son terme général est majoré par $\frac{|z|^n}{r^{n+1}}$), il vient en vertu de (8) que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

Ce qui achève la preuve du théorème. ■

Corollaire 6.1
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pour $z_0 \in \Omega$ et $0 < r <$ dist(z_0, Ω^c), on a

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \tag{12}$$

Preuve

On sait d'après le théorème précédent que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

où

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

D'où l'identité (12). ■

EXERCICE 4.4

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que

$$|f(z)| \leq \alpha + \beta |z|^k \quad \textbf{pour tout} \quad z \in \mathbb{C},$$

où α, β et k sont des réels positifs donnés. Montrer que f est un polynôme de degré au plus la partie entière de k.

SOLUTION

En effet, nous écrivons

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

On en déduit que

$$|a_n| \leq \frac{\alpha + \beta r^k}{r^n} \quad \forall r > 0.$$

Ceci entraîne que $a_n = 0$ dès que $n > k$ et par suite le résultat.

Corollaire 6.2
Soit f une fonction entière. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Il vient, de ce qui précède, les équivalences suivantes.

Théorème 6.2
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est holomorphe dans Ω.

ii) Pour tout disque fermé $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$, *on a pour tout* $z \in D(z_0,r)$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

iii) f *est développable en série entière au voisinage de chaque point de* Ω.

---

7 Singularité artificielle et théorème de prolongement de Riemann

Définition 7.1
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{a\}), a \in \Omega$. *Le point* a *est dit une singularité artificielle de* f *s'il existe* $r > 0$ *tel que* f *soit bornée sur* $D(a,r)\backslash\{a\}$.

Théorème 7.1
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{a\}), a \in \Omega$. *Si* a *est une singularité artificielle,*
alors f *peut être prolongée en une fonction holomorphe sur* Ω.

$\boxed{\text{PREUVE}}$

Considérons la fonction g sur Ω définie par

$$\begin{cases} g(z) & = (z-a)^2 f(z), \quad z \in \Omega\backslash\{a\} \\ g(a) & = 0. \end{cases}$$

Il est clair que g est holomorphe pour $z \in \Omega\backslash\{a\}$ et on a

$$\begin{aligned} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} &= \frac{h^2 f(a+h)}{h} \\ &= hf(a+h) \to 0 \quad \text{l}orsque \quad h \to 0 \end{aligned}$$

car $f(a+h)$ reste bornée, pour h assez petit.
Par conséquent, g est holomorphe sur Ω et vérifie $g(a) = g'(a) = 0$. Il vient alors en vertu du théorème 6.1 que pour z assez proche de a,

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Posons alors

$$\begin{cases} f^*(z) & = f(z) \qquad \text{si} \quad z \in \Omega\backslash\{a\} \\ f^*(a) & = c_2. \end{cases}$$

On a alors pour z assez proche de a,

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(z-a)^n.$$

Il est alors clair que f^* est un prolongement holomorphe de f à Ω. ■

EXERCICE 4.5

Soit $r > 0, \Omega$ un voisinage ouvert du disque fermé $\overline{D(0,r)}, f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et a, b deux points différents de $D(0,r)$.

1. **Exprimer**
$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$$
en fonction de
$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)dz}{z-a}$$
et
$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z-b}dz$$

2. **En déduire le théorème de Liouville.**

SOLUTION

1. On a
$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right].$$
D'où
$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left[\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z-a}dz - \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)dz}{z-b}\right].$$

2. On a
$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a) \quad \text{et} \quad \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z-b}dz = 2\pi i f(b).$$
Par suite
$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{2\pi i}{a-b}[f(a)-f(b)].$$

Supposons que f est holomorphe et bornée sur tout le plan complexe par une constante positive M. Pour tout réel $r > Max(|a|, |b|)$ on a

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}\Big| &= \frac{2\pi}{|a-b|}|f(a)-f(b)| \\ &\leq M\int_0^{2\pi} \frac{rd\theta}{(r-|a|)(r-|b|)} = \frac{2\pi r M}{(r-|a|)(r-|b|)}.\end{aligned}$$

D'où

$$|f(a)-f(b)| \leq \frac{Mr|a-b|}{(r-|a|)(r-|b|)}.$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on conclut que $f(a) = f(b)$ c'est à dire f est constante sur tout $\mathbb{C}$ d'où le théorème de Liouville.

EXERCICE 4.6

Calculer l'intégrale

$$I(a,b) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$$

où a et b sont deux réels strictement positifs.

SOLUTION

Soit E l'ellipse orienté positivement de paramétrisation $(x = a\cos\theta, y = b\sin\theta)$ où $\theta \in [0, 2\pi]$. On a

$$\int_E \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin\theta + ib\cos\theta}{a\cos\theta + ib\sin\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(b^2-a^2)\sin\theta\cos\theta + iab}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

dont la partie imaginaire est $ab\,I(a,b)$.
Soit maintenant C le cercle orienté positivement de paramétrisation $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ où $\theta \in [0, 2\pi]$ et $0 < r < min(a, b)$. Alors

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{-r\sin\theta + ir\cos\theta}{r\cos\theta + ir\sin\theta}\,d\theta = 2\pi\,i$$

Puisque la fonction $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a

$$\int_E \frac{dz}{z} = \int_C \frac{dz}{z} = 2\pi\,i.$$

En égalisant les parties réelles et imaginaires,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta\,\cos\theta d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} &= 0,\\ I(a,b) &= \frac{2\pi}{ab}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{EXERCICE } 4.7}$

1. **Calculer par la formule intégrale de Cauchy**
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz.$$

2. **En déduire la valeur de l'intégrale**
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\,\cos(\sin\theta)\,d\theta.$$

$\boxed{\text{SOLUTION}}$

1. En appliquant la formule intégrale de Cauchy pour $f(z) = e^z$, $z_0 = 0$ et $n = 0$, on a
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi\,i.$$

2. En prenant la paramétrisation $z = e^{i\theta}$ du cercle unité, on obtient
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz = i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta + i\sin\theta}\,d\theta.$$
D'où, par égalisation des parties réelles et imaginaires,
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\,\sin(\sin\theta)\,d\theta = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\,\cos(\sin\theta)\,d\theta = 2\pi.$$

Chapitre 5

Théorèmes fondamentaux

1 Zéros d'une fonction holomorphe et principe du maximum

Théorème 1.1
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante, alors

i) $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f n'a pas de point d'accumulation dans Ω.

ii) Si $a \in Z(f)$, il existe $m \in \mathbb{N}\,, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tels que

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \tag{1}$$

avec $g(a) \neq 0$.

$\boxed{\text{Preuve}}$

Soit $a \in Z(f)$, on sait qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in D(a,r)$

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-a)^j.$$

Comme f est non constante, il existe j tel que $c_j \neq 0$. En désignant par m le plus petit entier j tel que $c_j \neq 0$, on a pour $z \in D(a,r)$

$$f(z) = \sum_{j=m}^{\infty} c_j (z-a)^j \quad \text{avec} \quad c_m \neq 0.$$

Donc, pour $z \in D(a,r)$

$$f(z) = (z-a)^m \sum_{j=m}^{\infty} c_j (z-a)^{j-m}.$$

Posons alors

$$\begin{cases} g(z) &= \dfrac{f(z)}{(z-a)^m} \text{ sur } \Omega \backslash \{a\} \\ g(z) &= \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m} (z-a)^k \quad \text{sur} \quad D(a,r). \end{cases}$$

La fonction g ainsi définie est holomorphe sur Ω car $g \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{a\}), g \in \mathcal{H}(D(a,r))$ et les deux définitions de g coincident sur $D(a,r) \cap (\Omega\backslash\{a\})$. On en déduit (1) ce qui assure que $Z(f)$ n'a pas de points d'accumulation dans Ω. ■

Exemple 1

Les zéros d'une fonction C^∞ à variable réelle ne sont pas nécessairement isolés. Par exemple, la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) & = \exp(-\frac{1}{x^2})\sin(\frac{1}{x}), \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ f(0) & = 0 \end{cases}$$

est une fonction C^∞ et 0 est un point d'accumulation de $Z(f)$ puisque la suite

$$(\frac{1}{\pi n}), \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

est une suite de zéros de f.

Exemple 2

L'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe f sur Ω peut admettre un point d'accumulation sur la frontière de Ω. Par exemple, la fonction

$$f(z) = \sin(\frac{z+1}{z-1})$$

appartient à $\mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{1\})$ et $Z(f) = \{\frac{n\pi+1}{n\pi-1}, n \in \mathbb{Z}\}$ admet 1 comme point d'accumulation.

Corollaire 1.1
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non constante alors $Z(f)$ est au plus dénombrable.

Preuve

Rappelons tout d'abord que l'ouvert Ω admet une suite exhaustive de compacts i.e. une suite croissante (K_n) de compacts de Ω recouvrant Ω. En effet, posons

$$K_n = \{z \in \Omega, \quad \text{dist}(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |z| \leq n\}.$$

C'est un compact de Ω (car fermé, borné) et vérifie

$$K_n \subset \overset{o}{K}_{n+1}$$

(car l'ouvert

$$O_n := \{z \in \mathbb{C}; \quad |z| < n+1 \quad \text{et} \quad \text{dist}(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{n+1}\}$$

satisfait $K_n \subset O_n \subset K_{n+1}$). De plus, il est clair que $\Omega = \bigcup_n K_n$.

Soit donc (K_n) une telle suite. Il est clair que $Z(f) \cap K_n$ est fini sinon on peut en extraire une sous-suite convergente ce qui est en contradiction avec le théorème 5.1.1.
D'où le résultat, sachant qu'une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est dénombrable. ■

Corollaire 1.2 (Principe du prolongement analytique)
Soit Ω un ouvert connexe, f et g deux fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$.
Si $f \equiv g$ sur une partie A de Ω admettant un point d'accumulation alors $f \equiv g$ sur Ω.

Corollaire 1.3 (Principe du maximum)
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non constante et $a \in \Omega$, alors tout voisinage de a contient un point b tel que $|f(a)| < |f(b)|$.

• Autrement dit, si f est une fonction holomorphe non constante alors $|f|$ n'admet pas de maximum local.

• On en déduit que si f est une fonction holomorphe non constante sur Ω, alors pour tout disque fermé $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$, on a

$$\sup_{z \in \overline{D(z_0,r)}} |f(z)| = \sup_{z \in \mathcal{C}(z_0,r)} |f(z)|$$

Preuve du Corollaire 1.3

En appliquant le théorème 5.1.1 à la fonction $f(z) - f(a)$, on obtient

$$f(z) = f(a) + (z-a)^m g(z)$$

pour tout $z \in \Omega$ avec $g \in \mathcal{H}(\Omega), g(a) \neq 0$. En écrivant

$$f(a) = re^{i\theta} \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[$$

et

$$g(z) = \alpha e^{i\beta} + (z-a)h(z)$$

avec $\alpha > 0, \ \ \beta \in [0, 2\pi[$, on trouve

$$f(z) = re^{i\theta} + (z-a)^m[\alpha e^{i\beta} + (z-a)h(z)].$$

Posons $z = a + \varepsilon e^{i\gamma}$, ε et γ à choisir, on a alors

$$f(z) = re^{i\theta} + \varepsilon^m e^{im\gamma} \alpha e^{i\beta} + \varepsilon^{m+1} e^{i(m+1)\gamma} h(z).$$

Choisissons γ de sorte que $m\gamma + \beta = \theta$, on en déduit que

$$f(z) = e^{i\theta}[r + \varepsilon^m(\alpha + \varepsilon u(z))] \quad \text{où} \quad u(z) = e^{i(\gamma-\beta)}h(z).$$

La fonction u étant bornée près de a, on a pour ε assez petit $|\varepsilon u(z)| \leq \dfrac{\alpha}{2}$, par conséquent

$$\begin{array}{rcl} |f(z)| & = & |r + \varepsilon^m(\alpha + \varepsilon u(z))| \\ & \geq & |r + \varepsilon^m \alpha| - \varepsilon^m |\varepsilon u(z)| \\ & \geq & r + \varepsilon^m \dfrac{\alpha}{2} \\ & > & |f(a)|. \end{array}$$

d'où le Corollaire. ■

Comme conséquence du principe du maximum, on obtient le théorème suivant :

Théorème 1.2 (Théorème de D'Alembert)
Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant admet une racine complexe.

PREUVE

Sinon la fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{P(z)}$ serait une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Par ailleurs, P étant un polynôme non constant, $\dfrac{1}{P(z)} \to 0$ lorsque $|z| \mapsto \infty$.
On en déduit que $\dfrac{1}{|P(z)|}$ atteint son maximum ce qui est en contradiction avec le principe du maximum. ■

Exercice 5.1

Soient Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$.
Montrer que f s'annule sur $\overline{\Omega}$ ou bien $|f|$ atteint son minimum sur $\partial\Omega$.

Solution

En effet, supposons que f ne s'annule pas sur $\overline{\Omega}$. La fonction $z \longmapsto |f(z)|$ est continue sur le compact $\overline{\Omega}$, donc atteint son minimum en un point $a \in \overline{\Omega}$.
Si $a \in \Omega$ alors le principe de maximum appliqué à $\frac{1}{f}$ montre que f est constante, on aboutit ainsi à une contradiction. Cela prouve que $a \in \partial\Omega$ i.e. $|f|$ atteint son minimum sur $\partial\Omega$.

EXERCICE 5.2

Déterminer

$$\max_{|z|\leq 1} |z^2 - z| \quad \textbf{et} \quad \min_{|z|\leq 1} |z^2 - z|.$$

SOLUTION

Puisqu'on a $z^2 - z = z(z-1)$, son minimum en module est atteint en $z = 0$ donc

$$\min_{|z|\leq 1} |z^2 - z| = 0$$

et son maximum en module est atteint sur le bord du disque $|z| \leq 1$, c'est à dire en $z = -1$ donc

$$\max_{|z|\leq 1} |z^2 - z| = 2.$$

EXERCICE 5.3

Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un domaine compact Ω de $\mathbb{C}$. Montrer que la fonction

$$z \mapsto |f(z)| + |g(z)|$$

atteint son maximum sur le bord $\partial\Omega$ de Ω.

SOLUTION

Supposons que la fonction $z \mapsto |f(z)| + |g(z)|$ atteint son maximum à l'intérieur de Ω en z_0 ($z_0 \notin \partial\Omega$). Soit alors

$$f(z_0) = |f(z_0)|e^{-i\alpha} \text{ et } g(z_0) = |g(z_0)|e^{-i\beta}.$$

La fonction $h(z) = f(z)e^{i\alpha} + g(z)e^{i\beta}$ satisfait alors

$$h(z_0) = |f(z_0)| + |g(z_0)|$$

bien que sur le bord $\partial\Omega$, on a

$$|h(z)| \leq |f(z)| + |g(z)| < h(z_0)$$

cela est contradictoire avec le principe du maximum. Par suite, la fonction $z \mapsto |f(z)| + |g(z)|$ atteint son maximum sur le bord $\partial\Omega$ de Ω.

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

Définition 1.1
On appelle ordre du zéro d'une application f de $\mathcal{H}(\Omega)$ en un point a de Ω, l'entier naturel m tel que

$$f(z) = (z-a)^m g(z)$$

où $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $g(a) \neq 0$.

Exemples

i) 0 est un zéro d'ordre 1 de $e^z - 1$.

ii) 0 est un zéro d'ordre 2 de $\cos z - 1$.

Corollaire 1.4
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors $\mathcal{H}(\Omega)$ est un anneau intégre.

---

2 Théorème de l'image ouverte

Théorème 2.1 (Théorème de l'image ouverte raffiné)
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction de $\mathcal{H}(\Omega)$ non constante. Soit $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$ et soit m l'ordre du zéro de la fonction $f - w_0$ en z_0.
Alors, il existe des ouverts V et W tels que $z_0 \in V \subset \Omega$, $W = f(V)$ et pour tout $w \in W\backslash\{w_0\}$, l'équation $f(z) = w$ admet exactement m solutions dans V.

Corollaire 2.1
Toute fonction holomorphe est une application ouverte.

Corollaire 2.2
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction de $\mathcal{H}(\Omega)$ non constante. Alors pour tout $\omega \in f(\Omega)$, $f^{-1}(\omega)$ est un sous-ensemble discret de Ω.

PREUVE DU THÉORÈME 2.1

En se ramenant au cas où $z_0 = w_0 = 0$, on peut supposer que $f(z) = z^m g(z)$ avec $g(0) = 1$ ou encore

$$f(z) = z^m(1 + h(z)) \text{ avec } h(0) = 0.$$

L'image réciproque $h^{-1}(D(0, \frac{1}{2}))$ est un voisinage ouvert de 0 donc il contient un disque $D(0, \delta)$ pour un certain $\delta > 0$.
Posons

$$V_1 = D(0, \delta) \quad \text{et} \quad W_1 = f(D(0, \delta)).$$

Soit $w \in W_1$, on cherche z tel que

$$w = z^m(1 + h(z)).$$

On sait que la fonction $u \to (1+u)^{1/m}$ est holomorphe pour $u \in D(0, 1)$ et on a

$$(1+u)^{1/m} = \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} a_n(m) z^n$$

avec

$$a_n(m) = \frac{\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)\cdots(\frac{1}{m}-n+1)}{n!}.$$

Donc, l'application qui à z associe $(1+h(z))^{1/m}$ est holomorphe sur V_1 car $h(z) \in D(0, \dfrac{1}{2})$ pour $z \in V_1$.
On cherche donc z tel que

$$w = [z(1+h(z))^{1/m}]^m.$$

Il faut et il suffit donc de résoudre pour $j \in \{0, \cdots, m-1\}$, l'équation

$$z(1+h(z))^{1/m} = r^{1/m}e^{i\theta/m}e^{2i\pi j/m} \quad \text{où} \quad w = re^{i\theta}.$$

En désignant par

$$\theta(z) = z(1+h(z))^{1/m},$$

le théorème découle du théorème d'inversion locale en remarquant que $\theta^{'}(0) = 1$.
■

Théorème 2.2
Soient Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une injection holomorphe. Alors

1. $\Omega^{'} := f(\Omega)$ *est un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *et* $f^{'}(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in \Omega$.
2. f *est biholomorphe de* Ω *sur* $\Omega^{'}$ *et l'inverse* f^{-1} *satisfait*

$$(f^{-1})^{'}(\omega) = \frac{1}{f^{'}(f^{-1}(\omega))} \quad \textit{pour tout} \quad \omega \in \Omega^{'}.$$

Preuve

Puisque f n'est pas localement constante, le théorème de l'image ouverte entraîne que f est une application ouverte, donc $\Omega^{'}$ est un ouvert connexe et $f^{-1} : \Omega^{'} \longrightarrow \Omega$ est continue.
L'application f étant injective, sa dérivée ne peut s'annuler sur aucun disque contenu dans Ω. On en déduit que $\mathcal{Z}(f^{'})$, l'ensemble de zéros de $f^{'}$, est un sous-ensemble discret et fermé de Ω. Comme f est ouverte alors $M := f(\mathcal{Z}(f^{'}))$ est un sous-ensemble discret et fermé de $\Omega^{'}$.
Soit $d \in \Omega^{'} \backslash M$ et posons $c := f^{-1}(d)$. On a $f(z) = f(c) + (z-c)f_1(z)$, où $f_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue en c et $f_1(c) = f^{'}(c) \neq 0$.
Pour $z = f^{-1}(\omega), \quad \omega \in \Omega^{'}$, il vient que

$$\omega = d + (f^{-1}(\omega) - c)f_1(f^{-1}(\omega)). \tag{2}$$

La fonction $q := f_1 \circ f^{-1}$ est continue en d et $q(d) = f^{'}(c) \neq 0$, donc l'équation (2) est équivalente à

$$f^{-1}(\omega) = f^{-1}(d) + (\omega - d)\frac{1}{q(\omega)} \quad \text{pour} \quad \omega \quad \text{près de} \quad d.$$

On en déduit que f^{-1} est $\mathbb{C}$-différentiable en d et

$$(f^{-1})^{'}(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))} \quad \text{pour tout} \quad d \in \Omega^{'} \backslash M.$$

Finalement, f^{-1} est holomorphe dans $\Omega^{'} \backslash M$ et continue dans $\Omega^{'}$, donc f^{-1} est holomorphe dans $\Omega^{'}$.
La relation $(f^{-1})^{'}(\omega) f^{'}(f^{-1}(\omega)) = 1$, qui est valable dans $\Omega^{'} \backslash M$, reste vraie dans $\Omega^{'}$ par continuité. En particulier, $f^{'}(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. ■

Exercice 5.4

1.

2. **Soit f une fonction holomorphe, non constante sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{C}$. Posons $\Omega' = f(\Omega)$. Montrer que si $f(z) \in \partial\Omega'$ alors $z \in \partial\Omega$.**

3. **Soit $f(z) = z^2$ pour $z \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec**

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 2 \textbf{ et Re } z \leq 0\}$$

$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 1 \textbf{ et Re } z \geq 0\}$$

Montrer qu'il existe $z \in \partial\Omega$ tel que $f(z) \in \overset{0}{\Omega}$'.

Solution

1. Par le théorème de l'application ouverte, si $f(z) \in \partial\Omega'$ alors $z \notin \overset{0}{\Omega}$'

2. Notons qu'on a :

$$\Omega' = f(\Omega) = \overline{D(0,4)}$$

et donc les bords des ensembles

$$\{z, \quad |z| = 1 \text{ et } Rez \geq 0\} \text{ et } \{iy/1 < y < 2 \text{ ou } -2 < y < -1\}$$

sont inclus dans l'intérieur de Ω'.

---

3 Estimations de Cauchy et applications

Théorème 3.1 (Estimations de Cauchy)
Soit f une fonction dans $\mathcal{H}(D(a,R))$. On suppose qu'il existe une constante M telle que

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall\, z \in D(a,R)$$

alors

$$|f^{(n)}(a)| \leq n! \frac{M}{R^n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Preuve

On sait par la formule intégrale de Cauchy que, pour tout $r < R$,

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

d'où

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \frac{n!}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta}) rie^{i\theta}}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} d\theta \\ &= \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta. \end{aligned}$$

On en déduit aisément que

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} M.$$

L'inégalité ci-dessus étant vraie pour tout $r < R$,
elle l'est également pour $r = R$. ■

Corollaire 3.1 (Théorème de Liouville)
Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Si f est bornée alors f est constante.

Preuve

On sait qu'on peut écrire sur $\mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Il s'agit de démontrer que

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{pour tout entier} \quad n \geq 1.$$

Pour cela on applique le théorème précédent avec $a = 0$. On a donc

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \frac{M}{R^n}$$

où M est un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{C}$.
En faisant tendre R vers l'infini, on obtient $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier $n \geq 1$, d'où le théorème. ■

Cela démontre de nouveau le théorème de D'Alembert qui est un théorème fondamental d'algèbre.
En effet, si P est un polynôme sur $\mathbb{C}$ ne s'annulant pas, la fonction $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ est une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$, elle est donc constante par le théorème de Liouville et P est donc un polynôme constant.

---

4 Lemme de Schwarz et applications

Lemme 4.1 (Lemme de Schwarz)
Soit $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$. On suppose que

$$f(0) = 0, \quad |f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in D(0,1).$$

Alors

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in D(0,1) \quad \text{et} \quad |f'(0)| \leq 1.$$

De plus, si $|f'(0)| = 1$ alors f est une rotation (i.e. $f(z) = \lambda z$ avec $|\lambda| = 1$). De même s'il existe $z_0 \in D(0,1)\backslash\{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ alors f est une rotation.

Preuve

Comme $f(0) = 0$, il vient en vertu de (1) qu'il existe $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ telle que

$$f(z) = zg(z)$$

et

$$|z||g(z)| \leq 1.$$

On en déduit que sur le cercle $\mathcal{C}(0,r)$

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

ce qui entraîne par le principe du maximum que pour tout $z \in D(0,r)$

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Par conséquent, en faisant tendre r vers 1, on obtient

$$|g(z)| \leq 1, \quad \forall z \in D(0,1) \tag{4}$$

et donc

$$|f(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in D(0,1).$$

Ce qui entraîne que $|f'(0)| \leq 1$.
Supposons maintenant que $|f'(0)| = 1$. Comme $f(z) = zg(z)$ alors $f'(0) = g(0)$ et par suite $|g(0)| = 1$.
Il vient alors en vertu de (4) et du principe du maximum que g est constante; soit $g(z) = \lambda$ avec $|\lambda| = 1$ d'où le premier point.
De même, si $|f(z_0)| = |z_0|$, on a nécessairement $|g(z_0)| = 1$ et donc par le principe du maximum $g(z) = \lambda$ avec $|\lambda| = 1$, d'où le lemme. ■

EXERCICE 5.5

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $|f(z)| = 1$ pour tout $|z| = 1$. Montrer que f est de la forme

$$f(z) = \alpha z^n$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = 1$ et $n \in \mathbb{N}$.

SOLUTION

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in Z_f \cap D(0,1)$, ($n$ zéros de f dans le disque unité $D(0,1)$). Posons

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{n}(\frac{z-\alpha_j}{1-\bar{\alpha}_j z})}, \text{ pour } z \in D(0,1)$$

alors g est holomorphe dans $D(0,1)$, car les $\alpha_j (1 \leq j \leq n)$ sont des singularités artificielles de g. De plus on a

$$|g(z)| = 1 \text{ pout tout } |z| = 1$$

et

$$g(z) \neq 0 \text{ pour tout } z \in D(0,1).$$

Ainsi, par le principe du maximum et du minimum, on a

$$|g(z)| = 1 \text{ pour tout } z \in \overline{D(0,1)}$$

et par suite g est constante et égale à $\alpha \in \mathbb{C}$ où $|\alpha| = 1$, c'est à dire

$$f(z) = \alpha \prod_{j=1}^{n} \frac{z-\alpha_j}{1-\bar{\alpha}_j z}.$$

Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{C}, \alpha_j = 0$ pour tout $j = 1, 2, \cdots, n$. D'où

$$f(z) = \alpha z^n, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

EXERCICE 5.6

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $f(0) = 0$. Pour $r \geq 0$, on pose

$$M(r) = \sup\{|f(z)|; \quad |z| = r\}, \quad A(r) = \sup\{Ref(z); \quad |z| = r\}.$$

Montrer que

$$M(r) \leq 2A(2r).$$

SOLUTION

Pour prouver cette inégalité, fixons un réel $\varepsilon > 0$ et considérons la fonction

$$g(z) = \frac{f(2rz)}{2A(2r) + \varepsilon - f(2rz)}.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$ et posons $f(2rz) = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$. Il vient:

$$2A(2r) + \varepsilon - f(2rz) = A(2r) + \varepsilon + (A(2r) - a) - ib.$$

Par conséquent $|g(z)| \leq 1$. Compte tenu du lemme de Schwarz, on obtient $|g(z)| \leq |z|$, pour $|z| < 1$, donc:

$$|f(2rz)| \leq |z|\Big(2A(2r) + \varepsilon + |f(2rz)|\Big).$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$|f(2rz)|(1 - |z|) \leq 2A(2r)|z|.$$

Appliquant ceci à $z = \frac{u}{2}$, avec $|u| = 1$, on obtient $M(r) \leq 2A(2r)$.

EXERCICE 5.7

Soient φ et ψ deux applications biholomorphes d'un domaine Ω de $\mathbb{C}$ (c'est à dire ouvert connexe de $\mathbb{C}$) sur le disque unité ouvert $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}; \quad |z| < 1\}$. On suppose que $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha) = 0$ pour un certain $\alpha \in \Omega$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ vérifiant

$$\varphi(z) = \lambda\psi(z) \quad \forall\, z \in \Omega.$$

SOLUTION

Posons $f(z) = \varphi[\psi^{-1}(z)]$ pour tout $z \in D(0,1)$, f est une bijection holomorphe de $D(0,1)$ dans lui-même telle que

$$f(0) = \varphi(\psi^{-1}(0)) = \varphi(\alpha) = 0.$$

D'après le lemme de Schwarz, on a

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall\, z \in D(0,1).$$

Le même raisonnement appliqué à $f^{-1} : D(0,1) \to D(0,1)$ donne

$$|f^{-1}(z)| \leq |z|, \quad \forall\, z \in D(0,1).$$

On en déduit que $|f(z)| = |z| \quad \forall\, z \in D(0,1)$. D'où (toujours d'après le lemme de Schwarz)

$$f(z) = \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad |\lambda| = 1.$$

Ainsi

$$\varphi(\psi^{-1}(z)) = \lambda z, \quad \forall\, z \in D(0,1).$$

Soit enfin,

$$\varphi(z) = \lambda \psi(z), \quad \forall\, z \in \Omega.$$

EXERCICE 5.8

Montrer que l'ensemble des automorphismes du disque unité ouvert $D(0,1)$ est

$$\textbf{Aut}(D(0,1)) = \Big\{\ \lambda\varphi_\alpha; \quad \lambda \in S^1 \quad \textbf{et} \quad \alpha \in D(0,1)\ \Big\}.$$

SOLUTION

Il est clair que pour tous $\lambda \in S^1$ et $\alpha \in D(0,1)$, l'application $\lambda\varphi_\alpha$ est un automorphisme de $D(0,1)$.
Réciproquement, soit

$$f : D(0,1) \to D(0,1)$$

une appliction biholomorphe du disque unité dans lui même. Il existe alors un seul $\alpha \in D(0,1)$ tel que $f(\alpha) = 0$. D'autre part, l'application définie par

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}, \quad z \in D(0,1)$$

est biholomorphe de $D(0,1)$ dans lui-même.
On en déduit de l'exercice précédent qu'il existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ de module égal à 1 (évidemment unique) tel que $f(z) = \lambda\varphi_\alpha(z)$ pour tout $z \in D(0,1)$, d'où le résultat.

EXERCICE 5.9

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $R > 0$.

1. **Montrer que f est une fonction continue dans le disque ouvert $D_R = \{z \in \mathbb{C}/|z| < R\}$.**

2. **Supposons en outre que les $a_n \in \mathbb{C}$ sont tous non nuls.**
   Montrer qu'il existe un nombre réel r_0 tel que $0 < r_0 < R$ et que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |z| < r_0$.

   (Indication Considérer $f(z) = z^k g(z)$ où k est le plus petit entier ≥ 0 tel que $a_k \neq 0$ et on montrera que $|g(z)| \geq \frac{|a_k|}{2}$ pour $0 < |z| < r_0$)

3. **Montrer que si une série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est convergente pour $|z| < r$ (où $r > 0$) et telle que $f(z_p) = 0$ pour une suite $(z_p)_{p\geq 0}$ de points distincts de ce disque tendant vers zéro alors f est identiquement nulle.**

4. **En déduire que si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ sont deux séries entières dans un même disque ouvert $|z| < r$ (où $r > 0$) et s'il existe une suite de points distincts $(z_p)_{p\geq 0}$ de ce disque tendant vers zéro et telle que $f(z_p) = g(z_p)$ pour tout entier $p \geq 0$ alors $f(z) = g(z)$ $\forall\, z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r_0$.**

$\boxed{\text{SOLUTION}}$

1. Pour tout réel $r \in]0, R[$, la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est normalement convergente dans le disque fermé $\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq r\}$, donc elle y est uniformément convergente et on a la continuité de la somme de cette série $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ en tout point $z \in D_R$, où $D_R = \{z \in \mathbb{C}/|z| < R\}$ est le disque de convergence de f.

2. Par hypothèse, il existe un plus entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k \neq 0$, on peut alors écrire : $f(z) = z^k g(z)$ avec $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_{k+n} z^n$.
   Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |z| < R$, la série $\sum_{n\geq 0} a_{k+n} z^n$ converge, donc R est aussi le rayon de convergence de la série $g(z)$ et par suite g est continue dans le disque ouvert D_R ; mais on a : $g(0) = a_k \neq 0$ donc, il existe $r_0 > 0$ tel que
   $$|g(z) - g(0)| \leq \frac{|a_k|}{2}$$
   pour tout $z \in D_{r_0}$ (c'est à dire $\forall\, z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r_0$).
   On conclut que pour tout $z \in D_{r_0}$:
   $$|g(z)| \geq |g(0)| - \frac{|a_k|}{2} = \frac{|a_k|}{2} > 0$$
   et à fortiori $\quad g(z) \neq 0, \ \ \forall\, z \in D_{r_0}$.

3. S'il existe un entier k tel que $a_k \neq 0$, en utilisant 2), il existe un réel $r_0 > 0$ tel que $f(z) \neq 0 \ \forall\, z \in D_{r_0} \backslash \{0\}$. Cela est absurde, avec le fait que $z_p \to 0$ et $f(z_p) = 0$, donc f est identiquement nulle dés qu'elle est analytique et nulle sur une suite d'élément distinct du disque et tendant vers zéro.

4. En considérant la fonction $h(z) = f(z) - g(z) = \sum_{n\geq 0}(a_n - b_n)z^n$,
h est analytique sur le disque ouvert de convergence $D_r = \{z \in \mathbb{C}/|z| < r\}$, et en appliquant 3), on a : $a_n = b_n$ pour tout entier n et h est identiquement nulle sur D_r.

EXERCICE 5.10

Soit f une fonction analytique du disque unité $D = D(0,1)$ dans lui même. On suppose que f admet au moins deux points fixes a et b dans D. Montrer que : $f = id_D$
Indication : Utiliser la fonction φ_α telle que $\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$, $z \in D$, pour α bien choisi pour se ramener au cas où $a = 0$).

SOLUTION

a et b étant deux points fixes dans D de f. En posant $\psi = \varphi_a \, o \, f \, o \, \varphi_{-a}$, on $\psi \in \mathcal{H}(D; D)$ où $D = D(0,1)$. Mais $\psi(0) = \varphi_a(f(a)) = \varphi_a(a) = 0$, par le lemme de Schwarz pour ψ, on a :

$$\forall\, z \in D \quad |\psi(z)| \leq |z| \text{ et } |\psi'(0)| \leq 1.$$

Mais pour $c = \varphi_a(b) \in D\backslash\{0\}$, on a

$$\psi(c) = \varphi_a(f(b)) = \varphi_a(b) = c$$

donc $|\psi(c)| = |c|$, encore par le lemme de Schwarz, il existe au moins $\lambda \in S^1 = \partial D$ tel que $\psi(z) = \lambda z$, $\forall\, z \in D$ donc

$$f(z) = \varphi_{-a} \, o \, \psi \, o \, \varphi_a(z) = \lambda z, \quad \forall\, z \in D.$$

mais $f(c) = c = \lambda c$ donc $\lambda = 1$ et par suite $f(z) = z$, $\forall\, z \in D$.

EXERCICE 5.11

Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité ouvert D et continue sur $\bar{D}$; on suppose que f est nulle sur l'arc du cercle $\{e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta_0 < \theta < \theta_2 \leq 2\pi\}$. Montrer alors que f est identiquement nulle sur $D(0,1)$.

SOLUTION

f étant une fonction holomorphe (ou analytique) sur le disque ouvert $D = D(0,1)$ et continue sur le fermé $\bar{D}$. Pour $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$, on suppose que

$$f(z) = 0 \quad \forall\, z \in \Gamma = \{z = e^{i\theta}/\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}.$$

On veut montrer que f est identiquement nulle sur D. Pour cela, prenons une suite convenable finie $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ de réels telle que

$$S^1 = \cup_{k=1}^{p}(e^{i\alpha_k}\Gamma)$$

et posons, pour $z \in \bar{D}$

$$g(z) = \prod_{k=1}^{p} f(e^{i\alpha_k} z),$$

g est alors continue sur $\overline{D}$ et holomorphe sur D et puisque $g \equiv 0$ sur S^1 (à cause de l'hypothèse sur f) alors $g \equiv 0$ sur $\overline{D}$ (par le principe du maximum).
Par suite $f(e^{i\alpha_k} z) = 0 \quad \forall\, k = 1, \cdots, p, \quad \forall\, z \in D$. d'où $f \equiv 0$ sur D.
Remarque : Ici, on a utilisé une propriété (conséquence du théorème de prolongement analytique) qui dit, si φ et ψ deux fonctions analytiques sur D telles que $\varphi\, \psi \equiv 0$ sur D alors $\varphi \equiv 0$ sur D ou $\psi \equiv 0$ sur D.

EXERCICE 5.12

1.
2. **Montrer que si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction harmonique dans un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$, alors $u \in C^{\infty}(\Omega)$.**
3. **Montrer que si u_1 et u_2 sont deux fonctions (réelles) harmoniques dans un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ qui coincident dans une partie ouverte non vide V de Ω alors elles coincident dans Ω.**
4. **Montrer que si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction harmonique dans un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ alors**

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta \quad \textbf{dés que} \quad \overline{D(a,r)} \subset \Omega.$$

(cette propriété est appelée propriété de la moyenne).

5. **Montrer que si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction harmonique et non constante dans un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ alors u n'admet aucun extrêmum relatif dans Ω.**
6. **En déduire que si $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, harmonique dans un ouvert connexe borné Ω de $\mathbb{C}$ alors, il existe a et b dans $\bar{\Omega}$ tels que**

$$u(a) = \sup_{z\in\bar{\Omega}} u(z) \textbf{ et } u(b) = \inf_{z\in\bar{\Omega}} u(z)$$

et si u n'est pas constante, a et b sont dans $\mathbf{Fr}(\Omega)$ (frontière de Ω).

SOLUTION

1. Dans tout disque ouvert $D(a,r) \subset \Omega, u = Re(f)$ pour une fonction f holomorphe dans $D(a,r)$; puisque f est indéfiniment dérivable dans $D(a,r), u$ l'est aussi ; ceci étant vrai pour tout disque contenu dans Ω, on a $u \in C^\infty(\Omega)$.

2. Posons $u = u_1 - u_2$, u est une fonction harmonique dans Ω, nulle dans $V \subset \Omega$. On veut montrer que $u \equiv 0$ dans Ω. Cela est facile si Ω est simplement connexe : en effet, $u = Re(f)$ avec f holomorphe dans Ω ; dans ce cas, si $u \equiv 0$ dans $V \subset \Omega$ alors f est une constante (imaginaire pure) dans V et par le principe de prolongement elle l'est aussi dans Ω, d'où $u \equiv 0$ dans Ω.

   Dans le cas où Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et non simplement connexe, posons
   $$E = \{a \in \Omega / \exists r > 0,\ u \equiv 0 \text{ dans } D(a,r) \cap \Omega\}$$
   Il est clair que E est un ouvert non vide dans Ω. Montrons que $E = \Omega$. En effet, supposons que $\Omega \backslash E \neq \emptyset$. Il existe alors un point $b \in \Omega \backslash E$ et $r > 0$ tels que
   $$D(b,r) \cap E \neq \emptyset$$
   (car sinon $\Omega \backslash E$ sera un ouvert non vide dans Ω et $\Omega = E \cup (\Omega \backslash E)$, ce qui contredit la connexité de Ω). Il existe alors un point $a \in D(b,r) \cap E$ et $\rho > 0$ tel que
   $$a \in D(a,\rho) \subset D(b,r) \cap E$$
   donc $u \equiv 0$ dans $D(a,\rho)$ et puisque le disque ouvert $D(b,\rho)$ est simplement connexe alors $u \equiv 0$ dans $D(b,\rho)$ et donc $b \in E$ d'où la contradiction. Par conséquent $E = \Omega$ et $u_1 = u_2$ dans Ω.

3. Lorsque Ω est simplement connexe, $u = Re(f)$ avec f holomorphe dans Ω. La formule de la moyenne pour la fonction harmonique u est une conséquence immédiate (en passant aux parties réelles) de la formule de la moyenne appliquée à la fonction holomorphe f. Dans le cas où Ω est un ouvert connexe non vide quelconque de $\mathbb{C}$, il existe un $\rho > 0$ tel que
   $$\overline{D(a,r)} \subset D(a,\rho) \subset \Omega$$
   Puisque $D(a,\rho)$ est simplement connexe, la propriété de la moyenne en question résulte du cas précédent.

4. Si a est un maximum relatif de u dans Ω alors il existe $r > 0$ tel que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ et $u(a) \geq u(z)$ pour tout $z \in \overline{D(a,r)}$. En vertu de la propriété de la moyenne, on a
   $$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{pour tout} \quad 0 < \rho \leq r,$$
   d'où
   $$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(a) - u(a + \rho e^{i\theta})] d\theta$$
   Grâce à la continuité de u, on obtient
   $$u(a) = u(a + \rho e^{i\theta}) \quad \text{pour tous} \quad 0 \leq \rho \leq r \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Donc u est constante dans le disque $D(a, r) \subset \Omega$ et par 2., u est constante dans Ω, ce qui est impossible.

Le cas du minimum relatif est analogue en remplaçant u par $-u$.

5. Par continuité de u sur $\bar{\Omega}$ et par compacité de $\bar{\Omega}$, le sup et l'inf de u sont atteints en des points respectifs a et b dans $\bar{\Omega}$. De plus, si u n'est pas constante, par 4. u n'admet aucun extrêmum relatif dans Ω, donc a et b doivent être sur le bord de Ω.

Chapitre 6

Séries de Laurent et fonctions méromorphes

1 Séries de Laurent

Définition 1.1
La série de fonctions de la forme

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

est appelée série de Laurent (formelle) de centre z_0 et de coefficients a_n.
La série $\displaystyle\sum_{-\infty}^{1} a_n(z-z_0)^n$ (respectivement, $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$) est appelée sa partie principale (respectivement, sa partie régulière).

• Les séries de Laurent généralisent les séries entières.

• En particulier, les concepts de convergence simple, absolue, uniforme et normale sont aussi valables pour les séries de Laurent dans des couronnes.

Définition 1.2
On note par $C(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C}/r < |z-a| < R\}$ la couronne de centre a de petit rayon r et de grand rayon R.

Théorème 1.1 (Développement en série de Laurent)
Soit $f \in \mathcal{H}(C(a,r,R))$, alors f est développable en série de Laurent de centre a dans $C(a,r,R)$, i.e il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

De plus, la série $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ converge normalement dans $\overline{C(a,r',R')}$ pour tous r', R' tels que $r < r' < R' < R$ et l'on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

pour tout ρ tel que $r < \rho < R$.

PREUVE

Pour z fixé dans $C(a,r,R)$, on applique le théorème de Cauchy sur $\overline{C(a,r',R')}\backslash D(z,\varepsilon)$ à $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ où ε est fixé assez petit, r' et R' étant choisis de sorte que $r < r' < |z-a| < R' < R$. Il vient alors en vertu du théorème 4.4.1 que

$$\int_{\mathcal{C}(a,R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\mathcal{C}(a,r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\mathcal{C}(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Or on sait que

$$\lim_{\varepsilon \longmapsto 0} \int_{\mathcal{C}(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2i\pi f(z).$$

On en déduit que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \Big\{ \int_{\mathcal{C}(a,R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\mathcal{C}(a,r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \Big\}.$$

Le terme $\displaystyle\int_{\mathcal{C}(a,R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ se traite comme pour le développement en série entière en écrivant

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}(a,R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\mathcal{C}(a,R')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)(1 - \frac{z-a}{\zeta - a})} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (z-a)^n \int_{\mathcal{C}(a,R')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}(a,r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\mathcal{C}(a,r')} \frac{f(\zeta)}{-(z - a)(1 - \frac{\zeta-a}{z - a})} d\zeta \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{0} (z-a)^{n-1} \int_{\mathcal{C}(a,r')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n}} d\zeta. \end{aligned}$$

Les séries convergent normalement sur $\overline{C(a,r'',R'')}$ pour $r' < r'' < R'' < R'$ puisque pour tout $n \geq 0$

$$\Big| (z-a)^n \int_{\mathcal{C}(a,R')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \Big| \leq M \Big(\frac{R''}{R'} \Big)^n$$

et

$$\Big| \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \int_{\mathcal{C}(a,r')} f(\zeta)(\zeta - a)^n d\zeta \Big| \leq M \Big(\frac{r'}{r''} \Big)^{n+1},$$

où M est un majorant de $|f|$ sur $C(a,r',R')$. ■

Exemples

1. La fonction exp (z^{-k}), où k est un entier positif, appartient à $\mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$. Son développement en série de Laurent autour de 0 est donné par
$$\exp(z^{-k}) = 1 + \frac{1}{1!z^k} + \cdots + \frac{1}{n!z^{nk}} + \cdots$$
2. La fonction $f(z) = \dfrac{6}{z(z+1)(z-2)}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{0,-1,2\}$ et par conséquent a trois développements en série de Laurent autour de 0, sur $C(0,0,1)$, sur $C(0,1,2)$ et sur $\{z \in \mathbb{C},\ |z| > 2\}$.

Les séries de Laurent possédent les propriétés suivantes laissées à titre d'exercice.

Proposition 1.1
Si les séries de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *et* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n$ *convergent uniformément sur un cercle* $\mathcal{C}(a,\rho)$, $\quad \rho > 0$, *vers la même fonction limite* f, *alors pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *on a*
$$a_n = b_n = \frac{1}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$$

Proposition 1.2
Une série de Laurent est une fonction holomorphe sur son domaine de convergence qui est une couronne.

Exercice 6.1

Soit $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ une série de Laurent convergeant uniformément sur un cercle $\mathcal{C}(a,\rho), \rho > 0$, vers une fonction f. Etablir la formule suivante connue sous le nom de formule de Gutzmer
$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2\rho^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+\rho e^{i\theta})|^2 d\theta \le [M(\rho)]^2$$
où
$$M(\rho) = \sup_{z\in\mathcal{C}(a,\rho)} |f(z)|.$$

Solution

Puisque $\overline{f(a+\rho e^{i\theta})} = \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{a_n}\ \rho^n\ e^{-in\theta}$, alors
$$|f(a+\rho e^{i\theta})|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{a_n}\ \rho^n\ f(a+\rho e^{i\theta})\ e^{-in\theta},$$

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

avec convergence uniforme sur $[0, 2\pi]$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f(a+\rho e^{i\theta})|^2 d\theta &= \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{a_n}\, \rho^n \int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta \\
&= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2\, \rho^{2n}.
\end{aligned}$$

L'estimation $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(a+\rho e^{i\theta})|^2 d\theta \leq [M(\rho)]^2$ est triviale. ■

---

2 Singularités isolées

Définition 2.1
Soit f une application d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et $a \in \Omega$.
On dit que a est une singularité isolée de f si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$ et f est holomorphe sur $D(a,r)\backslash\{a\}$.

Il vient en vertu du théorème 1.1 que f admet un développement en série de Laurent :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

dans $D(a,r)\backslash\{a\}$ où $D(a,r)$ est le plus grand disque centré en a et inclus dans Ω. On appelle cette série développement de Laurent de f autour de a et l'on a

Théorème 2.1 (Classification des singularités isolées)
Soit $a \in \Omega$ une singularité isolée d'une application f d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Si $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ est le développement en série de Laurent de f autour de a, alors l'un des trois cas suivants se présente

i) $a_n = 0$ *pour tout* $n < 0$.

ii) Il existe un entier $m \geq 1$ tel que $a_n = 0$ pour tout $n < -m$.

iii) L'ensemble $\Big\{n \in \mathbb{N};\quad a_{-n} \neq 0\Big\}$ est infini.
Dans ce cas, on a pour tout $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$, l'image de $D(a,r)\backslash\{a\}$ par f est dense dans $\mathbb{C}$.

Définition 2.2
On conserve les notations du théorème précédent.
Dans le cas i) on dit que a est une singularité artificielle de f.
Dans le cas ii), a est dit pôle d'ordre m de f.
Dans le cas iii), on dit que a est une singularité essentielle de f.

PREUVE

On doit montrer que dans le cas où l'ensemble $\Big\{n \in \mathbb{N}; \quad a_{-n} \neq 0\Big\}$ est infini, l'ensemble $f(D(a,r)\backslash\{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$ pour tout réel $r > 0$ assez petit.
Démontrons ce point par l'absurde.
Le réel r strictement positif étant fixé assez petit, il existe alors $w \in \mathbb{C}, \delta > 0$, tels que

$$|f(z) - w| > \delta, \quad \forall \ z \in D(a,r)\backslash\{a\}. \tag{1}$$

Posons

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

pour $z \in D' := D(a,r)\backslash\{a\}$. Il vient en vertu de (1) que $g \in \mathcal{H}(D')$ et $|g| \leq \dfrac{1}{\delta}$, donc a est une singularité artificielle de g qu'on peut alors prolonger en une fonction holomorphe qu'on notera encore g sur $D(a,r)$.
Si $g(a) \neq 0$, on a $f(z) = w + \dfrac{1}{g(z)}$ donc f est holomorphe près de a ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.
Si $g(a) = 0$, alors $g(z) = (z-a)^m k(z)$ avec $k \in \mathcal{H}(D(a,r)), k(a) \neq 0$. On en déduit que pour z assez proche de a, $f(z) = w + \frac{1}{(z-a)^m} \times k_1(z)$ où $k_1(z) = \dfrac{1}{k(z)}$ est une fonction holomorphe près de a, ce qui est contraire à l'hypothèse.
D'où le théorème. ■

Théorème 2.2 (Singularités isolées des injections holomorphes)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $A = (z_n)$ une suite de Ω n'admettant pas de point d'accumulation dans Ω et $f : \Omega\backslash A \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe injective. Alors

1. *Aucun point c de A n'est une singularité essentielle de f.*
2. *Si $c \in A$ est un pôle de f, alors c est d'ordre 1.*
3. *Si tout point c de A est une singularité artificielle, alors $\tilde{f}$ le prolongement holomorphe de f à Ω est injectif.*

PREUVE

1. Soit D un disque ouvert de centre c contenu dans Ω et tel que $D \cap A = \{c\}$ et $\Omega' = \Omega\backslash(A \cup \bar{D}) \neq \emptyset$.
   Il vient en vertu du théorème 5.2.1 que $f(\Omega')$ est un ouvert non vide.
   De plus, f est injective donc l'ouvert $f(\Omega')$ ne rencontre pas $f(D\backslash\{c\})$.
   Par conséquent $f(D\backslash\{c\})$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$ et donc par le théorème 6.2.1, c n'est pas une singularité essentielle de f.

2. Considérons c un pôle de f d'ordre $m \geq 1$, donc il existe un voisinage ouvert U de c contenu dans Ω vérifiant $U \cap A = \{c\}$ et tel que $g := (\dfrac{1}{f})|_U$ soit holomorphe admettant un zéro d'ordre m en c.

Comme f est injective alors $g : U\backslash\{c\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ est injective et par conséquent $g : U \to \mathbb{C}$ est injective, on en déduit que $g'(c) \neq 0$ (cf. Théorème 5.2.2), soit $m = 1$.

3. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux points différents a et a' de Ω tels que $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(a') = p$.
   Considérons alors les disques ouverts $D(a,r)$ et $D(a',r')$ vérifiant $D(a,r)\backslash\{a\} \subset \Omega\backslash A$, $D(a',r')\backslash\{a'\} \subset \Omega\backslash A$ et $D(a,r) \cap D(a',r') = \emptyset$. Par le théorème 5.2.1 $\tilde{f}(D)\cap\tilde{f}(D')$ est un voisinage ouvert de p, cela entraîne l'existence de $b \in D(a,r)\backslash\{a\}$ et $b' \in D(a',r')\backslash\{a'\}$ tels que $f(b) = f(b')$ ce qui contredit l'injectivité de f.

■

---

3 Fonctions méromorphes

Définition 3.1
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une application de Ω dans $\mathbb{C}$.
On dit que f est méromorphe sur Ω s'il existe une suite (z_n) de Ω sans point d'accumulation dans Ω telle que:

i) $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{(z_n)\})$.

ii) Pour tout entier n, f n'a pas une singularité essentielle en z_n.

Exemples

Les fonctions suivantes sont méromorphes sur $\mathbb{C}$:

$$\frac{1}{z}\exp(z); \qquad \frac{1}{z^2(z-i)}; \qquad \frac{1}{\sin(\pi z)}.$$

Soit f une fonction méromorphe dans Ω, alors

i) Les pôles de f sont isolés.

ii) Tout compact K de Ω contient un nombre fini de pôles.

On a en vertu du théorème précédent le résultat suivant:

Théorème 3.1 (Principe de prolongement unique)
Soient f et g deux fonctions méromorphes dans Ω.
Si $f \equiv g$ sur un ensemble A de Ω admettant un point d'accumulation dans Ω, alors $f \equiv g$ dans Ω.

Définition 3.2
Soit f une fonction méromorphe sur Ω, $a \in \Omega$ un pôle de f et

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

son développement en série de Laurent autour de a.
On appelle résidu de f en a le nombre complexe a_{-1} et on note

$$Res(f,a) = a_{-1}.$$

Autrement dit le résidu de f en a est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$.

Convention

Si f est holomorphe autour de a on pose, par convention

$$Res(f,a) = 0.$$

Exercice 6.2

Soit $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^3)^2}$**. Déterminer ses pôles ainsi que les résidus en ces pôles.**

Solution

Cette fonction admet pour pôles doubles les trois points $-1, \quad -j, \quad -j^2$. Pour calculer son résidu au point $-j$, posons $z = -j + t$. On a:

$$\frac{1}{(1+z^3)^2} = \frac{1}{9jt^2}(1 - j^2 t + jt^2)^{-2} = \frac{1}{9jt^2}\Big[1 + 2j^2 t + o(t^2)\Big]$$

d'où $Res\Big(\dfrac{1}{(1+z^3)^2}, -j\Big) = \dfrac{2}{9}j$.
Le résidu au point $-j^2$ est l'imaginaire conjugué de $Res(f,-j)$ (puisque la fraction rationnelle f est à coefficients réels). On a donc, sans nouveau calcul:

$$Res\Big(\frac{1}{(1+z^3)^2}, -j^2\Big) = \frac{2}{9}j^2.$$

En fait, on obtient ces résultats plus simplement en notant que l'on a $f(jz) = f(z)$ et en calculant d'abord:

$$Res\Big(\frac{1}{(1+z^3)^2}, -1\Big) = \frac{2}{9}.$$

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

4 Théorème des résidus

Théorème 4.1 (Théorème des résidus)
Soient f une fonction méromorphe sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$, K un compact de Ω dont le bord ∂K est un chemin simple C^1 par morceaux orienté positivement et ne contenant aucun pôle de f. Alors, en notant par $\mathcal{P}(f)$ l'ensemble des pôles de f, on a

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 2i\pi \sum_{a\in\mathcal{P}(f)\cap K} Res(f,a).$$

PREUVE

Soit $\mathcal{P}(f)\cap K = \{z_1, z_2, \cdots, z_k\}$ les pôles de f appartenant à K.
En désignant par K' le compact $K\setminus \cup_{j=1}^{k} D(z_j,\varepsilon)$, ε étant assez petit, il vient en vertu du théorème de Cauchy que

$$\int_{\partial K'} f(z)dz = \int_{\partial K} f(z)dz - \sum_{j=1}^{k}\int_{\mathcal{C}(z_j,\varepsilon)} f(z)dz = 0.$$

Or, autour de tout pôle z_j, f admet un développement de Laurent de la forme

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{m_j}\frac{a_n}{(z-z_j)^n}$$

où h est une fonction holomorphe et ε étant choisi assez petit de sorte que ce développement soit valable sur $D(z_j, 2\varepsilon)$, on obtient

$$\int_{\mathcal{C}(z_j,\varepsilon)} h(z)dz = 0$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}(z_j,\varepsilon)}\frac{dz}{(z-z_j)^n} &= \int_0^{2\pi}\frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon^n e^{in\theta}}d\theta\\ &= \frac{i}{\varepsilon^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1))\theta}d\theta\\ &= \begin{cases} 2i\pi & \text{si} \quad n=1\\ 0 & \text{si} \quad n>1\end{cases}\end{aligned}$$

d'où le théorème. ■

EXERCICE 6.3

Soient $A\in M_n(\mathbb{C})$ et K un compact de $\mathbb{C}$ dont le le bord ∂K est un chemin C^1 par morceaux ne passant pas par les valeurs propres de A et orienté de manière positive. Montrer que la quantité

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K} tr\Big[(A-zI)^{-1}\Big]dz$$

représente le nombre de valeurs propres de A, comptées avec leurs multiplicités, se trouvant à l'intérieur de K.

SOLUTION

En effet, notons par $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et considérons la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & tr\Big[(A - zI)^{-1}\Big]. \end{array}$$

Puisque deux matrices semblables ont la même trace alors on peut supposer que A est triangulaire. On en déduit

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i - z}$$

et par suite f est une fonction méromorphe. On conclut en utilisant le théorème des résidus.

EXERCICE 6.4

Montrer que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}, \quad \forall a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}.$$

SOLUTION

Pour $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, posons $f(z) = \dfrac{\pi\text{cotg}(\pi z)}{(z-a)^2}$. La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé de $\mathbb{Z} \cup \{a\}$. On a

$$\text{Res}(f, a) = (\pi\text{cotg}\pi z)^{'}(a) = -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}$$

$$\text{Res}(f, n) = \frac{1}{(n-a)^2}.$$

Soit C_n le carré de sommets $\pm(n + \frac{1}{2}) \pm i(n + \frac{1}{2})$. On a

$$\sup_n \sup_{z\in C_n} |\text{cotg}\pi z| < +\infty,$$

donc

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{C_n} f(z)dz = 0,$$

et le théorème des résidus fournit l'identité voulue.

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

5 Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

5.1 Détermination pratique des résidus

Soit f une fonction holomorphe admettant le point z_0 pour pôle d'ordre p: par définition, le résidu de f en z_0 est le coefficient du terme en $(z-z_0)^{p-1}$ dans le développement en série entière de $(z-z_0)^p f(z)$ au voisinage de z_0.
On en déduit les règles pratiques qui suivent:

a) Si z_0 est un **pôle simple** (c'est-à -dire d'ordre 1), on a:

$$Res(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

En particulier, si f est de la forme $f = \frac{g}{h}$, les fonctions g, h étant holomorphes, et si z_0 est un zéro **simple** de h, on a:

$$Res(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{h(z)/(z-z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

b) Si z_0 est un pôle **multiple** (c'est-à -dire d'ordre > 1) nous sommes ramenés à la recherche du développement limité d'ordre $p-1$ de $(z-z_0)^p f(z)$ au voisinage de z_0.
Si f est de la forme $f = \frac{g}{h}$, les fonctions g, h étant holomorphes, et si z_0 est un zéro d'ordre p de h, nous pouvons écrire $h(z) = (z-z_0)^p h_0(z)$; et nous sommes ramenés à la recherche du développement limité à l'ordre $p-1$ du quotient $\frac{g(z)}{h_0(z)}$: le résidu de f au point z_0 est le coefficient de $(z-z_0)^{p-1}$ dans ce développement.
Rappelons que, pour obtenir ce développement limité, il est recommandé de faire le changement de variable $z = z_0 + t$. On pourra ensuite appliquer la règle du développement limité d'un quotient ou tout autre procédé.

EXERCICE 6.5

Soit $f(z) = \frac{z^m}{1+z^n}$ **(**$n,\ m \in \mathbb{N}$**). Déterminer ses pôles ainsi que les résidus en ces pôles.**

SOLUTION

Les pôles de f sont les n points $z_k = \exp(\frac{(2k-1)i\pi}{n})$ $(k = 1, 2, \cdots n)$. Ce sont des pôles simples. On a donc:

$$Res(f,z_k) = \frac{z_k^m}{nz_k^{n-1}} = \frac{1}{n}z_k^{m+1-n} = -\frac{1}{n}z_k^{m+1}.$$

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

EXERCICE 6.6

Même question pour $f(z) = \dfrac{1}{\sin(z)}$.

SOLUTION

Ses pôles sont les points $z_k = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. Ce sont des pôles simples. On a:

$$Res(f, k\pi) = \frac{1}{\cos(k\pi)} = (-1)^k.$$

EXERCICE 6.7

Même question pour $f(z) = \dfrac{1}{\sin^3(z)}$.

SOLUTION

Cette fonction admet pour pôles triples les points $z_k = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.
Au voisinage de $z = 0$, on a:

$$z^3 f(z) = \Big(\frac{\sin(z)}{z}\Big)^{-3} = \Big[1 - \frac{z^2}{6} + o(z^4)\Big]^{-3} = 1 + \frac{z^2}{2} + o(z^4)$$

d'où

$$Res\Big(\frac{1}{\sin^3(z)}, 0\Big) = \frac{1}{2}.$$

Le changement de variable $z = k\pi + t$ montre ensuite immédiatement que l'on a

$$Res\Big(\frac{1}{\sin^3(z)}, k\pi\Big) = \frac{(-1)^k}{2}.$$

Remarques pratiques

i) Si f est une fraction rationnelle à *coefficients réels*, ses pôles non réels sont deux à deux imaginaires conjugués; et les résidus relatifs à deux pôles imaginaires conjugués sont imaginaires conjugués.
ii) Si f est une *fonction paire*, admettant l'origine pour pôle, son résidu en ce point est nécessairement nul. En effet le développement de Laurent de f au voisinage de l'origine ne contient que des puissances paires (d'exposant positif ou négatif) de z; il ne peut contenir de terme en $\frac{1}{z}$.
On a ainsi, sans calcul:

$$Res\Big(\frac{1}{\sin^4(z)}, 0\Big) = 0, \quad Res\Big(\frac{1}{z^2(z^6+1)}, 0\Big) = 0.$$

5.2 Intégrales Trigonométriques $\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$.

Soit $R(X, Y)$ une fraction rationnelle complexe. On suppose qu'elle est bien définie sur le cercle unité $\mathcal{S}^1$. On pose

$$\tilde{R}(z) := z^{-1}R\Big(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\Big).$$

Alors on a le résultat suivant

Proposition 5.1

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi = 2\pi \sum_{\omega\in D(0,1)} Res(\tilde{R}, \omega).$$

PREUVE

Pour $0 \le \varphi \le 2\pi$ et $\zeta = \exp(i\varphi)$ on a

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}(\zeta - \zeta^{-1}).$$

Par conséquent on peut écrire, en vertu du théorème des résidus

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi = \frac{1}{i}\int_{\partial D(0,1)} \tilde{R}(\zeta)d\zeta = 2\pi \sum_{\omega\in D(0,1)} Res(\tilde{R}, \omega).$$

■

EXERICE 6.8

Calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2p\cos\varphi + p^2}$$

où $p \in \mathbb{C}\backslash\mathcal{S}^1$.

SOLUTION

On utilise $R(X, Y) = (1 - 2pX + p^2)^{-1}$ et $\tilde{R}(z) = \dfrac{1}{(z-p)(1-pz)}$. La proposition précédente entraîne alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2p\cos\varphi + p^2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-p^2}, & \text{si} \quad |p| < 1 \\ \frac{2\pi}{p^2-1}, & \text{si} \quad |p| > 1. \end{cases}$$

EXERCICE 6.9

Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(p+\cos\varphi)^2} = \frac{2\pi p}{(\sqrt{p^2-1})^3}, \quad p \in \mathbb{R}, \quad |p| > 1.$$

SOLUTION

Pour calculer cette intégrale, on utilise $R(X,Y) = (p+X)^{-2}$ et $\tilde{R}(z) = \dfrac{4z}{(z^2+2pz+1)^2}$. La fonction $\tilde{R}$ a un seul pôle dans $D(0,1)$ à savoir $\omega = -p + \sqrt{p^2-1}$. Ce pôle est d'ordre 2. Pour calculer le résidu de $\tilde{R}$ au point ω, posons $t = z - \omega$, on a:

$$\begin{aligned} \frac{4z}{(z^2+2pz+1)^2} &= \frac{1}{(p^2-1)t^2}(t+\omega)\Big(1+\frac{t}{2\sqrt{p^2-1}}\Big)^{-2} \\ &= \frac{1}{(p^2-1)t^2}\Big[\omega + \Big(1-\frac{\omega}{\sqrt{p^2-1}}\Big)t + \cdots\Big] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Res(\tilde{R},\omega) &= \frac{\sqrt{p^2-1}-\omega}{(p^2-1)\sqrt{p^2-1}} \\ &= p\Big(\sqrt{p^2-1}\Big)^{-3}. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(p+\cos\varphi)^2} = \frac{2\pi p}{(\sqrt{p^2-1})^3}.$$

La proposition précédente s'applique à des intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos(m\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi$$

où $m, n \in \mathbb{Z}$. Il suffit de remarquer que

$$\cos(m\varphi) = \frac{1}{2}(\zeta^m + \zeta^{-m}) \quad \text{et} \quad \sin(n\varphi) = \frac{1}{2i}(\zeta^n - \zeta^{-n}).$$

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

5.3 Intégrales Impropres $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Soit Ω un ouvet connexe de $\mathbb{C}$ contenant le demi plan fermé

$$\overline{P} = P \cup \mathbb{R} = \Big\{ z \in \mathbb{C}; \quad Im(z) \geq 0 \Big\}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \gamma_R : [0, \pi] & \longrightarrow & \overline{P} \\ \varphi & \longmapsto & R\exp(i\varphi) \end{array}$$

la partie du périmètre du disque $D(0, R)$ contenue dans $\overline{P}$.

Théorème 5.1
Soit f une application holomorphe sur Ω sauf en un nombre fini de points non réels. Supposons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existe et que $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2i\pi \sum_{\omega\in P} Res(f, \omega).$$

$\boxed{\text{PREUVE}}$

Les singularités de f sont dans le disque ouvert $D(0, R)$ pour $R > 0$ assez grand. Pour un tel R, il vient d'après le théorème des résidus que

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(\zeta)d\zeta = 2i\pi \sum_{\omega\in P} Res(f, \omega).$$

L'estimation standard des intégrales complexes donne

$$\Big| \int_{\gamma_R} f(\zeta)d\zeta \Big| \leq \pi R|f|_{\gamma_R}.$$

L'hypothèse $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ entraîne

$$\lim_{R\to\infty} R|f|_{\gamma_R} = 0$$

et par suite le résultat. ■

$\boxed{\text{EXERCICE 6.10}}$

Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

SOLUTION

Considérons
$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}.$$
Cette fraction rationnelle admet exactement deux pôles dans P, chacun d'eux est simple, à savoir $c = \exp(\frac{1}{4}i\pi)$ et ic.
Un calcul immediat donne
$$Res(f,c) = \frac{1}{4}\bar{c} \quad \text{et} \quad Res(f,ic) = -\frac{i}{4}\bar{c},$$
soit enfin
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = 2i\pi\frac{(1-i)^2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

5.4 Intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{iax}dx, \quad a \in \mathbb{R}^*$

Pour calculer une telle intégrale on utilise le théorème suivant.

Théorème 5.2
Soit g une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre fini de points non réels. Supposons que $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$. Alors
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{iax}dx = \begin{cases} 2i\pi \displaystyle\sum_{\omega\in P} Res(g(z)e^{iaz},\omega) \quad si \quad a>0 \\ -2i\pi \displaystyle\sum_{-\omega\in P} Res(g(z)e^{iaz},\omega) \quad si \quad a<0. \end{cases}$$

Preuve

Traitons le cas $a > 0$.
Désignons par $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ les pôles de g appartenant au demi-plan supérieur $Im(z) > 0$, et choisissons le $R > 0$ assez grand de sorte que ces pôles soient dans le disque $D(0,R)$.
Notons par K_R le compact défini par $|z| \leq R$ et $y = Im(z) \geq 0$. En intégrant sur ∂K_R la fonction $z : \longmapsto g(z)e^{iaz}$, on obtient
$$\int_{-R}^{+R} g(x)e^{iax}dx + \int_{\gamma_R} g(z)e^{iaz}dz = 2i\pi\sum_{k=1}^{m} Res\Big(g(z)e^{iaz},\omega_k\Big) \qquad (2)$$
où $\gamma_R : \quad \theta \in [0,\pi] \longmapsto Re^{i\theta}$.
Il nous reste à étudier la limite, lorsque $R \to +\infty$, de l'intégrale
$$J(R) = \int_{\gamma_R} g(z)e^{iaz}dz.$$

Pour cela écrivons
$$J(R) = i\int_0^{\pi} g(Re^{i\theta})e^{iaRe^{i\theta}}Re^{i\theta}d\theta.$$
Il vient
$$|J(R)| \leq R \sup_{\theta\in[0,\pi]} |g(Re^{i\theta})| \int_0^{\pi} e^{-aR\sin(\theta)}d\theta.$$
Or on a
$$\int_0^{\pi} e^{-aR\sin(\theta)}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin(\theta)}d\theta;$$
et l'inégalité $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$, valable pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, entraîne
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin(\theta)}d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2aR\theta}{\pi}}d\theta \leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2aR\theta}{\pi}}d\theta = \frac{\pi}{2aR}.$$
D'où
$$|J(R)| \leq \frac{\pi}{a} \sup_{\theta\in[0,\pi]} |g(Re^{i\theta})|$$
et l'hypothèse $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 0$ montre enfin que $\lim\limits_{R\to+\infty} J(R) = 0$.
En passant à la limite dans (2), on obtient:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{iax}dx = 2i\pi\sum_{k=1}^{m} Res\Big(g(z)e^{iaz}, \omega_k\Big).$$

■

EXERCICE 6.11

Soit
$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}dx, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Montrer que
$$I(a) = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}.$$

SOLUTION

La fonction $f: \quad z \longmapsto \dfrac{e^{iaz}}{1+z^2}$ admet pour pôles i et $-i$. Ces sont des pôles simples.

• Si $a > 0$, on a donc:
$$I(a) = \frac{2i\pi}{2}Res(f, i) = i\pi\Big(\frac{e^{iaz}}{2z}\Big)_{z=i} = \frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

• Si $a < 0$, on a:

$$I(a) = -\frac{2i\pi}{2} Res(f, -i) = -i\pi\Big(\frac{e^{iaz}}{2z}\Big)_{z=-i} = \frac{\pi}{2}e^{a}.$$

• Si $a = 0$, on a, par un calcul direct $I(a) = \dfrac{\pi}{2}$.

Dans tous les cas, on a: $I(a) = \dfrac{\pi}{2}e^{-|a|}$.

---

6 Théorème de Rouché

Théorème 6.1 (Sur le nombre de zéros et de pôles)
Soit f une fonction méromorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et K un compact de Ω dont le bord ∂K est un chemin C^1 par morceaux orienté de manière positive et ne contenant ni zéro ni pôle de f .
Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = card(\mathcal{Z}(f)\cap K) - card(\mathcal{P}(f)\cap K)$$

les zéros et les pôles de f étant comptés avec leur multiplicité.

PREUVE

Soient $a_1, \cdots a_n$ les zéros de $f, b_1, \cdots b_m$ les pôles de f se trouvant à l'intérieur de K. Désignons par

$$K' = K\setminus\Big(\cup_{j=1}^{n} D(a_j,\varepsilon)\cup\cup_{k=1}^{m} D(b_k,\varepsilon)\Big).$$

ε étant choisi assez petit de sorte que $D(a_j, 2\varepsilon) \subset K$, $\quad D(b_k, 2\varepsilon) \subset K \quad$ et $\quad D(c_j, 2\varepsilon)\cap D(c_k, 2\varepsilon) \neq \emptyset$ pour $j \neq k, c_j, c_k$ pôles ou zéros de f. On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K'}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0.$$

Soit

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(a_j,\varepsilon)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(b_k,\varepsilon)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

On sait que pour tout zéro a_j de f,

$$f(z) = (z - a_j)^{k_j} g(z)$$

avec g holomorphe ne s'annulant pas sur $D(a_j, 2\varepsilon)$ et $k_j \in \mathbb{N}^*$, d'où

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_j}{z - a_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Comme $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ est holomorphe sur $D(a_j, 2\varepsilon)$, on obtient

$$\int_{\mathcal{C}(a_j,\varepsilon)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = k_j\int_{\mathcal{C}(a_j,\varepsilon)}\frac{dz}{z - a_j} = 2i\pi k_j.$$

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

De même, pour tout b_k pôle de f, on a sur $D(b_k, 2\varepsilon)$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - b_k)^{m_k}}$$

avec g holomorphe ne s'annulant pas $D(b_k, 2\varepsilon)$. On en déduit que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{m_k}{z - b_k}$$

ce qui entraîne que

$$\int_{\mathcal{C}(b_k,\varepsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -2i\pi m_k$$

et achève la preuve du théorème. ■

Théorème 6.2 (Théorème de Rouché)
Soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω, K un compact de Ω dont le bord ∂K est C^1 par morceaux orienté de manière positive.
On suppose que sur ∂K

$$|g(z)| < |f(z)|. \tag{3}$$

Alors f et $f + g$ ont le même nombre de zéros dans K.

PREUVE

Par hypothèse, $f(z) \neq 0$ sur ∂K. On peut alors écrire dans un voisinage de ∂K

$$f(z) + g(z) = f(z)h(z) \quad \text{où} \quad h(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}.$$

Il existe un voisinage V de ∂K sur lequel h est holomorphe et vérifie

$$|h(z) - 1| < 1.$$

Donc $h(V) \subset D(1, 1)$ sur lequel on peut définir la fonction Log.
Par le théorème précédent, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(\mathcal{Z}(f+g) \cap K) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{h'(z)}{h(z)} dz. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{h'}{h} = (Logh)'$$

donc

$$\int_{\partial K} (\log h(z))' dz = 0$$

ce qui achève la preuve. ■

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

EXERCICE 6.12

Montrer que le nombre de zéros (comptés avec leur ordre de multiplicité) du polynôme $P(z) = 9z^5 + 5z - 3$ **dans le disque unité ouvert** $D(0, 1)$**, est égal à 5.**

SOLUTION

En effet, par le théorème de Rouché, puisqu'on a, pour tout $|z| = 1$

$$|P(z) - 9z^5| = |5z - 3| \leq 5|z| + 3 = 8 < |9z^5| = 9,$$

donc $P(z)$ et $9z^5$ ont le même nombre de zéros dans $D(0, 1)$, d'où le résultat.

EXERCICE 6.13

Montrer que le polynôme $P(z) = 9z^5 + 5z - 3$ **admet cinq zéros distincts dans la couronne** $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}; \quad \frac{1}{2} < |z| < 1\}$**.**

SOLUTION

En effet par l'exemple précédent, P admet cinq zéros dans $D(0, 1)$.
Si z est un zéro double de P situé dans $D(0, 1)$ alors

$$P'(z) = 45z^4 + 5 = 0$$

et

$$P(z) = 0$$

donc $z^4 = -\frac{1}{9}$ et $z = \frac{3}{4}$, ce qui impossible.
Cela montre que P admet cinq zéros distincts dans le disque $D(0, 1)$.

Maintenant si $|z| \leq \frac{1}{2}$ et $P(z) = 0$ alors

$$\frac{9}{2^5} \geq 9|z|^5 = |5z - 3| \geq 3 - 5|z| \geq 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

ce qui est impossible, d'où le résultat.

EXERCICE 6.14

Montrer que la fonction définie par

$$f(z) = 4z^2 - \exp(z)$$

admet deux zéros distincts dans le disque unité ouvert D**.**

Solution

En effet, encore une fois par le théorème de Rouché, puisqu'on a pour tout $|z| = 1$

$$|f(z) - 4z^2| = |\exp(z)| \leq \exp(|z|) = e < |4z^2| = 4$$

alors $f(z)$ et $4z^2$ admettent le même nombre de zéros dans $D(0,1)$.
Ces deux zéros sont distincts car l'équation $f(z) = f'(z) = 0$ n'a pas de solutions dans D.

Exercice 6.15

Pour m, $n \in \mathbb{N}^*$ et α, $\beta \in D(0,1)$, montrer que la fonction

$$f(z) = z^m \Big(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\Big)^n - \beta$$

admet $m+n$ zéros dans le disque unité ouvert D.

Solution

En effet, par le théorème de Rouché, puisqu'on a

$$|z| = 1 \Longrightarrow \Big|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\Big| = 1$$

alors

$$|(f(z)+\beta) - f(z)| = |\beta| < 1 = |f(z)+\beta|.$$

On en déduit que $f(z)+\beta$ et $f(z)$ ont le même nombre de zéros dans $D(0,1)$, d'où le résultat.

Exercice 6.16

Trouver le développement en série entière autour de $\alpha \in \mathbb{C}^*$ de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

Solution

Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ on a

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha(1+\frac{z-\alpha}{\alpha})} = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-\alpha)^n}{\alpha^n}$$

valable pour $|z-\alpha|<|\alpha|$.

EXERCICE 6.17

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ un point singulier isolé d'une fonction f holomorphe dans le disque ouvert pointé $D(z_0, R)\backslash\{z_0\}$ (où $R>0$). Montrer

1. **z_0 est une singularité artificielle de f si et seulement si f est bornée dans $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$ pour tout $0<r<R$; dans ce cas $a_0 = \lim_{z\to z_0} f(z)$ existe et en posant $a_0 = f(z_0)$, on obtient un prolongement holomorphe de f à $D(z_0, R)$.**

2. **z_0 est un pôle de f si et seulement si**
$$\lim_{z\longrightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$$

3. **z_0 est une singularité essentielle de f si et seulement si $\lim_{z\to z_0} |f(z)|$ n'existe pas dans $\bar{\mathbb{R}}$; dans ce cas on a (le théorème de Casorati-Weierstrass) : pour tout $0<\rho<R$**
$$\overline{f(D(z_0, \rho))} = \mathbb{C}.$$
Plus explicitement, pour tous $w \in \mathbb{C}$, $\varepsilon>0, \rho>0$ il existe un $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-z_0|<\rho$ et $|f(z)-w|<\varepsilon$.

SOLUTION

1. Si z_0 est une singularité artificielle de f, on aura pour tout $z \in D(z_0, R)\backslash\{z_0\}$,
$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$
d'où l'existence de $\lim_{z\to z_0} f(z) = a_0$, et donc f est bornée dans $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$ pour tout $r \in]0, R[$.

   Supposons maintenant que f est bornée dans $D(z_0, r)$ pour un $r \in]0, R[$, posons
$$M = \sup_{z\in D(z_0,r)\backslash\{z_0\}} |f(z)|.$$
Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ est le développement de f en z_0 en série de Laurent, alors par les inégalités de Cauchy, on a
$$|a_n| \leq M\rho^{-n}$$
pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $0<\rho<r$; si $n<0$ fixé et $\rho\to 0$, on voit que $a_n = 0$, donc z_0 est une singularité artificielle pour f.

2. Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n, z \in D(z_0,R)\backslash\{z_0\}$, le développement de f en z_0 en série de Laurent; puisque z_0 est un point singulier , il existe un entier n_0 tel que $a_{n_0} \neq 0$. Posons $b_n = a_{-n}$ pour $n = 1, 2, \cdots$

   Supposons maintenant que z_0 est un pôle pour f d'ordre $m \geq 1$; alors

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{b_1}{z-z_0} + f_1(z)$$

   pour tout $z \in D(z_0,R)\backslash\{z_0\}$, avec $b_m \neq 0$ et $f_1(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, f_1 est la partie régulière de f en z_0. Alors

$$\lim_{z\to z_0} |(z-z_0)^m f(z)| = |b_m| > 0.$$

   ce qui implique que $|f(z)| \to +\infty$ lorsque $z \to z_0$. Réciproquement, supposons que $|f(z)| \to +\infty$ lorsque $z \to z_0$; alors il existe un réel $\rho \in]0, R[$ tel que $|f(z)| > 1$ si $z \in D(z_0,\rho)\backslash\{z_0\}$. Posons

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \text{ pour } z \in D(z_0,\rho)\backslash\{z_0\}$$

   Alors g est holomorphe et bornée ($|g(z)| < 1$) et partout non nulle dans $D(z_0,\rho)\backslash\{z_0\}$; de plus $g(z) \to 0$ lorsque $z \to z_0$; donc il existe un entier $m \geq 1$ tel que pour tout $z \in D(z_0,\rho)$

$$g(z) = \alpha_m(z-z_0)^m + \alpha_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots$$

   avec $\alpha_m \neq 0$ (c'est le développement de Taylor de g dans $D(z_0,\rho)$ en posant $g(z_0) = 0$). Alors $g(z) = (z-z_0)^m h(z), z \in D(z_0,\rho)$ où h est une fonction holomorphe dans $D(z_0,\rho)$ et qui ne s'annule pas sur $D(z_0,\rho)$, (en fait $h(z_0) = \alpha_m$). On en déduit que

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{(z-z_0)^{-m}}{h(z)}, \quad z \in D(z_0,\rho)$$

   avec $\frac{1}{h}$ est holomorphe et partout non nulle dans $D(z_0,\rho)$; en écrivant le développement de $\frac{1}{h}$ en z_0 :

$$\frac{1}{h(z)} = \beta_0 + \beta_1(z-z_0) + \cdots, z \in D(z_0,\rho)$$

   avec

$$\beta_0 = \frac{1}{h(z_0)} \neq 0,$$

   on a

$$f(z) = (z-z_0)^{-m}[\beta_0 + \beta_1(z-z_0) + \cdots]$$

   donc f possède un pôle d'ordre m en z_0.

3. Par définition, un point singulier essentiel z_0 de f est un point qui n'est pas un pôle et donc par 1) et 2), $\lim_{z\to z_0} |f(z)|$ n'existe pas dans $\bar{\mathbb{R}}$ et par ailleurs z_0 ne peut être ni un pôle (par 2.) ni une singularité artificielle

(par 1).
Nous démontrons maintenant le théorème de Casorati-Weierstrass par l'absurde.
Supposons qu'il existe un $w \in \mathbb{C}$, un réel $\varepsilon > 0$ et un réel $\rho > 0$ tels que pour tout $z \in D(z_0, \rho) \backslash \{z_0\}$ on ait

$$|f(z) - w| \geq \varepsilon,$$

Posons

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w} \text{ pour } z \in D(z_0, \rho) \backslash \{z_0\}$$

Alors g est holomorphe et bornée dans $D(z_0, \rho)$, d'après 1), g possède un prolongement holomorphe en z_0 noté aussi g.

Si $g(z_0) = 0$ alors $|f(z) - w| \to +\infty$ lorsque $z \to z_0$, ce qui implique que $|f(z)| \to +\infty$ lorsque $z \to z_0$, car

$$|f(z)| \geq |f(z) - w| - |w|;$$

d'après 2), z_0 est alors un pôle ce qui est exclu.

Si $g(z_0) \neq 0$, alors l'égalité

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$$

montre que f admet un prolongement en z_0 et z_0 est une singularité artificielle, ce qui est aussi exclu.

$\boxed{\text{Exercice 6.18}}$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque fermé $\overline{D(0,r)}, r > 0$. Soit f une fonction holomorphe dans Ω vérifiant $f(0) = 0, f'(0) = 1$ et

$$f(z) \neq 0 \textbf{ pour } 0 < |z| \leq r.$$

On pose

$$m = \min_{|x|=r} |f(z)|.$$

1. **Montrer que pour $u \in D(0, m)$, la fonction $g_u(z) = f(z) - u$ a un unique zéro, simple, dans le disque $D(0, r)$.**

   On note $F(u)$ ce zéro ; que vaut $F(0)$?

2. a) **Donner la valeur de $\int_{C(0,r)} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz$. où $C(0, r)$ est le cercle de rang r centré à l'origine**

   b) **Etablir, pour $u \in D(0, m)$**

$$F(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{zf'(z)}{f(z) - u} dz.$$

c) **En déduire** $F(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n$ **dans** $D(0, m)$**, avec, pour** $n \geq 1$**,**

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{zf'(z)}{[f(z)]^{n+1}} dz.$$

d) **Calculer la dérivée de la fonction** $h_n(z) = \frac{z}{[f(z)]^n}$ **et en déduire que l'on a également**

$$a_n = \frac{1}{2i\pi n} \int_{C(0,r)} \frac{dz}{[f(z)]^n}.$$

3. **On prend** $\Omega = \mathbb{C}, f(z) = ze^{-z}$ **et** $r = 1$**.**

a) **Vérifier que l'on a alors**

$$m = \frac{1}{e} \quad \textbf{et} \quad a_n = \frac{n^{n-1}}{n!}.$$

b) **Quel est le rayon de convergence de la série** $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ **?**

SOLUTION

Ω étant un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque fermé $\overline{D(0, r)}$, $r > 0$, et $f \in H(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} f(0) & = 0 \\ f'(0) & = 1 \\ f(z) & \neq 0 \quad \forall\, z \in \overline{D(0,r)} \backslash \{0\}. \end{cases}$$

Par principe de maximum : $m > 0$ où

$$m = \min_{|z| \leq r} |f(z)| = \min_{|z|=r} |f(z)|.$$

1. Si $u \in D(0, m)$ c'est à dire $|u| < m$, la fonction $z \mapsto g_u(z) := f(z) - u$ est holomorphe sur le disque ouvert $D(0, r)$ et vérifie pour tout $z \in D(0, r) \backslash \{0\}$

$$|g_u(z)| = |f(z) - u| \geq |f(z)| - |u| > m|u| > 0.$$

D'où

$$|g_u(z) - f(z)| = |u| \leq |f(z)|, \text{ pour tout } |z| = r.$$

Par le théorème de Rouché, on a

$$card(Z_{g_u} \cap D(0, r)) = card(Z_f \cap D(0, r)) = 1$$

(par hypothèse sur f).
où Z_f, Z_{g_u} désignent respectivement l'ensemble des zéros de f et de g_u. Par suite pour chaque $u \in D(0, m)$, la fonction $g_u = f - u$ admet un seul

zéro dans le disque $D(0,r)$. De plus ce zéro noté $F(u)$, est simple pour g_u car 0 est un zéro simple pour f.

On a donc défini l'application

$$\begin{array}{rcl} F : D(0,m) & \longrightarrow & D(0,r) \\ u & \longmapsto & F(u) \end{array}$$

vérifiant

$$g_u(F(u)) = 0 \quad \forall\, u \in D(0,m)$$

ou bien

$$f(F(u)) = u$$

on a bien sûr

$$f(F(0)) = 0 \Longleftrightarrow F(0) = 0$$

2. a) La fonction $z \mapsto \frac{zf'(f)}{f(z)}$ étant prolongeable en 0 par holomorphie (car $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$),
par suite, avec le théorème des résidus, on a

$$\begin{aligned} \int_{C(0,r)} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz &= 2\pi i Res(\frac{zf'(z)}{f(z)}, 0) \\ &= 0 = F(0) \end{aligned}$$

b) Pour $u \in D(0,m)$ et $u \neq 0$ la fonction

$$z \mapsto \frac{zf'(z)}{f(z) - u}$$

est méromorphe dans $D(0,r)$, ayant pour pôle simple $F(u)$, d'où par le théorème des résidus

$$\int_{C(0,r)} \frac{zf'(z)}{f(z) - u} dz = 2\pi i Res\left(\frac{zf'(z)}{f(z) - u}, F(u)\right)$$

Mais on a

$$\begin{aligned} Res\Big(\frac{zf'(z)}{f(z) - u}, F(u)\Big) &= \lim_{z \to F(u)} (z - F(u))\Big(\frac{zf'(z)}{f(z) - u}\Big) \\ &= \lim_{z \to F(u)} \frac{F(u)f'(F(u))}{f'(F(u))} = F(u). \end{aligned}$$

D'où le résultat

$$F(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{zf'(z)}{f(z) - u} dz.$$

c) La fonction F est développable en série entière en 0 (car elle holomorphe dans $D(0,m)$), elle s'écrit sous la forme

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n \text{ pour } |u| < m,$$

avec

$$a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

(ici $a_0 = F(0) = 0$) de plus, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$F^{(n)}(u) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{zf'(z)}{(f(z)-u)^{n+1}} dz$$

pour $u = 0$, on a pour tout entier $n \geq 0$

$$a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{zf'(z)}{[f(z)]^{n+1}} dz$$

d) On a

$$h_n'(z) = \frac{1}{[f(z)]^n} - \frac{nzf'(z)}{[f(z)]^{n+1}}$$

D'où

$$0 = \int_{C(0,r)} h_n'(z)dz = \int_{C(0,r)} \frac{dz}{[f(z)]^n} - n2\pi i a_n.$$

Par suite pour tout entier $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_{C(0,r)} \frac{dz}{[f(z)]^n}$$

3. $f(z) = ze^{-z}$ est une fonction holomorphe sur tout $\mathbb{C}$. De plus

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1 \neq 0$$

et

$$f(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in D(0,1)\backslash\{0\}.$$

a) La borne inférieure de $|f|$ sur le cercle unité $C(0,1)$ est

$$m = \inf_{|z|=1} |ze^{-z}| = \inf_{|z|=1} |e^{-z}| = \inf_{\theta\in[0,2\pi]} |e^{-\cos\theta}| = \frac{1}{e}.$$

D'autre part, par la question 2) - d, on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{z^n e^{-nz}} = \frac{1}{2\pi i n}(2\pi i)Res\left(\frac{e^{nz}}{e^{n^z}}, 0\right).$$

D'où

$$a_n = \frac{1}{n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!} \quad \forall\, n \geq 1)$$

b) Le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} z^n$ est tel que

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n-1}}{a_n}| = \lim_{n\to+\infty} (\frac{n+1}{n})^{n-1} = \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e.$$

Chapitre 7

Notion de primitive et topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$

1 Notions d'homotopie et de simple connexité

Définition 1.1
Soit γ_0 et γ_1 deux chemins d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ (i.e $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ continus, de classe C^1 par morceaux) reliant deux points α et β dans Ω.
On dit que γ_0 et γ_1 sont homotopes s'il existe une application continue

$$\begin{array}{rcl} H : [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & \Omega \\ (s,t) & \longmapsto & H(s,t) = H_s(t) \end{array}$$

telle que

i) $H_0 = \gamma_0$ *et* $H_1 = \gamma_1$.

ii) Pour tout $s \in [0,1]$, H_s *est un chemin* C^1 *par morceaux.*

iii) Pour tout $s \in [0,1]$, $H_s(0) = \alpha$, $H_s(1) = \beta$.

Autrement dit, γ_0 et γ_1 sont homotopes si on peut déformer continûment γ_0 sur γ_1 par une famille de chemins reliant α et β.

Définition 1.2
Soit γ_0 et γ_1 deux chemins fermés de Ω (i.e $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ continus, de classe C^1 par morceaux tels que $\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ et $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$).
On dit que γ_0 et γ_1 sont homotopes s'il existe une application continue

$$\begin{array}{rcl} H : [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (s,t) & \longmapsto & H(s,t) = H_s(t) \end{array}$$

telle que

i) $H_0 = \gamma_0$ *et* $H_1 = \gamma_1$.

ii) Pour tout $s \in [0,1]$, H_s *est un chemin de* Ω.

iii) Pour tout $s \in [0,1]$, $H_s(0) = H_s(1)$.

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

• La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur $Lacet(\Omega, z)$ l'ensemble des lacets de Ω de base z, i.e les chemins fermés de Ω d'origine et d'extremité z. On la note $\sim$.

• Lorsque Ω est connexe par arcs, on définit le groupe fondamental de Ω noté par

$$\pi_1(\Omega) = Lacet(\Omega, z) \Big/ \sim$$

comme le quotient de l'ensemble $Lacet(\Omega, z)$ par la relation d'homotopie (z étant un point arbitraire de Ω).
On montre que ces espaces quotients définis à partir de z sont isomorphes.
Cette notion de groupe fondamental est trés importante en topologie algébrique. On montre que deux espaces topologiques séparés, connexes par arcs et homéomorphes, ont le même groupe fondamental (à un isomorphisme près).

Définition 1.3
Un espace topologique X séparé connexe par arcs est dit simplement connexe si son groupe fondamental est trivial i.e s'il est réduit à l'unité.

• Autrement dit, X est simplement connexe si tout chemin fermé est homotope à un chemin constant.

• Ce qui est équivalent à dire que deux chemins de mêmes extrémités sont homotopes.

On a le résultat important suivant.

Proposition 1.1
Toute partie étoilée d'un espace vectoriel normé est simplement connexe.

PREUVE

Soit Ω une partie étoilée par rapport à un point $a \in \Omega$, cela veut dire que pour tout $x \in \Omega$ le segment $[a, x] \subset \Omega$.
Si γ est un lacet dans Ω d'extrémité et d'origine a alors l'application

$$\begin{array}{rcl} H : [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & \Omega \\ (s,t) & \longmapsto & H(s,t) = (1-s)a + s\gamma(t) \end{array}$$

est une homotopie de γ au chemin constant ε_a (où $|\varepsilon_a| = \{a\}$). D'où le résultat.
■

Corollaire 1.1
Tout convexe est simplement connexe.

Exemples

(i) $\mathbb{C}$ est simplement connexe.

(ii) Tout disque de $\mathbb{C}$ est simplement connexe.

(iii) $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe.

(iv) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z, Re(z) \leq 0 \text{ et } Im(z) = 0\}$ est simplement connexe car étoilé par rapport au point 1.

(v) Le cercle unité S^1 n'est pas simplement connexe.

---

2 Notion d'indice

Définition 2.1
Soit γ un chemin fermé de $\mathbb{C}$, on note par

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus |\gamma|$$

.
Pour $z \in \Omega$, on définit l'indice de γ au point z par

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{1}$$

Proposition 2.1

-

i) l'application

$$\begin{array}{rcl} Ind_\gamma : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & Ind_\gamma(z) \end{array}$$

est continue.

ii) L'image de Ind_γ est contenue dans $\mathbb{Z}$: $Im(Ind_\gamma) \subset \mathbb{Z}$.

iii) Ind_γ est constante sur chaque composante connexe de Ω.

iv) De plus, Ind_γ est nulle sur la composante connexe non bornée de Ω.

PREUVE

i) La continuité de Ind_γ découle trivialement du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre.

ii) Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un chemin C^1 vérifiant $\gamma(0) = \gamma(1)$ et montrons que $Im(Ind_\gamma) \subset \mathbb{Z}$.
En utilisant le pramétrage de γ, on obtient

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds = \frac{\omega}{2i\pi}.$$

Montrons que $\exp(\omega) = 1$ (ce qui équivalent à dire que $\frac{\omega}{2i\pi} \in \mathbb{Z}$).
Pour ce faire, considérons l'application

$$\varphi(t) = \exp\left\{ \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \right\}.$$

On a, par le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre

$$\varphi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \varphi(t).$$

On en déduit, en posant

$$h(t) = \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z}$$

que

$$h'(t) = 0$$

et donc que h est constante sur $[0,1]$.
Comme $\varphi(0) = 1$,

$$h(t) \equiv \frac{1}{\gamma(0) - z}$$

donc

$$\varphi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(0) - z} \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,1],$$

γ étant un chemin fermé, on en déduit que $\varphi(1) = 1$.
Le résultat reste vrai lorsque γ est continu et C^1 par morceaux.

iii) le 3ème point découle trivialement du fait que l'image d'un connexe par une application continue est un connexe et que les connexes de $\mathbb{Z}$ sont les singletons.

iv) Enfin, si z appartient à une composante connexe non bornée de Ω, en considérant (z_n) une suite de cette composante non bornée tendant vers l'infini, il est clair que

$$Ind_\gamma(z_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_n} ds \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Or on sait que

$$Ind_\gamma(z) = Ind_\gamma(z_n)$$

ce qui entraîne que $Ind_\gamma(z) = 0$. ■

Intuitivement, l'indice de γ au point z est le nombre de tours que fait le chemin γ autour du point z comptés selon le sens du parcours.

---

3 Théorème de Cauchy

Théorème 3.1
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *et* γ_0, γ_1 *deux chemins (fermés ou non) homotopes dans* Ω. *Alors*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Si Ω est simplement connexe, alors pour tous chemins γ_0, γ_1 de mêmes extrémités, on a

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Comme on le verra par la suite, cette propriété est très importante pour définir la notion de primitive d'une fonction holomorphe.

PREUVE DU THÉORÈME 3.1

On va tout d'abord supposer que γ_0 et γ_1 sont des chemins de classe C^2 avec une homotopie de classe C^2, i.e il existe une application

$$H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$$

de classe C^2 telle que $H_0 = \gamma_0, \quad H_1 = \gamma_1$ et

$$H(s,0) = \alpha, \quad H(s,1) = \beta \quad \forall s \in [0,1]$$

ou bien

$$H(s,0) = H(s,1) \quad \forall\, s \in [0,1].$$

Notons alors par

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_{H(s,.)} f(z)dz \\ &= \int_0^1 f(H(s,t))\frac{\partial H}{\partial t}(s,t)dt. \end{aligned}$$

On a alors par le théorème de dérivation sous le signe somme

$$\begin{aligned} g'(s) &= \int_0^1 \Big[f'(H(s,t))\frac{\partial H}{\partial s}(s,t)\frac{\partial H}{\partial t}(s,t) + f(H(s,t))\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial t}(s,t)\Big]dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\Big[f(H(s,t))\frac{\partial H}{\partial s}(s,t)\Big]dt \\ &= f(H(s,1))\frac{\partial H}{\partial s}(s,1) - f(H(s,0))\frac{\partial H}{\partial s}(s,0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque

$$\frac{\partial H}{\partial s}(s,1) = \frac{\partial H}{\partial s}(s,0) = 0$$

dans le cas où

$$H(s,0) = \alpha \text{ et } H(s,1) = \beta,$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial s}(s,0) = \frac{\partial H}{\partial s}(s,1)$$

dans le cas où

$$H(s,0) = H(s,1) \quad \text{pour tout} \quad s \in [0,1].$$

On en déduit que g est constante et donc

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Si γ n'est pas de classe C^2, il suffit de régulariser γ, i.e construire une famille γ_ε de chemins de classe C^2 convergeant pour la norme C^1 vers γ lorsque $\varepsilon \to 0$. Le résultat découle alors par passage à la limite. ■

---

4 Théorème des résidus avec indice

Théorème 4.1
Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction méromorphe dans Ω et γ un chemin fermé de Ω ne passant pas par les pôles de f, alors

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{\omega \in \mathcal{P}(f)} Ind_\gamma(\omega) Res(f,\omega)$$

où $\mathcal{P}(f)$ est l'ensemble des pôles de f dans Ω.

L'hyposthèse Ω simplement connexe n'est pas nécessaire, il suffit que γ soit homotope à un point dans Ω.

PREUVE DU THÉORÈME 4.1

Notons d'abord que les composantes connexes $Ind_\gamma \neq 0$ ne contiennent qu'un nombre fini de pôles de f.
Désignons par $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N$ ces pôles.
Il vient en vertu du théorème 6.1.1 qu'autour de chaque pôle ω_j

$$f(z) = \sum_{k=-n_j}^{-1} a_k(z-\omega_j)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-\omega_j)^k.$$

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

Notons par
$$Q_j(z) = \sum_{k=-n_j}^{-1} a_k(z-\omega_j)^k.$$
Considérons alors la fonction
$$g = f - \sum_{j=1}^{N} Q_j.$$
g ainsi définie est holomorphe dans un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ et contenant γ (puisque $\omega_1, \cdots, \omega_N$ sont des singularités artificielles de g).
Comme γ est homotope à un point, on a par le théorème de Cauchy
$$\int_\gamma g(z)dz = 0,$$
donc
$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{N} \int_\gamma Q_j(z)dz.$$
Or
$$\begin{aligned}\int_\gamma Q_j(z)dz &= \sum_{k=-n_j}^{-1} \int_\gamma a_k(z-\omega_j)^k dz \\ &= Ind_\gamma(\omega_j)Res(f,\omega_j) + \sum_{k=-n_j}^{-2} a_k \int_\gamma (z-\omega_j)^k dz\end{aligned}$$
ce qui achève la preuve du théorème puisque pour $n \geq 2$
$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-\omega_j)^n} = \int_\gamma \Big[-\frac{1}{n+1}\frac{1}{(z-\omega_j)^{n-1}}\Big]' dz = 0.$$
■

---

5 Primitives des fonctions holomorphes

Définition 5.1
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, on dit que f admet une primitive sur Ω s'il existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que
$$F'(z) = f(z) \quad \textit{pour tout} \quad z \in \Omega.$$

- Toute fonction holomorphe dans un disque $D(z_0, R)$ possède une primitive dans $D(z_0, R)$: $\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$

• La fonction $z \longmapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. En effet, s'il existait $F(z)$ telle que $F'(z) = \frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, alors on aurait

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{1}{z} dz = 0.$$

Or

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{1}{z} dz = 2i\pi.$$

Théorème 5.1
Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$.
Alors pour tout $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, f admet une primitive sur Ω.

Preuve

Soit $a \in \Omega$ et désignons par γ_z un chemin reliant a à z.
On sait, grâce au théorème de Cauchy, que si $\tilde{\gamma}_z$ est un autre chemin reliant a à z, alors

$$\int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{\tilde{\gamma}_z} f(\zeta) d\zeta$$

puisque

$$\int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{\tilde{\gamma}_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_z - \tilde{\gamma}_z} f(\zeta) d\zeta = 0$$

$\gamma_z - \tilde{\gamma}_z$ étant un chemin fermé de Ω donc homotope à un point.
Posons alors

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta.$$

D'après ce qui précède, cette définition ne dépend pas du chemin suivi.
Prouvons que F est holomorphe avec

$$F'(z) = f(z).$$

Pour $h \in \mathbb{C}$ assez petit, notons par $\tilde{\gamma}_{z+h}$ le chemin constitué de γ_z puis du segment reliant z à $z + h$.
On a donc

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_{[z,z+h]} f(\zeta) d\zeta \\ &= \int_0^1 f((1-t)z + t(z+h)) h dt \\ &= \int_0^1 f(z+th) h dt \\ &= f(z)h + \int_0^1 (f(z+th) - f(z)) h dt. \end{aligned}$$

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

Par le théorème des accroissements finis on a

$$|f(z+th)-f(z)| \le |t||h| \sup_{u\in[z,z+h]} |f'(u)|,$$

ce qui entraîne que

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} \longrightarrow f(z) \quad \text{lorsque} \quad h \to 0$$

d'où le théorème. ■

Définition 5.2
Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ tel que $0 \notin \Omega$ alors la fonction $z \longmapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive sur Ω.
On appelle $\log z$ cette fonction (qui est définie modulo une constante).

Exemple

Sur $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{z; \quad Rez \le 0 \text{ et } Imz = 0\}$ qui est simplement connexe, on peut définir une fonction Log(z).
La détermination principale du logarithme est la primitive de $z \longmapsto \frac{1}{z}$ sur Ω s'annulant au point $z = 1$.
Elle est d'après ce qui précède donnée par

$$\text{Log}(z) = \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

où si $z = re^{i\theta}$, γ_z est le segment joignant le point $z_1 = 1$ au point $z_2 = r$ suivi de l'arc de cercle contenu dans Ω joignant le point $z_2 = r$ au point $z = re^{i\theta}$ alors

$$\text{Log}(z) = \int_1^r \frac{dt}{t} + \int_0^\theta \frac{ire^{i\alpha}}{re^{i\alpha}} d\alpha = \text{Log}(r) + i\theta.$$

On note arg$(z) = Im(\text{Log}z) = \theta$.

Plus généralement, on peut aussi définir la fonction log sur l'ouvert

$$\Omega = \mathbb{C}\backslash \left\{re^{i\theta_1}, \quad r \ge 0\right\} \quad \text{où} \quad \theta_1 \in [-\pi, \pi[.$$

On trouve comme précédemment que si $z = re^{i\theta}$ avec

$$\theta \in]\theta_1, \theta_1 + 2\pi[\text{ si } \theta_1 \le 0,$$

$$\theta \in]\theta_1 - 2\pi, \theta_1[\text{ si } \theta_1 > 0,$$

alors Log$(z) = \text{Log}r + i\theta$.

• On définit aussi à partir de la fonction Log les fonctions puissances z^a où $a \in \mathbb{C}$, par $z^a = e^{a\mathsf{Log}(z)}$.

• Attention, on peut avoir

$$\mathsf{Log}(z_1 z_2) \neq \mathsf{Log}(z_1) + \mathsf{Log}(z_2).$$

Exemple

Soit $z_1 = z_2 = e^{2i\pi/3}$ alors $z_1 z_2 = e^{i4\pi/3} = e^{-2i\pi/3}$. On a

$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) = -\frac{2i\pi}{3}$$

tandis que

$$\mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2) = \frac{4i\pi}{3}.$$

EXERCICE 7.1

1. **Soit Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$. Montrer que si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tel que $Re(f) = Re(g)$ dans Ω, alors $f - g = ic$ dans Ω (où $c \in \mathbb{R}$).**
2. **Montrer que si Ω est un ouvert non vide, simplement connexe et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction harmonique dans Ω alors il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que**

$$Re(f) = u \quad \textbf{dans} \quad \Omega$$

f est unique à une constante additive (purement imaginaire) prés.

SOLUTION

1. Posons $h = f - g$. La fonction h est holomorphe sur l'ouvert connexe Ω et sa partie réelle est nulle. On en déduit que h est constante sur Ω. Puique h prend ses valeurs dans $i\mathbb{R}$, il existe une constante réelle c telle que $h = ic$.
2. Posons

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω telle que $Re(\varphi)$ et $Im(\varphi)$ satisfont les équations de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial u}{\partial x}) & = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{-\partial u}{\partial y}) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial u}{\partial x}) & = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\partial}{\partial x}(-\dfrac{\partial u}{\partial y}) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \end{cases}$$

Par conséquent φ est holomorphe dans Ω. Puisque Ω est simplement connexe, φ admet une primitive F dans Ω. Soit $Re(F) = w$, $Im(F) = \mu$; alors on sait que dans Ω,

$$F' = \frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y}$$

(à cause des équations de Cauchy-Riemann) d'où

$$F' = \varphi = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

par conséquent on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{dans} \quad \Omega$$

et par suite $u = w + c$ dans Ω, c étant une constante réelle. Ainsi

$$u = Re(F + c) = Re(f),$$

avec $f = F + c$.

---

6 Topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$

Définition 6.1
Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de $C^0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$.
On dit que la suite (f_j) converge uniformément vers f sur tout compact de Ω si pour tout compact K de Ω,

$$\sup_{z\in K} |f_j(z) - f(z)| \longrightarrow 0 \quad \textit{lorsque} \quad j \to \infty.$$

Théorème 6.1
Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{H}(\Omega)$. Supposons que f_j converge uniformément vers f sur tout compact de Ω alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
De plus, pour tout $n \geq 1$, la suite des dérivées nièmes de f_j, $(f_j^{(n)})_j$ converge uniformément vers $f^{(n)}$ sur tout compact de Ω.

Ce théorème est surprenant puisque le théorème de Weierstrass dit que pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, il existe (P_j) une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

PREUVE

Chapitre 8

Zéros des fonctions holomorphes et théorème de factorisation de Weierstrass

1 Produits infinis

Définition 1.1
Soit (u_n) *une suite de* $\mathbb{C}$. *On note*

$$P_n = u_1 u_2 \cdots u_n = \prod_{k=1}^{n} u_k.$$

On dit que le produit infini $\prod_{n\geq 1} u_n$ *converge si la suite* $(P_n)_{n\geq 1}$ *admet une limite finie* P *lorsque* n *tend vers l'infini.*
On note alors

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} u_n.$$

EXERCICE 8.1

Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ **converge.**

SOLUTION

On a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) = \exp(\frac{\pi^2}{6}).$$

EXERCICE 8.2

Etudier la convergence du produit infini $\prod_{n\geq 1} e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

SOLUTION

On a $P_n = e^{in\theta}$. D'où le produit infini en question converge si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Proposition 1.1
Si le produit infini $\prod_{n\geq 1} u_n$ *converge vers* $P \neq 0$, *alors la suite* (u_n) *converge vers 1.*

Preuve

Le résultat découle du fait que $P_{n+1} - P_n = P_n(u_{n+1} - 1)$ et du fait que $P \neq 0$.
■

L'hypothèse $u_n \to 1$ ne suffit pas pour que (P_n) converge .
Par exemple, si $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, on a

$$\log(P_n) = \sum_{j=1}^{n} \log(1 + \frac{1}{j}) \longrightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Proposition 1.2
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ *une suite de* $\mathbb{C}$, *on pose, pour tout entier* $n \geq 1$

$$P_n = \prod_{j=1}^{n} (1 + u_j) \quad et \quad P_n^* = \prod_{j=1}^{n} (1 + |u_j|).$$

Alors on a

$$P_n^* \leq \exp(|u_1| + \cdots + |u_n|). \tag{1}$$

$$|P_n - 1| \leq P_n^* - 1. \tag{2}$$

PREUVE

La relation (1) découle de l'inégalité $1+x \leq \exp(x)$ valable pour tout réel $x \geq 0$.
Montrons maintenant (2) par récurrence.
Pour $n = 1$, on a $|P_1 - 1| = |u_1| = P_1^* - 1$.
Supposons (2) vraie jusqu'à l'ordre n et montrons la pour $n + 1$.

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

Par définition

$$\begin{aligned} |P_{n+1}-1| &= |P_n(1+u_{n+1})-1| \\ &= |(P_n-1)(u_{n+1}+1)+u_{n+1}| \\ &\le (P_n^*-1)(1+|u_{n+1}|)+|u_{n+1}| \\ &\le P_n^*(1+|u_{n+1}|)-1 \\ &\le P_{n+1}^*-1. \end{aligned}$$

d'où la proposition. ∎

On en déduit le théorème fondamental suivant.

Théorème 1.1
Soit (u_n) une suite de fonctions d'une partie Ω de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Si la série $\sum |u_n(z)|$ converge uniformément sur Ω vers une fonction bornée sur Ω, alors le produit infini $\prod_{n\ge1}(1+u_n(z))$ converge uniformément sur Ω.
De plus si on note

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(z))$$

alors

$$\mathcal{Z}(f)=\cup_{n\ge1}\mathcal{Z}(1+u_n) \tag{3}$$

où $\mathcal{Z}(g)$ désigne l'ensemble des zéros de g.

$\boxed{\text{Preuve}}$

En notant par $P_n(z)=\prod_{j=1}^{n}(1+u_j(z))$, on a en vertu de (2)

$$\begin{aligned} |P_{n+k}(z)-P_n(z)| &= |P_n(z)|\Big|\prod_{j=1}^{k}(1+u_{n+j}(z))-1\Big| \\ &\le |P_n(z)|\Big(\prod_{j=1}^{k}(1+|u_{n+j}(z)|)-1\Big). \end{aligned}$$

Or

$$|P_n(z)|\le \exp\Big(\sum_{j=1}^{n}|u_j(z)|\Big)\le \exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|u_j(z)|\Big)\le C.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}|P_{n+k}(z)-P_n(z)| &\le C(\prod_{j=1}^{k}(1+|u_{n+j}(z)|)-1)\\ &\le C\Big[\exp\Big(\sum_{j=1}^{k}|u_{n+j}(z)|\Big)-1\Big]\\ &\le C\Big[\exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|u_{n+j}(z)|\Big)-1\Big].\end{aligned}$$

Enfin, comme la série $\sum|u_n(z)|$ converge uniformément sur Ω,

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \ \exists\ N\quad \text{tel que}\quad \forall\ n\ge N,\quad \sum_{j=1}^{\infty}|u_{n+j}(z)|\le\frac{\varepsilon}{2C}$$

ce qui entraîne, ε étant choisi assez petit, que pour $n\ge N$

$$|P_{n+k}(z)-P_n(z)|\le|P_n(z)|(e^{\varepsilon/2C}-1)\le\varepsilon. \tag{4}$$

Montrons maintenant (3). Il est clair que $\cup_{n\ge1}\mathcal{Z}(1+u_n)\subset\mathcal{Z}(f)$.
En faisant tendre k vers l'infini dans (4), on obtient, pour tout entier $n\ge N$

$$|f(z)-P_n(z)|\le\frac{\varepsilon}{C}|P_n(z)|$$

donc

$$|f(z)|\ge|P_n(z)|(1-\frac{\varepsilon}{C}),$$

d'où pour ε assez petit

$$|f(z)|\ge\frac{|P_n(z)|}{2}.$$

Par conséquent si $f(z_0)=0$ alors $P_n(z_0)=0$ et par suite il existe un entier j tel que $u_j(z_0)=-1$. ■

---

2 Zéros des fonctions holomorphes

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème précédent.

Théorème 2.1
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de $\mathcal{H}(\Omega)$.
On suppose que pour tout entier n, f_n est non identiquement nulle et que la série $\sum|f_n|$ converge uniformément sur tout compact de Ω.
Alors le produit infini $\prod_{n\ge1}(1+f_n(z))$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers la fonction

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z)).$$

De plus, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *et* $m(f,z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(1+f_n, z)$ *pour tout* $z \in \Omega$*,*
où $m(g,z)$ *désigne l'ordre du zéro de* g *au point* z *avec la convention* $m(g,z) = 0$ *si* $g(z) \neq 0$*.*

Nous allons maintenant construire explicitement une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ ayant des zéros fixés.
Il est clair que si $\{z_1, \cdots, z_k\}$ sont les zéros fixés d'ordres respectifs $m_1, \cdots, m_k$ d'une fonction holomorphe qu'on cherche à construire, on peut de manière triviale considérer la fonction

$$f(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_k)^{m_k}.$$

Le problème se pose vraiment lorsque l'ensemble des zéros fixés est une suite (z_n) sans point d'accumulation. Il s'agit donc d'une suite (z_n) tendant vers l'infini. Pour construire une telle fonction et ainsi montrer que l'unique contrainte qu'on a sur l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe est de n'admettre aucun point d'accumulation, on va introduire la suite (E_p) de fonctions suivantes qui vont servir de briques élémentaires pour construire des fonctions holomorphes s'annulant en un point donné.

Définition 2.1
Posons

$$E_0(z) = 1 - z,$$

et pour tout entier $p \geq 1$

$$E_p(z) = (1 - z) \exp(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}).$$

Il est clair que (E_p) est une suite de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ vérifiant

$$E_p(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1.$$

Lemme 2.1
Pour tout $|z| \leq 1$, *on a*

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}. \tag{5}$$

Preuve

Pour $p = 0$, l'inégalité (5) est immédiate.
Supposons que $p \geq 1$. Un calcul élémentaire donne

$$\begin{aligned} E_p'(z) &= -\exp(z + \cdots + \frac{z^p}{p}) + (1-z)(1 + z + \cdots + z^{p-1})\exp(z + \cdots + \frac{z^p}{p}) \\ &= -z^p \exp(z + \cdots + \frac{z^p}{p}). \end{aligned}$$

Comme $E_p(0) = 1$, on déduit que $1 - E_p(z)$ a un zéro d'ordre $p+1$ en 0. Il vient alors en vertu du théorème 1.1 du chapitre 4 que

$$1 - E_p(z) = z^{p+1} \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad \text{près de} \quad 0,$$

d'où

$$-E_p'(z) = \sum_{n \geq 0} (n+p+1) a_n z^{n+p}.$$

Or

$$-E_p'(z) = z^p \exp(z + \cdots + \frac{z^p}{p}) = \sum_{n \geq 0} b_n z^{n+p} \quad \text{avec} \quad b_n \geq 0.$$

Par unicité du développement d'une fonction holomorphe en série entière, on déduit que $a_n \geq 0$. Donc, pour $|z| \leq 1$

$$\begin{aligned} |1 - E_p(z)| &\leq |z|^{p+1} \sum_{n \geq 0} a_n |z|^n \\ &\leq |z|^{p+1} \sum_{n \geq 0} a_n \\ &\leq |z|^{p+1} \end{aligned}$$

puisque $\sum_{n \geq 0} a_n = 1 - E_p(1) = 1$.
D'où le lemme. ■

Théorème 2.2
Soit (z_n) *une suite de nombres complexes vérifiant* $z_n \neq 0$ *pour tout entier* n *et* $|z_n| \to +\infty$. *Si* $(p_n)_{n \geq 1}$ *est une suite de* $\mathbb{N}$ *telle que*

$$\forall\, r > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{1+p_n} < \infty, \tag{6}$$

alors le produit infini

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \tag{7}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une fonction entière dont l'ensemble des zéros est la suite (z_n) avec

$$m(P,a) = card\Big\{\quad n; \quad z_n = a \quad\Big\}. \tag{8}$$

• Si on cherche à construire une fonction holomorphe f sur $\mathbb{C}$ dont l'ensemble des zéros $Z(f) = \{(z_n), 0\cdots 0\}$, il suffit de prendre $f(z) = z^k P(z)$.

• L'hypothèse (6) est satisfaite pour $p_n = n-1$.
En effet, comme $|z_n| \to +\infty$ alors

$$\forall\, r > 0,\ \exists\, n_0(r)/ \quad \forall\, n > n_0(r), \quad |z_n| \geq 2r$$

donc

$$\frac{r}{|z_n|} \leq \frac{1}{2}$$

et pour
$p_n = n-1$, la série $\sum (\frac{r}{|z_n|})^{1+p_n}$ converge.

$\boxed{\text{Preuve}}$

Ce théorème découle aisément du théorème 2.1. En effet, on a en vertu du lemme précédent, pour $|z| \leq r$ et pour n assez grand de sorte que $|z_n| > r$

$$\Big|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\Big| \leq \left(\frac{|z|}{|z_n|}\right)^{1+p_n} \leq \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{1+p_n}$$

ce qui assure la convergence uniforme de la série

$$\sum_{n\geq 1} (1 - E_{p_n}(\frac{z}{z_n}))$$

sur $\overline{D(0,r)}$.
D'où le résultat. ∎

Théorème 2.3 (Théorème de factorisation de Weirestrass)
Soit f une fonction entière ne s'annulant pas à l'origine dont l'ensemble des zéros est $Z(f) = \{(z_n)\}$.
Alors il existe $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{N}$ telle que

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(\frac{z}{z_n}). \tag{9}$$

Si de plus 0 est un zéro d'ordre k de f, alors f s'écrit sous la forme

$$f(z) = z^k e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(\frac{z}{z_n}).$$

PREUVE

Soit $P(z)$ le produit infini donné par le théorème précédent. Il est alors clair que la fonction $\tilde{g} = \dfrac{f}{P}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et ne s'annule pas . Pour achever la preuve du théorème, il suffit de montrer l'existence d'une fonction $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que

$$e^{g(z)} = \tilde{g}(z).$$

Il suffit de poser

$$g(z) = \int_{[0,z]} \frac{\tilde{g}'(\zeta)}{\tilde{g}(\zeta)} d\zeta + a,$$

où $\tilde{g}(0) = e^a$. ■

Nous allons maintenant traiter le cas d'un ouvert Ω non vide quelconque de $\mathbb{C}$.

Théorème 2.4
Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, A un sous-ensemble au plus dénombrable de Ω sans point d'accumulation dans Ω et $(m(\alpha))_{\alpha\in A}$ une famille d'entiers positifs.
Il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $Z(f) = A$ et pour tout $\alpha \in A$, $\quad m(f, \alpha) = m(\alpha)$.

Comme corollaire de ce théorème, on a le résultat suivant qui donne une autre caractérisation des fonctions méromorphes.

Théorème 2.5 (Caractérisation des fonctions méromorphes)
Toute fonction méromorphe sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ est le quotient de deux fonctions holomorphes sur Ω.

PREUVE DU THÉORÈME 2.5

Soit f une fonction méromorphe sur Ω et $A = \{z_j\}$ l'ensemble des pôles de f d'ordre m_j.
Considérons $g(z)$ la fonction holomorphe donnée par le théorème 9.2.3 dont l'ensemble des zéros est l'ensemble $A = \{z_j\}$ avec m_j l'ordre de z_j . Il est alors clair que $g.f = h \in \mathcal{H}(\Omega)$ ce qui assure le théorème. ∎

PREUVE DU THÉORÈME 2.4

Le cas A fini étant trivial, on peut supposer que A est dénombrable.
Posons alors $A = \{(\alpha_n)\}$. On peut aussi supposer que A est borné quitte à faire la transformation homographique $\dfrac{1}{z - z_0}$ avec $z_0 \in \Omega \backslash A$.
Maintenant à $\alpha_n \in A$, on associe β_n tel que

$$|\beta_n - \alpha_n| = dist(\alpha_n, \mathbb{C} \setminus \Omega).$$

Il est clair que $\beta_n \notin \Omega$ et $|\beta_n - \alpha_n| \to 0$.
Le produit infini

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n})$$

répond à la question.
En effet, en vertu de ce qui précéde, il suffit de montrer que la série de terme général $u_n(z) = 1 - E_n(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n})$ converge uniformément sur tout compact de Ω. Soit K un compact de Ω et posons

$$r_n = 2|\alpha_n - \beta_n|.$$

Comme $r_n \to 0$, il existe un entier N tel que pour tout $z \in K$ et tout $n \geq N$

$$|z - \beta_n| > r_n.$$

On en déduit que pour tout $n \geq N$

$$\left| \frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n} \right| \leq \frac{1}{2}$$

donc, en vertu du lemme 9.2.1

$$\left| 1 - E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n} \right) \right| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$$

d'où le théorème. ∎

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

$\boxed{\text{Exercice } 8.3}$

Démontrer que la fonction f définie par

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + z^{2^n}\right)$$

est holomorphe sur le disque unité ouvert D, et que l'on a

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} \quad \textbf{pour tout} \quad z \in \mathbb{C}.$$

$\boxed{\text{Solution}}$

Démontrons d'abord que f est holomorphe sur $D(0,1)$.
Soit K un compact de $D(0,1)$. Il existe $0 < r < 1$ tel que $K \subset \overline{D(0,r)}$. Pour $z \in K$, on a alors $|z^{2^n}| \leq r^{2^n}$. Il en résulte que la série de terme général z^{2^n} est normalement convergente sur K. D'où le résultat.
Démontrons maintenant la relation $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$.
Pour $z \in D(0,1)$, posons:

$$g(z) = \frac{1}{1-z^2} \quad \text{et} \quad h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Il vient facilement:

$$h(z) = h(z^2) = \cdots = h(z^{2^n}) = \ldots$$

D'après le premier point, $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, donc h est continue sur $D(0,1)$. Alors:

$$h(z) = h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1.$$

On a donc $g = f$.

$\boxed{\text{Execice}}$(*Fonction gamma*)

Soit, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

1. **Montrer que la fonction gamma Γ est holomorphe dans le demi-plan ouvert Re$z > 0$, et qu'on $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$ tel que Re$z > 0$**
$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} (\log t)^n t^{z-1} dt.$$

2. **Vérifier qu'on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que Re$z > 0$**
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$
en déduire

   (i) $\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, z \in \mathbb{C},\ \textbf{Re}z > 0$$

3. **Montrer que Γ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C}\backslash(\mathbb{Z}^-)$ et que Res$(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$ pour tout entier $n \geq 1$.**

4. **On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que Re$z > 0$,**
$$\Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

   a) **En posant $t = nx$, montrer que**
$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= n^z \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^n dx \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} \end{aligned}$$
   et que pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$
$$\lim_{n\to+\infty} \Gamma_n(z) = \Gamma(z)$$
   (Formule d'Euler-Gauss).

   b) (i) **Montrer que si $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ (par $n \geq 1$ entier) alors $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = \gamma$ existe dans $\mathbb{R}$ et $\gamma \simeq 0,577$ (γ est appelé nombre d'Euler)**

   (ii) **Montrer que si $f_k(z) = (1 + \frac{z}{k})e^{-\frac{z}{k}}$ (où $z \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^*$), alors**
$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} f_k(z) = f(z)$$
   existe dans $\mathbb{C}$.

   (la convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$) et que
$$f(z) \neq 0 \textbf{ pour tout } z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-.$$

(iii) **En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,**

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

(appelé produit canonique de Weierstrass).

5. **Montrer, pour tout $z \in \mathbb{C}$,**

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

En déduire que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{1})^2 (\frac{4}{3})^2 \cdots (\frac{2n}{2n-1})^2 \frac{1}{2n+1}$$

(appelé formule de Wallis)

6. **En déduire, en utilisant la formule canonique de Weierstrass, la relation des compléments suivante :**

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$$

7. **Montrer la formule de duplication de Gauss-Legendre suivante :**

$$\forall \ z \in \mathbb{C} \text{ **tel que** } 2z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-,$$

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}).$$

SOLUTION

1. On a pour $t \in]0, +\infty[$, $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$. Notons que

$$|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}e^{+\text{Re}z-1},$$

donc si $0 < \alpha < \text{Re}z < \beta$ alors

$$|e^{-t}t^{z-1}| \leq K(t)$$

avec

$$K(t) = \begin{cases} e^{-t}t^{\beta-1} & \text{si } t \geq 1 \\ t^{\alpha-1} & \text{si } 0 < t < 1. \end{cases}$$

On a $\int_0^{+\infty} K(t)dt$ converge (puisque $\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$ converge et $\int_1^{\infty} e^{-t}t^{\beta-1}dt$ converge pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$). Cela prouve (en appliquant le théorème des

Hajer Bahouri, Mohamed Majdoub, Amor Nakour

fonctions définies par des intégrales) que la fonction Γ est holomorphe dans l'ouvert $\{ z \in \mathbb{C}, \quad \text{Re} z > 0 \}$ de $\mathbb{C}$. De plus, on peut dériver sous le signe intégrale, et on a pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que Re$z > 0$

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^\infty e^{-t}(\log t)^n t^{z-1} dt.$$

2. Une intégration par parties dans $\Gamma(z)$, pour Re$z > 0$, donne le résultat

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \left[e^{-t} t^z \right]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

car pour Re$z > 0$

$$[e^{-t}t^z]_{t=0}^{t=\infty} = \lim_{t \to +\infty} |e^{-t}t^z| = 0$$

puisque $\Gamma(1) = 1$, on déduit que

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

L'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, valable pour Re$z > 0$, donne par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}.$$

3. Le membre à droite de cette dernière églité est une fonction holomorphe dans

$$\{z \in \mathbb{C}/\text{Re} z > -n\} \backslash \{0, -1, -2, \cdots, -(n-1)\},$$

il permet donc de prolonger Γ analytiquement à ce domaine et Γ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}^-$.
Comme précédemment, si $n \in \mathbb{N}, -n$ est un pôle simple de Γ, pour $m > n$

$$\begin{aligned} \lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(m-n)}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)1.2\cdots(m-n+1)} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \end{aligned}$$

(en utilisant le fait que $\Gamma(m-n) = (m-n+1)!$) cela montre alors que

$$Res(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

4. a) En posant $t = nx$, on aura pour Re$z > 0$ et $n \geq 1$

$$\Gamma_n(z) = n^z \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^n dx = n^z \beta(z, n+1)$$

où

$$\beta(z,\zeta) = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{\zeta-1}dx$$

avec Re$z > 0$ et Re$\zeta > 0$.
Puisqu'on a (voir exercice suivant)

$$\beta(z,\zeta) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)},$$

alors

$$\Gamma_n(z) = n^z \frac{\Gamma(z)\Gamma(n+1)}{\Gamma(z+n+1)}.$$

En utilisant la 2ème question et $\Gamma(n+1) = n!$, on a

$$\Gamma_n(z) = \frac{n^z.n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} \qquad (*)$$

La définition de $\Gamma_n(z)$ sous-forme intégrale donne une fonction holomorphe dans Re$z > 0$ et le membre à droite de l'égalité $(*)$ donne un prolongement analytique de Γ_n dans $\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,\cdots,-n\}$. Montrons maintenant la formule d'Euler-Gauss. De l'inégalité $1-x \leq e^{-x}\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$|t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n| \leq e^{Rez-1}e^{-t}, \quad 0<t<n,$$

donc

$$\left|t^{z-1}(1-\frac{t}{n})^n\right|\chi_{]0,n[}(t) \leq e^{Rez-1}e^{-t},\ \text{pour } t>0$$

et on sait que $\int_0^\infty e^{\text{Re}z-1}e^{-t}dt$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} t^{z-1}(1-\frac{t}{n})^n\chi_{]0,n[}(t) = e^{-t}t^{z-1},\ \text{pour } t>0$$

(avec $\chi_{]0,n[}$ la fonction caractéristique de $]0,n[$).
Enfin, par le théorème de Lebesgue, on conclut que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(z) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty t^{z-1}(1-\frac{t}{n})^n\chi_{]0,n[}(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = \Gamma(z).\end{aligned}$$

b) i) Remarquons que

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n = \frac{1}{n+1} + \log(1-\frac{1}{n+1})$$

est strictement positif et $0 < \gamma_n < \gamma_1 = 1$ d'où l'existence de $\gamma = \lim \gamma_n$.

D'autre part pour tout entier $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\gamma_n &= (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}) - \int_1^n \frac{dt}{t}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\Big[\frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\Big] + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}(\frac{t-k}{kt})dt + \frac{1}{n}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 \frac{x}{k(x+k)}dx + \frac{1}{n}\\ &= \int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x}{k(x+k)}\Big)dx + \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

D'où

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\gamma_n = \int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k(x+k)}\right)dx.$$

Puisque

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(x+k)} < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},\ \text{pour } 0 < x < 1.$$

pour on a :

$$0 < \frac{1}{2} < \gamma < \frac{\pi^2}{12} \simeq 0,83.$$

ii) On remarque que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$ on a

$$|1-(1-z)e^z| \leq |z|^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = |z|^2$$

on obtient donc, $\forall\ k = 1, 2, \cdots$

$$|f_k(z)-1| = \left|\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k} - 1\right| \leq \frac{|z|^2}{k^2}$$

dès que $|z| \leq k$, ainsi, la série $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(z)-1|$ est normalement convergente dans tout compact de $\mathbb{C}$. Par le théorème des produits infinis, le point (ii) est établi.

(iii) Montrons maintenant que pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{e^{\gamma z}}f(z).$$

En effet, par un calcul algébrique, on a

$$\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{e^{-\gamma_n z}}{z}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{z}{k})^{-1}e^{z/k}.$$

En utilisant a, b-(i) et b - (ii), on obtient le résultat par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$; et on a la formule suivante (appelée le produit canonique de Weierstrass)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

5. Pour tous $M > 0$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| \leq M$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^2}{n^2}\right| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

le produit infini $z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2})$ converge sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers la fonction entière

$$f(z) = z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2}), \quad z \in \mathbb{C},$$

de plus pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

Mais, pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash(\pi\mathbb{Z})$, on a

$$cotgz = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

(car

$$\begin{aligned} cotgz - \frac{1}{z} &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \Big[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi}\Big] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}). \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi cotg\pi z, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$$

et par suite $f(z) = c \sin \pi z, \ \ z \in \mathbb{C}$
où la constante c vérifie

$$\frac{1}{\pi} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{\pi z} = c \lim_{z\to 0} \frac{\sin \pi z}{\pi z} = c.$$

Par conséquant $f(z) = \frac{1}{\pi} \sin \pi z$, $z \in \mathbb{C}$; On a donc :

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

En posant $z = \frac{1}{2}$, on aura

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2.2.4.4.6.6\cdots}{1.3.3.5.5.7\cdots}$$

d'où

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{1})^2 (\frac{4}{3})^2 \cdots (\frac{2n}{2n-1})^2 \frac{1}{2n+1}$$

(égalité appelée formule de Wallis).

6. Par la formule canonique de Weierstrass (4-b) et par 5), on a, $\forall \ z \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \frac{1}{\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}) = -z \frac{\sin \pi z}{\pi}$$

d'autre part, par la formule de Γ, on a

$$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z), \quad \forall \ z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{N}$$

d'où

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \forall \ z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$$

(formule appelée relation des compléments).

7. On pose, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $2z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}^-$

$$g(z) = \frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(2z)}.$$

Puisqu'on a $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, et $\Gamma(1) = 1$, on a

$$g(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Pour établir la relation (de duplication de Gauss-Legendre) il suffit de montrer que $g(z)$ est constante. Pour le faire, on utilise la formule d'Euler-Gauss établie en 4-a.

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}$$

$$\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)! n^{z+\frac{1}{2}}}{(z+\frac{1}{2})(z+\frac{3}{2})\cdots(z+\frac{2n-1}{2})}$$

et

$$\Gamma(2z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!(2n)^{2z}}{2^{2n} z(z+\frac{1}{2})\cdots(z+\frac{2n-1}{2})}$$

après un calcul simple, on a

$$g(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n-1)!]^2 n^{\frac{1}{2}} 2^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

d'où $g(z)$ est constante égale à $g(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

$\boxed{\text{EXERCICE 8.4}}$(*Fonction Bêta*)

Soit, pour $z, \zeta \in \mathbb{C}$

$$\beta(z,\zeta) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1}dt.$$

1. **Montrer que** $z \mapsto \beta(z,\zeta)$ **est holomorphe pour Re**$z > 0$ **(avec** ζ **fixe, Re**$\zeta > 0$) **et** $\zeta \mapsto \beta(z,\zeta)$ **est holomorphe pour Re**$\zeta > 0$ **(avec** z **fixe, Re**$z > 0$**).**

2. **Montrer pour tous** $z, \zeta \in \mathbb{C}$ **tel que Re**$z > 0$ **et Re**$\zeta > 0$, **on a**

$$\beta(z,\zeta) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)}.$$

En déduire que $\beta(z,\zeta) = \beta(\zeta,z)$ **et qu'en posant** $t = \cos^2 x$ **dans la définition de** $\beta(z,\zeta)$**, on obtient**

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2z}(\sin x)^{2\zeta}dx = \frac{1}{2}\beta(z,\zeta)$$

où $z, \zeta \in \mathbb{C}$ **tel que Re**$z > 0$ **et Re**$\zeta > 0$.

$\boxed{\text{SOLUTION}}$

On note, pour $z, \zeta \in \mathbb{C}$

$$\beta(z,\zeta) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1}dt$$

(appelée fonction bêta).

1. Convergence de $\beta(z,\zeta)$

Fixons $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que Re$\zeta > 0$; on a

$$|t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1}| = t^{Rez-1}(1-t)^{Re\zeta-1}, \quad 0 < t < 1,$$

et puisque l'intégrale $\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\mu dt$ converge si $\alpha > 0$ et $\mu > 0$, on obtient (par le théorème des fonctions définies par des intégrales) que la fonction

$z \mapsto \beta(z,\zeta)$ est holomorphe si $0 < \alpha < Rez$ avec $\mu = Re\zeta > 0$ (ζ fixé), car alors

$$|t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1}| \leq t^{\alpha-1}(1-t)^{\mu-1}, \quad 0 < t < 1.$$

En variant α, on obtient que la fonction $z \mapsto \beta(z,\zeta)$ est holomorphe pour Re$z > 0$ (avec ζ fixé tel que Re$\zeta > 0$).

On obtient de la même manière que la fonction $\zeta \mapsto \beta(z,\zeta)$ est holomorphe pour Re$\zeta > 0$($z \in \mathbb{C}$ fixé tel que Re$z > 0$).

2. Il suffit de montrer la formule pour z et ζ réels et > 0. On obtient en utilisant le théorème de Fubini pour les fonctions positives

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(\zeta) &= \Big(\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt\Big)\Big(\int_0^\infty s^{\zeta-1}e^{-s}ds\Big)\\ &= \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\Big(\int_0^\infty t^{\zeta}v^{\zeta-1}e^{-tv}dv\Big)dt\end{aligned}$$

(en posant $s = tv$),
D'où

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(\zeta) &= \int_0^\infty v^{\zeta-1}\Big(\int_0^\infty e^{-(1+v)t}t^{z+\zeta-1}dt\Big)dv\\ &= \int_0^\infty v^{\zeta-1}\Big(\int_0^\infty \frac{e^{-w}w^{z+\zeta-1}}{(1+v)^{z+\zeta}}dw\Big)dv\\ &= \Big(\int_0^\infty \frac{v^{\zeta-1}}{(1+v)^{z+\zeta}}dv\Big)\Big(\int_0^\infty e^{-w}w^{z+\zeta-1}dw\Big)\end{aligned}$$

Mais, on a

$$\int_0^\infty e^{-w}w^{z+\zeta-1}dw = \Gamma(z+\zeta)$$

et

$$\int_0^\infty \frac{v^{\zeta-1}}{(1+v)^{z+\zeta}}dv = \int_0^\infty \left(\frac{v}{1+v}\right)^{\zeta-1}\left(\frac{1}{1+v}\right)^{z+1}dv$$

par le changement de variable $t = \frac{1}{1+v}$ on a

$$\int_0^\infty \frac{v^{\zeta-1}}{(1+v)^{z+\zeta}}dv = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1}dt = \beta(z,\zeta).$$

Par conséquent, on a pour tous Re$z > 0$ et Re$\zeta > 0$

$$\Gamma(z)\Gamma(\zeta) = \beta(z,\zeta)\Gamma(z+\zeta)$$

ou bien

$$\beta(z,\zeta) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)}$$

Remarquons qu'on a :

$$\beta(z,\zeta) = \beta(\zeta,z).$$

3. En posant $t = \cos^2 x$ dans l'intégrale $\beta(z, \zeta)$, on aura

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2z} (\sin x)^{2\zeta} dx = \frac{1}{2}\beta(z, \zeta)$$

qui s'écrit à l'aide de la fonction Γ comme

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{\alpha-1} (\sin x)^{\mu-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(\mu/2)}{2\Gamma(\frac{\alpha+\mu}{2})}, \text{ pour Re } \alpha > 0 \text{ et Re } \mu > 0.$$

Bibliographie

[1] L. Ahlfors : Complex Analysis, 2nd edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
[2] M. Amara : Analyse Complexe, C.P.U, 2002.
[3] J. Bak and D. J. Newman : Complex Analysis, 2nd edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer,1996.
[4] J-M. Bony : M ethodes math ematiques pour les sciences physiques, Edition de l' ecole polytechnique, 2000.
[5] R. C. Buck : Advanced Calculus, 2nd edition, McGraw-Hill Book Co.,New York, 1966.
[6] C. Caratheodory : Theory of Functions of a Complexe Variable, Vol. II,Chelsea Publishing Co., New York, 1954.
[7] H. Cartan : Th eorie el ementaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, edition Hermann.
[8] Srishti D. Chatterji : Cours d'Analyse 2, Presses polytechniques et uni-versitaires romandes.
[9] J. Conway : Functions of One Complex Variable, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1978.
[10] J. Dixon : A Brief Proof of Cauchy's Integral Theorem, Proc. Amer.Math. Soc., 29(1971), 625-626.
[11] W. Fulks : Advanced Calculus, Wiley and Sons, New York, 1961.
[12] P. Henrici : Applied and Computational Complex Analysis, Vols. 1, 2,and 3, Wiely, 1974, 1977, and 1986.
[13] G. Lebeau : Th eorie des distributions et analyse de Fourier, Edition 2001, Ecole polytechnique.
[14] J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudi es : Cours de math ematiques, Tome2, Analyse, Dunod Universit e, Bordas, Paris, 1977.
[15] J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudi es : Cours de math ematiques, Tome4, Equations di erentielles, int egrales multiples, Dunod Universit e, Bordas,Paris, 1977.
[**16] A. I. Markushevich :** Theory of Functions of a Complex Variable, Prentice-Hall, Englewood Cli s, N.J., 1965.
[17] R. Remmert : Theory of Complex Functions, Graduate Texts in Math-ematics 122, Springer-Verlag, 1990.
[18] W. Rudin : Principles of Mathematical Analysis, 2nd edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.
[19] M. H. Sliman : Analyse Complexe, Facult e des Sciences de Tunis.
[20] E.H. Spanier : Algebraic Topology, McGraw-Hill Book Co., New York,1966.
[21] P. Tauvel : Exercices d'analyse complexe, Masson, Paris, 1994.
[22] E. C. Titchmarsh : The Theory of Functions, 2nd edition, Oxford Uni-versity Press, London, 1939.
[23] L. Zakman : Picard's Theorem without Tears, Amer. Math. Monthly,85 (1978), 265-268.