J'intègre

Jean-Marie Monier

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE PC-PSI-PT

NOUVELLE ÉDITION

- Un cours conforme au programme
- Des exercices-types résolus
- Les méthodes à retenir
- De nombreux exercices et problèmes corrigés

5e édition

DUNOD

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE PC-PSI-PT

Cours, méthodes et exercices corrigés

Jean-Marie Monier

*Professeur en classe de Spéciales
au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon*

5e édition

DUNOD

Consultez nos parutions sur dunod.com

Maquette intérieure : Lasertex

Couverture : Bruno Loste

ISBN 978-2-10-053970-3

Table des matières

Cours

Solutions des exercices

Préface

Jeune lycéen, j'avais, pour les manuels scolaires, une vénération quasi-religieuse. Que représentaient pour moi ces livres qu'une main zélée avait soigneusement recouverts en début d'année ? Je ne saurais le dire avec précision : ils contenaient, sans doute, la Vérité. À mon sens, par exemple, un théorème ne pouvait être énoncé que dans le scrupuleux respect des termes de l'ouvrage ; approximative, la restitution n'était pas valable. L'utilisation, par les professeurs, des polycopiés (rappels et compléments de cours, énoncés de problèmes ...) n'était pas, alors, habituelle ; je pense, aujourd'hui, que cela était dû bien plus aux difficultés de reprographie qu'à un non-désir de ces professeurs d'imprimer leur griffe personnelle par le choix d'exercices originaux. Ils se référaient constamment aux manuels, en suivaient fidèlement la progression, y puisaient les exercices. Je me souviens, d'ailleurs, d'avoir été troublé quand, en Terminale, mon professeur de Math., que je révérais aussi, se permettait parfois quelques critiques à l'égard d'un ouvrage qu'il nous avait pourtant conseillé ! Quant aux auteurs de ces livres, ils restaient énigmatiques : qui étaient ces demi-dieux détenteurs du Savoir ?

Plus tard, mes rapports d'étudiant avec les manuels didactiques ont, évidemment, évolué, mais je crois avoir, naïvement sans doute, conservé cette approche faite d'envie et de respect qui m'empêche, par exemple, de porter des annotations en marge – je ne jouerai pas la farce d'un Pierre de Fermat ! – et cet a priori favorable qui me rendrait difficile la rédaction d'une critique objective.

Heureusement, tel n'est pas mon propos aujourd'hui ! Mais j'ai voulu, par ces quelques mots, souligner l'importance capitale – même dans le subconscient de chacun – de ces livres de cours sur lesquels vous travaillez durant vos études et qui vous accompagnent toute votre vie.

Aucun professeur, fût-il auteur de manuels, ne songerait à conseiller un livre en remplacement d'un enseignement vivant et vécu. Mais, le cours imprimé, s'il est fidèle à la lettre et à l'esprit du programme d'une classe, peut aider, de façon très importante, l'étudiant consciencieux. Celui-ci, surtout lorsqu'il est débutant, trouvera la sécurité dont il a besoin dans un plan clair, précis, rigoureux, dans une présentation particulièrement soignée où les diverses polices de caractères sont judicieusement alternées, dans la vision d'ensemble des questions dont traite l'ouvrage. Il y recherchera, avec la certitude de les obtenir, telle démonstration qu'il n'a pas bien comprise, tel exemple ou contre-exemple qui l'aidera à mieux assimiler une notion, la réponse à telle question qu'il n'a pas osé poser sinon à lui-même...

Pour que le livre joue ce rôle d'assistant – certes passif mais constamment disponible – il doit, je pense, être proche des préoccupations immédiates de l'étudiant, ne pas exiger, pour sa lecture, un savoir qui n'a pas encore été acquis, ne pas rebuter par l'exposé trop fréquent de notions trop délicates ; mais il doit, cependant, contenir une substance suffisante pour constituer les solides fondations sur lesquelles s'échafaude la pyramide du savoir scientifique.

On l'imagine, dès lors, aisément : l'écriture d'un tel manuel, à l'intention des étudiants des classes préparatoires ou d'un premier cycle universitaire, demande, à côté de la nécessaire compétence, des qualités pédagogiques certaines, affinées par une longue expérience professionnelle dans ces sections, une patience et une minutie rédactionnelles inouïes.
Jean-Marie Monier a eu le courage de se lancer dans ce gigantesque travail et les ouvrages qu'il nous propose aujourd'hui – après les recueils d'exercices qui ont eu le succès que l'on sait – montrent qu'il a eu raison : il a, me semble-t il, pleinement atteint le but qu'il s'était fixé, à savoir rédiger des livres de cours complets à l'usage de tous les étudiants et pas seulement des polytechniciens en herbe. Les nombreux ouvrages d'approfondissement ou de spécialité seront, évidemment, lus et savourés plus tard, ... par ceux qui poursuivront. Pour l'instant, il faut, à l'issue de la Terminale, assimiler complètement les nouvelles notions de base (la continuité, la convergence, le linéaire...) ; le lecteur est guidé, pas à pas, par une main sûre qui le tient plus fermement dès qu'il y a danger : les mises en garde contre certaines erreurs sont le fruit de l'observation répétée de celles-ci chez les élèves.

À tout instant, des exercices sont proposés qui vont l'interpeller : il sera heureux de pouvoir, quelques dizaines de pages plus loin, soit s'assurer que, par une bonne démarche il est parvenu au bon résultat, soit glaner une précieuse indication pour poursuivre la recherche : le livre forme un tout, efficace et cohérent.

J'ai dit quel rôle majeur dans la formation d'un jeune esprit scientifique peut jouer un manuel qui lui servira de référence pendant longtemps. Sa conception, sa rédaction, sa présentation sont, alors, essentielles : on ne peut que viser à la perfection !

C'est tout le sens du travail effectué par Jean-Marie Monier avec une compétence, un goût, une constance admirables, depuis le premier manuscrit jusqu'aux ultimes corrections, dans les moindres détails, avant la version définitive.

Ces ouvrages qui répondent à un réel besoin aujourd'hui, seront, j'en suis persuadé, appréciés par tous ceux à qui ils s'adressent – par d'autres aussi sans doute – ceux-là mêmes qui, plus tard, diront : « Ma formation mathématique de base, je l'ai faite sur le MONIER ! ».

H. Durand
Professeur en Mathématiques Spéciales PT*
au lycée La Martinière Monplaisir à Lyon

Avant-propos

Ce nouveau Cours de Mathématiques avec exercices corrigés s'adresse aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles (1re année PCSI-PTSI, 2e année PC-PSI-PT, PC*-PSI*-PT*), aux étudiants du premier cycle universitaire scientifique et aux candidats aux concours de recrutement de professeurs.

Le plan en est le suivant :

Analyse PCSI-PTSI : ***Analyse*** en 1re année
Algèbre PCSI-PTSI : ***Algèbre*** en 1re année
Géométrie PCSI-PTSI : ***Géométrie*** en 1re année
Analyse PC-PSI-PT : ***Analyse*** en 2e année
Algèbre et géométrie PC-PSI-PT : ***Algèbre et géométrie*** en 2e année.

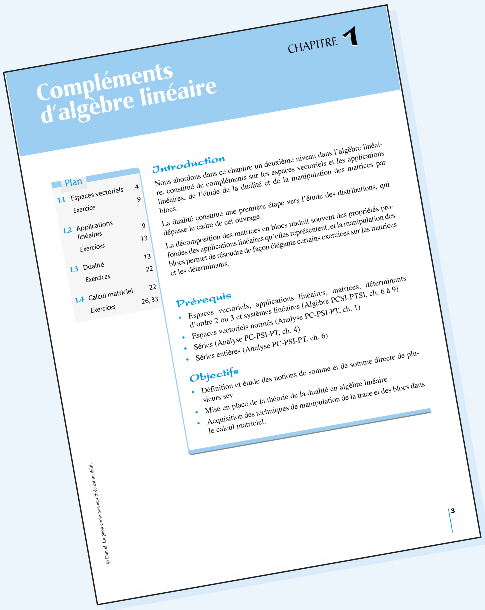
Cette nouvelle édition répond aux besoins et aux préoccupations des étudiant(e)s.

Une nouvelle maquette, à la convivialité accrue, assure un meilleur accompagnement pédagogique. Le programme officiel est suivi de près ; les notions ne figurant pas au programme ne sont pas étudiées dans le cours. Des exercices-types résolus et commentés, incontournables et cependant souvent originaux, aident le lecteur à franchir le passage du cours aux exercices. Les très nombreux exercices, progressifs et tous résolus, se veulent encore plus accessibles et permettent au lecteur de vérifier sa bonne compréhension du cours.
Des compléments, situés à la limite du programme sont traités, en fin de chapitre, sous forme de problèmes corrigés.

J'accueillerai avec reconnaissance les critiques et suggestions que le lecteur voudra bien me faire parvenir aux bons soins de Dunod, éditeur, 5, rue Laromiguière, 75005 Paris.

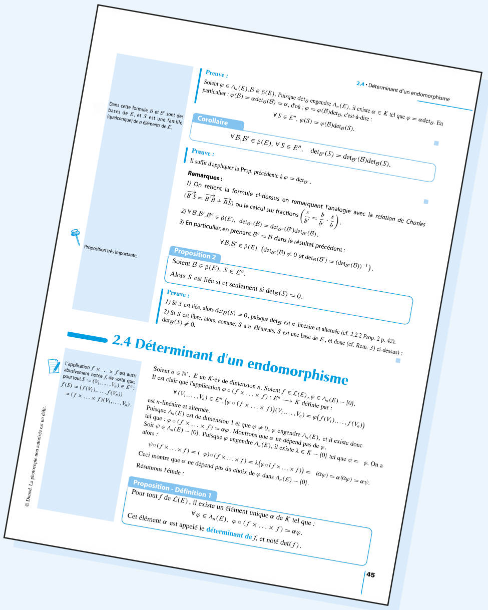
Jean-Marie Monier

Pour bien utiliser



La page d'entrée de chapitre

Elle propose une introduction au cours, un rappel des prérequis et des objectifs, ainsi qu'un plan du chapitre.



Le cours

Le cours aborde toutes les notions du programme de façon structurée afin d'en faciliter la lecture.
La colonne de gauche fournit des remarques pédagogiques qui accompagnent l'étudiant dans l'assimilation du cours. Il existe quatre types de remarques, chacun étant identifié par un pictogramme.

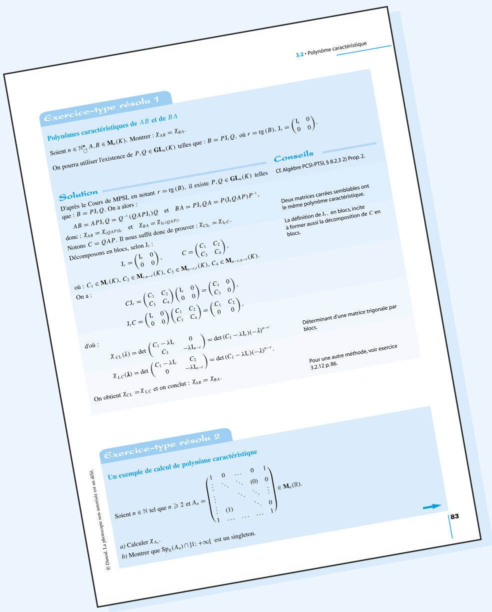
Les pictogrammes dans la marge

Commentaires pour bien comprendre le cours (reformulation d'un énoncé, explication d'une démonstration…).

Indication du degré d'importance d'un résultat.

Mise en garde contre des erreurs fréquentes.

Rappel d'hypothèse ou de notation.



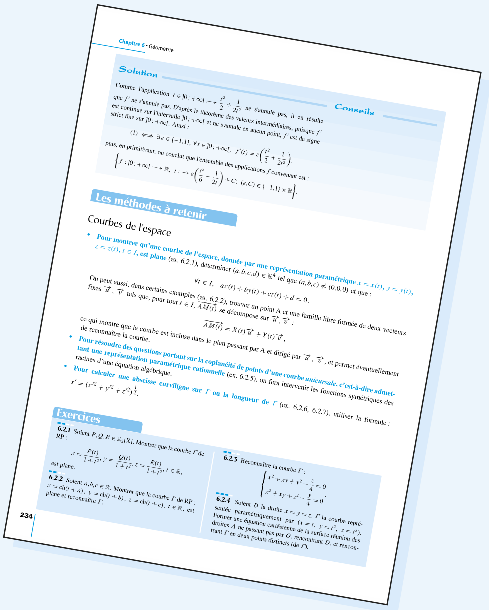
Les exercices-types résolus

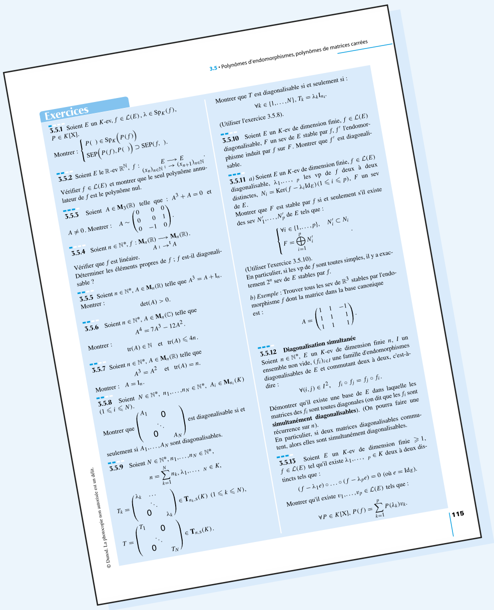
Régulièrement dans le cours, des exercices-types résolus permettent d'appliquer ses connaissances sur un énoncé incontournable. La solution est entièrement rédigée et commentée.

cet ouvrage

Les méthodes à retenir

Régulièrement dans le cours, cette rubrique propose une synthèse des principales méthodes à connaître.





Les exercices et problèmes

Dans chaque chapitre, à la fin d'une sous-partie, des énoncés d'exercices sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.

A la fin de certains chapitres, des énoncés de problèmes proposent d'aller plus loin.

Les solutions des exercices et problèmes

Tous les exercices et problèmes sont corrigés. Les solutions sont regroupées en fin d'ouvrage.

Programmes PC, PSI, PT

Chapitre 1 : Compléments d'algèbre linéaire

- Dans la voie PT, la notion de somme directe (§ 1.1) n'est au programme que dans le cas de deux sev d'un ev de dimension finie.
- Le théorème du § 1.2.1, l'étude de l'interpolation du point de vue de l'algèbre linéaire (§ 1.2.2), la dualité (§ 1.3) ne sont pas au programme PT.
- La notion de base duale (§ 1.3.3) n'est pas au programme PC.

Chapitre 2 : Déterminants

- L'étude du groupe symétrique (§ 2.1) n'est pas aux programmes PC, PT ; la démonstration de l'existence du déterminant est admise.
- La définition et les propriétés de la comatrice (§ 2.6.2) ne sont qu'au programme PSI.

Chapitre 3 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

- Les notions de polynôme d'endomorphisme et de polynôme de matrice ne sont pas au programme PT.
- Le théorème de Cayley-Hamilton (§ 3.5.3) et l'étude des idéaux de $K[X]$ (§ 3.5.4) ne sont qu'au programme PSI.

Chapitre 4 : Espaces préhilbertiens réels

- L'étude (élémentaire) des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques (§ 4.1) n'est pas au programme PC.
- La notion d'adjoint (§ 4.4) et la réduction simultanée (§ 4.5.2) ne sont qu'au programme PSI.

Chapitre 5 : Espaces préhilbertiens complexes

Ce chapitre ne concerne pas la voie PT.

Remerciements

Je tiens ici à exprimer ma gratitude aux nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit ou de la saisie : Robert AMBLARD, Bruno ARSAC, Chantal AURAY, Henri BAROZ, Alain BERNARD, Jean-Philippe BERNE, Mohamed BERRAHO, Isabelle BIGEARD, Jacques BLANC, Gérard BOURGIN, Gérard-Pierre BOUVIER, Gérard CASSAYRE, Jean-Paul CHRISTIN, Yves COUTAREL, Gilles DEMEUSOIS, Catherine DONY, Hermin DURAND, Jean FEYLER, Marguerite GAUTHIER, Daniel GENOUD, Christian GIRAUD, André GRUZ, André LAFFONT, Jean-Marc LAPIERRE, Annie MICHEL, Rémy NICOLAÏ, Michel PERNOUD, Jean REY, Sophie RONDEAU, René ROY, Nathalie et Philippe SAUNOIS, Patrice SCHWARTZ, Gérard SIBERT, Mimoun TAÏBI.

Une pensée émue accompagne les regrettés Gilles CHAFFARD et Alain GOURET.

Enfin, je remercie vivement les Éditions Dunod, Gisèle Maïus, Bruno Courtet, Nicolas Leroy, Michel Mounic, Dominique Decobecq et Éric d'Engenières, dont la compétence et la persévérance ont permis la réalisation de ces volumes.

Jean-Marie Monier

Cours

Compléments d'algèbre linéaire

CHAPITRE 1

Plan

Introduction

Nous abordons dans ce chapitre un deuxième niveau dans l'algèbre linéaire, constitué de compléments sur les espaces vectoriels et les applications linéaires, de l'étude de la dualité et de la manipulation des matrices par blocs.

La dualité constitue une première étape vers l'étude des distributions, qui dépasse le cadre de cet ouvrage.

La décomposition des matrices en blocs traduit souvent des propriétés profondes des applications linéaires qu'elles représentent, et la manipulation des blocs permet de résoudre de façon élégante certains exercices sur les matrices et les déterminants.

Prérequis

- Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices, déterminants d'ordre 2 ou 3 et systèmes linéaires (Algèbre PCSI-PTSI, ch. 6 à 9)
- Espaces vectoriels normés (Analyse PC-PSI-PT, ch. 1)
- Séries (Analyse PC-PSI-PT, ch. 4)
- Séries entières (Analyse PC-PSI-PT, ch. 6).

Objectifs

- Définition et étude des notions de somme et de somme directe de plusieurs sev
- Mise en place de la théorie de la dualité en algèbre linéaire
- Acquisition des techniques de manipulation de la trace et des blocs dans le calcul matriciel.

K désigne un corps commutatif. Conformément au programme, on peut se limiter aux cas $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$.

1.1 Espaces vectoriels

1.1.1 Familles libres, familles liées, familles génératrices

E désigne un K-espace vectoriel (en abrégé : K-ev), I désigne un ensemble fini.

On dit aussi que x est **combinaison linéaire** finie des x_i, $i \in I$.

Définition 1

On appelle **combinaison linéaire** d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E tout élément x de E tel qu'il existe une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ d'éléments de K, telle que $x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$.

Cette Définition généralise celle vue en 1re année pour le cas d'une famille finie, cf. Algèbre PCSI-PTSI, § 6.3.1 Déf.2.

Définition 2

1) Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite **libre** si et seulement si, pour toute famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ d'éléments de K :

$$\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0 \Longrightarrow \big(\forall i \in I,\ \alpha_i = 0\big).$$

2) Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite **liée** si et seulement si elle n'est pas libre, c'est-à-dire si et seulement s'il existe une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ d'éléments de K, telle que :

$$(\alpha_i)_{i \in I} \neq (0) \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0.$$

Définition 3

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite **génératrice de** E (ou : **engendre** E) si et seulement si tout élément de E est combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$.

Définition 4

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est appelée **base de** E si et seulement si elle est libre et génératrice de E.

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition-Définition 5

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E, alors, pour tout x de E, il existe une famille $(\xi_i)_{i \in I}$ de K, unique, telle que $x = \sum_{i \in I} \xi_i e_i$. Les ξ_i $(i \in I)$ sont appelés les **coordonnées** (ou : **composantes**) de x dans la base $(e_i)_{i \in I}$.

1.1.2 Sommes, sommes directes

E désigne un K-ev, I désigne un ensemble fini.

Cette Définition généralise celle vue en 1re année pour deux sev, cf. Algèbre PCSI-PTSI, § 6.2.

Définition 1

Soient I un ensemble fini, $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sev de E. On appelle **somme** de $(E_i)_{i\in I}$, et on note $\sum_{i\in I} E_i$, l'ensemble des sommes $\sum_{i\in I} x_i$ lorsque $(x_i)_{i\in I}$ décrit $\prod_{i\in I} E_i$:

$$\sum_{i\in I} E_i = \Big\{ \sum_{i\in I} x_i \;;\; \forall i\in I,\ x_i\in E_i \Big\}.$$

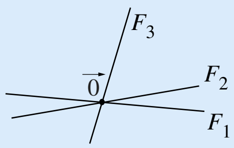
Cette définition généralise celle vue en 1re année pour deux sev, cf. Algèbre PCSI-PTSI, § 6.2.

Définition 2

Soient I un ensemble fini, $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sev de E. On dit que la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est **directe** si et seulement si :

$$\forall (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i,\ \Big(\sum_{i\in I} x_i = 0 \Longrightarrow (\forall i\in I,\ x_i=0) \Big).$$

On note alors $\bigoplus_{i\in I} E_i$ au lieu de $\sum_{i\in I} E_i$.



Remarque :

Si F_1, F_2, F_3 sont des sev d'un ev E, on peut avoir $F_1 \cap F_2 = F_1 \cap F_3 = F_2 \cap F_3 = \{0\}$ sans que la somme $F_1+F_2+F_3$ soit directe, comme le montre l'exemple de trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ deux à deux distinctes.

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si :

$$F\cap G = \{0\} \text{ et } F+G=E.$$

Définition 3

Deux sev F, G de E sont dits **supplémentaires dans** E si et seulement si la somme $F+G$ est directe et égale à E.

Cas des polynômes à une indéterminée.

Proposition 1

Soient $P\in K[X]$ tel que $\deg(P)\geqslant 1$, et $n=\deg(P)-1$. Le sev $P\,K[X]$ (formé des multiples de P) et le sev $K_n[X]$ (formé des polynômes de degré $\leqslant n$) sont supplémentaires dans $K[X]$.

Preuve

• Il est clair que $P\,K[X]$ et $K_n[X]$ sont des sev de $K[X]$.

• Soit $M\in (P\,K[X])\cap K_n[X]$. Il existe $B\in K[X]$ tel que $M=PB$, et $\deg(M)\leqslant n$.

Si $B\neq 0$, alors : $\deg(M)=\deg(P)+\deg(B)\geqslant \deg(P)=n+1$, contradiction.

Donc $B=0$, puis $M=0$.

Ceci montre : $(P\,K[X])\cap K_n[X]=\{0\}$.

• Soit $A\in K[X]$. Par division euclidienne de A par P, il existe $Q, R\in K[X]$ tels que :

$$A = PQ+R \quad \text{et} \quad \deg(R)<\deg(P).$$

On a alors : $A=PQ+R$, $PQ\in P\,K[X]$, $R\in K_n[X]$,

ce qui montre : $(P\,K[X])+K_n[X]=K[X]$.

Finalement, $P\,K[X]$ et $K_n[X]$ sont des sev supplémentaires dans $K[X]$. ■

Proposition 2

Soient E un K-ev de dimension finie et $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sev de E telle que la somme $\sum_{i\in I} E_i$ soit directe. On a alors :

$$\dim\left(\bigoplus_{i\in I} E_i\right) = \sum_{i\in I} \dim(E_i).$$

Preuve

Puisque E est de dimension finie, pour tout $i \in I$, le sev E_i de E admet au moins une base finie $\mathcal{B}_i$. Notons $\mathcal{B}_i = (e_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant j_i}$. Considérons $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i$ (réunion ordonnée).

1) Soit $x \in E$.

x se décompose linéairement sur les E_i, et chaque x_i se décompose linéairement sur $\mathcal{B}_i$, donc x se décompose linéairement sur $\mathcal{B}$.

Puisque $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$, il existe une famille $(x_i)_{i\in I}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall i \in I, \quad x_i \in E_i \\ x = \sum_{i\in I} x_i. \end{cases}$$

Pour chaque $i \in I$, x_i se décompose sur $\mathcal{B}_i$; il existe $(\xi_j)_{1\leqslant j\leqslant j_i} \in K^{j_i}$ tel que :

$$x_i = \sum_{j=1}^{j_i} \xi_{i,j} e_{i,j}.$$

On a alors :

$$x = \sum_{i\in I} \sum_{j=1}^{j_i} \xi_{i,j} e_{i,j},$$

donc x se décompose sur $\mathcal{B}$.

Ceci montre que $\mathcal{B}$ engendre E.

En fait, on vient de montrer plus généralement que, si $E = \sum_{i\in I} E_i$, et si, pour chaque $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ engendre E_i, alors $\bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i$ engendre E.

2) Soit $(\xi_{i,j})_{i\in I, 1\leqslant j\leqslant j_i}$ une famille d'éléments de K telle que :

$$\sum_{i\in I} \sum_{j=1}^{j_i} \xi_{i,j} e_{i,j} = 0.$$

Pour chaque $i \in I$, on regroupe les termes appartenant à E_i.

En notant, pour chaque $i \in I$, $x_i = \sum_{j=1}^{j_i} \xi_{i,j} e_{i,j}$, on a :

$$\begin{cases} \forall i \in I, \quad x_i \in E_i \\ \sum_{i\in I} x_i = 0. \end{cases}$$

Comme la somme $\bigoplus_{i\in I} E_i$ est directe, il en résulte :

$$\forall i \in I, \quad x_i = 0.$$

Soit $i \in I$. Comme $\sum_{j=1}^{j_i} \xi_{i,j} e_{i,j} = x_i = 0$ et que $\mathcal{B}_i = (e_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant j_i}$ est libre, on déduit :

$$\forall j \in \{1,\dots,j_i\}, \quad \xi_{i,j} = 0.$$

Ceci montre que $\mathcal{B}$ est libre.

En fait, on vient de montrer plus généralement que, si la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe et si, pour chaque $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ est libre dans E_i, alors $\bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i$ est libre.

On conclut que $\mathcal{B}$ est une base de E.

On a alors :

$$\dim\left(\bigoplus_{i\in I} E_i\right) = \mathrm{Card}\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i\right) = \sum_{i\in I} \mathrm{Card}(\mathcal{B}_i) = \sum_{i\in I} \dim(E_i).$$

■

Proposition 3

Soient E un K-ev de dimension finie et $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sev de E telle que la somme $\sum_{i\in I} E_i$ soit directe. On a alors :

$$E = \bigoplus_{i\in I} E_i \Longleftrightarrow \dim(E) = \sum_{i\in I} \dim(E_i).$$

Preuve

• Si $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$, alors, d'après la Proposition 2 précédente :

$$\dim(E) = \dim\left(\bigoplus_{i\in I} E_i\right) = \sum_{i\in I} \dim(E_i).$$

• Réciproquement, supposons $\dim(E) = \sum_{i\in I} \dim(E_i)$. Alors, d'après la Proposition précédente :

$$\dim\left(\bigoplus_{i\in I} E_i\right) = \sum_{i\in I} \dim(E_i) = \dim(E).$$

Comme $\bigoplus_{i\in I} E_i$ est un sev de E de même dimension que E, on conclut $\bigoplus_{i\in I} E_i = E$. ∎

Cf. Algèbre PCSI-PTSI, § 6.4 2) Cor. 2.

Définition 4

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sev de E telle que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$. Pour tout $x \in E$, il existe $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ unique tel que $x = \sum_{i\in I} x_i$; on note $p_i : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_i \end{array}$, pour tout $i \in I$.

On a alors :

• $\forall i \in I,\ \ p_i \circ p_i = p_i$

• $\forall (i,j) \in I^2,\ \ \big(i \neq j \Longrightarrow p_i \circ p_j = 0\big)$

• $\sum_{i\in I} p_i = \mathrm{Id}_E$.

On dit que $(p_i)_{i\in I}$ est la **famille de projecteurs de E canoniquement associée à la décomposition de E en somme directe $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.**

Ces trois propriétés sont immédiates.

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition 4

Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sev de E telle que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$, et F un K-ev.

Pour toute famille $(u_i)_{i\in I}$ telle que :

$$\forall i \in I,\ \ u_i \in \mathcal{L}(E_i, F),$$

il existe $u \in \mathcal{L}(E,F)$ unique telle que :

$$\forall i \in I,\ \ u_i = u\,|_{E_i}$$

où $u\,|_{E_i}$ désigne la restriction de u à E_i pour le départ.

De plus, on a alors, en notant $(p_i)_{i\in I}$ la famille de projecteurs canoniquement associée à la décomposition de E en somme directe $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$:

$$\forall x \in E,\ \ u(x) = \sum_{i\in I} u_i\big(p_i(x)\big).$$

Définition 5

Soient E un K-ev de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E.

1) Soit F un sev de E. On dit que $\mathcal{B}$ est **adaptée à** F si et seulement si $\mathcal{B}$ « commence » par une base de F.

2) Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sev de E telle que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$. On dit que $\mathcal{B}$ est **adaptée à** la décomposition de E en somme directe $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$ si et seulement s'il existe une famille $(\mathcal{B}_i)_{i\in I}$ où, pour tout $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i, telle que $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i$ (la réunion étant « ordonnée »).

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de E adaptée à F si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}_1$ de F et une base $\mathcal{B}_2$ d'un supplémentaire de F dans E, telles que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, réunion ordonnée.

Remarque :

D'après la preuve de la Proposition 2, si $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$, et si, pour chaque $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i, alors $\bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_i$ est une base de E adaptée à la décompostion de E en somme directe $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

Exercices 1.1.1 à 1.1.3.

Exercice-type résolu

Dimension et somme directe

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe

(2) $\dim\left(\sum_{i\in I} E_i\right) = \sum_{i\in I} \dim(E_i)$.

Solution

(1) $\Longrightarrow$ (2) :

C'est un résultat du Cours.

(2) $\Longrightarrow$ (1) :

On suppose : $\dim\left(\sum_{i\in I} E_i\right) = \sum_{i\in I} \dim(E_i)$.

Soit $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ tel que : $\sum_{i\in I} x_i = 0$.

Conseils

Cf. § 1.1.2 Prop. 2 p. 6.

Solution

Pour chaque $i \in I$, il existe une base $\mathcal{B}_i$ de E_i, commençant par x_i si $x_i \neq 0$, et quelconque si $x_i = 0$.

Notons : $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$.

Puisque, pour tout $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ engendre E_i, $\mathcal{B}$ engendre $\sum_{i \in i} E_i$.

D'autre part :

$$\mathrm{Card}\,(\mathcal{B}) = \sum_{i \in I} \mathrm{Card}\,(\mathcal{B}_i) = \sum_{i \in I} \dim\,(E_i) = \dim\left(\sum_{i \in I} E_i\right).$$

Il en résulte que $\mathcal{B}$ est une base de $\sum_{i \in I} E_i$.

Notons $J = \{i \in I\,;\ x_i \neq 0\}$.

Si $J \neq \varnothing$, alors $(x_i)_{i \in I}$ est liée, car par hypothèse $\sum_{i \in J} x_i = \sum_{i \in I} x_i = 0$, en contradiction avec $(x_i)_{i \in I}$ sous-famille de la base $\mathcal{B}$.

Ceci montre que : $\forall i \in I,\ x_i = 0$,

et on conclut que la somme $\sum_{i \in I} E_i$ est directe.

Conseils

Théorème de la base incomplète, cf. Algèbre PCSI-PTSI, § 6.4. 1) Th. 2.

La réunion est ordonnée.

Cf. le point *1)* de la preuve de la Prop. 2 p. 6.

Si une famille finie engendre un sev et a un cardinal égal à la dimension de ce sev, alors cette famille est une base de ce sev.

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Exercice

1.1.1 Soient E un K-ev, A, B, C des sev de E tels que $B \subset C$.
Montrer :

$$(A + B) \cap C = (A \cap C) + B.$$

1.2 Applications linéaires

1.2.1 Théorème d'isomorphisme

Ainsi, tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E est isomorphe à $\mathrm{Im}(u)$.

Théorème **Théorème d'isomorphisme**

Soient E, F deux K-ev, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, E' un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(u)$ dans E.

L'application $\begin{array}{l} E' \longmapsto \mathrm{Im}\,(u) \\ x \longmapsto u(x) \end{array}$ est un isomorphisme de K-ev.

Preuve

Notons $u' : \begin{array}{l} E' \longrightarrow \mathrm{Im}\,(u) \\ x \longmapsto u(x) \end{array}$.

• D'abord, u' est correctement définie, car, pour tout $x \in E' \subset E$, on a $u(x) \in \mathrm{Im}\,(u)$.

• L'application u' est linéaire car, pour tout $\alpha \in K$ et tous $x, y \in E'$:

$$u'(\alpha x + y) = u(\alpha x + y) = \alpha u(x) + u(y) = \alpha u'(x) + u'(y).$$

$E' \cap \operatorname{Ker}(u) = \{0\}$.

• Soit $x \in \operatorname{Ker}(u')$. On a alors $x \in E'$ et $x \in \operatorname{Ker}(u)$, d'où, puisque E' est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(u)$ dans E, $x = 0$. Ceci montre $\operatorname{Ker}(u') = \{0\}$, et donc u' est injective.

• Soit $y \in \operatorname{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Puisque $E = E' + \operatorname{Ker}(u)$, il existe $x' \in E'$, $t \in \operatorname{Ker}(u)$ tels que $x = x' + t$. On a alors :

$$y = u(x) = u(x' + t) = u(x') + u(t) = u(x') = u'(x').$$

Ceci montre que u' est surjective.

Finalement, u' est un isomorphisme d'ev. ■

1.2.2 Interpolation de Lagrange

La linéarité de u est immédiate.

Proposition **Interpolation de Lagrange**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in K$ deux à deux distincts, $u : \begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & K^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), \ldots, P(a_n)) \end{array}$, qui est linéaire. Alors :

• $\operatorname{Ker}(u)$ est l'ensemble des multiples du polynôme $\displaystyle\prod_{j=0}^{n} (X - a_j)$

• La restriction de u à $K_n[X]$ est un isomorphisme d'ev de $K_n[X]$ sur K^{n+1}

• Pour tout $(b_0, \ldots, b_n) \in K^{n+1}$, il existe un polynôme P et un seul de $K_n[X]$ tel que :

$$\forall j \in \{0, \ldots, n\}, \quad P(a_j) = b_j.$$

On dit que P **interpole** les **valeurs** b_j $(0 \leqslant j \leqslant n)$ en les **points** (ou : **noeuds**) a_j $(0 \leqslant j \leqslant n)$.

Preuve

• Soit $P \in K[X]$. On a :

$$P \in \operatorname{Ker}(u) \iff \big(P(a_0), \ldots, P(a_n)\big) = (0, \ldots, 0) \iff \big(\forall j \in \{0, \ldots, n\}, \ P(a_j) = 0\big)$$
$$\iff \big(\forall j \in \{0, \ldots, n\}, \ X - a_j \mid P\big) \iff \prod_{j=0}^{n} (X - a_j) \,\Big|\, P,$$

puisque $a_0, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts.

L'indexation du produit commence à l'indice 0.

• Notons $M = \displaystyle\prod_{j=0}^{n} (X - a_j)$. Il est clair que $\deg(M) = n + 1$. D'après § 1.1.2 Prop. 3, $K_n[X]$ est un supplémentaire de $M\,K[X]$ dans $K[X]$, donc, d'après le Théorème d'isomorphisme, l'application $u' : \begin{array}{c} K[X] \longrightarrow \operatorname{Im}(u) \\ P \longmapsto u(P) \end{array}$ est un isomorphisme d'ev. Comme $\dim(K_n[X]) = n + 1$, on a donc $\dim\big(\operatorname{Im}(u)\big) = n + 1$. Mais $\operatorname{Im}(u) \subset K^{n+1}$ et $\dim(K^{n+1}) = n + 1$.

Il en résulte : $\operatorname{Im}(u) = K^{n+1}$, et donc u' est un isomorphisme d'ev de $K_n[X]$ sur K^{n+1}.

On peut exprimer P en faisant intervenir les polynômes d'interpolation de Lagrange, cf. plus loin § 1.3.3 Exemple *2)*.

• Soit $(b_0, \ldots, b_n) \in K^{n+1}$. D'après le résultat précédent, il existe $P \in K_n[X]$ unique tel que :

$$\forall j \in \{0, \ldots, n\}, \quad P(a_j) = b_j. \qquad ■$$

1.2.3 Théorème du rang

Définition

Soient E,F deux K-ev, $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que F est de dimension finie. On appelle **rang** de u, et on note $\mathrm{rg}\,(u)$, la dimension de $\mathrm{Im}\,(u)$.

Cette définition généralise celle vue en 1re année, Algèbre PCSI-PTSI, § 7.3.1.

Le théorème suivant résulte directement de 1.2.1 Th (théorème d'isomorphisme).

Théorème **Théorème du rang**

Soient E,F deux K-ev de dimensions finies, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

On a :

$$\mathrm{rg}\,(u) = \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Ker}\,(u)\big).$$

On retrouve en particulier le théorème du rang vu en 1re année, Algèbre PCSI-PTSI, § 7.3.1 Théorème 1.

Proposition

Soient E,F,G,H des K-ev de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $u \in \mathcal{L}(F,G)$, $g \in \mathcal{L}(G,H)$.

Si f et g sont des isomorphismes, alors :

$$\mathrm{rg}\,(g \circ u \circ f) = \mathrm{rg}\,(u).$$

En particulier :

si f est un isomorphisme, alors : $\mathrm{rg}\,(u \circ f) = \mathrm{rg}\,(u)$

si g est un isomorphisme, alors : $\mathrm{rg}\,(g \circ u) = \mathrm{rg}\,(u)$.

On dit que le rang est invariant par composition avec un isomorphisme.

Preuve

1) Montrons d'abord que, pour tous K-ev E,F,G de dimensions finies et toutes applications linéaires $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$:

$$\mathrm{rg}\,(g \circ f) \leqslant \mathrm{Min}\,(\mathrm{rg}\,(f), \mathrm{rg}\,(g)).$$

Obtention d'un résultat plus général, qui n'est pas au programme, mais serait bien utile.

• On a : $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g)$, d'où :

$$\mathrm{rg}\,(g \circ f) = \dim(\mathrm{Im}\,(g \circ f)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\,(g)) = \mathrm{rg}\,(g).$$

• On a : $\mathrm{Ker}\,(g \circ f) \supset \mathrm{Ker}\,(f)$, d'où, en utilisant deux fois le théorème du rang :

$$\mathrm{rg}\,(g \circ f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}\,(g \circ f)) \leqslant \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = \mathrm{rg}\,(f).$$

On applique le théorème du rang à $g \circ f$ et à f.

2) Avec les hypothèses de la Proposition, on a :

$$\mathrm{rg}\,(g \circ u \circ f) \leqslant \mathrm{rg}\,(g \circ u) \leqslant \mathrm{rg}\,(u)$$

et :

$$\mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(g^{-1} \circ (g \circ u \circ f) \circ f^{-1}) \leqslant \mathrm{rg}\,(g \circ u \circ f),$$

d'où :

$$\mathrm{rg}\,(g \circ u \circ f) = \mathrm{rg}\,(u).$$

Puisque f et g sont des isomorphismes, f^{-1} et g^{-1} existent et $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$, $g^{-1} \in \mathcal{L}(G,F)$.

Exercices 1.2.1 à 1.2.4.

Exercice-type résolu

Une caractérisation des endomorphismes vérifiant $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$

Soient E un K-ev de dimension finie, $e = \mathrm{Id}_E$, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f)$

(2) $f \circ f = 0$ et il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $h \circ f + f \circ h = e$.

Solution

(2) $\Longrightarrow$ (1) :

On suppose : $f \circ f = 0$ et il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $h \circ f + f \circ h = e$.

• On a : $\forall x \in E,\ f\big(f(x)\big) = 0$, donc : $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.

• Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$. On a :

$$x = (h \circ f + f \circ h)(x) = h\big(f(x)\big) + f\big(h(x)\big) = f\big(h(x)\big) \in \mathrm{Im}\,(f),$$

d'où : $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Im}\,(f)$.

On conclut : $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f)$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) :

On suppose : $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f)$.

• On a : $\forall x \in E,\ (f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = f(0) = 0$, donc : $f \circ f = 0$.

• Puisque E est de dimension finie, le sev $\mathrm{Ker}\,(f)$ de E admet au moins un supplémentaire F dans E : $E = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus F$.

D'après le **théorème d'isomorphisme**, l'application

$$\varphi : F \longrightarrow \mathrm{Im}\,(f),\ x \longmapsto \varphi(x) = f(x)$$

est un isomorphisme d'ev.

Considérons l'application linéaire $h : E \longrightarrow E$ définie sur les sev supplémentaires $\mathrm{Ker}\,(f)$ et F par :

$$\begin{cases} \forall y \in \mathrm{Ker}\,(f),\ h(y) = \varphi^{-1}(y) \\ \forall z \in F,\ h(z) = 0. \end{cases}$$

Montrons que h convient.

• On a, pour tout $y \in \mathrm{Ker}\,(f)$:

$$(h \circ f + f \circ h)(y) = h\big(f(y)\big) + f\big(h(y)\big) = h(0) + f\big(\varphi^{-1}(y)\big) = \varphi\big(\varphi^{-1}(y)\big) = y.$$

On a, pour tout $z \in F$:

$$(h \circ f + f \circ h)(z) = h\big(f(z)\big) + f\big(h(z)\big) = \varphi^{-1}\big(\varphi(z)\big) + f(0) = z.$$

Comme $E = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus F$ et que les applications linéaires $h \circ f + f \circ h$ et e coïncident sur $\mathrm{Ker}\,(f)$ et sur F, on conclut : $h \circ f + f \circ h = e$.

Conseils

On commence par l'implication la plus facile, c'est-à-dire celle pour laquelle l'hypothèse paraît la plus forte.

Puisque h est linéaire et que $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$, on a :

$$h\Big(f(x)\Big) = h(0) = 0.$$

Existence d'un supplémentaire en dimension finie.

Définition d'une application linéaire sur E par la donnée de ses restrictions à deux sev de E supplémentaires dans E.

Puisque $\varphi^{-1}(y) \in F$ et que φ est la restriction de f à F, on a :

$$f\Big(\varphi^{-1}(y)\Big) = \varphi\Big(\varphi^{-1}(y)\Big).$$

Puisque $f(z) \in \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f)$, on a :

$$h\big(f(z)\big) = \varphi^{-1}\big(f(z)\big),$$

et, comme $z \in F$, on a : $f(z) = \varphi(z)$.

Exercices

1.2.1 Soient E,F deux K-ev de dimensions finies, $f,g \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer :

$$\dim(\operatorname{Ker}(f+g)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)) + \dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)).$$

1.2.2 Soient E,F des K-ev, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,E)$. Montrer :

a) $\mathrm{Id}_F - f \circ g$ injective $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Id}_E - g \circ f$ injective

b) $\mathrm{Id}_F - f \circ g$ surjective $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Id}_E - g \circ f$ surjective

c) $\mathrm{Id}_F - f \circ g$ bijective $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Id}_E - g \circ f$ bijective.

1.2.3 Soit E un K-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in \mathcal{GL}(E)$

(ii) pour tous sev A, B de E supplémentaires dans E, les sev $f(A)$, $f(B)$ sont supplémentaires dans E.

1.2.4 Soient E un K-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) il existe deux projecteurs p,q de E tels que :

$$f = p - q \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(q)$$

(ii) $f^2 = 0$.

1.3 Dualité

1.3.1 Généralités

Dans ce § 1.3.1, E désigne un K-ev.

Cf. Algèbre PCSI-PTSI, § 7.1.1 Déf. 3.

Rappelons une Définition :

Définition

On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans K. On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E ; E^* est appelé le **dual** de E.

On a donc : $E^* = \mathcal{L}(E,K)$.

Exemples :

1) Soient E un K-ev de dimension finie, $n = \dim(E) \geqslant 1$, $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Pour tout x de E, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ unique tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Il est alors clair que, pour chaque i de $\{1,\ldots,n\}$, l'application $e_i^* : \begin{array}{l} E \longrightarrow K \\ x \longmapsto x_i \end{array}$ est une forme linéaire sur E, appelée $i^{\text{ème}}$ **forme-coordonnée** sur la base $\mathcal{B}$. Voir aussi plus loin, § 1.3.3 1) p. 16.

2) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a \leqslant b$, E le $\mathbb{C}$-ev des applications continues par morceaux de $[a;b]$ dans $\mathbb{C}$.

L'application $\mu : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{C} \\ f \longmapsto \int_a^b f \end{array}$ est une forme linéaire sur E.

Cf. Algèbre PCSI-PTSI, 7.1.1 3) Exemple *6)*.

3) Soit X un ensemble non vide. Pour chaque a de X, l'application $E_a : \begin{array}{l} K^X \longrightarrow K \\ f \longmapsto f(a) \end{array}$ est une forme linéaire sur le K-ev K^X, appelé **évaluation** en a.

Rappelons :

Cas particulier de : Algèbre PCSI-PTSI, 7.2.1 Prop.

Exercices 1.3.1 et 1.3.2.

Proposition

E^* est un K-ev.

1.3.2 Hyperplans

Dans ce § 1.3.2, E désigne un K-ev.

La notion d'hyperplan de E généralise :

• la notion de droite vectorielle d'un plan vectoriel

• la notion de plan vectoriel d'un espace vectoriel de dimension 3.

Définition

On appelle **hyperplans** de E les noyaux des formes linéaires sur E autres que la forme nulle.

Autrement dit, un sev H de E est un hyperplan si et seulement si :

$$\exists \varphi \in E^* - \{0\}, \quad H = \mathrm{Ker}(\varphi).$$

On dit que la relation $\varphi(x) = 0$ est une **équation** de l'hyperplan H.

Proposition 1

Soit H un sev de E. Pour que H soit un hyperplan de E, il faut et il suffit qu'il existe une droite vectorielle D de E telle que H et D soient supplémentaires dans E.

Preuve

1) Soit H un hyperplan de E. Il existe $\varphi \in E^* - \{0\}$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$, puis il existe $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. Nous allons montrer que la droite vectorielle $D = Kx_0$ est supplémentaire de H dans E.

• Soit $x \in D \cap H$. Il existe $\alpha \in K$ tel que $x = \alpha x_0$, et $\varphi(x) = 0$. Si $\alpha \neq 0$, alors $\varphi(x_0) = \dfrac{1}{\alpha}\varphi(x) = 0$, contradiction. Donc $\alpha = 0$, puis $x = 0$. Ceci montre : $D \cap H = \{0\}$.

• Soit $x \in E$. Montrons qu'il existe $(\lambda, y) \in K \times H$ tel que $x = \lambda x_0 + y$.

Recherche de la valeur nécessaire de (λ, y).

Si un tel couple (λ, y) existe, alors $\varphi(x) = \lambda\varphi(x_0) + \varphi(y) = \lambda\varphi(x_0)$, d'où $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$, puis $y = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0$.

Réciproquement, on a : $x = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0 + \left(x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0\right)$,

et, comme $\varphi\left(x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0\right) = \varphi(x) - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}\varphi(x_0) = 0$, $x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0 \in \mathrm{Ker}(\varphi) = H$.

Ceci montre : $D + H = E$

Finalement : $D \oplus H = E$.

2) Réciproquement, supposons qu'il existe une droite vectorielle D telle que $D \oplus H = E$. Il existe $x_0 \in D$ tel que $x_0 \neq 0$. Pour tout x de E, il existe $(\lambda, y) \in K \times H$ unique tel que $x = \lambda x_0 + y$. Il est clair que l'application $\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow K \\ x \longmapsto \lambda \end{array}$ ainsi définie est linéaire.

On a alors : $\varphi \in E^* - \{0\}$ (car $\varphi(x_0) = 1 \neq 0$) et $\mathrm{Ker}(\varphi) = H$. ■

Rappelons que $E - H$ désigne E privé de H :

$$E - H = \{x_0 \in E\,; x_0 \notin H\}.$$

Remarque :

La preuve précédente établit que, si H est un hyperplan de E, alors, pour tout x_0 de $E - H$:

$$H \oplus (Kx_0) = E.$$

On retombe ainsi sur la Définition vue dans Algèbre PCSI-PTSI, 6.4, Déf.2, dans le cas particulier où E est de dimension finie.

Corollaire

Si E est de dimension finie n $(n \geqslant 1)$, alors les hyperplans de E sont les sev de E de dimension $n - 1$.

Ainsi, un hyperplan donné n'admet, à un coefficient multiplicatif $\neq 0$ près, qu'une solution.

Proposition 2

Soient H un hyperplan de E, $\varphi \in E^* - \{0\}$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$, et $\psi \in E^* - \{0\}$. On a :

$$H = \mathrm{Ker}(\psi) \iff (\exists \alpha \in K - \{0\}, \quad \psi = \alpha\varphi).$$

Preuve

1) Il est clair que, pour pour tout α de $K - \{0\}$: $\mathrm{Ker}(\alpha\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi) = H$.

2) Réciproquement, soit $\psi \in E^* - \{0\}$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\psi)$. Il existe $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$, et on a :

$$E = \mathrm{Ker}(\varphi) + (Kx_0).$$

Soit $x \in E$; il existe $\lambda \in K$ et $y \in \mathrm{Ker}(\varphi) = H = \mathrm{Ker}(\psi)$ tels que $x = y + \lambda x_0$.

Alors : $\varphi(x) = \lambda\varphi(x_0)$ et $\psi(x) = \lambda\psi(x_0)$, d'où $\psi(x) = \dfrac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}\varphi(x)$.

En notant $\alpha = \dfrac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)} \in K - \{0\}$, on a donc $\psi = \alpha\varphi$. ■

Proposition 3

Soit E un K-ev de dimension finie. Pour tout $e \in E - \{0\}$, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(e) = 1$.

Preuve

La droite vectorielle Ke (engendrée par e) admet au moins un supplémentaire H dans E, et H est un hyperplan de E. Il existe donc $\varphi_1 \in E^*$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi_1)$. Comme $e \notin \mathrm{Ker}(\varphi_1)$, on a : $\varphi_1(e) \neq 0$. En notant $\varphi = \dfrac{1}{\varphi_1(e)}\varphi_1$, on a alors :

$$\varphi \in E^* \quad \text{et} \quad \varphi(e) = 1$$

■

Par raisonnement par l'absurde, on déduit le Corollaire suivant :

Corollaire

Soient E un K-ev de dimension finie, $x \in E$. Si toutes les formes linéaires sur E s'annulent en x, alors $x = 0$.

Exercice 1.3.3.

Exercice-type résolu

Étude d'espaces vectoriels de dimension infinie

On note, pour $k \in \{0,1\}$, $E_k = C^k(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$, et $H = \big\{f \in E_1\,;\ f(0) = 0\big\}$.

a) Vérifier que E_1 est un sev de E_0 et montrer que E_1 n'est pas un hyperplan de E_0.

b) Montrer que H est un hyperplan de E_1 et que E_0 est isomorphe à H.

Solution

a) • D'après le Cours, E_0 est un $\mathbb{R}$-ev et E_1 est un sev de E_0.

• Raisonnons par l'absurde : supposons que E_1 soit un hyperplan de E_0.

Il existe alors $f_0 \in E_0 - \{0\}$ tel que : $E_0 = E_1 \oplus \mathbb{R} f_0$.

Considérons : $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-1| \end{array}$ et $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x+1| \end{array}$.

Il est clair que : $g \in E_0,\ h \in E_0$.

Il existe donc $g_1, h_1 \in E_1,\ a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$g = g_1 + a f_0, \quad h = h_1 + b f_0.$$

On déduit : $bg - ah = bg_1 - ah_1$.

Si $b \neq 0$, alors, comme h, g_1, h_1 sont dérivables en 1, par combinaison linéaire, $g = \dfrac{1}{b}(bg_1 - ah_1 + ah)$ est dérivable en 1, contradiction.

Il s'ensuit $b = 0$, d'où $h = h_1$, contradiction.

On conclut que E_1 n'est pas un hyperplan de E_0.

b) • L'application $\varphi : E_1 \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \varphi(f) = f(0)$ est une forme linéaire et n'est pas la forme nulle, donc $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E_1.

• Considérons l'application $D : E_1 \longrightarrow E_0,\ f \longmapsto D(f) = f'$.

Il est clair que D est correctement définie, et que D est linéaire.

De plus : $\operatorname{Im}(D) = E_0$ et $\operatorname{Ker}(D) = \mathbb{R}1$, sev des applications constantes.

Montrons que H et $\operatorname{Ker}(D)$ sont supplémentaires dans E_1.

* On a $H \cap \operatorname{Ker}(D) = \{0\}$, car, pour toute $f \in H \cap \operatorname{Ker}(D)$, f est constante et $f(0) = 0$, donc $f = 0$.

* On a $H + \operatorname{Ker}(D) = E_1$, car, pour toute $f \in E_1$, $f = \big(f - f(0)\big) + f(0)$ et $f - f(0) \in H,\ f(0) \in \operatorname{Ker}(D)$.

Ainsi, H et $\operatorname{Ker}(D)$ sont supplémentaires dans E_1.

D'après le **théorème d'isomorphisme** appliqué à D, $\operatorname{Im}(D)$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker}(D)$ dans E_1, donc E_0 est isomorphe à H, qui est un hyperplan de E_1.

Conseils

Pour montrer un résultat qui s'exprime grammaticalement par une négation, on peut essayer de raisonner par l'absurde.

Rappel de notation : $\mathbb{R} f_0$ est la droite vectorielle engendrée par f_0.

On considère deux éléments de E_1 qui ne soient pas dans E_0 et qui forment une famille libre.

On combine linéairement pour faire disparaître f_0.

g n'est pas dérivable en 1.

h n'est pas dérivable en -1.

On peut montrer plus généralement, de façon analogue à ce qui précède, que E_1 n'est pas de codimension finie dans E_0.

On a : $\varphi(1) = 1 \neq 0$, où 1 désigne, selon le contexte, le réel 1 ou la fonction constante égale à 1.

Pour toute $f \in E_1$, f' existe et $f' \in E_0$.

• Pour toute $g \in E_0$, il existe $f \in E_1$ telle que $f' = g$.

• Pour toute $f \in E_1$, f' est la fonction nulle si et seulement si f est constante.

On confond ici le réel $f(0)$ et l'application constante égale à $f(0)$.

Ce résultat peut paraître surprenant, car $E_1 \subset E_0$ et E_0 est isomorphe à un sev de E_1. Mais il ne faut pas oublier qu'il s'agit ici d'espaces vectoriels de dimension infinie.

1.3.3 Bases duales

Dans ce § 1.3.3, E désigne un K-ev de dimension finie, $n = \dim(E) \geqslant 1$.

1) Définition et propriétés

Théorème - Définition

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

On considère, pour chaque i de $\{1, \ldots, n\}$, la forme linéaire $e_i^* : E \longrightarrow K$ définie par :

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}.$$

La famille $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*, appelée **base duale** de $\mathcal{B}$, et notée $\mathcal{B}^*$.

e_i^* est aussi appelée la i**-ème forme linéaire coordonnée** sur la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

δ_{ij} est appelé le **symbole de Kronecker**.

Cf. 1.3.1 Exemple *1)* p. 13.

Preuve

D'abord, les e_i^* $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont bien des éléments de E^*.

Soient $\varphi \in E^*$, $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in K^n$. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = \varphi \iff \left(\forall j \in \{1,...,n\}, \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*\right)(e_j) = \varphi(e_j)\right)$$
$$\iff \left(\forall j \in \{1,...,n\}, \ \lambda_j = \varphi(e_j)\right).$$

Ceci montre que $(e_1^*, ..., e_n^*)$ est une base de E^*, et de plus : $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i^*$. ■

Exercices 1.3.6, 1.3.7.

Le résultat précédent est un cas particulier d'Algèbre PCSI-PTSI, 7.3.2 Prop.

Corollaire

E^* est de dimension finie, et $\dim(E^*) = \dim(E)$.

1) : Expression d'un élément de E^* sur la base $\mathcal{B}^*$

2) : Expression d'un élément de E sur la base $\mathcal{B}$.

Proposition 1

Soient $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$ une base de E, $\mathcal{B}^* = (e_1^*,...,e_n^*)$ sa duale. On a :

1) $\forall \varphi \in E^*, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i^*$ *2)* $\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)e_i$.

Preuve

La 1ère propriété vient d'être montrée, dans la preuve du théorème précédent.

La 2ème propriété traduit la définition des formes-coordonnées $e_1^*, \dots, e_n^*$. ■

${}^t U X$ est une matrice carrée à un élément, confondue avec cet élément.

Proposition 2

Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}^*$ sa duale, $x \in E$, $\varphi \in E^*$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\varphi)$.
On a alors : $\varphi(x) = {}^t U X$.

Preuve

Notons $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$, $\mathcal{B}^* = (e_1^*,...,e_n^*)$.

Comme $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i^*$, on a : $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) \\ \vdots \\ \varphi(e_n) \end{pmatrix}$.

En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a :

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \big(\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)\big) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {}^t U X.$$ ■

Remarque :

La Proposition précédente revient à remarquer qu'en notant $\mathcal{B}_0 = (1)$ la base canonique de K (K-ev de dimension 1), on a :

$$\forall \varphi \in E^*, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\varphi) = {}^t\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}(\varphi)\big).$$

2) Changement de base pour la dualité

Proposition 4 Changement de base pour la dualité

Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$ est ${}^{\mathrm{t}}P^{-1}$.

Formule utile pour les exercices, mais qui n'est pas au programme.

Preuve

Notons $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$, $\mathcal{B}' = (f_1,\ldots,f_n)$, $P = (p_{ij})_{ij}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, $Q = (q_{ij})_{ij}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$. On a, pour tout (j,k) de $\{1,\ldots,n\}^2$:

On utilise : $e_i^*(e_l) = \delta_{il}$.

$$\delta_{jk} = f_j^*(f_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} q_{ij} e_i^*\right)\left(\sum_{l=1}^{n} p_{lk} e_l\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} q_{ij}\, p_{lk}\, \delta_{il} = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\, p_{ik}.$$

Ceci montre : ${}^{\mathrm{t}}QP = \mathrm{I}_n$, donc $Q = {}^{\mathrm{t}}P^{-1}$.

Exemples :

1) Montrer que les vecteurs $V_1 = (2,1,4)$, $V_2 = (3,2,3)$, $V_3 = (-1,-1,2)$ de $\mathbb{R}^3$ forment une base et en déterminer la base duale.

Exemple de recherche de la base duale d'une base donnée de E.

Pour montrer que P est inversible, on peut, par exemple, montrer $\det(P) \neq 0$.

Puisque $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et, en notant $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de passage de $\mathcal{B}_0^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ à $\mathcal{B}^* = (V_1^*, V_2^*, V_3^*)$ est ${}^{\mathrm{t}}P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -5 \\ -9 & 8 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Utilisation de la Prop. 3.

On a donc : $V_1^* = 7e_1^* - 9e_2^* - e_3^*$, $V_2^* = -6e_1^* + 8e_2^* + e_3^*$, $V_3^* = -5e_1^* + 6e_2^* + e_3^*$.

On conclut que V_1^*, V_2^*, V_3^* sont les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} V_1^*(x_1,x_2,x_3) &= 7x_1 - 9x_2 - x_3 \\ V_2^*(x_1,x_2,x_3) &= -6x_1 + 8x_2 + x_3 \\ V_3^*(x_1,x_2,x_3) &= -5x_1 + 6x_2 + x_3 \end{cases}.$$

Rappelons que, par définition :

$$\begin{cases} e_1^*(x_1,x_2,x_3) = x_1 \\ e_2^*(x_1,x_2,x_3) = x_2 \\ e_3^*(x_1,x_2,x_3) = x_3 \end{cases}.$$

2) Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, x_0, …, $x_n \in K$ deux à deux distincts.

Pour chaque i de $\{0,\ldots,n\}$, notons $L_i = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{0\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} (x_i - x_j)} \prod\limits_{\substack{0\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} (\mathrm{X} - x_j)$

Pour chaque i de $\{0,\ldots,n\}$, L_i est le polynôme de $K[\mathrm{X}]$ de degré n, s'annulant en $x_0,\ldots x_n$ sauf x_i, enprenant la valeur 1 en x_i.

Cf. Algèbre PCSI-PTSI, 5.3.1 Exemple.

Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $K_n[\mathrm{X}]$ (K-ev des polynômes de $K[\mathrm{X}]$ de degré $\leqslant n$), et en déterminer la base duale.

• Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in K^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0$.

On a : $\forall j \in \{0,\ldots,n\}, \quad 0 = \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i\right)(x_j) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_j) = \lambda_j.$

On utilise : $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Ceci montre que $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre.

Comme $\dim(K_n[\mathrm{X}]) = n+1$, on en déduit que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $K_n[\mathrm{X}]$.

On utilise : $L_i^*(L_j) = \delta_{ij}$.

- Soit $P \in K_n[X]$. Puisque $\mathcal{B} = (L_0,\dots,L_n)$ est une base de $K_n[X]$, il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in K^{n+1}$ tel que $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i$.

On a : $\quad \forall j \in \{0,\dots,n\},\ P(x_j) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(x_j) = \alpha_j,$

donc : $\quad P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i.$

Puis : $\quad \forall i \in \{0,\dots,n\}, \quad L_i^*(P) = \sum_{j=0}^{n} P(x_j) L_i^*(L_j) = P(x_i).$

On conclut : $\quad$ pour tout i de $\{0,\dots,n\}$, L_i^* est l'évaluation en x_i, $L_i^* : \begin{array}{l} K_n[X] \longrightarrow K. \\ P \longmapsto P(x_i) \end{array}$

Rappelons que, dans ce § 1.3.3, E désigne un K-ev de dimension finie, $n = \dim(E) \geqslant 1$.

Notons $\beta(E)$ $\big($resp. $\beta(E^*)\big)$ l'ensemble des bases de E (resp. E^*).

Le Th. - Déf. p. 16 permet de définir une application $d : \begin{array}{l} \beta(E) \longrightarrow \beta(E^*) \\ \mathcal{B} \longmapsto \mathcal{B}^* \end{array}$ qui, à chaque base $\mathcal{B}$ de E associe sa base duale $\mathcal{B}^*$.

Nous allons montrer que d est une bijection.

Existence d'au moins une base en dimension finie, cf. Algèbre PCSI-PTSI, § 6.4 Th. - Déf. 1.

a) Le K-ev E admet au moins une base $\mathcal{B}_0$.

Soit $\mathcal{F}$ une base de E^*. Notons $Q = \text{Pass}(\mathcal{B}_0^*, \mathcal{F})$, $P = {}^{\text{t}}Q^{-1}$, $\mathcal{B}$ la base de E telle que $\text{Pass}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}) = P$.

D'après la Prop., comme $Q = {}^{\text{t}}P^{-1}$, on a : $\quad \mathcal{F} = \mathcal{B}^* = d(\mathcal{B})$.
Ceci établit que d est surjective.

b) Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ deux bases de E telles que $\mathcal{B}_1^* = \mathcal{B}_2^*$. La matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ vérifie ${}^{\text{t}}P^{-1} = \text{I}_n$, donc $P = \text{I}_n$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1$.
Ceci montre que d est injective.
Résumons l'étude :

Proposition – Définition 5

Pour toute base $\mathcal{F}$ de E^*, il existe une base unique $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{F} = \mathcal{B}^*$; $\mathcal{B}$ est appelée la **base préduale** (ou : **anté-duale**, ou : **duale**) de $\mathcal{F}$, et on dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$ sont des bases **duales l'une de l'autre**.

Exemple :

Exemple de recherche de la base préduale d'une base donnée de E^*.

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-ev des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré $\leqslant 3$, et $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ les formes linéaires sur E définies par :

$$\forall P \in E, \quad \big(\varphi_1(P) = P(0),\ \varphi_2(P) = P(1),\ \varphi_3(P) = P''(0),\ \varphi_4(P) = P''(1)\big).$$

Vérifier que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E^* et en déterminer la base préduale.

Notons $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E.

Pour montrer que cette matrice carrée d'ordre 4 est inversible, on peut, par exemple, calculer son déterminant et montrer que celui-ci n'est pas nul.

Alors : $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0^*}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est inversible, donc $\mathcal{F} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E^*.

En notant $\mathcal{B}$ la base préduale de $\mathcal{F}$, $Q = \text{Pass}\,(\mathcal{B}_0^*, \mathcal{F})$, $P = \text{Pass}\,(\mathcal{B}_0, \mathcal{B})$, on a :

Obtention de Q^{-1} par la calculette.

$$P = {}^{t}Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{6} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Lecture de P en colonnes.

Finalement, la base préduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est :

$$\left(1 - \mathrm{X},\quad \mathrm{X},\quad -\frac{1}{3}\mathrm{X} + \frac{1}{2}\mathrm{X}^2 - \frac{1}{6}\mathrm{X}^3,\quad -\frac{1}{6}\mathrm{X} + \frac{1}{6}\mathrm{X}^3\right).$$

Exercices 1.3.4, 1.3.5, 1.3.8.

Exercice-type résolu

Exemples de détermination d'une base anté-duale dans un espace de polynômes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et tous non nuls. On note, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$:

$$\varphi_k : E \longrightarrow \mathbb{R},\quad P \longmapsto \varphi_k(P) = \int_0^{a_k} P(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que $(\varphi_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base du dual E^* de E.

b) Déterminer la base anté-duale de $(\varphi_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

Solution

a) • Il est clair que : $\forall k \in \{0, \ldots, n\},\ \ \varphi_k \in E^*$.

• Soit $(\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k = 0$.

On a donc : $\displaystyle\forall P \in E,\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \int_0^{a_k} P(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

Comme : $\forall Q \in \mathbb{R}_{n+1}[\mathrm{X}],\ \ Q' \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$,

on a : $\displaystyle\forall Q \in \mathbb{R}_{n+1}[\mathrm{X}],\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \int_0^{a_k} Q'(x)\,\mathrm{d}x = 0,$

c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \big(Q(a_k) - Q(0)\big) = 0,$

et donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q(a_k) - \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\right) Q(0) = 0.$

Notons, pour la commodité : $a_{n+1} = 0$.

Comme $a_0, \ldots a_n, a_{n+1}$ sont deux à deux distincts, en appliquant le résultat à un polynôme d'interpolation de Lagrange relatif aux points $a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}$, on déduit : $\forall k \in \{0, \ldots, n\},\ \ \lambda_k = 0$.

Ceci montre que $(\varphi_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.

Conseils

Linéarité de l'intégration.

On va établir que $(\varphi_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.

Par hypothèse, $a_0, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts et tous non nuls.
En remplaçant, par exemple, Q par le polynôme d'interpolation de Lagrange s'annulant en $a_1, \ldots, a_{n+1}$ et prenant la valeur 1 en a_0, on déduit : $\lambda_0 = 0$.

Solution

• Comme $\dim(E^*) = \dim(E) = n+1$ et que la famille $(\varphi_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre dans E^* et a $n+1$ éléments, on conclut que $(\varphi_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E^*.

D'après le Cours, il existe une base unique $(P_0,\ldots,P_n)$ de E telle que $(\varphi_0,\ldots,\varphi_n)$ soit la base duale de $(P_0,\ldots,P_n)$.

On a donc :

$$\forall (i,j) \in \{0,\ldots,n\}^2,\ \ \delta_{ij} = \varphi_i(P_j) = \int_0^{a_i} P_j(x)\,\mathrm{d}x.$$

Notons, pour tout $j \in \{0,\ldots,n\}$: $\quad Q_j(\mathrm{X}) = \displaystyle\int_0^{\mathrm{X}} P_j.$

On a donc, pour tout $j \in \{0,\ldots,n\}$:

$$Q_j \in \mathbb{R}_{n+1}[\mathrm{X}], \qquad Q_j' = P_j, \qquad Q_j(0) = 0,$$

et il existe donc $A_j \in E$ tel que : $Q_j = \mathrm{X}A_j$.

On déduit, pour tout $(i,j) \in \{0,\ldots,n\}^2$:

$$\delta_{ij} = \int_0^{a_i} P_j = Q_j(a_i) = a_i A_j(a_i),$$

d'où : $A_j(a_i) = \dfrac{\delta_{ij}}{a_i}$.

En notant $L_0,\ldots,L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange sur les points $a_0,\ldots a_n$, par unicité de $(L_0,\ldots,L_n)$, on a donc :

$$\forall j \in \{0,\ldots,n\},\ \ A_j = \frac{1}{a_j} L_j.$$

On déduit, pour tout $j \in \{0,\ldots,n\}$:

$$P_j = Q_j' = (\mathrm{X}A_j)' = \frac{1}{a_j}(\mathrm{X}L_j' + L_j).$$

En conclusion, la base anté-duale de $(\varphi_0,\ldots,\varphi_n)$ est $(P_0,\ldots,P_n)$, où :

$$\forall j \in \{0,\ldots,n\},\ \ P_j = \frac{1}{a_j}(\mathrm{X}L_j' + L_j).$$

Conseils

Toute base de E^* admet une base anté-duale et une seule, cf. § 1.3.3 Prop.-Déf. 5.

On considère, parmi les primitives de P_j, celle qui s'annule en 0.

Q_j est un multiple de X, car $Q_j(0) = 0$.

Les méthodes à retenir

Dualité

- **Pour déterminer la base duale d'une base ou la base anté-duale d'une base d'un dual**, dans un exemple (ex. 1.3.4, 1.3.5), appliquer la Prop. 4 p. 18.
- **Pour obtenir un résultat en liaison avec la dualité, en dimension finie**, penser à faire éventuellement intervenir une base duale ou une base anté-duale (ex. 1.3.8).

Exercices

1.3.1 Soient E un K-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1, $u \in E - \{0\}$ tel que $\operatorname{Im}(f) = Ku$.

a) Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ unique tel que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \varphi(x)u.$$

b) Montrer qu'il existe $\alpha \in K$ unique tel que $f^2 = \alpha f$ et que, si $\alpha \neq 1$, $f - \mathrm{Id}_E$ est inversible.

1.3.2 Démontrer que les K-ev $(K[X])^*$ et $K^{\mathbb{N}}$ sont isomorphes.

1.3.3 Soient E un K-ev, H un hyperplan de E, F un sev de E tel que $F \not\subset H$.

Démontrer que $F \cap H$ est un hyperplan de F.

1.3.4 Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies, pour tout (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$, par :

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3) &= 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \varphi_3(x_1,x_2,x_3) &= x_1 + x_2. \end{cases}$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$ et en déterminer la base préduale.

1.3.5 Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) &= x + \alpha y + \beta z \\ \varphi_2(x,y,z) &= \alpha x + \alpha^2 y + z \\ \varphi_3(x,y,z) &= \beta x + y + \alpha^2 z. \end{cases}$$

a) CNS sur (α,β) pour que $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ soit une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

b) Lorsque $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$, en déterminer la base préduale.

1.3.6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-ev des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré $\leqslant n$, $a \in \mathbb{C}$.
Pour tous i, j de $\{0,\dots,n\}$, on note :

$$\varphi_i : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & \dfrac{1}{i!}P^{(i)}(a) \end{array} \qquad \text{et} \qquad e_j = (X-a)^j.$$

Montrer que $(e_0,\dots,e_n)$ et $(\varphi_0,\dots,\varphi_n)$ sont deux bases de E et E^* respectivement, duales l'une de l'autre.
Retrouver ainsi la formule de Taylor pour les polynômes.

1.3.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que, pour toute A de $\mathbf{M}_n(K)$, l'application $\begin{array}{rcl} \mathbf{M}_n(K) & \longrightarrow & K \\ X & \longmapsto & \operatorname{tr}(AX) \end{array}$ est un élément de $(\mathbf{M}_n(K))^*$, puis que l'application $\theta : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow (\mathbf{M}_n(K))^*$ définie par :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K), \forall X \in \mathbf{M}_n(K), (\theta(A))(X) = \operatorname{tr}(AX)$$

est un isomorphisme de K-ev.

1.3.8 Soient E un K-ev de dimension finie, $n = \dim(E)$.

a) Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \dots, \varphi_{p+1} \in E^*$.

Montrer que, si $\varphi_{p+1} \in \operatorname{Vect}(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$, alors :

$$\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(\varphi_i) = \bigcap_{i=1}^{p+1} \operatorname{Ker}(\varphi_i).$$

b) Soient $q \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1,\dots,\varphi_q \in E^*$, $r = \operatorname{rg}(\varphi_1,\dots,\varphi_q)$.

Montrer : $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{q} \operatorname{Ker}(\varphi_i)\right) = n - r.$

c) En déduire que, pour toute famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ de n éléments de E^*, $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est liée si et seulement si :

$$\exists x \in E - \{0\}, \ \forall i \in \{1,\dots,n\}, \ \varphi_i(x) = 0.$$

1.4 Calcul matriciel

1.4.1 Trace

On ne définit pas la trace d'une matrice non carrée.

Définition 1

Pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$, on définit la **trace** de A, notée $\operatorname{tr}(A)$, par :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Proposition 1

1) L'application $\begin{array}{rcl}\mathrm{tr} : \mathbf{M}_n(K) & \longrightarrow & K \\ A & \longmapsto & \mathrm{tr}\,(A)\end{array}$ est une forme linéaire, c'est-à-dire :

$$\forall \alpha \in K,\ \forall A,B \in \mathbf{M}_n(K),\ \ \mathrm{tr}\,(\alpha A + B) = \alpha\, \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B).$$

2) $\forall A \in \mathbf{M}_{n,p}(K),\ \forall B \in \mathbf{M}_{p,n}(K),\ \ \mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA).$

3) $\forall A \in \mathbf{M}_n(K),\ \forall P \in \mathbf{GL}_n(K),\ \ \mathrm{tr}\,(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}\,(A).$

La formule *2)* est très importante pour les exercices et problèmes.

Preuve

1) En notant $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{ij})_{ij}$, on a :

$$\mathrm{tr}\,(\alpha A + B) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{ii} + b_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \alpha\, \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B).$$

2) Remarquer d'abord que AB et BA sont carrées, respectivement d'ordres n et p.

En notant $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{ij})_{ij}$, on a :

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} \right) = \mathrm{tr}\,(BA).$$

Permutation de deux symboles $\sum$.

3) D'après *2)* :

$$\mathrm{tr}\,(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}\,(P^{-1}(AP)) = \mathrm{tr}\,((AP)P^{-1}) = \mathrm{tr}\,(A).$$ ■

Exercices 1.4.1, 1.4.4 à 1.4.6.

Rappelons la Définition et la Proposition suivantes, déjà vues dans Algèbre PCSI-PTSI, § 8.2.4.

Proposition-Définition 2

Soient E un K-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **trace** de f, et on note $\mathrm{tr}\,(f)$, la trace de n'importe quelle matrice carrée représentant l'endomorphisme f.

D'après le *3)* de la Proposition 2, toutes les matrices carrées représentant f ont la même trace.

En transcrivant la Proposition 1 en termes d'endomorphismes, on obtient la Proposition suivante.

Proposition 2

Soient E,F des K-ev de dimensions finies.

1) L'application $\begin{array}{rcl}\mathrm{tr} : \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & K \\ f & \longmapsto & \mathrm{tr}\,(f)\end{array}$ est une forme linéaire, c'est-à-dire :

$$\forall \alpha \in K,\ \forall f,g \in \mathcal{L}(E),\ \ \mathrm{tr}\,(\alpha f + g) = \alpha\, \mathrm{tr}\,(f) + \mathrm{tr}\,(g).$$

2) $\forall f \in \mathcal{L}(E,F),\ \forall g \in \mathcal{L}(F,E),\ \ \mathrm{tr}\,(f \circ g) = \mathrm{tr}\,(g \circ f).$

3) $\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \forall h \in \mathcal{GL}(E),\ \ \mathrm{tr}\,(h^{-1} \circ f \circ h) = \mathrm{tr}\,(f).$

Proposition 3

Soient E un K-ev de dimension finie, p un projecteur de E. On a alors :

$$\mathrm{tr}\,(p) = \mathrm{rg}\,(p).$$

Résultat très utile pour les exercices et problèmes.

On confond l'entier r et l'élément $r1_K$, où 1_K est le neutre de la multiplication dans K.

Exercices 1.4.2, 1.4.3, 1.4.7.

Preuve

Le sev $\mathrm{Im}\,(p)$ de E admet au moins une base $\mathcal{B}_1$, et le sev $\mathrm{Ker}\,(p)$ de E admet au moins une base $\mathcal{B}_2$. Puisque p est un projecteur, on a : $\mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(p) = E$, donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ (réunion ordonnée) est une base de E. La matrice A de p dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K),$$

où $r = \dim(\mathrm{Im}\,(p)) = \mathrm{rg}\,(p)$. On a donc :

$$\mathrm{tr}\,(p) = \mathrm{tr}\,(A) = r = \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(p).$$

Exercice-type résolu

Somme de projecteurs en dimension finie

Soient E un K-ev de dimension finie, $N \in \mathbb{N}^*$, $p_1,\dots,p_N$ des projecteurs de E. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} p_i$ est un projecteur de E

(2) $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ \Big(i \neq j \implies p_i \circ p_j = 0\Big)$.

Solution

Notons $e = \mathrm{Id}_E$, $p = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} p_i$.

(2) $\implies$ (1) :

On suppose : $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ \Big(i \neq j \implies p_i \circ p_j = 0\Big)$.

On a :

$$p \circ p = \left(\sum_{i=1}^{N} p_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right) = \sum_{i=1}^{N} p_i \circ p_i + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant N,\ i \neq j} p_i \circ p_j$$
$$= \sum_{i=1}^{N} p_i + 0 = p,$$

donc p est un projecteur de E.

(1) $\implies$ (2) :

On suppose que p est un projecteur de E.

• Notons $p_{N+1} = e - p$, qui est un projecteur, car :

$$(e-p)^2 = e^2 - 2p + p^2 = e - 2p + p = e - p.$$

On a alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{N+1} p_i = e$.

Conseils

On commence par l'implication qui paraît la plus facile.

Rappel : un endomorphisme f de E est un projecteur si et seulement si :

$$f \circ f = f.$$

Cet artifice permet de se ramener au cas d'une somme de projecteurs égale à e.

Solution

On a :

$$\dim(E) = \operatorname{tr}(e) = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{N+1} p_i\right) = \sum_{i=1}^{N+1} \operatorname{tr}(p_i) = \sum_{i=1}^{N+1} \operatorname{rg}(p_i) = \sum_{i=1}^{N+1} \dim\big(\operatorname{Im}(p_i)\big).$$

D'autre part, pour tout $x \in E$:

$$x = e(x) = \left(\sum_{i=1}^{N+1} p_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{N+1} p_i(x) \in \sum_{i=1}^{N+1} \operatorname{Im}(p_i),$$

donc : $\quad E \subset \displaystyle\sum_{i=1}^{N+1} \operatorname{Im}(p_i),$

puis : $$\dim(E) \leqslant \dim\left(\sum_{i=1}^{N+1} \operatorname{Im}(p_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{N+1} \dim\big(\operatorname{Im}(p_i)\big).$$

On a donc :

$$\dim(E) \leqslant \dim\left(\sum_{i=1}^{N+1} \operatorname{Im}(p_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{N+1} \dim\big(\operatorname{Im}(p_i)\big) = \dim(E),$$

d'où nécessairement :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{N+1} \operatorname{Im}(p_i)\right) = \sum_{i=1}^{N+1} \dim\big(\operatorname{Im}(p_i)\big).$$

D'après l'exercice-type du § 1.1 p. 8, la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{N+1} \operatorname{Im}(p_i)$ est directe et $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{N+1} \operatorname{Im}(p_i) = E.$

• Soient $j \in \{1,\dots,N\}$, $x \in E$.

On a :

$$p_j(x) = \sum_{i=1}^{N+1} p_i\big(p_j(x)\big) = \sum_{i=1}^{N+1} p_i \circ p_j(x) = p_j(x) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant N+1,\ i \neq j} p_i \circ p_j(x),$$

donc :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant N+1,\ i \neq j} p_i\big(p_j(x)\big) = 0.$$

Comme la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{N+1} \operatorname{Im}(p_i)$ est directe, il en résulte :

$$\forall i \in \{1,\dots,N+1\},\ \Big(i \neq j \implies p_i\big(p_j(x)\big) = 0\Big).$$

Finalement, en particulier :

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,N\}^2,\ \Big(i \neq j \implies p_i \circ p_j = 0\Big),$$

ce qui établit (2).

Conseils

Puisque p_i est un projecteur d'un ev de dimension finie, on a :

$$\operatorname{tr}(p_i) = \operatorname{rg}(p_i).$$

On a, pour tous sev F, G d'un ev de dimension finie, d'après la formule de Grassmann :

$$\begin{aligned} &\dim(F+G) \\ &= \dim(E) + \dim(F) - \dim(F \cap G) \\ &\leqslant \dim(F) + \dim(G), \end{aligned}$$

d'où l'inégalité pour la dimension de la somme de plusieurs sev.

La somme $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant N+1,\ i \neq j} \operatorname{Im}(p_i)$ est directe.

Les méthodes à retenir

Trace

- **Pour résoudre une question portant sur un ou des projecteurs en dimension finie**, on peut essayer d'utiliser la formule $\mathrm{tr}\,(p) = \mathrm{rg}\,(p)$ (ex. 1.4.2, 1.4.3, 1.4.7).
- **Pour résoudre une question sur des matrices carrées de rang 1,** on peut essayer d'utiliser le résultat de l'exercice 8.1.30 *b)* du volume Algèbre PCSI-PTSI : pour toute matrice carrée H telle que $\mathrm{rg}\,(H) \leqslant 1$, on a : $H^2 = \mathrm{tr}\,(H)H$ (ex. 1.4.6).

Exercices

1.4.1 Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathbf{M}_5(\mathbb{R})$:

$$3X + 2\,{}^{\mathrm{t}}X = \mathrm{tr}\,(X)\,\mathrm{I}_5.$$

1.4.2 Soient E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, $N \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_N \in \mathbb{R}_+^*$, $p_1,\ldots p_N$ des projecteurs de E.
On suppose :

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i = 0.$$

Montrer :

$$\forall i \in \{1,\ldots,N\},\quad p_i = 0.$$

1.4.3 Soient E un K-ev de dimension finie, $n = \dim(E) \geqslant 1$, $f_1,\ldots,f_n \in \mathcal{L}(E) - \{0\}$ tels que :

$$\forall i,j \in \{1,\ldots,n\},\quad f_i \circ f_j = \delta_{ij} f_i,$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Montrer :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\quad \mathrm{rg}\,(f_i) = 1.$$

1.4.4 Soient $A,B \in \mathbf{M}_2(K)$ telles que :

$$\mathrm{tr}\,(A) \neq 0 \quad \text{et} \quad A^2B = AB^2.$$

Montrer :

$$AB = BA.$$

1.4.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A,B \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que :

$$A \neq 0,\quad B \neq 0,\quad 1 - \mathrm{tr}\,(A)\,\mathrm{tr}\,(B) \neq 0.$$

Résoudre le système d'équations d'inconnue $(X,Y) \in (\mathbf{M}_n(K))^2$:

$$\begin{cases} X = \mathrm{I}_n + \mathrm{tr}\,(Y)A \\ Y = \mathrm{I}_n + \mathrm{tr}\,(X)B. \end{cases}$$

1.4.6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A,B \in \mathbf{M}_n(K)$. On suppose :

$$\mathrm{rg}\,(AB - BA) \leqslant 1.$$

Montrer :

$$\mathrm{Im}\,(AB - BA) \subset \mathrm{Ker}\,(AB - BA).$$

On pourra utiliser l'exercice 8.1.30 *b)* du volume Algèbre PCSI-PTSI.

1.4.7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

a) On note $\nu = \mathrm{Card}\,(G)$ et $P = \dfrac{1}{\nu}\displaystyle\sum_{M \in G} M$.

Montrer :

$$\forall N \in G,\quad PN = P$$

et en déduire :

$$P^2 = P.$$

b) Montrer que, si $\displaystyle\sum_{M \in G} \mathrm{tr}\,(M) = 0$, alors $\displaystyle\sum_{M \in G} M = 0$.

1.4.2 Blocs

1) Décomposition en blocs

Soient

- $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$
- $s,t \in \mathbb{N}^*$, $(n_1,\dots,n_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$, $(p_1,\dots,p_t) \in (\mathbb{N}^*)^t$ tels que $n_1 + \ldots + n_s = n$ et $p_1 + \ldots + p_t = p$
- $n_0 = p_0 = 0$
- $\sigma_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} n_i$, pour $k \in \{0,\dots,s\}$
- $\tau_l = \displaystyle\sum_{j=0}^{l} p_j$, pour $l \in \{0,\dots,t\}$.

Dans A, groupons les éléments « par blocs » :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
a_{11} & \ldots & a_{1\,\tau_1} & a_{1\,\tau_1+1} & \ldots & a_{1\,\tau_2} & \ldots & a_{1\,\tau_{t-1}+1} & \ldots & a_{1\,p} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ldots & \vdots & & \vdots \\
a_{\sigma_1 1} & \ldots & a_{\sigma_1\,\tau_1} & a_{\sigma_1\,\tau_1+1} & \ldots & a_{\sigma_1\,\tau_2} & \ldots & a_{\sigma_1\tau_{t-1}+1} & \ldots & a_{\sigma_1\,p} \\
\hline
a_{\sigma_1+1\,1} & \ldots & a_{\sigma_1+1\,\tau_1} & a_{\sigma_1+1\,\tau_1+1} & \ldots & a_{\sigma_1+1\,\tau_2} & \ldots & a_{\sigma_1+1\tau_{t-1}+1} & \ldots & a_{\sigma_1+1\,p} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ldots & \vdots & & \vdots \\
a_{\sigma_2\,1} & \ldots & a_{\sigma_2\,\tau_1} & a_{\sigma_2\,\tau_1+1} & \ldots & a_{\sigma_2\,\tau_2} & \ldots & a_{\sigma_2\tau_{t-1}+1} & \ldots & a_{\sigma_2\,p} \\
\hline
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
\hline
a_{\sigma_{s-1}+1\,1} & \ldots & a_{\sigma_{s-1}+1\,\tau_1} & a_{\sigma_{s-1}+1\,\tau_1+1} & \ldots & a_{\sigma_{s-1}+1\,\tau_2} & \ldots & a_{\sigma_{s-1}+1\tau_{t-1}+1} & \ldots & a_{\sigma_{s-1}+1\,p} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ldots & \vdots & & \vdots \\
a_{n\,1} & \ldots & a_{n\,\tau_1} & a_{n\,\tau_1+1} & \ldots & a_{n\,\tau_2} & & a_{n\,\tau_{t-1}+1} & \ldots & a_{n,p}
\end{array}\right).$$

Pour $(k,l) \in \{1,\dots,s\} \times \{1,\dots,t\}$, la matrice

$$B_{k,l} = \begin{pmatrix} a_{\sigma_{k-1}+1\ \tau_{l-1}+1} & \ldots & a_{\sigma_{k-1}+1\,\tau_l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\sigma_k\ \tau_{l-1}+1} & \ldots & a_{\sigma_k\,\tau_l} \end{pmatrix}$$

de $\mathbf{M}_{n_k,p_l}(K)$ est appelée le $(k,l)^{\text{ème}}$ **bloc dans la décomposition de A en blocs suivant le découpage $(n_1,\dots,n_s)$ pour les lignes et $(p_1,\dots,p_t)$ pour les colonnes :**

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & \ldots & B_{1t} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline B_{s1} & \ldots & B_{st} \end{array}\right) \\ \xleftrightarrow{\quad} \cdots\cdots \xleftrightarrow{\quad} \\ p_1 \text{ colonnes} \qquad p_t \text{ colonnes} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow\ n_1 \text{ lignes} \\ \vdots \\ \updownarrow\ n_s \text{ lignes} \end{array} .$$

Pour la commodité, on pourra omettre les traits indiquant le découpage.

Quelques exemples de décompositions en blocs :

$\begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1,1}(K)$, pour $x \in K$, $X \in \mathbf{M}_{n,1}(K)$.

$(X \quad Y) \in \mathbf{M}_{n,p+q}(K)$, pour $X \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $Y \in \mathbf{M}_{n,q}(K)$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+p}(K),\ \text{pour } A \in \mathbf{M}_n(K),\ B \in \mathbf{M}_{n,p}(K),\ C \in \mathbf{M}_{p,n}(K),\ D \in \mathbf{M}_p(K)$$

$$\begin{pmatrix} a & L \\ C & B \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(K),\ \text{pour } a \in K,\ L \in \mathbf{M}_{1,n}(K),\ C \in \mathbf{M}_{n,1}(K),\ B \in \mathbf{M}_n(K).$$

Remarques :

1) Si A est une matrice carrée, nous n'utiliserons, sauf exception, que des décompositions en blocs pour lesquelles $s = t$ et $(n_1,\ldots,n_s) = (p_1,\ldots,p_s)$:

$$\begin{array}{cl} A = \begin{pmatrix} B_{11} & \ldots & B_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \ldots & B_{ss} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \text{ lignes} \\ \vdots \\ \updownarrow n_s \text{ lignes} \end{array} \\ \quad\ \overrightarrow{n_1 \text{ colonnes}} \quad \overrightarrow{n_s \text{ colonnes}} & \end{array}$$

Les blocs diagonaux B_{kk} sont carrés.

Dans ce cas, les blocs B_{kk} $(k \in \{1,\ldots,s\})$ sont appelés les **blocs diagonaux** de la décomposition de A en blocs.

2) Soient E un K-ev de dimension finie, $n = \dim(E)$, F un sev de E, $p = \dim(F)$, $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour que F soit stable par f, il faut et il suffit qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ de E telle que :

La présence de certains blocs de zéros dans une décomposition en blocs peut traduire la stabilité d'un sev.

$$\begin{cases} (e_1,\ldots,e_p) & \text{est une base de } F \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) & \text{est de la forme } \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \ \overrightarrow{p}\quad \overrightarrow{n-p} & \end{array} \end{cases}.$$

De plus, dans ce cas, A est la matrice dans $(e_1,\ldots,e_p)$ de l'endomorphisme induit par f sur F.

La Proposition suivante est immédiate.

2) Opérations sur les matrices décomposées en blocs

Proposition 1 Addition et loi externe par blocs

Soient $\lambda \in K,\ A,\ B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$.

Si A et B sont décomposées en blocs avec le même découpage, alors $\lambda A + B$ admet la décomposition en blocs (avec le même découpage) obtenue en combinant les blocs situés aux mêmes places :

Pour les matrices, une addition par blocs s'effectue comme une addition habituelle par éléments.

$$\lambda \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1t} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ A_{s1} & \ldots & A_{st} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & \ldots & B_{1t} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ B_{s1} & \ldots & B_{st} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda A_{11} + B_{11} & \ldots & \lambda A_{1t} + B_{1t} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \lambda A_{s1} + B_{s1} & \ldots & \lambda A_{st} + B_{st} \end{pmatrix}.$$

Exemples :

Soient $x, y \in K, X, Y \in \mathbf{M}_{n,1}(K), A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathbf{M}_n(K)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ X+Y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+A' & B+B' \\ C+C' & D+D' \end{pmatrix}.$$

Théorème **Produit par blocs**

Soient $A \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,q}(K)$,

$$A = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \dots & A_{st} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \vdots \\ \updownarrow n_s \end{array} \\ \overrightarrow{p_1} \ \dots \ \overrightarrow{p_t} \end{array}, \qquad B = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1t'} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s'1} & \dots & B_{s't'} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow n'_1 \\ \vdots \\ \updownarrow n'_{s'} \end{array} \\ \overrightarrow{p'_1} \ \dots \ \overrightarrow{p'_{t'}} \end{array}$$

des décompositions en blocs de A et B telles que :

$$s' = t, \qquad (n'_1,\ldots,n'_{s'}) = (p_1,\ldots,p_t).$$

Alors AB admet la décomposition en blocs :

$$AB = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{s'} A_{1j}\,B_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^{s'} A_{1j}\,B_{jt'} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{s'} A_{sj}\,B_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^{s'} A_{sj}\,B_{jt'} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \vdots \\ \updownarrow n_s \end{array} \\ \underleftrightarrow{\ p'_1\ } \ \dots \ \underleftrightarrow{\ p'_{t'}\ } \end{array}$$

On peut effectuer le produit de deux matrices décomposées en blocs en opérant sur les blocs (comme si ceux-ci étaient des éléments de K), à condition que les produits envisagés existent et en respectant l'ordre des blocs.

Le lecteur pourra, conformément au programme, admettre ce théorème.

Preuve (pouvant être omise en première lecture)

Soit $(i,j') \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,q\}$. Il existe $(k,l') \in \{1,\ldots,s\} \times \{1,\ldots,t'\}$ unique tel que :

$$n_0 + \ldots + n_{k-1} + 1 \leqslant i \leqslant n_0 + \ldots + n_k \ \text{ et } \ p'_0 + \ldots + p'_{l'-1} + 1 \leqslant j' \leqslant p'_0 + \ldots + p'_{l'}.$$

L'élément de AB situé à la $(i,j')^{\text{ème}}$ place vaut :

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jj'} = \sum_{j=1}^{p_1} a_{ij}b_{jj'} + \sum_{j=p_1+1}^{p_1+p_2} a_{ij}b_{jj'} + \ldots + \sum_{j=p_1+\ldots+p_{t-1}+1}^{p} a_{ij}b_{jj'}.$$

Mais $\displaystyle\sum_{j=1}^{p_1} a_{ij}\,b_{jj'}$, $\displaystyle\sum_{j=p_1+1}^{p_2} a_{ij}b_{jj'}$, ..., $\displaystyle\sum_{j=p_1+\ldots+p_{t-1}+1}^{p} a_{ij}b_{jj'}$ sont respectivement les éléments de $A_{k1}B_{1l'}, A_{k2}B_{2l'}, \ldots, A_{ks'}B_{s'l'}$ situés à la :

$\left(i - (n_0 + \ldots + n_{k-1}),\ j' - (p'_0 + \ldots + p'_{l'-1})\right)^{\text{ème}}$ place, d'où le résultat. ■

Exemples :

Soient $a,b \in K$, V, $W \in \mathbf{M}_{n,1}(K)$, $L \in \mathbf{M}_{1,n}(K)$, $A,B,C,D,A',B',C',D' \in \mathbf{M}_n(K)$.

On a :

$$(a \ \ L)\begin{pmatrix} b \\ V \end{pmatrix} = (ab + LV) \in \mathbf{M}_1(K)$$

$$\begin{pmatrix} b \\ V \end{pmatrix}(a \ \ L) = \begin{pmatrix} ba & bL \\ aV & VL \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(K)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AV + BW \\ CV + DW \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n,1}(K)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n}(K).$$

Remarques :

En effectuant un produit par blocs, veiller à respecter l'ordre des matrices dans les produits de blocs. Par exemple, pour $A,B,C,D \in \mathbf{M}_n(K)$: $(A \mid B)\left(\frac{C}{D}\right) = AC + BD$, qui est différent *a priori* de $CA + BD$.

Cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.1.4 Rem. *3)*.

Cependant, pour $a \in K$, on a vu qu'on pouvait confondre a et la matrice (a) de $\mathbf{M}_1(K)$. Ainsi, pout toute V de $\mathbf{M}_{n,1}(K)$, $aV = V(a)$; mais $(a)V$ n'existe pas (si $n \geqslant 2$).

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition 2 Transposition par blocs

Pour transposer une matrice décomposée en blocs : on échange les blocs (en les écrivant en colonnes de blocs au lieu de lignes de blocs, par exemple), et on transpose chaque bloc.

On a, pour toute décomposition en blocs :

$$ {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \dots & A_{st} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}A_{11} & \dots & {}^{\mathrm{t}}A_{s1} \\ \vdots & & \vdots \\ {}^{\mathrm{t}}A_{1t} & \dots & {}^{\mathrm{t}}A_{st} \end{pmatrix}. $$

Exemples :

Soient $a \in K$, $V \in \mathbf{M}_{n,1}(K)$, $A,B,C,D \in \mathbf{M}_n(K)$.

On a : $\quad {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} a \\ V \end{pmatrix} = (a \quad {}^{\mathrm{t}}V), \quad {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}A & {}^{\mathrm{t}}C \\ {}^{\mathrm{t}}B & {}^{\mathrm{t}}D \end{pmatrix}.$

Exercices 1.4.9 à 1.4.14.

3) Matrices triangulaires par blocs, matrices diagonales par blocs

Définition

La notion de matrice triangulaire par blocs généralise la notion de matrice triangulaire.

1) • Une matrice carrée A est dite **triangulaire supérieure par blocs** si et seulement si elle admet une décomposition en blocs :

$$ A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix} $$

telle que : $\begin{cases} A_{11},\dots,A_{ss} \text{ sont des matrices carrées} \\ \text{les blocs situés sous la diagonale sont tous nuls.} \end{cases}$

• Définition analogue pour une **matrice triangulaire inférieure par blocs**.

• Une matrice carrée est dite **triangulaire par blocs** si et seulement si elle est triangulaire supérieure par blocs ou triangulaire inférieure par blocs.

La notion de matrice diagonale par blocs généralise la notion de matrice diagonale.

2) Une matrice carrée A est dite **diagonale par blocs** si et seulement si elle admet une décomposition en blocs :

$$ A = \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix} $$

telle que : $\begin{cases} A_{11},\dots,A_{ss} \text{ sont des matrices carrées} \\ \text{les blocs non diagonaux sont tous nuls.} \end{cases}$

On peut alors noter : $A = \mathrm{diag}(A_{11},\dots,A_{ss})$.

Comme dans Algèbre PCSI-PTSI, §§ 8.3.2 et 8.3.3, on montre les résultats suivants :

1) L'ensemble des matrices de $\mathbf{M}_n(K)$ triangulaires supérieures par blocs (avec le même découpage) est une sous-algèbre unitaire de l'algèbre unitaire $\mathbf{M}_n(K)$.

De plus, les blocs diagonaux du produit de deux matrices triangulaires supérieures par blocs (avec le même découpage) sont les produits des blocs diagonaux situés à la même place :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss}B_{ss} \end{pmatrix}.$$

2) Soit A une matrice triangulaire supérieure par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix}.$$

Pour que A soit inversible (dans $\mathbf{M}_n(K)$), il faut et il suffit que :

$$\forall k \in \{1,\dots,s\}, \quad \det(A_{kk}) \neq 0.$$

De plus, dans ce cas, A^{-1} est triangulaire supérieure par blocs, et les blocs diagonaux de A^{-1} sont les inverses des blocs diagonaux de A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss}^{-1} \end{pmatrix}.$$

3) L'ensemble des matrices de $\mathbf{M}_n(K)$ diagonales par blocs (avec le même découpage) est une sous-algèbre unitaire (non nécessairement commutative) de l'algèbre unitaire $\mathbf{M}_n(K)$. De plus :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss}B_{ss} \end{pmatrix}.$$

4) Soit A une matrice diagonale par blocs : $A = \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix}.$

Pour que A soit inversible (dans $\mathbf{M}_n(K)$), il faut et il suffit que :

$$\forall k \in \{1,\dots,s\}, \quad \det(A_{kk}) \neq 0.$$

De plus, dans ce cas, A^{-1} est diagonale par blocs et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice-type résolu

Utilisation de blocs

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $A \notin \mathbf{GL}_n(K)$

(2) $\exists B \in \mathbf{M}_n(K) - \{0\}, \quad AB = BA = 0.$

Solution

• (2) $\Longrightarrow$ (1) :

Supposons qu'il existe $B \in \mathbf{M}_n(K) - \{0\}$ telle que $AB = BA = 0$.

Raisonnons par l'absurde : supposons $A \in \mathbf{GL}_n(K)$.

Alors : $B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0$, contradiction.

On conclut : $A \notin \mathbf{GL}_n(K)$.

• (1) $\Longrightarrow$ (2) :

On suppose : $A \notin \mathbf{GL}_n(K)$.

Notons $r = \mathrm{rg}\,(A)$. On a donc : $r < n$.

D'après le Cours, il existe $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$ telles que $A = PJQ$, où :

$J = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $B \in \mathbf{M}_n(K)$. Notons $C = QBP$, de sorte que $B = Q^{-1}CP^{-1}$.

On a alors :

$$\begin{cases} AB = 0 \\ BA = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} PJQQ^{-1}CP^{-1} = 0 \\ Q^{-1}CP^{-1}PJQ = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} PJCP^{-1} = 0 \\ Q^{-1}CJQ = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} JC = 0 \\ CJ = 0. \end{cases}$$

Notons $C = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$,

où $R \in \mathbf{M}_r(K)$, $S \in \mathbf{M}_{r,n-r}(K)$, $T \in \mathbf{M}_{n-r,r}(K)$, $U \in \mathbf{M}_{n-r}(K)$.

On a alors :

$$\begin{cases} JC = 0 \\ CJ = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} R & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} R & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} R = 0 \\ S = 0 \\ T = 0. \end{cases}$$

En notant $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix}$, on a donc $JC = CJ = 0$, d'où $AB = BA = 0$.

De plus, si $B = 0$, alors $C = QBP = 0$, contradiction.

On conclut :

$$\exists\, B \in \mathbf{M}_n(K) - \{0\}, \quad AB = BA = 0.$$

Conseils

On commence par l'implication qui paraît la plus facile.

Puisqu'on veut montrer un résultat qui s'exprime par une négation, on essaie de raisonner par l'absurde.

Cf. Algèbre PCSI-PTSI, § 8.2.3 2) Prop.2.

On décompose C en blocs, comme pour J.

Calcul de produits par blocs.

La matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix}$ n'est pas la matrice nulle, car $n - r \geqslant 1$, puisque $r < n$.

Les méthodes à retenir

Blocs

- **Pour résoudre une question portant sur une matrice et faisant intervenir des blocs**, essayer de présenter la matrice inconnue sous forme de matrice décomposée en blocs, ces blocs étant les nouvelles inconnues (ex. 1.4.8). Ainsi, une matrice de $\mathbf{M}_{2n}(K)$ pourra être décomposée en quatre blocs d'ordre n. Un raisonnement par récurrence pourra demander de décomposer une matrice $\mathbf{M}_{n+1}(K)$ en quatre blocs de types respectifs (n,n), $(1,n)$, $(n,1)$, $(1,1)$.
- **Pour étudier le rang d'une matrice décomposée en blocs** (ex. 1.4.10 à 1.4.12), penser à utiliser le résultat suivant de PCSI-PTSI : en notant r le rang d'une matrice A de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ et $Q \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que, en notant $\mathrm{J}_{n,p,r} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, on ait : $A = P\mathrm{J}_{n,p,r}Q$ (Algèbre PCSI-PTSI, § 8.2.3 2) Prop. 2).

Exercices

1.4.8 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{GL}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $C \in \mathbf{GL}_p(K)$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Montrer : $M \in \mathbf{GL}_{n+p}(K)$ et calculer M^{-1} sous forme de décomposition en blocs.

1.4.9 Soient E, F deux K-ev de dimension finie, $n = \dim(F)$, $p = \dim(E)$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $r = \mathrm{rg}(f)$, $G = \{g \in \mathcal{L}(F,E)\ ;\ \ g \circ f = 0 \text{ et } f \circ g = 0\}$.

Montrer que G est un K-ev et calculer sa dimension.

1.4.10 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_p(K)$.

Montrer : $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = n + \mathrm{rg}(C)$.

1.4.11 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,n}(K)$.

a) Montrer : $n + \mathrm{rg}(\mathrm{I}_p - BA) = p + \mathrm{rg}(\mathrm{I}_n - AB)$.

(On pourra utiliser l'exercice 1.4.10).

b) En déduire :

$$\mathrm{rg}(\mathrm{I}_n - AB) = n - p \iff BA = \mathrm{I}_p.$$

1.4.12 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_p(K)$.
Montrer :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B).$$

1.4.13 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $X \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $Y \in \mathbf{M}_{p,n}(K)$. Montrer :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A & AX \\ YA & YAX \end{pmatrix} = \mathrm{rg}(A).$$

1.4.14 Soient E, F deux K-ev de dimension finie, $f,\ g \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que les quatre propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$

(ii) $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f+g)$
et $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$

(iii) $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E$
et $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f+g)$

(iv) Il existe $r,s \in \mathbb{N}$ et deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ de E, F respectivement, tels que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminants

CHAPITRE 2

Plan

Introduction

Nous généralisons ici à l'ordre n l'étude des déterminants d'ordre 2 ou 3 effectuée en 1$^{\text{re}}$ année (Algèbre PCSI-PTSI, chapitre 9).

L'utilisation de la notion de déterminant permettra de décider si une matrice carrée est inversible, et amènera l'introduction du polynôme caractéristique d'une matrice carrée.

Dans ce chapitre, trois notions de déterminant vont être définies :

- déterminant d'une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n
- déterminant d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie
- déterminant d'une matrice carrée.

Prérequis

- Espaces vectoriels (Algèbre PCSI-PTSI ch. 6)
- Applications linéaires (Algèbre PCSI-PTSI ch. 7)
- Matrices (Algèbre PCSI-PTSI ch. 8).

Objectifs

- Mise en place de la notion de déterminant
- Acquisition des méthodes de calcul des déterminants
- Utilisation des déterminants : critère d'inversibilité d'une matrice carrée, rang d'une matrice rectangulaire, résolution de systèmes d'équations affines, orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

2.1 Le groupe symétrique

Rappel de définition : une **permutation** d'un ensemble est une bijection de cet ensemble sur lui-même.

Rappelons que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$ c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $\{1,\dots,n\}$ dans lui-même, et que $\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_n) = n!$.

2.1.1 Structure de $\mathfrak{S}_n$

Proposition

$\mathfrak{S}_n$ est un groupe pour la loi $\circ$, appelé **groupe symétrique**.

Preuve

1) $\forall \rho,\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma \circ \rho \in \mathfrak{S}_n$ car la composée de deux bijections est une bijection.

2) $\circ$ est associative.

3) $\mathrm{Id}_{\{1,\dots,n\}} \in \mathfrak{S}_n$.

4) Pour tout σ de $\mathfrak{S}_n$, σ est bijective et $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$. ■

Les éléments de $\{1,\dots,n\}$ sont placés en ligne.

L'image d'un élément de $\{1,\dots,n\}$ par σ est placé juste en dessous de cet élément.

Exercice 2.1.1.

Par commodité, nous noterons e l'identité de $\{1,\dots,n\}$.

Une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ sera notée : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

2.1.2 Transpositions

On suppose ici $n \geqslant 2$.

Définition 1

Pour tout (i,j) de $\{1,\dots,n\}^2$ tel que $i < j$, on appelle **transposition** échangeant i et j, et on note $\tau_{i,j}$ (ou : τ_{ij}, ou : (i,j)) la permutation de $\{1,\dots,n\}$ définie par :

$\tau_{i,j}(i) = j, \quad \tau_{i,j}(j) = i, \quad \tau_{i,j}(k) = k$ pour tout k de $\{1,\dots,n\} - \{i,j\}$.

La transposition $\tau_{i,j}$ échange i et j et laisse les autres éléments inchangés.

Exemple :

Pour $n = 5$, $\tau_{2,4} = (2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$\tau_{2,4}$ échange 2 et 4, et laisse 1, 3, 5, inchangés.

Remarques :

1) $\mathfrak{S}_n$ contient exactement C_n^2 transpositions.

2) Toute transposition est involutive.

C'est-à-dire : $\tau_{i,j} \circ \tau_{i,j} = e$.

Théorème 1

Les transpositions de $\{1,\dots,n\}$ engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$.

Autrement dit, toute permutation de $\{1,\dots,n\}$ est décomposable (d'au moins une façon) en un produit de (plusieurs) transpositions.

Preuve :

Récurrence sur n.

$\mathfrak{S}_2 = \{e, \tau_{1,2}\}$ et $e = \tau_{1,2}^2$, donc $\{\tau_{1,2}\}$ engendre $\mathfrak{S}_2$.

Ainsi, la propriété voulue est vraie pour $n = 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Supposons que les transpositions de $\{1,\dots,n\}$ engendrent $\mathfrak{S}_n$, et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$.

1^er^ cas : $\sigma(n+1) = n+1$.

Comme σ est bijective, $\{1,\ldots,n\}$ est alors stable par σ et l'application induite

$\sigma' : \{1,\ldots,n\} \underset{k\longmapsto\sigma(k)}{\longrightarrow} \{1,\ldots,n\}$ est une permutation de $\{1,\ldots,n\}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et des transpositions $t'_1,\ldots,t'_N$ de $\{1,\ldots,n\}$ telles que :

$$\sigma' = t'_1 \circ \ldots \circ t'_N.$$

t_r est obtenue en prolongeant t'_r en $n+1$

En notant, pour chaque r de $\{1,\ldots,N\}$, $t_r : \{1,\ldots,n+1\} \longrightarrow \{1,\ldots,n+1\}$ l'application définie par : $t_r(k) = \begin{cases} t'_r(k) & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n \\ n+1 & \text{si } k = n+1 \end{cases}$, il est clair que $t_1,\ldots,t_N$ sont des transpositions de $\{1,\ldots,n+1\}$, et que $\sigma = t_1 \circ \ldots \circ t_N$.

2^ème^ cas : $\sigma(n+1) \neq n+1$.

Considérons $\rho = \tau_{n+1,\sigma(n+1)} \circ \sigma$.

On applique le résultat du 1^er^ cas à ρ.

On a $\rho \in \mathfrak{S}_{n+1}$ et $\rho(n+1) = \tau_{n+1,\sigma(n+1)}(\sigma(n+1)) = n+1$. D'après l'étude du 1^er^ cas, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et des transpositions $t_1,\ldots,t_N$ de $\{1,\ldots,n+1\}$ telles que $\rho = t_1 \circ \ldots \circ t_N$. Alors $\sigma = \tau_{n+1,\sigma(n+1)} \circ t_1 \circ \ldots \circ t_N$ et donc σ est un produit de transpositions de $\{1,\ldots,n+1\}$. ■

La preuve précédente fournit un algorithme permettant de décomposer une permutation quelconque en un produit de transpositions : on remet les éléments $1,\ldots,n$ dans l'ordre, en en mettant un à sa place (au moins) à chaque étape.

Par exemple, soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 8 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

On met 8 à sa place, en dernier.

On met 7 à sa place, en avant-dernier.

$$\begin{array}{cccccccc|l}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\
 & & & & & & & & \downarrow \sigma \\
6 & 3 & 7 & 4 & \boxed{8} & 1 & 5 & \boxed{2} & \\
 & & & & & & & & \downarrow \tau_{2,\,8} \\
6 & 3 & \boxed{7} & 4 & 2 & 1 & \boxed{5} & 8 & \\
 & & & & & & & & \downarrow \tau_{5,\,7} \\
\boxed{6} & 3 & 5 & 4 & 2 & \boxed{1} & 7 & 8 & \\
 & & & & & & & & \downarrow \tau_{1,\,6} \\
1 & 3 & \boxed{5} & 4 & \boxed{2} & 6 & 7 & 8 & \\
 & & & & & & & & \downarrow \tau_{2,\,5} \\
1 & \boxed{3} & \boxed{2} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\
 & & & & & & & & \downarrow \tau_{2,\,3} \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 &
\end{array}$$

Dans chaque ligne, on a encadré les deux éléments qui vont être échangés pour obtenir la ligne suivante.

Rappelons que toute transposition est involutive.

On a donc $\tau_{2,\,3} \circ \tau_{2,\,5} \circ \tau_{1,\,6} \circ \tau_{5,\,7} \circ \tau_{2,\,8} \circ \sigma = e$,
d'où $\sigma = \tau_{2,\,8} \circ \tau_{5,\,7} \circ \tau_{1,\,6} \circ \tau_{2,\,5} \circ \tau_{2,\,3}$.

Remarque :

L'algorithme précédent montre que toute permutation de $\{1,\ldots,n\}$ est décomposable, d'au moins une façon, en un produit d'au plus n transpositions.

Définition 2

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

On dit qu'un couple $(\sigma(i),\sigma(j))$ **présente une inversion pour σ (ou : est une inversion de σ)** si et seulement si : $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

On note $\mathrm{I}(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ, et on appelle **signature** de σ le nombre, noté $\varepsilon(\sigma)$, défini par : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\mathrm{I}(\sigma)}$.

On dit que σ est **paire** (resp. **impaire**) si et seulement si $\varepsilon(\sigma) = 1$ (resp. $\varepsilon(\sigma) = -1$).

Ainsi :
- σ paire $\iff \varepsilon(\sigma) = 1$
  $\iff I(\sigma)$ pair
- σ impaire $\iff \varepsilon(\sigma) = -1$
  $\iff I(\sigma)$ impair.

Exercices 2.1.2, 2.1.3.

Rappel de définition : une ***paire*** est un ensemble de deux éléments distincts.

Proposition 1

Pour toute σ de $\mathfrak{S}_n$: $\varepsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{\{i,j\}\in\mathfrak{P}_2(n)} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$, où $\mathfrak{P}_2(n)$ désigne l'ensemble des paires de $\{1,\ldots,n\}$.

Preuve

1) Puisque σ est une permutation de $\{1,\ldots,n\}$ l'application $\sigma_2 : \begin{array}{ccc}\mathfrak{P}_2(n) & \longrightarrow & \mathfrak{P}_2(n)\\ \{i,j\} & \longmapsto & \{\sigma(i),\sigma(j)\}\end{array}$ est une permutation de $\mathfrak{P}_2(n)$, et donc :

$$\prod_{\{i,j\}\in\mathfrak{P}_2(n)} |\sigma(j)-\sigma(i)| = \prod_{\{i,j\}\in\mathfrak{P}_2(n)} |j-i|,$$

ce qui montre : $\left| \displaystyle\prod_{\{i,j\}\in\mathfrak{P}_2(n)} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} \right| = 1\,.$

2) Le nombre de paires $\{i,j\}$ de $\{1,\ldots,n\}$ telles que $\dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} < 0$ est $\mathrm{I}(\sigma)$, donc $\displaystyle\prod_{\{i,j\}\in\mathfrak{P}_2(n)} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ est du même signe que $\varepsilon(\sigma)$.

Remarque :

L'indexation $1 \leqslant i < j \leqslant n$ est plus commode que $\{i,j\}\in\mathfrak{P}_2(n)$.

On a aussi : $\quad \varepsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}.$

Théorème 2

L'application signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{-1,1\}$ est un morphisme du groupe $(\mathfrak{S}_n,\circ)$ sur le groupe multiplicatif $\{-1,1\}$.

Preuve

Soient $\rho,\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On a :

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma\circ\rho) &= \prod_{\{i,j\}\in\mathfrak{P}_2(n)} \frac{(\sigma\circ\rho)(j)-(\sigma\circ\rho)(i)}{j-i}\\ &= \prod_{\{i,j\}\in\mathfrak{P}_2(n)} \frac{\sigma(\rho(j))-\sigma(\rho(i))}{\rho(j)-\rho(i)} \cdot \prod_{\{i,j\}\in\mathfrak{P}_2(n)} \frac{\rho(j)-\rho(i)}{j-i}.\end{aligned}$$

On peut diviser par $\rho(j)-\rho(i)$ car $i \neq j$ et ρ est injective, donc $\rho(i) \neq \rho(j)$.

L'application $\{i,j\} \longmapsto \{\rho(i),\rho(j)\}$ étant une permutation de $\mathfrak{P}_2(n)$, on obtient :

Changement d'indexation pour le premier produit.

$$\varepsilon(\sigma\circ\rho) = \prod_{\{k,l\}\in\mathfrak{P}_2(n)} \frac{\sigma(l)-\sigma(k)}{l-k} \cdot \prod_{\{i,j\}\in\mathfrak{P}_2(n)} \frac{\rho(j)-\rho(i)}{j-i} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\rho).$$

D'autre part, il est clair que $\{-1,1\}$ est un groupe pour la multiplication. ■

Proposition-Définition 2

Le noyau de ε est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, appelé **groupe alterné**, et noté $\mathcal{A}_n$.

Preuve

On sait (Algèbre PCSI-PTSI 2.2.3 Prop. 2) que le noyau d'un morphisme de groupes est un sous-groupe. ■

Ainsi, $\mathcal{A}_n = \varepsilon^{-1}(\{1\}) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n ;\ \varepsilon(\sigma) = 1\}$, c'est-à-dire que $\mathcal{A}_n$ est l'ensemble des permutations **paires** de $\{1,\ldots,n\}$.

Exemple :

Pour $n = 3$, $\mathfrak{S}_3 = \{e,\tau_{1,\ 2},\tau_{1,\ 3},\tau_{2,\ 3},c,c'\}$

où $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $c' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = c^2$, et $\mathcal{A}_3 = \{e,c,c'\}$

Table de la loi $\circ$ dans $\mathfrak{S}_3$, mettant en évidence le sous-groupe $\mathcal{A}_3$.

$\circ$ ↷	e	c	c'	τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}
e	e	c	c'	τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}
c	c	c'	e	τ_{13}	τ_{23}	τ_{12}
c'	c'	e	c	τ_{23}	τ_{12}	τ_{13}
τ_{12}	τ_{12}	τ_{23}	τ_{13}	e	c'	c
τ_{13}	τ_{13}	τ_{12}	τ_{23}	c	e	c'
τ_{23}	τ_{23}	τ_{13}	τ_{12}	c'	c	e

Proposition 3

Toute transposition de $\{1,\ldots,n\}$ est impaire.

Mais, lorsque $n \geqslant 4$, il existe des permutations impaires qui ne sont pas des transpositions.

Preuve

Soit $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ tel que $i < j$. Puisque

$$\tau_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i-1 & i & i+1 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & i-1 & j & i+1 & \ldots & j-1 & i & j+1 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

les couples présentant une inversion (sur la 2ème ligne) sont :

$$(j,i+1),\ (j,i+2),\ldots,(j,j-1),\ (j,i)\ (i+1,i),\ (i+2,i),\ldots,(j-1,i),$$

qui sont au nombre de $2(j-i)-1$.

Donc $\mathrm{I}(\tau_{i,j})$ est impair, $\varepsilon(\tau_{i,j}) = -1$, $\tau_{i,j}$ est impaire.

Corollaire

Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $N \in \mathbb{N}^*$, $t_1,\ldots,t_N$ des transpositions de $\{1,\ldots,n\}$ telles que $\sigma = t_1 \circ \ldots \circ t_N$. On a : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$.

Ainsi, une permutation paire (resp. impaire) ne peut être décomposée qu'en un produit d'un nombre pair (resp. impair) de transpositions.

2.1.3 Cycles

On suppose ici $n \geqslant 2$.

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant p \leqslant n$. On appelle ***p*-cycle** de $\{1,\ldots,n\}$ toute permutation σ de $\{1,\ldots,n\}$ telle qu'il existe $x_1,\ldots,x_p \in \{1,\ldots,n\}$, deux à deux distincts, tels que :

$$\begin{cases} \sigma(x_1) = x_2,\ \sigma(x_2) = x_3,\ldots,\sigma(x_{p-1}) = x_p,\ \sigma(x_p) = x_1 \\ \forall k \in \{1,\ldots,n\} - \{x_1,\ldots,x_p\}, \sigma(k) = k. \end{cases}$$

L'ensemble $\{x_1,\ldots,x_p\}$ (qui est à l'évidence unique pour un p-cycle σ donné) est appelé le **support** de σ, et on note $\sigma = (x_1,\ldots,x_p)$.

Une permutation σ de $\{1,\ldots,n\}$ est appelée **cycle** si et seulement s'il existe $p \in \{2,\ldots,n\}$ tel que σ soit un p-cycle.

Ainsi, un p-cycle permute « circulairement » p éléments et laisse les autres inchangés.

Les 3-cycles (2,5,3) et (5,3,2) sont égaux.

En revanche les 3-cycles (2, 5, 3) et (2, 3, 5) sont différents.

Exercices 2.1.4, 2.1.5.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ est le 3-cycle (2, 5, 3).

Remarques :

1) $(x_1,\ldots,x_p) = (x_2,\ldots,x_p,x_1) = \ldots = (x_p,x_1,\ldots,x_{p-1})$.

2) Les 2-cycles sont les transpositions.

3) e n'est pas un cycle.

Les méthodes à retenir

Le groupe symétrique

- **Pour calculer la signature $\varepsilon(\sigma)$ d'une permutation σ de $\{1,\ldots,n\}$** (ex. 2.1.2 à 2.1.4), on peut soit calculer le nombre $\mathrm{I}(\sigma)$ d'inversions et on a alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\mathrm{I}(\sigma)}$, soit décomposer σ en un produit de N transpositions et on a alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$.

Exercices

2.1.1 Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est non commutatif dès que $n \geqslant 3$.

2.1.2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la signature de
$$\sigma : \begin{array}{l} \{1,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,\ldots,n\}. \\ \quad i \longmapsto n+1-i \end{array}$$

2.1.3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la signature de
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & 1 & 3 & \ldots & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

2.1.4 Soit
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 1 & 5 & 12 & 6 & 3 & 9 & 4 & 2 & 11 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer le nombre d'inversions et la parité de σ.

b) Décomposer σ (d'au moins une façon) en un produit de transpositions.

c) Décomposer σ en un produit de cycles à supports disjoints. Retrouver ainsi la valeur de $\varepsilon(\sigma)$.

2.1.5 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$.

a) Vérifier, pour tout couple (i,j) de $\{1,\ldots,n\}^2$ tel que $2 \leqslant i < j \leqslant n$:
$$\tau_{ij} = \tau_{1i} \circ \tau_{1j} \circ \tau_{1i}.$$
En déduire que $\{\tau_{1i} ; 2 \leqslant i \leqslant n\}$ engendre le groupe $\mathfrak{S}_n$.

b) Vérifier, pour tout couple (i,j) de $\{2,\ldots,n\}^2$ tel que $i \neq j$: $(1,i,j) = \tau_{1j} \circ \tau_{1i}$.

En déduire que $\{(1,i,j) ; (i,j) \in \{2,\ldots,n\}^2, i \neq j\}$ engendre le sous-groupe $\mathcal{A}_n$.

c) Vérifier, pour tout $k \in$ de $\{3,\ldots,n\}$:

$\tau_{1k} \circ \tau_{12} = \gamma_k$ et $\tau_{12} \circ \tau_{1k} = \gamma_k^2$, où $\gamma_k = (1,2,k)$.

En déduire, pour tout (i,j) de $\{3,\ldots,n\}^2$:
$$\tau_{1i} \circ \tau_{1j} = \gamma_i \circ \gamma_j^2.$$
En déduire que $\{(1,2,i) ; 3 \leqslant i \leqslant n\}$ engendre le sous-groupe $\mathcal{A}_n$.

Dans toute la suite de ce chapitre 2, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.2 Applications multilinéaires

2.2.1 Généralités

Définition

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $E_1,\ldots,E_p,F$ des K-ev.

Une application $\varphi : E_1 \times \ldots \times E_p \longrightarrow F$ est dite ***p*-linéaire** (ou : **multilinéaire**) si et seulement si φ est linéaire par rapport à chaque place (ou : variable), c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1,\ldots,p\},\ \forall \lambda \in K,\ \forall x_1 \in E_1,\ldots,\ \forall x_i \in E_i, \forall y_i \in E_i,\ldots,\ \forall x_p \in E_p,$$

$$\varphi(x_1,\ldots,x_{i-1},\lambda x_i + y_i,x_{i+1},\ldots,x_p) = \lambda\varphi(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_p) + \varphi(x_1,\ldots,y_i,\ldots,x_p).$$

Si de plus $F = K$, on dit que φ est une **forme *p*-linéaire**.

Exemples

1) Pour $p = 1$, la notion d'application 1-linéaire coïncide avec celle d'application linéaire.

2) L'application nulle est p-linéaire.

3) Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$, $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \longmapsto & x_1y_1 + x_2y_2 \end{array}$ est une forme 2-linéaire (on dit plutôt : **bilinéaire**).

4) Le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$: $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, défini par :

$$\phi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)$$

est une application bilinéaire.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{L}_p(E_1,\ldots,E_p;\ F)$ des applications p-linéaires de $E_1 \times \ldots \times E_p$ dans F est un K-ev.

Rappel de notation : $F^{E_1 \times \ldots \times E_p}$ désigne l'ensemble de toute les applications de $E_1 \times \ldots \times E_p$ dans F, et c'est un K-ev.

Preuve

Il est clair que $\mathcal{L}_p(E_1,\ldots,E_p;\ F)$ est un sev de $F^{E_1 \times \ldots \times E_p}$. ■

2.2.2 Applications multilinéaires alternées

Soient E un K-ev, et $p \in \mathbb{N}^*$.

Autrement dit, φ est alternée si et seulement si $\varphi(x_1,\ldots,x_p)$ est nul pour tout p-uplet $(x_1,\ldots,x_p)$ comportant au moins une *répétition*.

Définition

Une application p-linéaire $\varphi : E^p \longrightarrow F$ est dite **alternée** si et seulement si, pour tout couple (i,j) de $\{1,\ldots,p\}^2$ tel que $i \neq j$, et pour tout $(x_1,\ldots,x_p)$ de E^p: $x_i = x_j \Longrightarrow \varphi(x_1,\ldots,x_p) = 0$.

Si de plus $F = K$, on dit que φ est une **forme *p*-linéaire alternée**.

Remarque :

L'ensemble des applications p-linéaires alternées de E^p dans F est un sev de $\mathcal{L}_p(E,\ldots,E;\ F)$.

Rappel de notations : $\mathfrak{S}_p$ est le groupe symétrique d'indice p, formé des permutations de $\{1,\ldots,p\}$, et pour toute σ de $\mathfrak{S}_p$, $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ.

Proposition 1

Une application p-linéaire $\varphi : E^p \longrightarrow F$ est alternée si et seulement si:

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p,\ \forall (x_1,\ldots,x_p) \in E^p,\ \varphi\big(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)}\big) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1,\ldots,x_p).$$

Preuve

1) Cas d'une transposition

Soit $(i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2$ tel que $i < j$; notons τ_{ij} la transposition qui échange i et j et laisse les autres éléments de $\{1,\ldots,p\}$ fixes.

Puisque φ est alternée, on a :

L'élément $x_i + x_j$ est répété aux places n^{os} i et j.

$$\varphi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i + x_j,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_i + x_j,x_{j+1},\ldots,x_p) = 0,$$

d'où en développant par multilinéarité :

$$\varphi(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_i,\ldots x_p) + \varphi(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p) + \varphi(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p)$$
$$+ \varphi(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_j,\ldots,x_p) = 0,$$

et donc $\varphi(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p) = -\varphi(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p)$.

Tout transposition est de signature égale à -1 : $\varepsilon(\tau_{ij}) = -1$.

Ceci montre : $\varphi\big(x_{\tau_{ij}(1)},\ldots,x_{\tau_{ij}(p)}\big) = \varepsilon(\tau_{ij})\varphi(x_1,\ldots,x_p)$.

2) Cas général

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_p$. D'après 2.1.2 Th.1 p. 36, σ est décomposable en un produit de transpositions ; il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et des transpositions $\sigma_1,\ldots,\sigma_N$ telles que $\sigma = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_N$; de plus, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$.

En appliquant de façon itérée le résultat de **1)**, on obtient :

$$\varphi(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)}) = -\varphi(x_{\sigma_2\circ\ldots\circ\sigma_N(1)},\ldots,\varphi_{\sigma_2\circ\ldots\circ\sigma_N(p)})$$
$$= \ldots = (-1)^N\varphi(x_1,\ldots,x_p) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1,\ldots,x_p).$$

■

Proposition 2

Soient $\varphi : E^p \longrightarrow F$ une application p-linéaire et alternée, et $(x_1,\ldots,x_p) \in E^p$. Si $(x_1,\ldots,x_p)$ est liée, alors $\varphi(x_1,\ldots,x_p) = 0$.

Preuve

Supposons $(x_1,\ldots,x_p)$ liée ; l'un au moins des $x_1,\ldots,x_p$ s'exprime donc comme combinaison linéaire des autres. D'après la Prop. précédente, on peut se ramener au cas où il existe $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}) \in K^{p-1}$ tel que $x_p = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i x_i$. Alors :

En permutant $x_1,\ldots,x_p$, on remplace $\varphi(x_1,\ldots,x_p)$ par lui-même ou son opposé ; on peut donc se ramener au cas où x_p se décompose linéairement sur $x_1,\ldots,x_{p-1}$.

$$\varphi(x_1,\ldots,x_p) = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i\varphi(x_1,\ldots,x_{p-1},x_i) = 0,$$

puisque chaque p-uplet $(x_1,\ldots,x_{p-1},x_i)$ comporte une répétition. ■

Corollaire

Si $p > \dim(E)$, alors la seule application p-linéaire et alternée de E^p dans F est l'application nulle.

Dans la suite du cours, nous n'étudions que le cas $p = \dim(E)$.

Preuve :

Toute famille de p éléments de E est liée. ■

2.3 Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base d'un ev de dimension n

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un K-ev de dimension n.

2.3.1 Espace $\Lambda_n(E)$

Le lecteur peut admettre cette étude et passer directement à l'énoncé du Théorème-Définition p. 44.

Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.

Il y a ici une double indexation.

1) Soient $S = (V_1,\ldots,V_n) \in E^n$ et, pour chaque j de $\{1,\ldots,n\}$, $\left(a_{i_j\,j}\right)_{i_j\in\{1,\ldots,n\}} \in K^n$ tel que : $V_j = \sum_{i_j=1}^{n} a_{i_j\,j}\, e_{i_j}$.

Chaque V_j se décompose sur $\mathcal{B}$.

Soit $\varphi : E^n \longrightarrow K$ une forme n-linéaire alternée.
Nous allons calculer $\varphi(S)$ en fonction des $a_{i_j\,j}$. On a :

Linéarité de φ par rapport à la 1ère place.

$$\begin{aligned}
\varphi(S) &= \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}e_{i_1},\ldots,\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}e_{i_n}\right)\\
&= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}\varphi\left(e_{i_1},\sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2}e_{i_2},\ldots,\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}e_{i_n}\right)\\
&= \ldots = \sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1}\ldots a_{i_n n}\varphi(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})\\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,n\}^n} a_{i_1 1}\ldots a_{i_n n}\varphi(e_{i_1},\ldots,e_{i_n}).
\end{aligned}$$

Comme φ est alternée, $\varphi(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})$ est nul dès que $i_1,\ldots,i_n$ ne sont pas deux à deux distincts. Il ne reste donc, dans la somme multiple précédente, que les termes correspondant aux cas où $(1,\ldots,n) \longmapsto (i_1,\ldots,i_n)$ est une permutation de $\{1,\ldots,n\}$.
D'où :

Si $(1,\ldots,n) \mapsto (i_1,\ldots,i_n)$ n'est pas une permutation de $\{1,\ldots,n\}$, alors $(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})$ contient une répétition, donc $\varphi(e_{i_1},\ldots,e_{i_n}) = 0$.

Cf. § 2.2.2 Prop. 1.

$$\begin{aligned}
\varphi(S) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1)1}\ldots a_{\sigma(n)n}\varphi(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})\\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1)1}\ldots a_{\sigma(n)n}\varepsilon(\sigma)\varphi(e_1,\ldots,e_n)\\
&= \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}\ldots a_{\sigma(n)n}\right)\varphi(e_1,\ldots,e_n).
\end{aligned}$$

2) Réciproquement, soient $\lambda \in K$ et $\psi : E^n \longrightarrow K$ l'application définie par, pour tout $S = (V_1,\ldots,V_n)$ de E^n : $\quad \psi(S) = \lambda \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}\ldots a_{\sigma(n)n}$,

où les $a_{i_j\,j}$ sont les composantes des V_j dans $\mathcal{B}$: $\forall\, j \in \{1,\ldots,n\}$, $V_j = \sum_{i_j=1}^{n} a_{i_j\,j}e_{i_j}$.

• ψ est n-linéaire car, pour tous i de $\{1,\ldots,n\}$, α de K, $V_1,\ldots,V_{i-1},V_i,V_i',V_{i+1},\ \ldots,V_n$ de E, on a, en notant $(a'_{ki})_{1\leqslant k\leqslant n}$ les composantes de V_i' dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
\psi(V_1,\ldots,\alpha V_i + V_i',\ldots,V_n) &= \lambda \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}\ldots(\alpha a_{\sigma(i)i} + a'_{\sigma(i)i})\ldots a_{\sigma(n)n}\\
&= \alpha\lambda \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}\ldots a_{\sigma(n)n} + \lambda \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}\ldots a'_{\sigma(i)i}\ldots a_{\sigma(n)n}\\
&= \alpha\psi(V_1,\ldots,V_i,\ldots,V_n) + \psi(V_1,\ldots,V_i',\ldots,V_n).
\end{aligned}$$

• ψ est alternée car, pour tout (i,j) de $\{1,\ldots,n\}^2$ tel que $i < j$ et tout $(V_1,\ldots,V_n)$ de E^n tel que $V_i = V_j$, on a, en effectuant le changement d'indice $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$ dans la sommation :

$$\begin{aligned}\psi(V_1,\ldots,V_n) &= \lambda \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}\ldots a_{\sigma(n)n}\\ &= \lambda \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n} -\varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1)1}\ldots a_{\sigma'(j)i}\ldots a_{\sigma'(i)j}\ldots a_{\sigma'(n)n}\\ &= -\lambda \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1)1}\ldots a_{\sigma'(i)i}\ldots a_{\sigma'(j)j}\ldots a_{\sigma'(n)n},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma') &= \varepsilon(\sigma \circ \tau_{ij})\\ &= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau_{ij}) = -\varepsilon(\sigma).\end{aligned}$$

puisque $V_i = V_j$.

D'où $\psi(V_1,\ldots,V_n) = -\psi(V_1,\ldots,V_n)$, $2\psi(V_1,\ldots,V_n) = 0$, $\psi(V_1,\ldots,V_n) = 0$.

• Montrons $\psi \neq 0$.

Pour chaque j de $\{1,\ldots,n\}$, la décomposition de e_j sur la base $\mathcal{B}$ est : $e_j = \sum_{i_j=1}^{n} \delta_{i_j\, j}\, e_{i_j}$, où $\delta_{i_j\, j}$ est le symbole de Kronecker. D'où : $\psi(\mathcal{B}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\delta_{\sigma(1)1}\ldots\delta_{\sigma(n)n} = 1$,

car, si $\sigma \neq \mathrm{Id}_{\{1,\ldots,n\}}$, l'un des facteurs $\delta_{\sigma(j)j}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ est nul.

Résumons l'étude :

Théorème - Définition

L'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur un K-ev de dimension n $(n \geqslant 1)$ est un K-ev de dimension 1.

Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ de E, on note $\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow K$ l'application définie par, pour tout $(V_1,\ldots,V_n)$ de E^n:

$$\det_{\mathcal{B}}(V_1,\ldots,V_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}\ldots a_{\sigma(n)n},$$

où, pour chaque j de $\{1,\ldots,n\}$, $(a_{i_j\, j})_{1\leqslant i_j\leqslant n}$ sont les composantes de V_j dans $\mathcal{B}$:

$$V_j = \sum_{i_j=1}^{n} a_{i_j\, j}\, e_{ij}.$$

L'élément $\det_{\mathcal{B}}(V_1,\ldots,V_n)$ (de K) est appelé le **déterminant de $(V_1,\ldots,V_n)$ dans la base $\mathcal{B}$**.

Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $(\det_{\mathcal{B}})$ est une base de $\Lambda_n(E)$.

Autrement dit : $\dim(\Lambda_n(E)) = 1$.

$(\det_{\mathcal{B}})$ désigne la famille à un seul élément qui est l'élément $\det_{\mathcal{B}}$; $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée sur E.

Autrement dit, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, les éléments de $\Lambda_n(E)$ sont proportionnels à $\det_{\mathcal{B}}$.

Remarque : On a vu plus haut que, pour toute base $\mathcal{B}$ de E : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

2.3.2 Propriétés

On note ici $\beta(E)$ l'ensemble des bases de E.

Proposition 1

$$\forall \varphi \in \Lambda_n(K),\ \forall S \in E^n,\ \forall \mathcal{B} \in \beta(E),\quad \varphi(S) = \varphi(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(S).$$

Autrement dit, pour toute base $\mathcal{B}$ de E et toute forme n-linéaire alternée φ sur E, on a :

$$\varphi = \varphi(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}},$$

c'est-à-dire que φ et $\det_{\mathcal{B}}$ sont proportionnelles, dans le rapport $\varphi(\mathcal{B})$.

Preuve :

Soient $\varphi \in \Lambda_n(E), \mathcal{B} \in \beta(E)$. Puisque $\det_{\mathcal{B}}$ engendre $\Lambda_n(E)$, il existe $\alpha \in K$ tel que $\varphi = \alpha \det_{\mathcal{B}}$. En particulier : $\varphi(\mathcal{B}) = \alpha \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \alpha$, d'où : $\varphi = \varphi(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}$, c'est-à-dire :

$$\forall S \in E^n,\ \varphi(S) = \varphi(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(S).$$

Dans cette formule, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de E, et S est une famille (quelconque) de n éléments de E.

Corollaire

$$\forall \mathcal{B},\mathcal{B}' \in \beta(E),\ \forall S \in E^n, \quad \det_{\mathcal{B}'}(S) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(S).$$

Preuve

Il suffit d'appliquer la Prop. précédente à $\varphi = \det_{\mathcal{B}'}$.

Remarques :

1) On retient la formule ci-dessus en remarquant l'analogie avec la *relation de Chasles* $(\overrightarrow{B'S} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BS})$ ou le calcul sur fractions $\left(\frac{s}{b'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{s}{b}\right)$.

2) $\forall \mathcal{B},\mathcal{B}',\mathcal{B}'' \in \beta(E),\ \det_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

3) En particulier, en prenant $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}$ dans le résultat précédent :

$$\forall \mathcal{B},\mathcal{B}' \in \beta(E),\ \left(\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \neq 0 \text{ et } \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = (\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}))^{-1}\right).$$

Proposition très importante.

Proposition 2

Soit $\mathcal{B} \in \beta(E),\ S \in E^n$.

Alors S est liée si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(S) = 0$.

Preuve

1) Si S est liée, alors $\det_{\mathcal{B}}(S) = 0$, puisque $\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire et alternée (cf. 2.2.2 Prop. 2 p. 42).

2) Si S est libre, alors, comme, S a n éléments, S est une base de E, et donc (cf. Rem. *3)* ci-dessus) : $\det_{\mathcal{B}}(S) \neq 0$.

2.4 Déterminant d'un endomorphisme

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un K-ev de dimension n. Soient $f \in \mathcal{L}(E), \varphi \in \Lambda_n(E) - \{0\}$.
Il est clair que l'application $\varphi \circ (f \times \ldots \times f) : E^n \longrightarrow K$ définie par :

$$\forall (V_1,\ldots,V_n) \in E^n, \big(\varphi \circ (f \times \ldots \times f)\big)(V_1,\ldots,V_n) = \varphi\big(f(V_1),\ldots,f(V_n)\big)$$

est n-linéaire et alternée.
Puisque $\Lambda_n(E)$ est de dimension 1 et que $\varphi \neq 0$, φ engendre $\Lambda_n(E)$, et il existe donc tel que : $\varphi \circ (f \times \ldots \times f) = \alpha\varphi$. Montrons que α ne dépend pas de φ.
Soit $\psi \in \Lambda_n(E) - \{0\}$. Puisque φ engendre $\Lambda_n(E)$, il existe $\lambda \in K - \{0\}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$. On a alors :

$$\psi \circ (f \times \ldots \times f) = (\lambda\varphi) \circ (f \times \ldots \times f) = \lambda\big(\varphi \circ (f \times \ldots \times f)\big) = \lambda(\alpha\varphi) = \alpha(\lambda\varphi) = \alpha\psi.$$

Ceci montre que α ne dépend pas du choix de φ dans $\Lambda_n(E) - \{0\}$.

L'application $f \times \ldots \times f$ est aussi abusivement notée f, de sorte que, pour tout $S = (V_1,\ldots,V_n) \in E^n$:
$f(S) = (f(V_1),\ldots,f(V_n))$
$= (f \times \ldots \times f)(V_1,\ldots,V_n)$.

Résumons l'étude :

Proposition - Définition 1

Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$, il existe un élément unique α de K tel que :

$$\forall \varphi \in \Lambda_n(E),\ \varphi \circ (f \times \ldots \times f) = \alpha\varphi.$$

Cet élément α est appelé le **déterminant de** f, et noté $\det(f)$.

Cette formule constitue la définition de $\det(f)$.

On a ainsi :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \forall \varphi \in \Lambda_n(E), \quad \varphi \circ (f \times \ldots \times f) = \big(\det(f)\big)\varphi.$$

La Prop. suivante est immédiate.

Ces formules font le lien entre déterminant d'un endomorphisme et déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base.

Proposition 2

1) $\forall f \in \mathcal{L}(E), \forall \varphi \in \Lambda_n(E), \forall (V_1,\ldots,V_n) \in E^n,$

$$\varphi\big(f(V_1),\ldots,f(V_n)\big) = \big(\det(f)\big)\varphi(V_1,\ldots,V_n).$$

2) $\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \forall \mathcal{B} \in \beta(E),\ \forall (V_1,\ldots,V_n) \in E^n,$

$$\det{}_{\mathcal{B}}\big(f(V_1),\ldots,f(V_n)\big) = \det(f)\det{}_{\mathcal{B}}(V_1,\ldots,V_n).$$

3) $\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \forall \mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n) \in \beta(E),$

$$\det(f) = \det{}_{(e_1,\ldots,e_n)}\big(f(e_1),\ldots,f(e_n)\big).$$

Attention ! Dans la formule *2)*, il y a, dans le second membre, α^n et non pas α.

Proposition 3

1) $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.

2) $\forall \alpha \in K,\ \forall f \in \mathcal{L}(E), \quad \det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$.

3) $\forall f,g \in \mathcal{L}(E), \quad \det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$.

4) $\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad (f \in \mathcal{GL}(E) \iff \det(f) \neq 0)$.

5) $\forall f \in \mathcal{GL}(E), \quad \det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$.

Pour démontrer ces propriétés, on se ramène à des déterminants de familles de n vecteurs dans une base d'un K-ev de dimension n.

Preuve :

Le K-ev E admet au moins une base $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$.

1) $\det(\mathrm{Id}_E) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

2) $\det(\alpha f) = \det_{(e_1,\ldots,e_n)}(\alpha f(e_1),\ldots,\alpha f(e_n)) = \alpha^n \det_{(e_1,\ldots,e_n)}\big(f(e_1),\ldots,f(e_n)\big)$

$= \alpha^n \det(f)$

3) $\det(g \circ f) = \det_{\mathcal{B}}\big(g(f(\mathcal{B}))\big) = \det(g)\det_{\mathcal{B}}\big(f(\mathcal{B})\big) = \det(g)\det(f)$.

4) $\big(f \in \mathcal{GL}(E)\big) \iff \big(f(\mathcal{B}) \in \beta(E)\big) \iff \det_{\mathcal{B}}\big(f(\mathcal{B})\big) \neq 0 \iff \det(f) \neq 0$.

5) Soit $f \in \mathcal{GL}(E)$. On a : $\det(f)\det(f^{-1}) = \det(f \circ f^{-1}) = \det(\mathrm{Id}_E) = 1$,

donc $\quad \det(f^{-1}) = \big(\det(f)\big)^{-1}$. ■

2.5 Déterminant d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La notion de déterminant d'une matrice n'est définie que lorsque cette matrice est *carrée*.

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_n(K)$. On appelle **déterminant de** A, et on note $\det(A)$, ou $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, l'élément de K défini par :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n}.$$

Autrement dit, en notant $C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ les colonnes de A, et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(K)$, on a : $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, C_n)$.

On dit que $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ est un déterminant **d'ordre** n.

Pour rappeler l'ordre n, on peut noter $[n]$ en bas à droite : $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}_{[n]}$.

La formule $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ est très utile en pratique.

Exemples :

1) $\forall (a,b,c,d) \in K^4$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, puisque $\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{Id}_{\{1,2\}}, \tau_{12}\}$.

2) Soit $A = (a_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,s}(K)$.

Déterminant d'une matrice triangulaire.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, s'il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\sigma(j) > j$, alors $a_{\sigma(j)j} = 0$, donc $\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)k} = 0$. Ceci montre que la somme $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n}$ se réduit au(x) seul(s) termes (s) correspondant à σ telle(s) que : $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $\sigma(j) \leqslant j$.
Pour une telle σ, on a $\sigma(1) \leqslant 1$ donc $\sigma(1) = 1$, puis $\sigma(2) \leqslant 2$ et $\sigma(2) \neq \sigma(1) = 1$, donc $\sigma(2) = 2 \ldots$ Il est clair que, pour tout j de $\{1, \ldots, n-1\}$ si $(\sigma(1) = 1, \ldots, \sigma(j) = j)$, alors $\sigma(j+1) = j+1$, puisque $\sigma(j+1) \leqslant j+1$ et $\sigma(j+1) \notin \{1, \ldots, j\}$. Ainsi, la seule permutation σ pour laquelle $\big(\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \sigma(j) \leqslant j\big)$ est l'identité, d'où : $\det(A) = \prod_{j=1}^{n} a_{jj}$

(cf.aussi plus loin 2.7.1 Prop. p. 55).

La Proposition suivante est immédiate.

Lien entre déterminant d'un endomorphisme et déterminant d'une matrice carrée.

Lien entre déterminant d'une matrice carrée et déterminant d'une famille de n vecteurs dans un K-ev de dimension n.

Proposition 1

• Soient E un K-ev de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On a :

$$\det(f) = \det(A).$$

• Soient E un K-ev de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E, $S = (V_1, \ldots, V_n) \in E^n$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(S)$. On a :

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(S).$$

Attention ! Dans la formule *2)*, il y a α^n, dans le second membre, et non pas α.

Proposition 2

1) $\det(\mathrm{I}_n) = 1$.

2) $\forall \alpha \in K, \forall A \in \mathbf{M}_n(K)$, $\quad \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

3) $\forall (A,B) \in (\mathbf{M}_n(K))^2$, $\quad \det(AB) = \det(A)\det(B)$.

4) $\forall A \in \mathbf{M}_n(K)$, $\quad (A \in \mathbf{GL}_n(K) \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0)$.

5) $\forall A \in \mathbf{GL}_n(K)$, $\quad \det(A^{-1}) = \big(\det(A)\big)^{-1}$.

6) $\forall A \in \mathbf{M}_n(K)$, $\quad \det({}^{t}A) = \det(A)$.

On a, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$:
$i = \sigma^{-1}(\sigma(i))$.

Preuve :

Les propriétés *1)* à *5)* se déduisent de la Prop. 1 précédente et des propriétés du déterminant d'un endomorphisme (2.4 Prop. 3 p. 46).

En notant $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$, on a :

$$\det({}^{t}A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(\sigma(1))\ \sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{-1}(\sigma(n))\ \sigma(n)}.$$

Comme la multiplication est commutative dans K, en réordonnant suivant le deuxième indice, on a, pour toute σ de $\mathfrak{S}_n$:

$$a_{\sigma^{-1}(\sigma(1))\ \sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{-1}(\sigma(n))\ \sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1} \ldots a_{\sigma^{-1}(n)n},$$

et donc : $\det({}^{t}A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)1} \ldots a_{\sigma^{-1}(n)n}.$

Enfin, comme $\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \\ \sigma & \longmapsto & \sigma^{-1} \end{array}$ est une bijection conservant la signature (c'est-à-dire : $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$), on obtient :

$$\det({}^{t}A) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\tau) a_{\tau(1)1} \ldots a_{\tau(n)n} = \det(A).$$

■

Remarques :

1) De la propriété *3)* précédente, on déduit par une récurrence immédiate :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K),\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \det(A^k) = (\det(A))^k.$$

2) De la remarque précédente et la propriété *5)*, on déduit :

$$\forall A \in \mathbf{GL}_n(K),\ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \det(A^k) = (\det(A))^k.$$

Si une matrice carrée est nilpotente, alors elle n'est pas inversible.

3) Si $A \in \mathbf{M}_n(K)$ est nilpotente, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$, d'où :

$$(\det(A))^k = \det(A^k) = 0,$$

et donc : $\det(A) = 0$.

Par exemple, toute matrice antisymétrique d'ordre 3 est non inversible.

4) Si $A \in \mathbf{M}_n(K)$ est antisymétrique et si n est impair, alors :

$$\det(A) = \det({}^{t}A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A),$$

d'où : $\det(A) = 0$.

Exercices 2.5.1 à 2.5.7.

Exercice-type résolu

Utilisation d'un déterminant pour montrer l'inversibilité d'une matrice carrée

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ impair, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $B\,{}^{t}(AB) + A = 0$. Montrer : $A \notin \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Solution

Conseils

D'après l'hypothèse : $B\,{}^{t}(AB) = -A$, c'est-à-dire : $B\,{}^{t}B\,{}^{t}A = -A$.

On déduit, en passant aux déterminants :

$$\big(\det(B)\big)^2 \det(A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A).$$

$\det(-A) = (-1)^n \det(A)$ et n est impair.

D'où : $\Big(\big(\det(B)\big)^2 + 1\Big)\det(A) = 0.$

Comme $\det(B) \in \mathbb{R}$, on a $\big(\det(B)\big)^2 + 1 \neq 0$, donc $\det(A) = 0$, et on conclut :

$\big(\det(B)\big)^2 + 1 > 0.$

A n'est pas inversible, $A \notin \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Les méthodes à retenir

Déterminant d'une matrice carrée

- Le remplacement de $\det(A)$ par sa définition, $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$ est peu recommandé, mais peut s'avérer utile (ex. 2.5.1).
- **Lorsque la parité de l'ordre n des matrices carrées intervient**, on pourra probablement exploiter la relation $\det(-M) = (-1)^n \det(M)$, pour $M \in \mathbf{M}_n(K)$ (ex. 2.5.2).
- Puisque, pour $A, B \in \mathbf{M}_n(K)$, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et qu'il n'y a pas de formule simple pour transformer $\det(A+B)$, **lorsque des déterminants interviennent,** on privilégiera les produits de matrices (ex. 2.5.6, 2.5.7).

Exercices

2.5.1 Montrer, pour tout $A = (a_{ij})_{ij}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$:

$$|\det(A)| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

2.5.2 *a)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $A, B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA = 0$; montrer que n est pair.

b) Donner un exemple de $(A, B) \in (\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}))^2$ tel que $AB + BA = 0$.

2.5.3 Groupe spécial linéaire
On note $\mathbf{SL}_n(K) = \{A \in \mathbf{M}_n(K);\ \det(A) = 1\}$.

a) Vérifier que $\mathbf{SL}_n(K)$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(K)$pour la multiplication, appelé groupe spécial linéaire.

b) Montrer :

$$\forall A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), \exists (\alpha, B) \in \mathbb{C}^* \times \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}), \quad A = \alpha B.$$

2.5.4 Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Trouver toutes les A de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det(A + M) = \det(A) + \det(M).$$

2.5.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer :

$$\forall A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \big(AB = BA \Longrightarrow \det(A^2 + B^2) \geqslant 0\big).$$

b) A-t-on : $\forall A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(A^2 + B^2) \geqslant 0$?

2.5.6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \big(|x| < \varepsilon \Longrightarrow A + x\ B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})\big).$$

2.5.7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.

a) Montrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ AB^k = B^k(A + k\mathrm{I}_n)$.

b) En déduire : $\det(B) = 0$.

2.6 Développement par rapport à une rangée

2.6.1 Cofacteurs et mineurs

1) Examen du cas $n = 3$

Soit $A = (a_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(K)$.

Par définition (cf. 2.5 Déf. p. 46) :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3}.$$

$\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ sont les transpositions.

Comme $\mathfrak{S}_3 = \{\mathrm{Id}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, c, c'\}$, où $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $c' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on obtient :

Le développement de $\det(A)$ comporte 6 (= 3!) termes.

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}.$$

On peut grouper, par exemple, ainsi :

L'expression de $\det(A)$ comporte maintenant 3 termes dont chacun est le produit d'un coefficient de A par un déterminant d'ordre 2.

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(-a_{12}a_{33} + a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},\end{aligned}$$

et on obtient le *développement* de $\det(A)$ *par rapport à la 1ère colonne*.

2) Etude du cas général

• Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(K)$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \text{ les colonnes de } A\,.$$

Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$.

En développant par linéarité par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne, on a :

$$\det(A) = \det{}_{\mathcal{B}}\left(C_1, \ldots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\ ,$$

en notant

$$\begin{aligned}A_{ij} &= \det{}_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\ j-1} & 0 & a_{1\ j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n\ j-1} & 0 & a_{n\ j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\end{aligned}$$

le «1» étant situé à la ligne n° i.

Faisons passer, dans le déterminant ci-dessus, la $j^{\text{ème}}$ colonne en dernier, c'est-à-dire permutons les colonnes suivant la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & j-1 & n & j & \ldots & n-1 \end{pmatrix},$$

Autrement dit, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\sigma(k) = \begin{cases} k & \text{si} \quad k < j \\ n & \text{si} \quad k = j. \\ k-1 & \text{si} \quad k > j \end{cases}$$

qui admet exactement $(n-1) - j + 1$ inversions (et qui est aussi le produit de $n - j$ transpositions du type $\tau_{k\ k+1}$) :

$$A_{ij} = (-1)^{n-j} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \ldots & a_{nn} & 0 \end{vmatrix}.$$

De même faisons maintenant passer la $i^{\text{ème}}$ ligne en dernier :

$$A_{ij} = (-1)^{n-j}(-1)^{n-i} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \dots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \dots & a_{i-1\,n} & 0 \\ a_{i+1\,1} & \dots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \dots & a_{i+1\,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\ j-1} & a_{n\ j+1} & \dots & a_{nn} & 0 \\ a_{i1} & \dots & a_{i\ j-1} & a_{i\ j+1} & \dots & a_{in} & 1 \end{vmatrix}.$$

B est rectangulaire.

• Considérons une matrice quelconque $B = (b_{uv})_{uv}$ de $\mathbf{M}_{n,n-1}(K)$, et

B' contient B en haut à gauche.

$$B' = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n-1\,1} & \dots & b_{n-1\,n-1} & 0 \\ b_{n1} & \dots & b_{n\,n-1} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K).$$

En notant $B' = (b'_{uv})_{uv}$, on a donc :

$$b'_{uv} = \begin{cases} b_{uv} & \text{si } v \leqslant n-1 \\ 1 & \text{si } u = v = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition : $\quad \det(B') = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) b'_{\sigma(1)1} \dots b'_{\sigma(n)n}$.

Pour tout σ de $\mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma(n) \neq n$, on a $b'_{\sigma(n)n} = 0$. Comme $b'_{nn} = 1$, on a donc :

La sommation précédente se réduit aux termes d'indices σ tels que $\sigma(n) = n$.

$$\det(B') = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(n) = n}} \varepsilon(\sigma) b'_{\sigma(1)1} \dots b'_{\sigma(n-1)n-1}.$$

Il est clair que l'application $\begin{array}{ccc} \{\sigma \in \mathfrak{S}_n ; \sigma(n) = n\} & \longrightarrow & \mathfrak{S}_{n-1} \\ \sigma & \longmapsto & \rho \end{array}$, où ρ est définie par :

$\forall k \in \{1,\dots,n-1\}$, $\rho(k) = \sigma(k)$, est une bijection et qu'elle conserve la signature.
D'où :

$$\det(B') = \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\rho) b'_{\rho(1)1} \dots b'_{\rho(n-1)n-1} = \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\rho) b_{\rho(1)1} \dots b_{\rho(n-1)n-1}.$$

• En appliquant ce résultat au déterminant obtenu pour A_{ij}, on arrive à

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \dots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \dots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \dots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\ j-1} & a_{n\ j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3) Enoncé des résultats

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$.

1) Pour chaque (i,j) de $\{1,\ldots,n\}^2$, on appelle **mineur de la place (i,j) dans A** (ou, par abus : **mineur de a_{ij} dans A**) le déterminant Δ_{ij} d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant dans A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne :

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \ldots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \ldots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \ldots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \ldots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n\;j-1} & a_{n\;j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2) Pour chaque (i,j) de $\{1,\ldots,n\}^2$, on appelle **cofacteur de la place (i,j) dans A** (ou, par abus : **cofacteur de a_{ij} dans A**), et on note A_{ij} le produit de $(-1)^{i+j}$ par le mineur de la place (i,j) dans A :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Mineurs et cofacteurs sont égaux, au signe près.

Remarque :

Le calcul de Δ_{ij} et de A_{ij} ne fait pas intervenir les éléments de A situés dans la $i^{\text{ème}}$ ligne ni ceux situés dans la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

On appelle **rangée** d'une matrice ou d'un déterminant toute ligne ou colonne de cette matrice ou de ce déterminant.

Proposition **Développement d'un déterminant par rapport à une rangée**

Résultats importants.

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$. On a :

1) $\forall\, j \in \{1,\ldots,n\}, \quad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (développement de $\det(A)$ par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne)

2) $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}, \quad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (développement de $\det(A)$ par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne).

Preuve

1) Cf. plus haut, pp. 49-51.

2) Se déduit de *1)* appliqué à ${}^{t}A$ au lieu de A.

Exemple :

En développant par rapport à la 4 $^{\text{ème}}$ colonne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -4\left(-3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right) - 5\left(-3\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+ 6\left(2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 1437.$$

Par exemple, on a développé ici les deux premiers déterminants d'ordre 3 par rapport à la 3$^{\text{e}}$ ligne, et le dernier déterminant d'ordre 3 par rapport à la 1$^{\text{er}}$ colonne.

Remarques :

1) Il est souvent utile de développer un déterminant par rapport à une rangée lorsque cette rangée comporte peu de termes non nuls (plusieurs termes nuls).

2) Pour le calcul numérique des déterminants, il existe des méthodes nettement plus rapides que celle consistant à développer par rapport à des rangées.

2.6.2 Comatrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$. On appelle **comatrice** de A la matrice carrée d'ordre n, notée $\mathrm{com}(A)$, définie par :

$$\mathrm{com}(A) = (A_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

où A_{ij} est le cofacteur de la place (i,j) dans A.

Ainsi, la comatrice de A est la matrice des cofacteurs de A.

Exercice 2.6.1.

On a vu (2.6.1 Prop. *1)* p. 52) :

$$\forall\, j \in \{1,\dots,n\}, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \det(A).$$

Intéressons-nous à $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}$, pour $(j,k) \in \{1,\dots,n\}^2$ fixé tel que $j \neq k$.

Penser à considérer cette matrice B.

Considérons la matrice $B = (b_{ip})_{ip}$ obtenue à partir de A en remplaçant, dans A, la $k^{\text{ème}}$ colonne par la $j^{\text{ème}}$ colonne de A :

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1k-1} & a_{1j} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{n\,k-1} & a_{nj} & a_{n\,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
$$\uparrow$$
$$k^{\text{ème}} \text{ colonne}$$

D'une part, $\det(B) = 0$, puisque B a deux colonnes égales.

D'autre part, en développant $\det(B)$ par rapport à la $k^{\text{ème}}$ colonne, on a :

$$\det(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}B_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik},$$

puisque les cofacteurs des éléments de la $k^{\text{ème}}$ colonne sont les mêmes dans B que dans A.

Ainsi : $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$.

On a donc prouvé :

$$\forall\,(j,k) \in \{1,\dots,n\}^2, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}.$$

Mais, pour $(j,k) \in \{1,\dots,n\}^2$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}$ est le $(j,k)^{\text{ème}}$ terme du produit de ${}^{\mathrm{t}}A$ par $\mathrm{com}(A)$, d'où :

$${}^{\mathrm{t}}A \cdot \mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} \det(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A)\,\mathrm{I}_n.$$

Le produit de ${}^{\mathrm{t}}A$ par $\mathrm{com}(A)$ est noté ${}^{\mathrm{t}}A\mathrm{com}(A)$ ou ${}^{\mathrm{t}}A \cdot \mathrm{com}(A)$, selon la commodité de lecture.

En appliquant ce résultat à ${}^{t}A$ au lieu de A, et en remarquant $\mathrm{com}({}^{t}A) = {}^{t}\mathrm{com}(A)$ et $\det({}^{t}A) = \det(A)$ (cf. 2.5 Prop. 2 *6)* p. 47), on obtient :

$$A \cdot {}^{t}\mathrm{com}(A) = \det(A)\mathrm{I}_n,$$

et, en transposant le résultat de la page précédente : ${}^{t}\mathrm{com}\,(A) \cdot A = \det(A)\,\mathrm{I}_n$.

Enonçons le résultat obtenu :

Formule très utile pour les exercices portant sur la comatrice.

Théorème

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K), \quad A \cdot {}^{t}\mathrm{com}(A) = {}^{t}\mathrm{com}(A) \cdot A = \det(A)\mathrm{I}_n.$$

Corollaire

$$\forall A \in \mathbf{GL}_n(K), \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^{t}\mathrm{com}(A).$$

Exercices 2.6.2, 2.6.3.

Exemple :

Pour $n = 2$, si $ad - bc \neq 0$, alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Remarque :

La formule précédente, donnant A^{-1} à l'aide de $\mathrm{com}(A)$, est en pratique quasiment inutilisable dès que $n \geqslant 3$. En effet, l'application de cette formule nécessite apparemment le calcul d'un déterminant d'ordre n $\big(\det(A)\big)$ et de n^2 déterminants d'ordre $n-1$ (les cofacteurs dans A).

Les méthodes à retenir

Comatrice

- **Pour manipuler une comatrice**, on dispose :
  - de sa définition : $\mathrm{com}(A) = (A_{ij})_{ij}$, où A_{ij} est le cofacteur de la place (i,j) dans A (ex. 2.6.1)
  - des égalités : $A\,{}^{t}\mathrm{com}(A) = {}^{t}\mathrm{com}(A)A = \det(A)\mathrm{I}_n$ (ex. 2.6.2, 2.6.3).

Exercices

2.6.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathbf{M}_n(K)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \text{———} & 0 \\ | & M & \\ 0 & & \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(K).$$

Calculer com(A).

2.6.2 Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Montrer :

$$A^p = \mathrm{I}_n \Longrightarrow \big(\mathrm{com}(A)\big)^p = \mathrm{I}_n.$$

2.6.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\forall A \in \mathbf{GL}_n(K), \quad \begin{cases} \mathrm{com}\,(A) \in \mathbf{GL}_n(K) \\ \big(\mathrm{com}(A)\big)^{-1} = \mathrm{com}(A^{-1}). \end{cases}$$

2.7 Calcul des déterminants

2.7.1 Déterminant d'une matrice triangulaire

Cf. aussi 2.5 Exemple *2)* p. 47.

Proposition

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Preuve

Récurrence sur n. La propriété est évidente pour $n = 1$.

Supposons-la vraie pour un n de $\mathbb{N}^*$, et soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n+1\ n+1} \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n+1,\ s}(K)$.

En développant $\det(A)$ par rapport à la $(n+1)^{\text{ème}}$ ligne, on obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} a_{n+1\,n+1} = (a_{11} \dots a_{nn}) a_{n+1\,n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii}.$$

Remarque :

En particulier, le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des éléments diagonaux.

2.7.2 Manipulation de lignes et de colonnes

1) Utilisation de la multilinéarité

La multilinéarité du déterminant se traduit schématiquement par :

Les blocs I et II restent en place.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\mathrm{I}} & \begin{matrix} \lambda a_{1j} + b_{1j} \\ \vdots \\ \lambda a_{nj} + b_{nj} \end{matrix} & \boxed{\mathrm{II}} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \boxed{\mathrm{I}} & \begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix} & \boxed{\mathrm{II}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boxed{\mathrm{I}} & \begin{matrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{matrix} & \boxed{\mathrm{II}} \end{vmatrix}.$$

2) Pour que le déterminant d'une matrice soit nul, il faut et il suffit que la famille des colonnes de cette matrice soit liée (cf. 2.5 Prop. 2 *4)* p. 47). En particulier, si un déterminant a une colonne nulle, ou deux colonnes colinéaires, ce déterminant est nul.

Résultat analogue pour les lignes.

3) Remplacement d'une colonne par la somme de celle-ci et d'une combinaison linéaire des autres

Soient $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$, $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, $j \in \{1, \dots, n\}$, $(\alpha_k)_{k \neq j} \in K^{n-1}$.

Considérons la matrice B obtenue à partir de A en remplaçant C_j par $C_j + \sum_{k \neq j} \alpha_k C_k$.

En notant $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(K)$, on a :

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det_{\mathcal{B}}\Big(C_1,\dots,C_j + \sum_{k\neq j}\alpha_k C_k,\dots,C_n\Big)\\ &= \det_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_j,\dots,C_n) + \sum_{k\neq j}\alpha_k \det_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_{j-1},C_k,C_{j+1},\dots,C_n)\\ &= \det(A).\end{aligned}$$

Chaque $\det_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_{j-1},C_k,C_{j+1},\dots,C_n)$ $(k \neq j)$ contient deux fois la colonne C_k.

Ainsi :

Résultats très utiles pour le calcul pratique des déterminants.

Proposition

On ne change pas la valeur d'un déterminant en remplaçant une colonne par la somme de celle-ci et d'une combinaison linéaire des autres colonnes.

Résultat analogue sur les lignes.

Remarque :
On peut aussi montrer le résultat précédent en remarquant $B = AF$, où

$$F = \begin{pmatrix} 1 & & & \alpha_1 & & & \\ & \ddots & 0 & \vdots & & 0 & \\ & & 1 & \alpha_{j-1} & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 0 & & \alpha_{j+1} & \ddots & & \\ & & & \vdots & & 0 & \\ & & & \alpha_n & & & 1 \end{pmatrix},$$

et en développant $\det(F)$ par rapport à la $1^{\text{ère}}$ colonne, $j-1$ fois :

$$\det(F) = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ \alpha_{j+1} & \ddots & \\ \vdots & 0 & \\ \alpha_n & & 1 \end{vmatrix},$$

puis (matrice triangulaire) : $\det(F) = 1$.

4) Remplacement simultané de colonnes

Soient $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$, $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A. Nous allons montrer qu'on peut, sans changer $\det(A)$, remplacer dans A chaque colonne par la somme de celle-ci et d'une combinaison linéaire des colonnes *suivantes*.

Pour chaque k de $\{2,\dots,n\}$, soient $\alpha_{k\,k-1},\dots,\alpha_{n\,k-1} \in K$.

Rappelons que l'on omet souvent la virgule dans les doubles indices : $\alpha_{k\,k-1}$ est mis pour $\alpha_{k,\,k-1}$, $\alpha_{n\,k-1}$ est mis pour $\alpha_{n,\,k-1}$.

Considérons la matrice B obtenue à partir de A en remplaçant :

C_1 par $C_1 + \alpha_{21}C_2 + \ldots + \alpha_{n1}C_n$

C_2 par $C_2 + \alpha_{32}C_3 + \ldots + \alpha_{n2}C_n$

$\vdots$

C_{n-1} par $C_{n-1} + \alpha_{n\,n-1}C_n$

C_n par C_n.

En notant $T = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \alpha_{21} & 1 & & \text{\Large 0} & \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{n\,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, on a : $B = AT$, d'où :

Cf. 2.7.1 Prop. p. 55.

$$\det(B) = \det(A)\det(T) = \det(A) \cdot 1 = \det(A)\,.$$

Ainsi :

Résultats très utiles pour le calcul pratique des déterminants.

Proposition

On ne change pas la valeur d'un déterminant en remplaçant (simultanément) chaque colonne par la somme de celle-ci et d'une combinaison linéaire des colonnes suivantes.

Résultat analogue sur les lignes.

De même, en utilisant la postmultiplication de A par une matrice triangulaire supérieure :

Proposition

On ne change pas la valeur d'un déterminant en remplaçant (simultanément) chaque colonne par la somme de celle-ci et d'une combinaison linéaire des colonnes précédentes.

Résultat analogue sur les lignes.

Exemple :

Pour $(a,b) \in K^2$ **et** $n \geqslant 2$, **calculer** $\begin{vmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{vmatrix}_{[n]}$.

$$\begin{vmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{vmatrix}_{[n]} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ \vdots & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b \\ a+(n-1)b & b & & a \end{vmatrix}_{[n]} \quad C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{j=2}^{n} C_j$$

$$= \big(a+(n-1)b\big) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ \vdots & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b \\ 1 & b & & a \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= \big(a+(n-1)b\big) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & \text{\Large 0} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \text{\Large 0} & & a-b \end{vmatrix}_{[n]} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - L_1 \end{matrix}$$

$$= \big(a+(n-1)b\big)(a-b)^{n-1}.$$

Exercices 2.7.1, 2.7.4 à 2.7.6, 2.7.8, 2.7.9.

2.7.3 Cas $n = 2$, $n = 3$

1) $n = 2$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Cf. 2.6.1 1) pp. 49-50.

2) $n = 3$: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}$$
$$- a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}\ .$$

Cf. 2.5 Déf. p. 46.

On peut retrouver ce résultat par la **règle de Sarrus :** le déterminant d'ordre 3 contient six termes :

• $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{21}a_{32}a_{13}$, $a_{31}a_{12}a_{23}$ correspondant à des « diagonales descendantes » :

$$\begin{array}{ccc} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

ou encore, en reportant des lignes en dessous :

$$\begin{array}{ccc} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \\ a_{11} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \end{array}$$

• $-a_{31}a_{22}a_{13}$, $-a_{11}a_{32}a_{23}$, $-a_{21}a_{12}a_{33}$ correspondant à des « diagonales montantes » :

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{array}$$

ou encore :

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \\ \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

Mais attention : la règle de Sarrus n'est applicable que pour $n = 3$ (et $n = 2$).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a & p & q \\ -p & a & r \\ -q & -r & a \end{vmatrix} = a^3 + pqr - pqr + aq^2 + ar^2 + ap^2 = a(a^2 + p^2 + q^2 + r^2).$$

Exercices 2.7.2, 2.7.3, 2.7.7.

2.7.4 Déterminant de Vandermonde

L'étude du déterminant de Vandermonde n'est pas au programme, mais c'est un exercice classique.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition

Soit $(x_1,\ldots,x_n) \in K^n$. On appelle **déterminant de Vandermonde**, et on note $\mathrm{V}(x_1,\ldots,x_n)$ l'élément de K défini par :

$$\mathrm{V}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \det((x_i^{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}).$$

Nous allons calculer $\mathrm{V}(x_1,\ldots,x_n)$.
Si $n=1$: $\mathrm{V}(x_1)=1$

Si $n=2$: $\mathrm{V}(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$.

Si $n=3$: $$\mathrm{V}(x_1,x_2,x_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1x_2 \\ 1 & x_3-x_1 & x_3^2-x_1x_3 \end{vmatrix}$$

$$C_2 \longleftarrow C_2 - x_1C_1, \quad C_3 \longleftarrow C_3 - x_1C_2$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$:

Nous allons exprimer $V(x_1,\ldots,x_n)$ en fonction de $V(x_2,\ldots,x_n)$.

$$\mathrm{V}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & x_2-x_1 & x_2^2-x_1x_2 & \ldots & x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1x_n & \ldots & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$C_2 \longleftarrow C_2 - x_1C_1, \quad C_3 \longleftarrow C_3 - x_1C_2, \ldots\ C_n \longleftarrow C_n - x_1C_{n-1}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & x_2-x_1 & (x_2-x_1)x_2 & \ldots & (x_2-x_1)x_2^{n-2} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n-x_1 & (x_n-x_1)x_n & \ldots & (x_n-x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Développement par rapport à la première ligne et mise en facteur de $x_2-x_1,\ldots,x_n-x_{n-1}$ dans les lignes.

$$= (x_2-x_1)\ldots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-2} \\ & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

en développant par rapport à la 1ère ligne, puis en factorisant dans chaque ligne.

On obtient ainsi : $\mathrm{V}(x_1,\ldots,x_n) = \left(\prod_{n\geqslant i>1}(x_i-x_1)\right)\mathrm{V}(x_2,\ldots,x_n)$.

On conclut, par récurrence :

Le déterminant de Vandermonde peut être utile en liaison avec l'algèbre des polynômes.

Proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1,\ldots,x_n) \in K^n,\ \ \mathrm{V}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j).$$

Corollaire

Pour tout $(x_1,\ldots,x_n)$ de K^n, $\mathrm{V}(x_1,\ldots,x_n)$ est non nul si et seulement si $x_1,\ldots,x_n$ sont deux à deux distincts.

2.7.5 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Proposition 1

Soient $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_p(K)$.

On a :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C).$$

Attention : pour cette formule, A et C doivent être des matrices **carrées**.

Intervention d'une égalité matricielle par blocs, puis passage aux déterminants.

Preuve :

On remarque : $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$.

d'où : $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$.

En développant $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ par rapport à la première ligne, de façon itérée, on obtient :

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(C).$$

De même, en développant $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$ par rapport à la dernière ligne, de façon itérée, on obtient :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \det(A).$$ ■

Proposition 2

Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux :

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{ss} \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{s} \det(A_{kk}).$$

Preuve

Récurrence immédiate sur s en utilisant la Prop 1. ■

Exercices 2.7.10, 2.7.11.

Exercice-type résolu

Exemple de calcul de déterminant

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x, a_1,\dots,a_n \in K$. Calculer le déterminant d'ordre $n+1$ suivant :

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & x & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n & x \end{vmatrix}_{[n+1]}.$$

Solution

Par $C_1 \longleftarrow C_1 + (C_2 + \cdots + C_{n+1})$, puis en mettant $x + \sum_{j=1}^{n} a_j$ en facteur dans la première colonne, on obtient :

$$D_{n+1} = \left(x + \sum_{j=1}^{n} a_j\right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & x & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & x & a_n \\ 1 & a_2 & \dots & \dots & a_n & x \end{vmatrix}_{[n+1]}.$$

Puis, en faisant $C_j \longleftarrow C_j - a_j C_1$ pour $j = 2,\dots,n+1$, on a :

$$D_{n+1} = \left(x + \sum_{j=1}^{n+1} a_j\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & x - a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & x - a_2 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & x - a_{n-1} & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & \dots & \dots & \dots & x - a_n \end{vmatrix}_{[n+1]}.$$

Enfin, ce dernier déterminant est celui d'une matrice triangulaire inférieure, et on conclut :

$$D_{n+1} = \left(x + \sum_{j=1}^{n} a_j\right) \prod_{k=1}^{n} (x - a_k).$$

Conseils

On remarque que, dans chaque ligne de D_{n+1}, la somme des termes est la même.

On remplace chaque colonne (sauf la première) par celle-ci diminuée du produit de a_j par la première colonne, pour faire apparaître des « 0 ».

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de la diagonale.

Les méthodes à retenir

Calcul des déterminants

- **Pour calculer un déterminant**, on pourra penser à :

  – utiliser la multilinéarité et l'alternance du déterminant, pour remplacer le déterminant à calculer par une combinaison linéaire de déterminants mieux connus (ex. 2.7.1 *d)*, 2.7.6)

– remplacer une colonne par la somme de celle-ci et d'une combinaison linéaire des autres colonnes. Cette opération pourra se faire d'une manière successive ou simultanée, à condition dans ce dernier cas de n'utiliser que les colonnes suivantes ou que les colonnes précédentes (de même pour les lignes)

– développer par rapport à une rangée, lorsque cette rangée ne comporte qu'un (ou deux) termes non nuls, ce qui fera souvent apparaître une relation de récurrence (ex. 2.7.1 *e)* à *i)*).

En général, on essaiera de présenter le résultat (calcul d'un déterminant) sous forme factorisée.

- **Pour calculer le déterminant d'un endomorphisme *f***, il peut être utile de considérer la matrice A de f dans une base convenable et de calculer $\det(A)$, puisque $\det(f) = \det(A)$ (ex. 2.7.4).
- **Lorsqu'interviennent des blocs**, penser à utiliser le résultat sur le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs (ex. 2.7.10, 2.7.11).

Exercices

2.7.1 Calculer les déterminants suivants :

a) $$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & (n+1)^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & \dots & (n+2)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 & \dots & (2n-1)^2 \end{vmatrix}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

b) $$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \ S_k = \sum_{i=1}^{k} i$$

c) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & a_1 & \ddots & a_2 \\ & & & a_1 \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \ a_1,\dots,a_n \in K$$

d) $$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3+b_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix},$$

$n \in \mathbb{N}^*, \ a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in K$

e) $$\begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & a_1+a_2 & -a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_2 & a_2+a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-2}+a_{n-1} & -a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix},$$

$n \in \mathbb{N}^*, \ a_1,\dots,a_n \in K$

f) $$\begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}_{[n]}, \ n \in \mathbb{N}^*, (a,b,c) \in \mathbb{C}^3$$

(on exprimera la réponse à l'aide des zéros complexes de $X^2 - aX + bc$)

g) $\det((C_{i+j}^{j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n})$

$$= \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \dots & C_n^n \\ C_1^0 & C_2^1 & \dots & C_{n+1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{2n}^n \end{vmatrix}_{[n+1]}, \ n \in \mathbb{N}$$

h) $$\begin{vmatrix} \alpha+a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & \alpha & -1 & \ddots & \vdots \\ a_3 & 0 & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix},$$

$n \in \mathbb{N}^*, \ \alpha, \ a_1,\dots,a_n \in K$

i) $$\begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ a_1 & b_1 & 0 & & 0 \\ a_2 & 0 & b_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n & 0 & & & b_n \end{vmatrix}_{[n+1]},$$

$n \in \mathbb{N}^*, \ a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in K$

j) $$\begin{vmatrix} a & x & \cdots & x \\ y & z & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ y & 0 & & z \end{vmatrix}_{[n]}, \ n \in \mathbb{N}^*, \ a,x,y,z \in K$$

$$k)\ \begin{vmatrix} -(a+1) & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a & -(a+2) & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a & -(a+3) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & a & -(a+n)\end{vmatrix},$$

$n \in \mathbb{N}^*,\ a \in K$.

2.7.2 Montrer que

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2z & x & y \\ 2y & 2z & x \end{pmatrix} ;\ (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \right\}$$

est un sous-corps de l'anneau $\mathbf{M}_3(\mathbb{Q})$.

2.7.3 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il est impossible que : le produit des éléments dans chaque ligne (de A) soit < 0 et le produit dans chaque colonne soit > 0.

b) Montrer qu'il est impossible que les six termes de $\det(A) = aek + bfg + cdh + (ceg) + (-afh) + (-bdk)$ soient tous > 0.

2.7.4 Calculer $\det(f)$, où $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & {}^tX \end{array}$.

2.7.5 Pour $(p,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on note :

$$\varphi_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & x^2\\ 1 & 3 & 3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 6 & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & C_p^{p-1} & x^p \\ 1 & C^1_{p+1} & C^2_{p+1} & \cdots & C^{p-1}_{p+1} & x^{p+1}\end{vmatrix}_{[p+1]}.$$

a) Pour $(p,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, calculer $\varphi_p(x+1) - \varphi_p(x)$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_p(n+1) = (p+1)! \sum_{k=1}^{n} k^p$.

c) En déduire les valeurs de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2.7.6 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $P_n = X^n - X + 1$.

On note $x_1,\dots,x_n$ les zéros de P_n dans $\mathbb{C}$.

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ où :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 + x_i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}.\ \text{Calculer } \det(A).$$

2.7.7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un K-ev de dimension n, $V_1,\dots,V_n \in E$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E.

Démontrer :

$$\sum_{j=1}^{n} \det{}_{\mathcal{B}}(V_1,\dots,f(V_j),\dots,V_n) = \operatorname{tr}(f) \det{}_{\mathcal{B}}(V_1,\dots,V_n).$$

2.7.8 Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout (i,j) de $\{1,\dots,n\}^2$: $\begin{cases} a_{ij} \in \mathbb{Z} \\ i \neq j \Longrightarrow a_{ij} \text{ pair} \\ a_{ii} \text{ impair.} \end{cases}$

Montrer : $\det(A) \neq 0$.

2.7.9 Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout (i,j) de $\{1,\dots,n\}^2$:

$$\left.\begin{cases} a_{ij} \in \mathbb{Z} \\ i \neq j \Longrightarrow a_{ij} \text{ impair} \\ a_{ii} \text{ pair} \end{cases}\right| .$$

Montrer que, si n est pair, alors $\det(A) \neq 0$.

2.7.10 Montrer :

$$\forall (A,B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad \det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

2.7.11 Soient $A,B,C,D,X \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que $A + BX$ soit inversible. Montrer :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A + BX) \det\Big(-(C+DX)(A+BX)^{-1}B + D\Big).$$

Examiner le cas particulier $X = 0$.

2.8 Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n. On note $\beta(E)$ l'ensemble des bases de E.

1) Bases directes, bases indirectes

Définition 1

On dit que deux bases $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ de E sont :

- **de même sens** si et seulement si : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.
- **de sens contraires** si et seulement si : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$.

Puisque $\mathbb{R}$ est totalement ordonné et que, pour toutes bases $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ de E, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$, deux bases données sont de même sens ou sont de sens contraires.

Notons $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\beta(E)$ par :

$$\forall \mathcal{B},\mathcal{B}' \in \beta(E),\ \ (\mathcal{B}\ \mathcal{R}\ \mathcal{B}' \iff \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) > 0).$$

La relation $\mathcal{B}$ est une relation d'équivalence dans $\beta(E)$ car, pour toutes $\mathcal{B},\mathcal{B}',\mathcal{B}''$ de $\beta(E)$:

Par définition, une relation est dite **d'équivalence** si et seulement si elle est : réflexive, symétrique, transitive.

- $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1 > 0$
- $\mathcal{B}\ \mathcal{R}\ \mathcal{B}' \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0 \Longrightarrow \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = (\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'))^{-1} > 0 \Longrightarrow \mathcal{B}'\ \mathcal{R}\ \mathcal{B}$
- $\begin{cases} \mathcal{B}\ \mathcal{R}\ \mathcal{B}' \\ \mathcal{B}'\ \mathcal{R}\ \mathcal{B}'' \end{cases} \iff \begin{cases} \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) > 0 \\ \det_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B}') > 0 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \det_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) > 0$$
$$\Longrightarrow \mathcal{B}\ \mathcal{R}\ \mathcal{B}''.$$

Le $\mathbb{R}$-ev E, étant de dimension finie, admet au moins une base $\mathcal{B}_1 = (e_1,\ldots,e_n)$; considérons $\mathcal{B}_2 = (-e_1,e_2,\ldots,e_n)$, qui est une base de E. Comme $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) = -1 < 0$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont de sens contraires.

$\mathcal{B}_2$ est obtenue à partir de $\mathcal{B}_1$ en remplaçant e_1 par $-e_1$.

Soit $\mathcal{B} \in \beta(E)$.

- Si $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}) > 0$, alors $\mathcal{B}_1\ \mathcal{R}\ \mathcal{B}$
- Si $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}) < 0$, alors $\det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1)\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}) = -\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}) > 0$, donc $\mathcal{B}_2\ \mathcal{R}\ \mathcal{B}$.

Ceci montre que $\beta(E)$ admet exactement deux classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$, qui sont la classe de $\mathcal{B}_1$ et la classe de $\mathcal{B}_2$. D'où la définition suivante.

Définition 2

On appelle **orientation** de E le choix, dans l'ensemble $\beta(E)$ des bases de E, de l'une des deux classes d'équivalence modulo la relation « est de même sens que ». Les bases de cette classe sont alors dites **directes**, les autres bases (celles de l'autre classe) sont dites **indirectes**. On dit alors que E est un $\mathbb{R}$-ev **orienté**.

On convient que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est directe (ce qui revient à choisir une orientation dans $\mathbb{R}^n$).

On appelle **axe** toute droite vectorielle orientée.

2) Endomorphismes directs, endomorphismes indirects

Soit $f \in \mathcal{GL}(E)$. Comme $\det(f) \neq 0$, on a : $\det(f) > 0$ ou $\det(f) < 0$.

Soit $\mathcal{B} \in \beta(E)$.

• Si $\det(f) > 0$, alors $\det_{\mathcal{B}}\big(f(\mathcal{B})\big) = \det(f) > 0$, et donc $\mathcal{B}$ et $f(\mathcal{B})$ sont de même sens

• Si $\det(f) < 0$, alors $\det_{\mathcal{B}}\big(f(\mathcal{B})\big) = \det(f) < 0$, et donc $\mathcal{B}$ et $f(\mathcal{B})$ sont de sens contraires.

D'où la Définition et la Proposition suivantes.

Définition 3

Soit $f \in \mathcal{GL}(E)$. On dit que :

• f **conserve l'orientation** (ou: **est direct**) si et seulement si : $\det(f) > 0$.

• f **change l'orientation** (ou: **est indirect**) si et seulement si : $\det(f) < 0$.

On a ainsi pour $f(\mathcal{B})$, en quelque sorte, une règle des signes :

f \ $\mathcal{B}$	directe	indirecte
direct	directe	indirecte
indirect	indirecte	directe

Proposition

Soit $f \in \mathcal{GL}(E)$.

1) Si f conserve l'orientation, alors, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $f(\mathcal{B})$ est une base de même sens que $\mathcal{B}$.

2) Si f change l'orientation, alors, pour toute base $\mathcal{B}$de E, $f(\mathcal{B})$ est une base de sens contraire de $\mathcal{B}$.

2.9 Supplément : Rang et sous-matrices

Ce paragraphe n'est pas au programme, mais constitue une étude classique.

1)Rappels sur le rang

Les différentes notions de rang.

Nous avons défini :

• le rang d'une famille finie $\mathcal{F}$ d'éléments d'un K-ev E :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\big),\ \text{Algèbre PCSI-PTSI 6.4 Déf. 3}$$

• le rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$:

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big),\ \text{Algèbre PCSI-PTSI 7.3.1 Déf.}$$

• le rang d'une matrice A de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1,\ldots,C_p),\ \text{Algèbre PCSI-PTSI 8.1.6 Déf.,}$$

où $C_1,\ldots,C_p$ sont les colonnes de A.

Les différentes notions de rang.

Ces notions sont reliées entre elles :

• le rang d'une famille finie $\mathcal{F}$ d'éléments de E est aussi le rang de la matrice dont les colonnes sont formées par les composantes des éléments de $\mathcal{F}$ dans une base de E

• le rang de $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est, pour toute base $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_p)$ de E, le rang de la famille $\big(f(e_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$, et est aussi le rang de n'importe quelle matrice représentant f.

• le rang de $A \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$ est le rang de n'importe quelle application linéaire représentée par A.

Rappelons enfin le théorème du rang (Algèbre PCSI-PTSI 7.3.1 Th. 1) :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E,F),\quad \mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big).$$

2) Étude des sous-matrices d'une matrice

Définition

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $(u,v) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\begin{cases} (i_1,\ldots,i_u) \in \{1,\ldots,n\}^u \text{ tel que } i_1 < \ldots < i_u \\ (j_1,\ldots,j_v) \in \{1,\ldots,p\}^v \text{ tel que } j_1 < \ldots < j_v \end{cases}.$$

On appelle **sous-matrice** (ou: **matrice extraite**) de A, par utilisation des lignes $i_1,\ldots,i_u$ et des colonnes $j_1,\ldots,j_v$, la matrice $(a_{i_k j_l})_{\substack{1\leqslant k\leqslant u \\ 1\leqslant l\leqslant v}}$ de $\mathbf{M}_{u,v}(K)$.

Exemple :

La matrice $\begin{pmatrix} a & c & d \\ a'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$ est une sous-matrice de $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$, par utilisation des lignes 1, 3 et des colonnes 1,3,4 :

Lignes	1	2	3	4
1	***a***	***b***	***c***	***d***
2	***a'***	***b'***	***c'***	***d'***
3	***a''***	***b''***	***c''***	***d''***

Colonnes

Théorème

Pour toute A de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$, le rang de A est égal à l'ordre maximum des sous-matrices carrées inversibles extraites de A.

Preuve

Notons $r = \mathrm{rg}(A)$, et s l'ordre maximum des sous-matrices carrées inversibles extraites de A.

1) $r \geqslant s$

Soit B une sous-matrice carrée de A, α l'ordre de B, et supposons $\alpha > r$. Notons $i_1,\ldots,i_\alpha$ $(i_1 < \ldots < i_\alpha)$ les numéros des lignes de A utilisées pour extraire B, $v_1,\ldots,v_\alpha$ les colonnes de B (dans $\mathbf{M}_{\alpha,1}(K)$), $V_1,\ldots,V_\alpha$ les colonnes de A utilisées pour extraire B (dans $\mathbf{M}_{n,1}(K)$).

Puisque $\alpha > r$, la famille $(V_1,\ldots,V_\alpha)$ est liée. Il existe $(\lambda_1,\ldots,\lambda_\alpha) \in K^\alpha - \{(0,\ldots,0)\}$ tel que $\sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i V_i = 0$. Il en résulte, en ne prenant que les lignes numéros $i_1,\ldots,i_\alpha$: $\sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i v_i = 0$, et donc B n'est pas inversible. Ceci montre : $r \geqslant s$.

2) $r \leqslant s$

Notons $C_1,\ldots,C_n$ les colonnes de A.

Puisque $r = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1,\ldots,C_n)$, il existe $j_1,\ldots,j_r \in \{1,\ldots,n\}$ tels que : $j_1 < \ldots < j_r$ et $(C_{j_1},\ldots,C_{j_r})$ est libre.

Notons $B = (C_{j_1},\ldots,C_{j_r})$ la sous-matrice de A formée par les colonnes $C_{j_1},\ldots,C_{j_r}$ de A.

On a, d'après Algèbre PCSI-PTSI, § 8.2.3 Cor.2 : $\mathrm{rg}({}^tB) = \mathrm{rg}(B) = r$. Il existe donc $i_1,\ldots,i_r \in \{1,\ldots,n\}$ tels que : $i_1 < \ldots < i_r$ et les lignes numéros i_1 à i_r de B forment une famille libre.

Notons C la sous-matrice de B formée par les lignes numéros i_1 à i_r de B.

Alors, C est une sous-matrice carrée d'ordre r de A et C est inversible, d'où : $r \leqslant s$ ■

Exemple :

Quel est le rang de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ **?**

D'une part, $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$ car $A \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{R})$.

D'autre part, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, d'ordre 2, extraite de A, est inversible (car de déterminant -4, non nul).

On conclut : $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Exercices 2.9.1 à 2.9.4.

Le Corollaire suivant se déduit clairement du théorème précédent, bien qu'on l'ait utilisé dans la preuve précédente.

Cf. aussi Algèbre PCSI-PTSI 8.2.3 Cor. 2.

Corollaire

$$\forall A \in \mathbf{M}_{n,p}(K), \quad \mathrm{rg}({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{rg}(A).$$

Les méthodes à retenir

Rang et sous-matrices

- Comme dans la rubrique « Les méthodes à retenir » p. 54, **lorsque** $\mathrm{com}(A)$ **intervient**, on utilisera fréquemment les formules :

$$A\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A)A = \det(A)\mathrm{I}_n$$

(ex. 2.9.1 à 2.9.4).

Exercices

2.9.1 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$.

Démontrer : $\begin{cases} \mathrm{rg}(A) \leqslant n-2 & \Longrightarrow & \mathrm{rg}\big(\mathrm{com}(A)\big) = 0 \\ \mathrm{rg}(A) = n-1 & \Longrightarrow & \mathrm{rg}\big(\mathrm{com}(A)\big) = 1 \\ \mathrm{rg}(A) = n & \Longrightarrow & \mathrm{rg}\big(\mathrm{com}(A)\big) = n. \end{cases}$

2.9.2 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathrm{com}\,(\mathrm{com}(\ldots(\mathrm{com}(A))\ldots))$, où com est itéré p fois. (On pourra utiliser l'exercice 2.9.1).

2.9.3 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$ telle que $\mathrm{rg}(A) = n-1$, $B \in \mathbf{M}_n(K)$ telle que $AB = BA = 0$.

Démontrer : $\exists \gamma \in K, B = \gamma\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A)$.

2.9.4 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1-n & & 1 \\ & & \\ 1 & & 1-n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K).$$

Calculer $\mathrm{com}(A)$. (On pourra utiliser les exercices 2.9.1 et 2.9.3).

2.10 Systèmes affines

2.10.1 Position du problème

Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(K)$.

On s'intéresse au **système** d'équations :

(S) est un système affine à n équations et p inconnues.

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} a_{11}x_1 & + \dots + & a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 & + \dots + & a_{np}x_p = b_n \end{cases},$$

d'inconnue $(x_1,\dots,x_p) \in K^p$, appelé **système affine.**

En notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S) dans K^p, il s'agit de savoir si $\mathcal{S}$ est vide ou non, et, lorsque $\mathcal{S} \neq \varnothing$, d'expliciter les éléments de $\mathcal{S}$.

1) Interprétation matricielle

En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p,1}(K)$, $(x_1,\dots,x_p)$ est solution de (S) dans K^p si et seulement si : $AX = B$. Ainsi, la résolution de (S) se ramène à celle de l'équation matricielle $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathbf{M}_{p,1}(K)$.

2) Interprétation vectorielle

Soient : E un K-ev de dimension p
F un K-ev de dimension n
$\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F
$f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A$
$b \in F$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(b) = B$
$x \in E$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = X$.

On a : $AX = B \iff f(x) = b \iff x \in f^{-1}(\{b\})$.

Ainsi, la résolution de (S) revient à la détermination de l'image réciproque du singleton $\{b\}$ par f.

3) Interprétation affine

Notons, pour $i \in \{1,\dots,n\}$, $\varphi_i : K^p \longrightarrow K$ l'application définie par :

$$\forall (x_1,\dots,x_p) \in K^p, \quad \varphi_i(x_1,\dots,x_p) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j.$$

Il est clair que $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ sont des formes linéaires sur K^p.

On a, pour tout $(x_1,\dots,x_p)$ de K^p :

$$(\mathrm{S}) \iff (\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \varphi_i(x) = b_i) \iff x \in \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(\{b_i\}).$$

Pour $i \in \{1,\dots,n\}$, si $(a_{i1},\dots,a_{ip}) \neq (0,\dots,0)$, $\varphi_i^{-1}(\{b_i\})$ est un hyperplan affine de K^p.

Résoudre (S) revient donc à déterminer l'intersection d'une famille finie d'hyperplans affines.

2.10.2 Résolution dans le cas d'un système de Cramer

Gardons les notations de 2.10.1 p. 68, et notons $r = \mathrm{rg}(A)$.

Le système (S) est dit **de Cramer** si et seulement si A est carrée et inversible, c'est-à-dire : $n = p = r$.

Nous supposons ici cette condition réalisée. On a alors : $AX = B \iff X = A^{-1}B$. Ainsi, (S) admet une solution et une seule, dont la détermination se déduit théoriquement du calcul de A^{-1} (puis de $A^{-1}B$).

Notons, pour $1 \leqslant j \leqslant n$, $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. Puisque A est inversible, la famille $\mathcal{F} = (C_1,\ldots,C_n)$ est une base de $\mathbf{M}_{n,1}(K)$. Il existe donc $(x_1,\ldots,x_p) \in K^p$ unique tel que $B = \sum_{j=1}^{n} x_j C_j$, et (S) admet donc une solution et une seule, qui est $(x_1,\ldots,x_p)$.

Soit $k \in \{1,\ldots,n\}$. On a :

Utilisation de la multilinéarité du déterminant.

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{F}}(C_1,\ldots,C_{k-1},B,C_{k+1},\ldots,C_n) &= \det_{\mathcal{F}}\left(C_1,\ldots,\sum_{j=1}^{n} x_j C_j,\ldots,C_n\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \det_{\mathcal{F}}(C_1,\ldots,C_j,\ldots,C_n)\\ &= x_k \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}) = x_k,\end{aligned}$$

puisque, pour tout j de $\{1,\ldots,n\}$ tel que $j \neq k$, $\det_{\mathcal{F}}(C_1,\ldots,C_j,\ldots,C_n) = 0$ par répétition d'une colonne.

En notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(K)$, on a donc :

$$\begin{aligned}x_k &= \det_{\mathcal{F}}(C_1,\ldots,C_{k-1},B,C_{k+1},\ldots C_n) = \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})\ \det_{\mathcal{B}}(C_1,\ldots,B,\ldots,C_n)\\ &= \left(\det_{\mathcal{B}}(C_1,\ldots,C_n)\right)^{-1}\det_{\mathcal{B}}(C_1,\ldots,B,\ldots,C_n).\end{aligned}$$

On a prouvé :

Proposition

Si $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{GL}_n(K)$ et $(b_1,\ldots,b_n) \in K^n$, le système

$$(\mathrm{S})\ \begin{cases} a_{11}x_1 & +\ldots+ & a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 & +\ldots+ & a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1,\ldots,x_n) \in K^n$ admet une solution et une seule, et, pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$:

$$x_k = \frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1\,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n\,k-1} & b_n & a_{n\,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant qui apparaît est obtenu en remplaçant la $k^{\text{è}}$ colonne de A par la colonne des seconds membres du système.

Les formules précédentes, donnant $x_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ s'appellent les **formules de Cramer** .

Remarque :
Dès que $n \geqslant 3$, les formules de Cramer sont quasiment impraticables dans les exemples numériques. On préfèrera souvent une méthode de combinaisons des équations et d'élimination d'inconnues.

Exercices 2.10.1 à 2.10.4.

Exercice-type résolu

Exemple de résolution de système affine

Résoudre, suivant $a \in \mathbb{R}$, le système d'équations suivant, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} x + 2y + az = 0 & (1) \\ x - ay + z = 1 & (2) \\ ax - 2y + z = a & (3). \end{cases}$$

Solution

On peut, par exemple, exprimer x en fonction de a,y,z à partir de l'équation (1) et reporter dans les deux autres :

$$(S) \iff \begin{cases} x = -2y - az \\ -2y - az - ay + z = 1 \\ a(-2y - az) - 2y + z = a \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y - az \\ (-a-2)y + (-a+1)z = 1 \\ (-2a-2)y + (-a^2+1)z = a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -2y - az & (4) \\ (a+2)y + (a-1)z = -1 & (5) \\ (2a+2)y + (a^2-1)z = -a & (6). \end{cases}$$

On peut, par exemple, multiplier l'équation (5) par $a+1$ puis soustraire à l'équation (6), pour faire disparaître z :

$$(S) \iff \begin{cases} (4) \\ (5) \\ \big((2a+2) - (a+1)(a+2)\big)y = 1 \quad (7). \end{cases}$$

Puis :

$$(7) \iff (-a^2 - a)y = 1 \iff a(a+1)y = -1.$$

Séparons en cas.

Si $a = 0$ ou $a = -1$, alors (7) n'a pas de solution, donc (S) non plus.

Supposons $a \neq 0$ et $a \neq -1$. Alors :

$$(7) \iff y = -\frac{1}{a(a+1)},$$

puis, en reportant la valeur de y dans (5) :

$$(S) \iff \begin{cases} (4) \\ y = -\dfrac{1}{a(a+1)} \\ -\dfrac{a+2}{a(a+1)} + (a-1)z = -1 \quad (8). \end{cases}$$

On a :

$$(8) \iff (a-1)z = \frac{a+2}{a(a+1)} - 1 = \frac{-a^2+2}{a(a+1)}.$$

Si $a = 1$, alors cette dernière équation (d'inconnue z) n'a pas de solution, donc (S) non plus.

Conseils

D'autres départs de calcul sont possibles.

$L_3 \longleftarrow L_3 - (a+1)L_2$.

On obtient : $0z = -1$.

On obtient : $0z = \frac{1}{2}$.

Solution | **Conseils**

Si $a \neq 1$, on obtient : $z = \dfrac{-a^2+2}{a(a+1)(a-1)}$, puis, en reportant dans (4) :

$$\begin{aligned} x = -2y - az &= \frac{2}{a(a+1)} + \frac{a^2-2}{(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{2(a-1)+a(a^2-2)}{a(a+1)(a-1)} = \frac{a^3-2}{a(a+1)(a-1)}. \end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (S) est :

On peut vérifier, par quelques lignes de calcul, que les valeurs obtenues pour x,y,z satisfont (S).

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \left\{\left(x = \dfrac{a^3-2}{a(a+1)(a-1)},\ y = -\dfrac{1}{a(a+1)},\ z = \dfrac{-a^2+2}{a(a+1)(a-1)}\right)\right\} & \text{si } a \notin \{-1,0,1\} \\ \varnothing & \text{si } a \in \{-1,0,1\}. \end{cases}$$

Les méthodes à retenir

Systèmes affines

- **Pour résoudre un système d'équations affines**, on essaiera de combiner les équations pour faire partir certaines inconnues, de façon à se ramener à un système « en cascade ». Si le système comporte des paramètres, il y aura lieu de discuter. Dans la réponse, les titres des cas porteront, bien sûr, sur les paramètres et non sur les inconnues.

  Les formules de Cramer ne sont guère pratiques dans les exemples ; leur intérêt est plus théorique.

Exercices

2.10.1 Résoudre les systèmes d'équations suivants (inconnues $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$, paramètres $a,b,m \in \mathbb{C}$) :

a) $\begin{cases} 2x+3y-z=-1 \\ x+2y+3z=2 \\ 3x+4y-5z=-4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+(2m-1)z=1 \\ mx+y+z=1 \\ x+my+z=3(m+1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3mx+(3m-7)y+(m-5)z=m-1 \\ (2m-1)x+(4m-1)y+2mz=m+1 \\ 4mx+(5m-7)y+(2m-5)z=m-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-my+m^2z=m \\ mx-m^2y+mz=1 \\ mx+y-m^3z=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x+y-z=1 \\ 5x+2y-2z=a \\ 4x+y-z=b \end{cases}$

f) $\begin{cases} ax+(b-1)y+2z=1 \\ ax+(2b-3)y+3z=1 \\ ax+(b-1)y+(b+2)z=2b-3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x-y+z=4 \\ 3x+3y-z=4a \\ (2-a)x+2y-2z=-2b. \end{cases}$

2.10.2 CNS sur $m \in \mathbb{C}$ pour que les trois plans vectoriels de $\mathbb{C}^3$ d'équations :

$$x - 2y + z = mx,$$
$$3x - y - 2z = my,$$
$$3x - 2y - z = mz$$

contiennent une même droite vectorielle.

2.10.3 Résoudre les systèmes d'équations suivants (inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$, paramètres $a,b,m \in \mathbb{C}$) :

$a)$ $\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 6t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 0 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} 2x - y + z + t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = 2 \\ x + 7y - 4z + 11t = m \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1 \end{cases}$

$d)$ $\begin{cases} 2x + y + z + t = 3 \\ x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + 2z + t = 2 \\ x + y + z + 2t = 4 \\ 4x - 3y + 3z - 4t = a \\ 2x + 7y + 7z + 2t = b \end{cases}$

$e)$ $\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3. \end{cases}$

2.10.4 Résoudre (inconnue $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n$, paramètre $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{C}^n$) :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ \qquad\vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} \\ x_n + x_1 = 2a_n. \end{cases}$$

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

CHAPITRE 3

Plan

Introduction

La recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'un endomorphisme d’un espace vectoriel est fondamentale en théorie et dans les mathématiques appliquées. Suivant le contexte, l'étude se situera en dimension finie, où l'usage des matrices est possible, ou en dimension non finie.

Prérequis

- Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices (Algèbre PCSI-PTSI, ch. 6 à 9)
- Déterminants (ch.2)
- Polynômes (Algèbre PCSI-PTSI, ch. 5)
- Trace, blocs (§ 1.4).

Objectifs

- Mise en place du vocabulaire relatif aux valeurs propres et vecteurs propres d’un endomorphisme d'un espace vectoriel
- Définition et emploi du polynôme caractéristique
- Manipulation de polynômes d'endomorphismes et de polynômes de matrices en liaison essentielle avec la diagonalisabilité
- Définition et applications de la diagonalisabilité, utilisation des matrices diagonalisables
- Notion de trigonalisation
- Énoncé du théorème de Cayley et Hamilton
- Applications usuelles de la diagonalisation : calcul des puissances d'une matrice carrée diagonalisable, calcul du terme général de certaines suites, résolution de certains systèmes différentiels linéaires à coefficients constants (cf. Analyse PC-PSI-PT, § 8.3.6).

K désigne un corps commutatif.

3.1 Éléments propres

Définitions fondamentales.

Définition

1) Soient E un K-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$.

• Soit $\lambda \in K$. On dit que λ est une **valeur propre (en abrégé : vp) de (ou : pour)** f si et seulement si :

$$\exists x \in E, \quad (x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \lambda x).$$

On appelle **spectre** de f, et on note $\mathrm{Sp}_K(f)$ (ou : $\mathrm{Sp}(f)$) l'ensemble des valeurs propres de f.

• Soit $x \in E$. On dit que x est un **vecteur propre (en abrégé : $\overrightarrow{\text{vp}}$) de (ou : pour)** f si et seulement si :

$$x \neq 0 \quad \text{et} \quad (\exists \lambda \in K,\ f(x) = \lambda x).$$

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$.

• Soit $\lambda \in K$. On dit que λ est une **valeur propre (en abrégé : vp) de (ou : pour)** A si et seulement si :

$$\exists X \in \mathbf{M}_{n,1}(K), \quad (X \neq 0 \quad \text{et} \quad AX = \lambda X).$$

On appelle **spectre** de A, et on note $\mathrm{Sp}_K(A)$ (ou : $\mathrm{Sp}(A)$) l'ensemble des valeurs propres de A.

• Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(K)$. On dit que X est un **vecteur propre (en abrégé : $\overrightarrow{\text{vp}}$) de (ou : pour)** A si et seulement si :

$$X \neq 0 \quad \text{et} \quad (\exists \lambda \in K,\ AX = \lambda X).$$

Les valeurs propres et vecteurs propres sont globalement appelés **éléments propres**.

On pourra donc, dans le cadre de la dimension finie, choisir le point de vue « endomorphismes » ou le point de vue matriciel.

Remarques :

1) Soient E un K-ev de dimension finie $n, n \geqslant 1$, $\mathcal{B}$ une base de E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors :

• Pour tout λ de K, λ est vp de f si et seulement si λ est vp de A (autrement dit : $\mathrm{Sp}_K(f) = \mathrm{Sp}_K(A)$)

• Pour tout x de E, x est $\overrightarrow{\text{vp}}$ de f si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est $\overrightarrow{\text{vp}}$ de A.

2) Par définition, un **vecteur propre n'est jamais nul**.

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition 1

1) Soient E un K-ev, $e = \mathrm{Id}_E$, $\lambda \in K$; on a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}_K(f) \iff \mathrm{Ker}(f - \lambda e) \neq \{0\} \iff f - \lambda e \text{ non injectif.}$$

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $\lambda \in K$; on a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}_K(A) \iff \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n) \neq \{0\} \iff A - \lambda \mathrm{I}_n \notin \mathbf{GL}_n(K)$$
$$\iff \mathrm{rg}(A - \lambda \mathrm{I}_n) < n.$$

Autrement dit, une matrice carrée A est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.

En particulier, pour toute A de $\mathbf{M}_n(K)$: $A \in \mathbf{GL}_n(K) \Longleftrightarrow 0 \notin \mathrm{Sp}_K(A)$.

Proposition-Définition 2

1) Soient E un K-ev, $e = \mathrm{Id}_E$, $f \in \mathcal{L}(E)$.

• Soient $\lambda \in K$, $x \in E$. On dit que λ et x sont des **valeur propre et vecteur propre associés** si et seulement si : $x \neq 0$ et $f(x) = \lambda x$.

Pour toute valeur propre λ de f, le sous-espace propre SEP(f,λ) est formé des vecteurs propres pour f associés à la valeur propre λ et du vec-teur nul.

• Pour toute vp λ de f, le sev $\mathrm{Ker}(f - \lambda e)$ de E est formé des $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ pour f associés à λ et du vecteur nul. Ce sev $\mathrm{Ker}(f - \lambda e)$ est appelé le **sous-espace propre pour f associé à la vp λ** de f, et noté SEP (f,λ) :

$$\mathrm{SEP}\,(f,\lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda e).$$

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$.

• Soient $\lambda \in K$, $X \in \mathbf{M}_{n,1}(K)$. On dit que λ et X sont des **valeur propre et vecteur propre associés** si et seulement si :

$$X \neq 0 \text{ et } AX = \lambda X.$$

Pour toute valeur propre λ de A, le sous-espace propre SEP(A,λ) est formé des vecteurs propres pour A associés à la valeur propre λ et du vecteur colonne nul.

• Pour toute vp λ de A, le sev $\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n)$ de $\mathbf{M}_{n,1}(K)$ est formé des $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ pour A associés à λ et du vecteur nul. Ce sev $\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n)$ est appelé le **sous-espace propre pour A associé à la vp λ** de A, et noté SEP (A,λ) :

$$\mathrm{SEP}\,(A,\lambda) = \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n).$$

Remarques :

1) Soient E un K-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_K(f)$.

Comme : $\forall x \in \mathrm{SEP}(f,\lambda), f(x) = \lambda x$, $\mathrm{SEP}(f,\lambda)$ est stable par f, et l'endomorphisme induit par f sur SEP (f,λ) est l'homothétie de rapport λ : $\begin{array}{ccc}\mathrm{SEP}(f,\lambda) & \longrightarrow & \mathrm{SEP}(f,\lambda) \\ x & \longmapsto & \lambda x\end{array}$.

Cas particulier d'une homothétie.

2) Soit E un K-ev tel que $E \neq \{0\}$. Pour tout α de K, le spectre de l'homothétie $h_\alpha : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \alpha x\end{array}$ est $\{\alpha\}$, et SEP $(h_\alpha,\alpha) = E$.

3) Soient E un K-ev de dimension finie n, $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}$ une base de E, $f \in \mathcal{L}(E)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_K(f)$, $x \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. Il est clair que :

$$x \in \mathrm{SEP}(f,\lambda) \Longleftrightarrow X \in \mathrm{SEP}(A,\lambda).$$

Exemple classique très utile.

Exemple :

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$. On a :

$$X \in \mathrm{SEP}\,(A,\lambda) \Longleftrightarrow$$

$$AX = \lambda X \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + \ldots + x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_1 + \ldots + x_n = \lambda x_n \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (\lambda \neq 0,\ x_1 = \ldots = x_n,\ \lambda = n) \\ \text{ou} \\ (\lambda = 0,\ x_1 + \ldots + x_n = 0) \end{array}\right. .$$

On conclut :

- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0,n\}$

- $\mathrm{SEP}(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R});\ x_1 + \ldots + x_n = 0 \right\}$, qui est un hyperplan de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

- $\mathrm{SEP}(A,n) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix}$, droite vectorielle.

Nous verrons plus loin (3.2 p. 79) l'éventuelle utilisation du polynôme caractéristique pour déterminer les valeurs propres d'une matrice carrée.

On suppose que $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ sont deux à deux distincts ou encore :

$$\{\lambda_1,\ldots,\lambda_N\} \subset \mathrm{Sp}_K(f).$$

Proposition 3

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ des valeurs propres de f (deux à deux distinctes). Alors les sous-espaces propres pour f associés à $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ sont en somme directe.

Preuve

Récurrence sur N.

La propriété est triviale pour $N = 1$.

Supposons-la vraie pour un N de $\mathbb{N}^*$, et soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_{N+1}$ des valeurs propres de f deux à deux distinctes. Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant N+1} \in E^{N+1}$ tel que :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,\ldots,N+1\}, \quad x_i \in \mathrm{SEP}(f,\lambda_i) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N+1} x_i = 0. \end{cases}$$

En appliquant f : $\quad 0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{N+1} f(x_i) = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i x_i.$

On effectue $\lambda_{N+1}L_1 - L_2$ pour faire disparaître x_{N+1}.

Ainsi : $\begin{cases} x_1 + \ldots + x_N + x_{N+1} = 0 \\ \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_N x_N + \lambda_{N+1} x_{N+1} = 0 \end{cases}$,

d'où, en combinant : $\quad (\lambda_{N+1} - \lambda_1)x_1 + \ldots + (\lambda_{N+1} - \lambda_N)x_N = 0.$

Comme : $\forall i \in \{1,\ldots,N\}$, $(\lambda_{N+1} - \lambda_i)x_i \in \mathrm{SEP}(f,\lambda_i)$ et que les sous-espaces propres $\mathrm{SEP}(f,\lambda_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ sont en somme directe (hypothèse de récurrence), on déduit :

$$\forall i \in \{1,\ldots,N\},\ (\lambda_{N+1} - \lambda_i)x_i = 0.$$

$\forall i \in \{1,\ldots,N\}, \lambda_{N+1} - \lambda_i \neq 0.$

Mais $\lambda_1,\ldots,\lambda_{N+1}$ sont deux à deux distincts, d'où : $\quad \forall i \in \{1,\ldots,N\},\ x_i = 0,$

et enfin : $\quad x_{N+1} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = 0.$

Ceci montre que les $\mathrm{SEP}(f,\lambda_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant N+1)$ sont en somme directe. ■

Remarque : Bien que la somme des SEP associés aux vp d'un endomorphisme f de E soit directe, cette somme n'est pas nécessairement égale à E (voir plus loin, 3.3 Prop. p. 87).

Exercices 3.1.1 à 3.1.15.

Exercice-type résolu

Valeurs propres non nulles de AB et de BA

Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,n}(K)$.

a) Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Sp}_K(AB) - \{0\} = \mathrm{Sp}_K(BA) - \{0\}.$$

b) Soit $\lambda \in K$ une valeur propre non nulle de AB. Montrer que les sous-espaces propres pour AB et pour BA associés à λ ont la même dimension.

Solution

a) • Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_K(AB) - \{0\}$.

Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(K) - \{0\}$ tel que : $(AB)X = \lambda X$. On déduit :

$$BA(BX) = B\big((AB)X\big) = B(\lambda X) = \lambda BX.$$

On a $BX \neq 0$, car, si $BX = 0$, alors $\lambda X = (AB)X = A(BX) = 0$, contradiction avec $\lambda \neq 0$ et $X \neq 0$.

Ceci montre que λ est valeur propre de BA, et que BX est un vecteur propre pour BA associé à la valeur propre λ.

Il en résulte : $\mathrm{Sp}_K(AB) - \{0\} \subset \mathrm{Sp}_K(BA) - \{0\}$.

• Comme A et B jouent des rôles symétriques, on a aussi l'autre inclusion, d'où l'égalité :

$$\mathrm{Sp}_K(AB) - \{0\} = \mathrm{Sp}_K(BA) - \{0\}.$$

b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_K(AB) - \{0\}$.

D'après *a)*, $\lambda \in \mathrm{Sp}_K(BA) - \{0\}$ et : $\forall X \in \mathrm{SEP}\,(AB,\lambda),\ BX \in \mathrm{SEP}\,(BA,\lambda)$.

Considérons l'application

$$f : \mathrm{SEP}\,(AB,\lambda) \longrightarrow \mathrm{SEP}\,(BA,\lambda),\quad X \longmapsto f(X) = BX.$$

L'application f est linéaire, car, pour tous $\alpha \in K$, $X_1, X_2 \in \mathrm{SEP}\,(AB,\lambda)$:

$$f(\alpha X_1 + X_2) = B(\alpha X_1 + X_2) = \alpha BX_1 + BX_2 = \alpha f(X_1) + f(X_2).$$

De même, par rôles symétriques, l'application

$$g : \mathrm{SEP}\,(BA,\lambda) \longrightarrow \mathrm{SEP}\,(AB,\lambda),\quad Y \longmapsto g(Y) = AY$$

est linéaire.

On a :

$$\forall X \in \mathrm{SEP}\,(AB,\lambda),\quad (g \circ f)(X) = g(BX) = A(BX) = (AB)X = \lambda X,$$

donc : $g \circ f = \lambda\, \mathrm{Id}_{\mathrm{SEP}(AB,\lambda)}$.

De même, par rôles symétriques : $f \circ g = \lambda\, \mathrm{Id}_{\mathrm{SEP}(BA,\lambda)}$.

Comme $\lambda \neq 0$, on déduit :

$$\left(\frac{1}{\lambda} g\right) \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{SEP}(AB,\lambda)} \qquad \text{et} \qquad f \circ \left(\frac{1}{\lambda} g\right) = \mathrm{Id}_{\mathrm{SEP}(BA,\lambda)}.$$

Il en résulte que f est un isomorphisme de K-ev de $\mathrm{SEP}\,(AB,\lambda)$ sur $\mathrm{SEP}\,(BA,\lambda)$.

Comme ces deux sev sont de dimensions finies, on en conclut qu'ils ont la même dimension.

Conseils

Remarquer d'abord que AB et BA sont bien des matrices carrées, d'ordres respectifs n et p.

Raisonnement par l'absurde, pour montrer $BX \neq 0$.

Autrement dit, AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.

L'application f est correctement définie, car tout élément du départ a bien son image dans l'arrivée.

L'application g est correctement définie, car tout élément du départ a bien son image dans l'arrivée.

L'isomorphisme réciproque de f est $\frac{1}{\lambda} g$.

Les méthodes à retenir

Éléments propres

- **Pour manipuler valeur propre et vecteur propre**, on utilisera souvent la définition : $f(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$ (ex 3.1.1).
- **Pour simplifier dans une égalité matricielle par $A - \alpha \mathrm{I}_n$**, il suffit de voir que $\alpha \notin \mathrm{Sp}_K(A)$ (ex. 3.1.2).
- **Pour déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres d'un endomorphisme f d'un K-ev E** (ex. 3.1.4 à 3.1.13), en particulier lorsque E n'est pas de dimension finie, résoudre $\left\{\begin{array}{l} f(x) = \lambda x \\ x \neq 0 \end{array}\right|$, d'inconnue $(\lambda,x) \in K \times E$.

  On pourra essayer de raisonner par équivalences logiques successives, ou par analyse et synthèse.

  Lorsque E est un espace vectoriel de polynômes, lors de la résolution de $\left\{\begin{array}{l} f(P) = \lambda P \\ P \neq 0 \end{array}\right|$, il pourra être utile d'envisager le degré de P (ex. 3.1.5), ou des diviseurs simples de P (ex. 3.1.4) ; on pourra quelquefois faire intervenir une équation différentielle (ex. 3.1.9).

  Dans certains cas simple, le système $\left\{\begin{array}{l} f(x) = \lambda x \\ x \neq 0 \end{array}\right|$, peut admettre des solutions évidentes (ex. 3.1.6, 3.1.8) ; il restera alors à voir si ce sont les seules.

  Si l'image de f est particulièrement simple, on pourra remarquer que, pour tout $(\lambda,x) \in K \times E$ tel que $f(x) = \lambda x$, on a : $x \in \mathrm{Ker}(f)$ (si $\lambda = 0$), ou $x \in \mathrm{Im}(f)$ (si $\lambda \neq 0$), car alors $x = \dfrac{1}{\lambda} f(x)$.
- **Pour étudier les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients interviennent explicitement** (ex. 3.1.15), on traduira l'égalité $AX = \lambda X$ (de colonnes) par un système d'égalités portant sur les coefficients, et si nécessaire, on fera intervenir la notion de module d'un nombre complexe, souvent à l'aide d'inégalités.
- **Pour montrer qu'une matrice carrée A est inversible** (ex. 3.1.15 *b*)), on peut utiliser l'équivalence logique :

$$A \in \mathbf{GL}_n(K) \iff 0 \notin \mathrm{Sp}_K(A).$$

Voir aussi la rubrique « Les méthodes à retenir » portant sur le polynôme caractéristique p. 85.

Exercices

3.1.1 Soient E un K-ev, $f,g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que tout sous-espace propre pour f est stable par g, et que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

3.1.2 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = \mathrm{I}_n$, ω une racine $p^{\text{ème}}$ de 1 dans $\mathbb{C}$ telle que $\omega^{-1} \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Montrer :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \omega^k A^k = 0.$$

3.1.3 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A,B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.
Peut-on affirmer que AB et BA ont au moins un vecteur propre commun ?

3.1.4 Soient $\alpha \in \mathbb{C}$, E le $\mathbb{C}$-ev des polynômes de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ de degré $\leqslant n$, $f : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ P \longmapsto ((\mathrm{X}+\alpha)P)' \end{array}$, qui est un endomorphisme de E. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f.

3.1.5 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \ f(P) = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-3)P' - \mathrm{X}P.$$

3.1.6 Déterminer valeurs propres, vecteurs propres, noyau, image de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}],\quad f(P) = \mathrm{X}\big(P(\mathrm{X}) - P(\mathrm{X}-1)\big).$$

3.1.7 Soient $E = K[\mathrm{X}]$,
$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ P \longmapsto \mathrm{X}P \end{array}$, $\quad F : \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ g \longmapsto f \circ g - g \circ f \end{array}$.
Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de F.

3.1.8 Soit $E = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < -b$; pour tout P de E, on note :

$$f(P) = X^2 P'' - (a+b-1)XP' + abP.$$

a) Vérifier : $f \in \mathcal{L}(E)$.

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

3.1.9 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$; pour tout P de E, on note :

$$f(P) = X(1-X)P' + nXP.$$

a) Vérifier : $f \in \mathcal{L}(E)$.

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

3.1.10 On note c_0 le $\mathbb{C}$-ev des suites complexes convergeant vers 0, et f l'endomorphisme de c_0 qui, à toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de c_0 associe la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n = x_{n-1} \end{cases}.$$

Montrer : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f) = \varnothing$.

3.1.11 Soient E le $\mathbb{C}$-ev des suites complexes convergentes, et f l'endomorphisme de E qui, à toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E associe la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = x_{n+1}.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

3.1.12 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E, on note $T(u) = v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \ldots + u_n).$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

3.1.13 Soit $E = C^0([-\pi;\pi],\mathbb{R})$. Pour toute f de E, on note :

$$u(f) : \begin{array}{rcl} [-\pi;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-t)\, f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

et

$$v(f) : \begin{array}{rcl} [-\pi;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x-t)\, f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

a) Vérifier que u et v sont des endomorphismes de E.

b) Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de u et v.

3.1.14 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(K)$; montrer :

$$\mathrm{Sp}_K(AB) = \mathrm{Sp}_K(BA).$$

Pour un résultat plus général, voir plus loin exercice 3.2.12 p. 86.

3.1.15 *a)* **Disques de Gershgorin**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B'\Bigg(a_{ii}, \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} |a_{ij}|\Bigg)$$

(où, pour $(a,r) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}_+$, $B'(a,r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| \leqslant r\}$).

Les $B'\Bigg(a_{ii}, \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} |a_{ij}|\Bigg)$ sont appelés les disques de Gershgorin de A.

b) **Théorème de Hadamard**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} |a_{ij}|$$

(on dit que A est à diagonale strictement dominante).

Démontrer :

$$A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}).$$

3.2 Polynôme caractéristique

En fait, l'étude pourrait être menée pour un corps K quel-conque (fini ou infini), sans avoir à identifier polynôme P et fonction polynomiale $\widetilde{P}$, mais au prix de la considération et de l'étude des matrices et déterminants à coefficients dans l'anneau $K[X]$ (ou dans le corps $K(X)$), ce qui dépasse le cadre de cet ouvrage.

Dans ce § 3.2, K désigne un corps infini (c'est le cas si K est un sous-corps de $\mathbb{C}$). On peut donc identifier polynôme (de $K[X]$) et fonction polynomiale (de K dans K), cf. Algèbre PCSI-PTSI, 5.1.7 Rem. Selon l'usage, la variable est ici notée λ, de sorte que l'on confond un polynôme P de $K[X]$ et l'application polynomiale $\widetilde{P} : \begin{array}{rcl} K & \longrightarrow & K \\ \lambda & \longmapsto & P(\lambda) \end{array}$.

Dans ce § 3.2, E désigne un K-ev de dimension finie, $n = \dim(E) \geqslant 1$. On note $e = \mathrm{Id}_E$.

Ne pas confondre la lettre grecque χ, prononcée « ki », et la lettre X qui désigne l'indéterminée pour les polynômes.

Proposition-Définition 1

1) Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$. L'application $\begin{array}{l} K \longrightarrow K \\ \lambda \longmapsto \det(A - \lambda \mathrm{I}_n) \end{array}$ est un polynôme, appelé **polynôme caractéristique** de A, et noté χ_A.

2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'application $\begin{array}{l} K \longrightarrow K \\ \lambda \longmapsto \det(f - \lambda e) \end{array}$ est un polynôme, appelé **polynôme caractéristique** de f, et noté χ_f.

Preuve

1) En notant $A = (a_{ij})_{ij}$, il est clair, par développement du déterminant, que l'application

$$\lambda \longmapsto \det(A - \lambda \mathrm{I}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$ est un polynôme.

Le déterminant est une somme de produits, au signe près, d'éléments du tableau.

2) Le K-ev E admet au moins une base $\mathcal{B}$ et, en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a :

$$\forall \lambda \in K, \quad \det(f - \lambda e) = \det(A - \lambda \mathrm{I}_n),$$

ce qui montre, compte tenu de *1)*, que $\lambda \longmapsto \det(f - \lambda e)$ est un polynôme. ∎

Ainsi, dans le cadre de la dimension finie, on pourra choisir le point de vue « endomorphisme » ou le point de vue matriciel.

Remarques :

1) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On a : $\chi_f = \chi_A$.

2) Le lecteur pourra rencontrer dans d'autres ouvrages une définition légèrement différente : $\chi_f = \det(\lambda e - f)$, qui vaut $\det(f - \lambda e)$ à un coefficient multiplicatif $(-1)^n$ près.

Cas particulier d'une homothétie.

3) Soient $\alpha \in K$, $h_\alpha : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \alpha x \end{array}$ l'homothétie de rapport α.

On a : $\forall \lambda \in K, \chi_{h_\alpha}(\lambda) = (\alpha - \lambda)^n$.

Proposition 2

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$. On a :

$$\forall \lambda \in K, \quad \chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \mathrm{tr}(A) \lambda^{n-1} + \ldots + \det(A).$$

En particulier, χ_A est de degré n.

Preuve

Notons $A = (a_{ij})_{ij}$. Soient $\lambda \in K$ et, pour tout (i,j) de $\{1,\dots,n\}^2$: $\alpha_{ij} = \begin{cases} a_{ii} - \lambda & \text{si } i = j \\ a_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

D'après § 2.5, Déf. (définition du déterminant d'une matrice) :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(n)n}.$$

Puisque σ est différente de l'identité, il existe au moins deux entiers distincts i, j de $\{1,\dots,n\}$ tels que :

$$\sigma(i) \neq i \text{ et } \sigma(j) \neq j.$$

Pour toute σ de $\mathfrak{S}_n - \{\mathrm{Id}_{\{1,\dots,n\}}\}$, le terme $\varepsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(n)n}$ est un polynôme (en λ) de degré $\leqslant n - 2$.

D'autre part :

$$\alpha_{11} \dots \alpha_{nn} = (a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = (-\lambda)^n + (a_{11} + \ldots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \ldots.$$

Ceci montre que χ_A est de degré n, et que les termes en λ^n et λ^{n-1} sont respectivement : $(-1)^n \lambda^n$ et $(-1)^{n-1} \mathrm{tr}(A) \lambda^{n-1}$.

Enfin, comme $\det(A) = \chi_A(0)$, le terme constant de χ_A est $\det(A)$. ∎

Remarque : Si χ_a est scindé sur K, $\chi_a(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}(A) \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A).$$

Proposition 3

Deux matrices carrées semblables ont même polynôme caractéristique.

Autrement dit : $\forall (A,B) \in (\mathbf{M}_n(K))^2,\ (A \sim B \Longrightarrow \chi_A = \chi_B)$.

Preuve

Cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.2.4 Déf. 1.

Soient $A, B \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que $A \sim B$. Il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ telle que $B = P^{-1}AP$.

On a, pour tout λ de K :

$$\chi_B(\lambda) = \det(P^{-1}AP - \lambda \mathrm{I}_n) = \det\Big(P^{-1}(A - \lambda \mathrm{I}_n)P\Big)$$

$$= \Big(\det(P)\Big)^{-1} \det(A - \lambda \mathrm{I}_n)\, \det(P) = \chi_A(\lambda).$$

Remarque : La réciproque de la Proposition précédente est fausse (si $n \geqslant 2$), comme le montre l'exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dans lequel : $A \not\sim B$ et $\chi_A = \chi_B = \mathrm{X}^2$.

$\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda) = \lambda^2$.

Proposition 4

1) $\forall f \in \mathcal{L}(E),\quad \mathrm{Sp}_K(f) = \chi_f^{-1}(\{0\})$.

2) $\forall A \in \mathbf{M}_n(K),\quad \mathrm{Sp}_K(A) = \chi_A^{-1}(\{0\})$.

Autrement dit : les valeurs propres d'un endomorphisme (resp. d'une matrice carrée) sont les zéros du polynôme caractéristique de cet endo-morphisme (resp. matrice carrée).

Preuve

1) Pour tout λ de K :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}_K(f) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f - \lambda e) \neq \{0\} \Longleftrightarrow (f - \lambda e) \text{ non injective}$$

$$\Longleftrightarrow \det(f - \lambda e) = 0 \Longleftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0.$$

2) Analogue à *1)*.

Corollaire

Le spectre d'un endomorphisme de E ($\dim(E) = n$) ou d'une matrice de $\mathbf{M}_n(K)$ est une partie finie de K ayant au plus n éléments.

Autrement dit, une matrice carrée d'ordre n ne peut avoir au plus que n valeurs propres.

La Proposition précédente permet souvent de déterminer les vp d'une matrice.

Exemple :

Calculer les vp et les $\overrightarrow{\text{vp}}$ de $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ -9 & -22 & -22 \\ 9 & 18 & 17 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

On forme le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 12 & 10 \\ -9 & -22-\lambda & -22 \\ 9 & 18 & 17-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4)$$

(après développements)

$$= -(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2,$$

donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 2\}$.

$$\bullet\ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(A,-1) \iff (A+\mathrm{I}_3)\mathrm{X} = 0 \iff \begin{cases} 9x+12y+10z=0 \\ -9x-21y-22z=0 \\ 9x+18y+18z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-2y-2z \\ 3y+4z=0. \end{cases}$$

Donc $\mathrm{SEP}(A,-1)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\bullet\ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(A,2) \iff \begin{cases} 6x+12y+10z=0 \\ -9x-24y-22z=0 \\ 9x+18y+15z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x=-6y-5z \\ 6y+7z=0 \end{cases}.$$

Donc $\mathrm{SEP}(A,2)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Définition

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathbf{M}_n(K)$), λ_0 une valeur propre de f (resp. A). On appelle le **ordre de multiplicité** de λ_0 l'ordre de multiplicité de λ_0 en tant que zéro du polynôme caractéristique χ_f (resp. χ_A).

Exemple :

Dans l'exemple précédent, les vp sont -1 (simple) et 2 (double).

Cf. Algèbre PCSI-PTSI, 5.3.4 Th.

Remarque :

• Supposons $K=\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f admet au moins une vp et un $\vec{\mathrm{vp}}$ puisque, d'après le théorème de d'Alembert, χ_f admet au moins un zéro dans $\mathbb{C}$.
• De même, si $n \geqslant 1$, toute matrice A de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une vp et un $\vec{\mathrm{vp}}$.

Proposition 5

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}_K(f)$, ω_0 l'ordre de multiplicité de λ_0, $d_0 = \dim\big(\mathrm{SEP}(f,\lambda_0)\big)$. On a alors : $1 \leqslant d_0 \leqslant \omega_0$.

Preuve

1) Puisque, par définition, $\mathrm{SEP}\,(f,\lambda_0) = \mathrm{Ker}(f-\lambda_0 e) \neq \{0\}$, on a : $d_0 \geqslant 1$.

2) $\mathrm{SEP}(f,\lambda_0)$ admet au moins une base $(e_1,\ldots,e_{d_0})$ et, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_{d_0+1},\ldots,e_n \in E$ tels que $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ soit une base de E.

Il existe $C \in \mathbf{M}_{d_0,n-d_0}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{n-d_0}(K)$ telles que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \mathrm{I}_{d_0} & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$,

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, cf. 1.4.2 2).

d'où : $\forall \lambda \in K,\ \chi_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} (\lambda_0-\lambda)\mathrm{I}_{d_0} & C \\ 0 & B-\lambda\mathrm{I}_{n-d_0} \end{pmatrix}$

$$= (\lambda_0-\lambda)^{d_0}\det(B-\lambda\mathrm{I}_{n-d_0}) = (\lambda_0-\lambda)^{d_0}\chi_B(\lambda).$$

Comme χ_B est un polynôme, on déduit : $(\lambda_0-\mathrm{X})^{d_0} \mid \chi_f$, et donc $d_0 \leqslant \omega_0$. ■

Cas fréquent en pratique.

Corollaire

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour toute vp simple λ_0 de f, la dimension de $\mathrm{SEP}(f,\lambda_0)$ vaut 1.

2) Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Pour toute vp simple λ_0 de A, la dimension de $\mathrm{SEP}(A,\lambda_0)$ vaut 1.

Exercices 3.2.1 à 3.2.13.

Exercice-type résolu 1

Polynômes caractéristiques de AB et de BA

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(K)$. Montrer : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

On pourra utiliser l'existence de $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$ telles que : $B = P\mathrm{J}_r Q$, où $r = \mathrm{rg}\,(B)$, $\mathrm{J}_r = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution

D'après le Cours de MPSI, en notant $r = \mathrm{rg}\,(B)$, il existe $P, Q \in \mathbf{GL}_n(K)$ telles que : $B = P\mathrm{J}_r Q$. On a alors :

$$AB = AP\mathrm{J}_r Q = Q^{-1}(QAP\mathrm{J}_r)Q \quad \text{et} \quad BA = P\mathrm{J}_r QA = P(\mathrm{J}_r QAP)P^{-1},$$

donc : $\chi_{AB} = \chi_{(QAP)\mathrm{J}_r}$ et $\chi_{BA} = \chi_{\mathrm{J}_r(QAP)}$.

Notons $C = QAP$. Il nous suffit donc de prouver : $\chi_{C\mathrm{J}_r} = \chi_{\mathrm{J}_r C}$.

Décomposons en blocs, selon J_r :

$$\mathrm{J}_r = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

où : $C_1 \in \mathbf{M}_r(K)$, $C_2 \in \mathbf{M}_{r,n-r}(K)$, $C_3 \in \mathbf{M}_{n-r,r}(K)$, $C_4 \in \mathbf{M}_{n-r,n-r}(K)$.

On a :

$$C\mathrm{J}_r = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{J}_r C = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$\chi_{C\mathrm{J}_r}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} C_1 - \lambda \mathrm{I}_r & 0 \\ C_3 & -\lambda \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix} = \det\,(C_1 - \lambda \mathrm{I}_r)(-\lambda)^{n-r}$$

$$\chi_{\mathrm{J}_r C}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} C_1 - \lambda \mathrm{I}_r & C_2 \\ 0 & -\lambda \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix} = \det\,(C_1 - \lambda \mathrm{I}_r)(-\lambda)^{n-r}.$$

On obtient $\chi_{C\mathrm{J}_r} = \chi_{\mathrm{J}_r C}$ et on conclut : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Conseils

Cf. Algèbre PCSI-PTSI, § 8.2.3 2) Prop. 2.

Deux matrices carrées semblables ont le même polynôme caractéristique.

La définition de J_r, en blocs, incite à former aussi la décomposition de C en blocs.

Déterminant d'une matrice trigonale par blocs.

Pour une autre méthode, voir exercice 3.2.12 p. 86.

Exercice-type résolu 2

Un exemple de calcul de polynôme caractéristique

Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (1) & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Calculer χ_{A_n}.

b) Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A_n) \cap\,]1; +\infty[$ est un singleton.

Solution

a) On forme le polynôme caractéristique χ_{A_n} de A_n :

$$\chi_{A_n}(\lambda) = \det(A_n - \lambda \mathrm{I}_n) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & (0) & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (1) & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}_{[n-1]} + (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (1) & \ddots & \ddots & 1-\lambda \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda)^{n-1} + (-1)^{n+1}\Delta_{n-1}(\lambda),$$

et :

$$\Delta_{n-1}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & (1) & \ddots & 1-\lambda \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} = \lambda \Delta_{n-2}(\lambda).$$

On déduit :

$$\Delta_{n-1}(\lambda) = \lambda\Delta_{n-2}(\lambda) = \ldots = \lambda^{n-2}\Delta_1(\lambda) = \lambda^{n-2}\cdot 1 = \lambda^{n-2}.$$

Donc :

$$\chi_{A_n}(\lambda) = (1-\lambda)^n + (-1)^{n+1}\lambda^{n-2} = (-1)^n\big((\lambda-1)^n - \lambda^{n-2}\big).$$

b) Considérons l'application $F_n :]1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\lambda \mapsto F_n(\lambda) = \frac{(-1)^n\chi_{A_n}(\lambda)}{\lambda^{n-2}} = \frac{(\lambda-1)^n}{\lambda^{n-2}} - 1 = (\lambda-1)^n\lambda^{-n+2} - 1.$$

L'application F_n est dérivable sur $]1;+\infty[$ et, pour tout $\lambda \in]1;+\infty[$:

$$\begin{aligned} F_n'(\lambda) &= n(\lambda-1)^{n-1}\lambda^{-n+2} + (-n+2)(\lambda-1)^n\lambda^{-n+1} \\ &= \frac{(\lambda-1)^{n-1}}{\lambda^{n-1}}\big(n\lambda + (-n+2)(\lambda-1)\big) \\ &= \frac{(\lambda-1)^{n-1}}{\lambda^{n-1}}\big(2\lambda + (n-2)\big) \geqslant 0. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$F_n(\lambda) \underset{\lambda \to 1}{\longrightarrow} -1 < 0 \quad \text{et} \quad F_n(\lambda) \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty > 0.$$

On en déduit le tableau des variations de F_n :

λ	1		$+\infty$
$F_n'(\lambda)$		$+$	
$F_n(\lambda)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le théorème de la bijection monotone, on conclut que l'équation $F_n(\lambda) = 0$, d'inconnue $\lambda \in]1;+\infty[$, admet une solution et une seule, et donc χ_{A_n} admet, dans $]1;+\infty[$, un zéro et un seul.

Finalement : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A_n) \cap]1;+\infty[$ est un singleton.

Conseils

Selon l'usage, on note λ la variable.

Développement par rapport à la 1ère ligne, car celle-ci ne contient que deux termes (au plus) non nuls.

Le premier déterminant est celui d'une matrice triangulaire. On note, par exemple, $\Delta_{n-1}(\lambda)$ le deuxième déterminant.

$C_1 \longleftarrow C_1 - C_2$, puis développement par rapport à la 1ère colonne.

On contrôle le résultat obtenu, pour $n = 2$ par exemple :

$$\chi_{A_2}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1.$$

L'étude des variations de

$$(-1)^n\chi_{A_n}(\lambda) : \lambda \longmapsto (\lambda-1)^n - \lambda^{n-2}$$

sur $]1;+\infty[$, n'est pas immédiate, car le signe de la dérivée n'est pas évident. En divisant par λ^{n-2}, on fait apparaître un terme constant, qui disparaîtra dans le calcul de la dérivée.

Car $\lambda > 0$ et $n \geqslant 2$.

$$F_n(\lambda) = \frac{(-1)^n\chi_{A_n}(\lambda)}{\lambda^{n-2}}.$$

Les méthodes à retenir

Polynôme caractéristique

- **Pour calculer le polynôme caractéristique d'une matrice carrée**, on peut essayer de se ramener au cas, plus facile, de matrices triangulaires par blocs (ex 3.2.1, 3.2.4 à 3.2.6, 3.2.14).
- **Pour étudier les valeurs propres réelles d'une matrice carrée A à coefficients réels**, le polynôme caractéristique χ_A étant un polynôme à coefficients réels, donc une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut utiliser des arguments issus de l'analyse, en particulier le théorème des valeurs intermédiaires (ex. 3.2.2).
- **Pour calculer le polynôme caractéristique d'une matrice-compagnon**, on peut développer par rapport à une rangée et faire apparaître une relation de récurrence, ou bien effectuer une transformation du type $C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2 + \ldots + \lambda^{n-1} C_n$ (ex. 3.2.11).
- Rappelons que la formation du polynôme caractéristique n'est pas toujours indispensable pour la recherche des valeurs propres.

Exercices

3.2.1 Soient E un K-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sev de E stable par f, $f' : F \longrightarrow F$ l'endomorphisme induit par f sur F. Montrer : $\chi_{f'} | \chi_f$.

3.2.2 Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie impaire, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe au moins une droite et un hyperplan de E stables par f.

3.2.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $\chi_A = (-1)^n \mathrm{X}^n + \ldots + \alpha_{n-1}\mathrm{X} + \alpha_n$ le polynôme caractéristique de A. Montrer :

$$\alpha_{n-1} = -\mathrm{tr}(\mathrm{com}(A)).$$

3.2.4 Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{N}^*$,

$$A_i \in \mathbf{M}_{n_i}(K)\ (1 \leqslant i \leqslant N),\ A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N \end{pmatrix}.$$

Montrer :

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{N} \chi_{A_k}.$$

3.2.5 Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{p,n}(K)$.

Montrer : $\mathrm{X}^p \chi_{\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}} = (-1)^n \mathrm{X}^n \chi_{CB}(\mathrm{X}^2)$.

3.2.6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n}(K).$$

Exprimer χ_M en fonction de χ_A.

3.2.7 Montrer : $\forall A \in \mathbf{M}_n(K),\ \chi_{{}^{\mathrm{t}}A} = \chi_A$.
En particulier :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K),\ \mathrm{Sp}_K({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{Sp}_K(A).$$

3.2.8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\forall x \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \Big(f(x) \in (\mathbb{R}_+)^n \text{ et } ||f(x)||_1 = ||x||_1 \Big),$$

où $\displaystyle ||(x_1, \ldots, x_n)||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

Montrer : $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

3.2.9 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, X (resp. Y) un $\overrightarrow{\text{vp}}$ pour A (resp. ${}^{\mathrm{t}}A$) associé à la valeur propre λ de A (cf. exercice 3.2.7). On suppose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ les composantes de } Y \text{ (dans la base canonique)} \\ \quad \text{sont toutes} > 0 \\ \bullet\ \dim(\mathrm{SEP}(A,\lambda)) = 1. \end{array} \right.$$

Soient $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, $Z \in \mathrm{SEP}(A,\mu) - \{0\}$; on suppose que les composantes de Z sont toutes $\geqslant 0$.
Montrer que Z est colinéaire à X et que $\mu = \lambda$.

3.2.10 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{C}) - \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} = 0$ les valeurs propres de A.
On suppose que la 1ère ligne de A est combinaison linéaire des autres, et on note $A = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ C & B \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{C}$, $C \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $L \in \mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer qu'il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que :

$$\alpha = {}^{\mathrm{t}}XC \quad \text{et} \quad L = {}^{\mathrm{t}}XB.$$

b) Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ satisfaisant *a)* ; montrer que $C\,{}^{\mathrm{t}}X + B$ a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

3.2.11 Matrice-compagnon

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in K^n$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & 0 & 1 \\ a_0 & \ldots & & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K).$$

Montrer :

$$\chi_A = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right).$$

On dit que A est la matrice-compagnon du polynôme (unitaire) $X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_0,\ldots,\alpha_n) \in K^{n+1}$, $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$.

CNS pour qu'il existe $A \in \mathbf{M}_n(K)$ telle que $\chi_A = P$?

3.2.12 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$ $A \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,n}(K)$.

Démontrer :

$$(-X)^n \chi_{BA} = (-X)^p \chi_{AB}.$$

On pourra essayer d'obtenir deux égalités portant sur des matrices de $\mathbf{M}_{n+p}(K)$ décomposées en blocs, faisant intervenir $AB - \lambda I_n$ et $BA - \lambda I_p$.

En particulier :

$$\forall (A,B) \in (\mathbf{M}_n(K))^2, \quad \chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

3.2.13 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$,

$U,V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & -AV \\ -{}^tUA & {}^tUAV \end{pmatrix}$.

a) Montrer : $0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$.

b) Montrer :

$\alpha)$ $\det(A) = 0 \Longrightarrow X^2 | \chi_B$

$\beta)$ $\left\{ \begin{array}{l} X^2 | \chi_B \\ {}^tUV \neq -1 \end{array} \right| \Longrightarrow \det(A) = 0.$

3.3 Diagonalisabilité

Dans ce § 3.3, E désigne un K-ev de dimension finie, $n = \dim(E) \geqslant 1$.

Définition

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **diagonalisable** si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale.

2) Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$. On dit que A est **diagonalisable** si et seulement s'il existe une matrice diagonale D de $\mathbf{M}_n(K)$ telle que A soit semblable à D.

Autrement dit, A est diagonalisable si et seulement si :

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n(K), \quad \exists D \in \mathbf{D}_n(K), \quad A = PDP^{-1}.$$

Si $A \in \mathbf{M}_n(K)$ est diagonalisable, on appelle **diagonalisation** de A la donnée de P, D, (et P^{-1}) telles que :

Sauf exception, il n'y a pas unicité d'une diagonalisation d'une matrice diagonalisable ; autrement dit, P et D ne sont pas uniques.

$$P \in \mathbf{GL}_n(K), \quad D \in \mathbf{D}_n(K), \quad A = PDP^{-1}.$$

Si $A \in \mathbf{M}_n(K)$ est diagonalisable, **diagonaliser** A c'est déterminer P, D, (et P^{-1}) telles que :

$$P \in \mathbf{GL}_n(K), \quad D \in \mathbf{D}_n(K), \quad A = PDP^{-1}.$$

Au lieu de diagonalisation, on dit aussi : **réduction à la forme diagonale**.

Remarques :

1) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable. En effet :

Ainsi dans le cadre de la dimension finie, on pourra choisir le point de vue « endomorphisme » ou le point de vue matriciel.

• Si f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice D de f dans $\mathcal{B}'$ soit diagonale et, en notant $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}')$, on a alors $A = PDP^{-1}$ (formule de changement de base pour un endomorphisme, cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.2.4 Prop. 1)

• Si A est diagonalisable, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$, $D \in \mathbf{D}_n(K)$ telles que $A = PDP^{-1}$ et donc D est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ de E définie par $\mathrm{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}') = P$.

2) Il existe des matrices diagonalisables et des matrices non diagonalisables (cf. plus loin p. 100).

3) Toute matrice diagonale est diagonalisable.

4) Si une matrice A de $\mathbf{M}_n(K)$ est diagonalisable et n'a qu'une seule valeur propre $\alpha \in K$, alors il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ telle que $A = P(\alpha \mathrm{I}_n)P^{-1}$ et donc $A = \alpha \mathrm{I}_n$.

Le résultat *4)* est souvent utile en pratique.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) f est diagonalisable

(ii) Il existe une base de E formée de $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ pour f

(iii) La somme des SEP pour f est égale à E

(iv) La somme des dimensions des SEP pour f est égale à $\dim(E)$.

Preuve

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Supposons f diagonalisable.

Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale ; il existe donc $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in K^n$ tel que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

Rappel de notation :

$$\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Comme : $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \begin{cases} f(e_i) = \lambda_i e_i \\ e_i \neq 0 \end{cases}$,

$\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E formée de $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ pour f.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ formée de $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ pour f.

Il existe donc $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in K^n$ tel que : $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, f(e_i) = \lambda_i e_i$.

Il est clair que chaque λ_i est une vp de f (un $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ associé est e_i). Notons $\Lambda = \{\lambda_i ; 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Alors :

On a, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$: $K e_i \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_i e)$.

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(f)} \mathrm{Ker}(f - \lambda e) \supset \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ker}(f - \lambda e) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i e) \supset \sum_{i=1}^{n} K e_i = E,$$

donc la somme des SEP pour f, qui est $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(f)} \mathrm{Ker}(f - \lambda e)$ est égale à E.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

Supposons que la somme des SEP pour f soit égale à E. Comme cette somme est directe (cf. 3.1 Prop. 3 p. 76), on a alors :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(f)} \dim(\mathrm{SEP}(f,\lambda)) = \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(f)} \mathrm{SEP}(f,\lambda)\right) = \dim(E).$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i)

Supposons que la somme des dimensions des SEP pour f soit égale à $\dim(E)$.

Notons $k = \mathrm{Card}(\mathrm{Sp}_K(f))$, $\mu_1,\ldots,\mu_k$ les éléments de $\mathrm{Sp}_K(f)$.

Par définition, $\mu_1,\ldots,\mu_k$ sont deux à deux distincts.

Chaque $\mathrm{SEP}(f,\mu_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ admet au moins une base $\mathcal{B}_j$; notons $\mathcal{B} = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$.

Cf. 1.1.2 Prop. 2, Preuve, *2)*.

Comme les $\mathrm{SEP}(f,\mu_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ sont en somme directe (cf. 3.1 Prop. 3 p. 76), et que chaque $\mathcal{B}_j$ est libre, $\mathcal{B}$ est libre.

D'autre part :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Card}(\mathcal{B}_j) = \sum_{j=1}^{k} \dim(\mathrm{SEP}(f,\mu_j)) = \dim(E).$$

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de E, et la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale, puisque les éléments de $\mathcal{B}$ sont des $\overrightarrow{\text{vp}}$ pour f : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mu_1 \text{I}_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_k \text{I}_{d_k} \end{pmatrix}$ où $d_j = \text{Card}(\mathcal{B}_j), 1 \leqslant j \leqslant k$.

Résultat important pour la pratique.

Remarque : D'après la preuve précédente, si $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, alors les éléments diagonaux d'une matrice diagonale représentant f sont les valeurs propres de f, écrites sur cette diagonale autant de fois que l'indiquent leurs ordres de multiplicité.
Nous verrons plus loin (3.4 Rem. *4)* p. 98) une propriété analogue pour les endomorphismes trigonalisables.

Théorème important.

Théorème CNS de diagonalisabilité

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, f est diagonalisable si et seulement si :

- χ_f est scindé sur K
- Pour chaque vp λ de f, $\dim\left(\text{SEP}(f,\lambda)\right)$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ.

2) Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$; A est diagonalisable si et seulement si :

- χ_A est scindé sur K
- Pour chaque vp λ de A, $\dim\left(\text{SEP}(A,\lambda)\right)$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ.

Preuve

1) Pour chaque vp λ de f, notons $d(\lambda) = \dim(\text{SEP}(f,\lambda))$ et $\omega(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de λ (dans χ_f).

• Supposons f diagonalisable.

D'après 3.2 Prop. 5 p. 82 : $\forall \lambda \in \text{Sp}_K(f), d(\lambda) \leqslant \omega(\lambda)$.

D'après Prop. p. 87 : $n = \displaystyle\sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} d(\lambda)$.

D'autre part, puisque f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de E et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ tels que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On a donc : $\forall \lambda \in K, \chi_f(\lambda) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda \text{I}_n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)$.

On a, pour tout $\lambda, d(\lambda) \leqslant \omega(\lambda)$, et d'autre part :
$\displaystyle\sum_{\lambda} d(\lambda) = \sum_{\lambda} \omega(\lambda)$.

Ainsi, χ_f est scindé et donc : $\displaystyle\sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \omega(\lambda) = n$.

On conclut : $\forall \lambda \in K, d(\lambda) = \omega(\lambda)$.

• Réciproquement, supposons χ_f scindé et : $\forall \lambda \in \text{Sp}_K(f), d(\lambda) = \omega(\lambda)$.

Puisque χ_f est scindé et que les zéros de χ_f sont les vp de f : $\displaystyle\sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} \omega(\lambda) = n$.

D'où : $\displaystyle\sum_{\lambda \in \text{Sp}_K(f)} d(\lambda) = n$, et donc (cf. Prop. p. 87) f est diagonalisable.

2) Cette deuxième propriété est clairement l'expression matricielle de la première.

Exemple :

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable et diagonaliser A.

Formons le polynôme caractéristique de A :

Développement par rapport à la 2e colonne.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)^2.$$

Les vp de A sont 0 (simple) et 1 (double).

• $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(A,0) \iff \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -2x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -2x \\ y = x \end{cases}.$

Donc $\mathrm{SEP}(A,0)$ est de dimension 1 et admet pour base (V_1) où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

• $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(A,1) \iff x + z = 0.$

Donc $\mathrm{SEP}(A,1)$ est de dimension 2 et admet pour base (V_2, V_3)

où $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, par exemple.

Puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et que, pour chaque vp de A, la dimension du SEP est égale à l'ordre de multiplicité de la vp, d'après le Théorème précédent, A est diagonalisable.

En notant $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$, $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B})$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $A = PDP^{-1}$.

La calculette fournit : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier à la calculette, que : $A = PDP^{-1}$.

Cas fréquent en pratique.

Corollaire **CS de diagonalisabilité**

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes (où $n = \dim(E)$), alors f est diagonalisable.

2) Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Si A admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors A est diagonalisable.

Exemple :

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que A est diagonalisable.

Formons le polynôme caractéristique, en développant par rapport à la dernière ligne :

Les deux déterminants qui apparaîssent sont triangulaires, respectivement supérieur, inférieur.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & & & -\lambda \end{vmatrix}_{[n]} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & -\lambda \end{vmatrix}_{[n-1]} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & & & \\ -\lambda & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\lambda & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

$$= (-\lambda)(-\lambda)^{n-1} + (-1)^{n+1} = (-1)^n(\lambda^n - 1).$$

Pour cet exemple voir aussi plus loin 3.5.2 Exemple *4)* p. 112.

Il est clair que χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ et à zéros simples (les racines $n^{\text{èmes}}$ de 1 dans $\mathbb{C}$) ; d'après le Corollaire précédent, A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Remarque : Toute matrice triangulaire de $\mathbf{M}_n(K)$ ayant ses éléments diagonaux deux à deux distincts est diagonalisable, puisque son polynôme caractéristique est scindé simple (cf. ex. 3.3.19).

Lorsqu'une matrice carrée n'est pas diagonalisable, il se peut qu'elle soit trigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$, $T \in \mathbf{T}_{n,s}(K)$ telles que $A = PTP^{-1}$. La théorie de la trigonalisation sera vue dans le § 3.4 p. 98.

Exercices 3.3.1 à 3.3.23.

Exercice-type résolu 1

Exemple de diagonalisabilité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. On note $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que 0 est valeur propre de A_n et déterminer $\dim \mathrm{SEP}(A_n,0)$.

b) Déterminer les valeurs propres de A_n.

c) Montrer que A_n est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution

a) On remarque, en notant $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A :

$$C_1 = C_n \quad \text{et} \quad C_2 = C_3 = \dots = C_{n-1}.$$

Il en résulte : $\mathrm{rg}(A_n) \leqslant 2$.

De plus, (C_1,C_2) est libre, car C_2 n'est pas colinéaire à C_1.

On obtient : $\mathrm{rg}(A_n) = 2$.

Il en résulte, par le **théorème du rang** :

$$\dim \mathrm{Ker}(A_n) = n - \mathrm{rg}(A_n) = n - 2 \geqslant 1.$$

Ceci montre que 0 est valeur propre de A_n et, comme $\mathrm{Ker}(A_n) = \mathrm{SEP}(A_n,0)$, on a : $\dim \mathrm{SEP}(A_n,0) = n-2$.

b) Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$A_nX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + 2x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + x_n = \lambda x_2 \\ \qquad \vdots \\ x_1 + x_n = \lambda x_{n-1} \\ 2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + 2x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Conseils

$\mathrm{rg}(A_n) = \dim \mathrm{Vect}(C_1,\dots,C_n)$
$= \dim \mathrm{Vect}(C_1,C_2)$.

Par hypothèse : $n \geqslant 3$.

On va déterminer les autres valeurs propres de A_n, c'est-à-dire les valeurs propres non nulles.

Solution

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_n \\ x_2 = \ldots = x_{n-1} \\ 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \lambda x_1 \\ x_1 + x_n = \lambda x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_n \\ x_2 = \ldots = x_{n-1} \\ 2\big(2x_1 + (n-2)x_2\big) = \lambda x_1 & (1) \\ 2x_1 = \lambda x_2 & (2). \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{\lambda}{2} x_2 \\ 2\lambda x_2 + 2(n-2)x_2 = \dfrac{\lambda^2}{2} x_2 & (3). \end{cases}$$

et :

$$(3) \iff x_2\left(\frac{\lambda^2}{2} - 2\lambda - 2(n-2)\right) = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda - 4(n-2) = 0 \qquad (4).$$

Le discriminant Δ de cette équation (4) du second degré est :

$$\Delta = 16 + 16(n-2) = 16(n-1) > 0,$$

donc :

$$(4) \iff \big(\lambda = \lambda_1 \quad \text{ou} \quad \lambda = \lambda_2\big),$$

où :

$$\lambda_1 = \frac{4 - \sqrt{16(n-1)}}{2} = 2 - 2\sqrt{n-1}, \qquad \lambda_2 = 2 + 2\sqrt{n-1}.$$

Il en résulte que les valeurs propres de A_n sont : $0,\ 2 - 2\sqrt{n-1},\ 2 + 2\sqrt{n-1}$.

c) Notons, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A_n) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$: $E_\lambda = \mathrm{SEP}\,(A_n, \lambda)$.

D'après *a)* : $\dim(E_0) = n - 2$.

D'après *b)* : $\dim(E_{\lambda_1}) \geqslant 1$ et $\dim(E_{\lambda_2}) \geqslant 1$.

D'autre part : $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A_n)} \dim(E_\lambda) \leqslant n$.

On a donc nécessairement :

$$\dim(E_0) = n - 2, \qquad \dim(E_{\lambda_1}) = \dim(E_{\lambda_2}) = 1,$$

donc : $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A_n)} \dim(E_\lambda) = n$, et on conclut : A_n est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Conseils

On utilise : $\lambda \neq 0$.

On a $x_2 \neq 0$, car, si $x_2 = 0$, alors $x_1 = 0$, puis $x_3 = \ldots = x_{n-1} = 0, x_n = 0, X = 0$, contradiction.

On a bien $0, \lambda_1, \lambda_2$ deux à deux distincts, car $n \geqslant 3$.

D'après le Cours, la somme $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A_n)}$ est directe.

Exercice-type résolu 2

Exemple d'étude de diagonalisabilité d'une matrice avec paramètre

On note, pour tout $t \in]0; +\infty[$: $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3t^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer l'ensemble des $t \in]0; +\infty[$ tels que $A(t)$ soit diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Solution

Conseils

Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé.

• Formons le polynôme caractéristique de $A(t)$:

$$\chi_{A(t)}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 3t^2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3t^2 + 3\lambda t^2 = -P_t(\lambda),$$

Développement par la règle de Sarrus pour un déterminant d'ordre trois.

en notant $P_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \lambda \longmapsto P_t(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda t^2 - 3t^2$.

L'application P_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

On étudie les variations de P_t.

$$P_t'(\lambda) = 3\lambda^2 - 3t^2 = 3(\lambda^2 - t^2),$$

d'où le tableau des variations de P_t :

λ	$-\infty$		$-t$		t		$+\infty$
$P_t'(\lambda)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P_t(\lambda)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	< 0	$\nearrow$	$+\infty$

On calcule :

$$P_t(-t) = 2t^3 - 3t^2 \quad \text{et} \quad P_t(t) = -2t^3 - 3t^2 < 0.$$

Séparons en cas selon le signe de $P_t(-t)$, c'est-à-dire selon la position de t par rapport à $\dfrac{3}{2}$.

Cas $t > \dfrac{3}{2}$:

On a $P_t(-t) > 0$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie par intervalles, P_t admet exactement trois zéros. Comme $A(t) \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, il en résulte que $A(t)$ est diagonalisable.

P_t est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

P_t admet un zéro exactement dans chacun des trois intervalles

$$]-\infty; -t[,\ ]-t; t[,\ ]t; +\infty[.$$

Cas $t < \dfrac{3}{2}$:

On a $P_t(-t) < 0$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie, P_t admet un zéro et un seul, et celui-ci est un zéro simple de P_t.

Ainsi, P_t n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc, $A(t)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Le zéro de P_t est un zéro simple de P_t car P_t' ne s'annule pas en ce point.

Cas : $t = \dfrac{3}{2}$:

On a $P_t(-t) = 0$, donc P_t admet $-t$ pour zéro double et P_t admet un autre zéro simple.

Déterminons $\mathrm{SEP}\big(A(t), -t\big)$.

Ici, $t = \dfrac{3}{2}$.

On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$A(t)X = -tX \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3t^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 3t^2 z = -tx \\ x = -ty \\ x + y = -tz \end{cases} \iff \begin{cases} z = -\dfrac{1}{3t}x \\ y = -\dfrac{1}{t}x \\ \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)x = \dfrac{1}{3}x. \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\dfrac{2}{3}x \\ z = -\dfrac{2}{9}x. \end{cases}$$

Ceci montre : $\dim \mathrm{SEP}\big(A(t), -t\big) = 1 \neq 2$, et on conclut que $A(t)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Finalement, l'ensemble des $t \in]0; +\infty[$ tels que $A(t)$ soit diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ est $\left]\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$.

Exercice-type résolu 3

Exemple de résolution d'une équation matricielle

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$ ayant n valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ deux à deux distinctes, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ telle que $A = PDP^{-1}$.

1) Montrer : $\{M \in \mathbf{M}_n(K);\ AM = MA\} = \{PNP^{-1};\ N \in \mathbf{D}_n(K)\}$.

2) Soient $Q \in K[X]$, $M \in \mathbf{M}_n(K)$ telle que $Q(M) = A$. Montrer : $P^{-1}MP \in \mathbf{D}_n(K)$.

b) Exemple : Résoudre l'équation

$$(1) \qquad X^2 + X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

d'inconnue $X \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution

a) D'abord, puisque $A \in \mathbf{M}_n(K)$ et que A admet n valeurs propres deux à deux distinctes, A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(K)$, d'où l'existence de $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ telle que $A = PDP^{-1}$.

1) Soit $M \in \mathbf{M}_n(K)$.

Notons $N = P^{-1}MP$, de sorte que $M = PNP^{-1}$.

On a :

$$AM = MA \iff PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \iff DN = ND.$$

Notons $N = (n_{ij})_{ij}$.

On a : $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = (\delta_{ij}\lambda_i)_{ij}$. D'où :

$$\begin{aligned} DN = ND &\iff \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\lambda_k n_{kj} = \sum_{k=1}^{n} n_{ik}\delta_{kj}\lambda_j \\ &\iff \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ \lambda_i n_{ij} = n_{ij}\lambda_j \\ &\iff \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ (\lambda_i - \lambda_j)n_{ij} = 0 \\ &\iff \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ \big(i \neq j \implies n_{ij} = 0\big) \\ &\iff N \in \mathbf{D}_n(K). \end{aligned}$$

Ceci montre :

$$\{M \in \mathbf{M}_n(K);\ AM = MA\} = \{PNP^{-1};\ N \in \mathbf{D}_n(K)\}.$$

2) On a : $AM = Q(M)M = MQ(M) = MA$, donc, d'après *a)*, il existe $N \in \mathbf{D}_n(K)$ telle que $M = PNP^{-1}$, ce qui montre $P^{-1}MP \in \mathbf{D}_n(K)$.

b) Notons $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

On forme le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (5-\lambda)(3-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 12 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 6). \end{aligned}$$

Il en résulte que A admet deux valeurs propres distinctes, donc, d'après *a)2)*, toute solution de (1) est diagonalisable dans une même base de diagonalisation de A.

On détermine les sous-espaces propres de A.

Conseils

Condition suffisante de diagonalisabilité, cf. § 3.3 Cor. p. 89.

Lorsqu'une matrice diagonale intervient, on passe aux éléments.

δ_{ij} est le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont supposés deux à deux distincts.

On a ainsi déterminé le **commutant** de A dans $\mathbf{M}_n(K)$.

Les polynômes en M commutent entre eux.

Solution

Conseils

•

$$V=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in \mathrm{SEP}\,(A,2)\iff AV=2V\iff \begin{pmatrix}5&3\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases}5x+3y=2x\\ x+3y=2y\end{cases}\iff x+y=0,$$

donc $\mathrm{SEP}\,(A,2)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, de dimension 1.

•

$$V=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in \mathrm{SEP}\,(A,6)\iff AV=6V\iff \begin{pmatrix}5&3\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases}5x+3y=6x\\ x+3y=6y\end{cases}\iff x=3y,$$

donc $\mathrm{SEP}\,(A,6)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, de dimension 1.

On a donc $A=PDP^{-1}$, en notant $P=\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&6\end{pmatrix}$.

On calcule P^{-1} :

$$\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\iff \left\{\begin{array}{l|c|c}x+3y=u&1&1\\ -x+y=v&1&-3\end{array}\right.$$
$$\iff \begin{cases}4y=u+v\\ 4x=u-3v\end{cases}\iff \begin{cases}x=\dfrac{1}{4}(u-3v)\\[2mm] y=\dfrac{1}{4}(u+v),\end{cases}$$

d'où : $P^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}$.

On peut contrôler $PP^{-1}=\mathrm{I}_2$.

Pour toute $X\in\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ solution de (1), il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que, en, notant $Y=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$, on ait : $X=PYP^{-1}$.

D'où :

$$X^2+X=A\iff P(Y^2+Y)P^{-1}=PDP^{-1}\iff Y^2+Y=D$$
$$\iff \begin{cases}\alpha^2+\alpha=2\\ \beta^2+\beta=6\end{cases}\iff \begin{cases}(\alpha=1\quad\text{ou}\quad\alpha=-2)\\ (\beta=2\quad\text{ou}\quad\beta=-3).\end{cases}$$

On conclut que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (1) est $\mathcal{S}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$, où :

$$X_1=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}7&3\\1&5\end{pmatrix}$$
$$X_2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-8&-12\\-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-3\\-1&0\end{pmatrix}$$
$$X_3=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&12\\4&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}$$
$$X_4=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-11&-3\\-1&-9\end{pmatrix}.$$

Les méthodes à retenir

Diagonalisabilité

- **Pour montrer qu'une matrice carrée A est diagonalisable et la diagonaliser, dans un exemple numérique comportant éventuellement des paramètres** (ex. 3.3.1, 3.3.2, 3.3.5), on peut essayer de former le polynôme caractéristique χ_A, en déduire les valeurs propres de A, et, pour chaque valeur propre de A, déterminer une base de SEP(A,λ) ; on aura alors $A = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale des valeurs propres de A, dans un ordre arbitraire, et P est la matrice obtenue en met-tant côte-à-côte les vecteurs d'une base de vecteurs propres de A associés, dans l'ordre, aux valeurs propres. Lors du calcul de χ_A, essayer de factoriser « au maximum ».

  Nous verrons plus loin (§ 4.5.1 p. 164) que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale pour le produit scalaire canonique.

- **Pour étudier la diagonalisabilité d'une matrice carrée A comportant éventuellement des paramètres** (ex. 3.3.3, 3.3.4) et lorsque les valeurs propres et les vecteurs propres sont calculables, on pourra essayer d'appliquer la CNS de diagonalisabilité (p. 88).

  Voir aussi plus loin la rubrique « Les méthodes à retenir » sur les polynômes d'endomorphismes p. 114.

- **Pour déterminer valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée $A \in \mathbf{M}_n(K)$**, dans certains cas, il peut être préférable de résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l} AX = \lambda X \\ X \neq 0 \end{array}\right|, \text{ d'inconnue } (\lambda, X) \in K \times \mathbf{M}_{n,1}(K) \text{ (ex. 3.3.7).}$$

- **Pour résoudre une équation matricielle du type $B^2 = A$, où A est donnée et B inconnue** (ex. 3.3.8), on peut essayer d'utiliser, si c'est possible, une diagonalisation de A, pour se ramener à une équation $C^2 = D$, où D est diagonalisable connue et C inconnue (pas nécessairement diagonale).

- **Pour décider si deux matrices $A, B \in \mathbf{M}_n(K)$ sont semblables ou ne le sont pas** (ex. 3.3.9, 3.3.10), calculer d'abord, si c'est possible, leurs traces, leurs polynômes caractéristiques. D'après le Cours, si $A \sim B$, alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$, $\det(A) = \det(B)$ et $\chi_A = \chi_B$. Ainsi, par contraposition, si $\mathrm{tr}(A) \neq \mathrm{tr}(B)$ ou $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(B)$ ou $\det(A) \neq \det(B)$ ou $\chi_A \neq \chi_B$, alors A et B ne sont pas semblables.

  Si $\chi_A = \chi_B$, on peut espérer que A et B soient semblables et on essaiera de trouver une matrice inversible P, particulièrement simple et suggérée par les expressions de A et B, telle que $PA = BP$.

- **Pour effectuer l'étude simultanée des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice-compagnon A** (ex. 3.3.14), partir du système $\left\{\begin{array}{l} AX = \lambda X \\ X \neq 0 \end{array}\right|$.

- **Pour étudier le du commutant $C(A)$ d'une matrice $A \in \mathbf{M}_n(K)$**, défini par :

$$C(A) = \{B \in \mathbf{M}_n(K);\ AB = BA\},$$

  lorsque A est diagonale, ou plus généralement diagonalisable (ex. 3.3.21), essayer de se ramener à des calculs sur des matrices décomposées en blocs.

- La recherche des sev stables par un endomorphisme est une étude fréquente (ex. 3.3.24 ; cf. aussi plus loin ex. 3.4.5). Déjà, les droites vectorielles stables par $f \in \mathcal{L}(E)$ sont les droites vectorielles engendrées par les vecteurs propres de f. On pourra remarquer que, si deux plans vectoriels sont stables par f, alors leur intersection l'est aussi. Cf. aussi l'exercice 3.5.11 plus loin.

Exercices

3.3.1 Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables et les diagonaliser :

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$

b) $\begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$

c) $\begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -a-1 & a & a+1 \\ -a & a & a+1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}.$

3.3.2 Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$,

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R}).$$

a) Montrer : $\quad A\,{}^{t}\!A = (a^2+b^2+c^2+d^2)\mathrm{I}_4.$

b) En déduire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_A(\lambda) = \left((a-\lambda)^2+b^2+c^2+d^2\right)^2.$$

c) Dans $\mathbb{C}$, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A et montrer que A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_4(\mathbb{C})$.

3.3.3 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ b & \ddots & a & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & a \\ b & \cdots & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}).$$

a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

b) CNS sur (n,a,b) pour que A soit diagonalisable.

3.3.4 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1,2\}$,

$$\alpha, a_2,\ldots,a_n,b_2,\ldots b_n \in \mathbb{C},\ A = \begin{pmatrix} \alpha & b_2 & \ldots & b_n \\ a_2 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ a_n & & & \end{pmatrix}.$$

CNS pour que A soit diagonalisable ?

3.3.5 Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables et les diagonaliser :

a) $\begin{pmatrix} 1 & & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & {}_n & 0 & & {}_n \\ 1 & & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & {}_n & 0 & & {}_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n}(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N}^*$

b) $\begin{pmatrix} a & & & 0 & & & b \\ & \ddots & & & & ⋰ & \\ & & a & 0 & b & & \\ 0 & & 0 & a+b & 0 & & 0 \\ & & b & 0 & a & & \\ & ⋰ & & & & \ddots & \\ b & & & 0 & & & a \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$

$(a,b) \in \mathbb{C}^2,\ n \in \mathbb{N}^*.$

3.3.6 Soient $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 3$, et $\alpha, p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p^2 - 4q > 0$. On note :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -q & & & 0 \\ n-1 & \alpha-p & -2q & & \\ & n-2 & \alpha-2p & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -(n-1)q \\ 0 & & & 1 & \alpha-(n-1)p \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres (on pourra considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ dont la matrice, dans la base canonique, est A).

3.3.7 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}).$$

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

b) CNS pour que A soit diagonalisable.

c) On note U_n le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev de $2^{\text{ème}}$ espèce (cf. Analyse PCSI-PTSI, 3.5.1), défini par :

$$\forall t \in]-1;1[,\quad U_n(t) = \frac{\sin((n+1)\mathrm{Arccos}\,t)}{\sin(\mathrm{Arccos}\,t)}.$$

Lorsque $bc \neq 0$, exprimer χ_A en fonction de U_n.

3.3.8 Trouver toutes les matrices B de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$B^2 = A \text{ et } \mathrm{tr}(B) = 0, \text{ où } \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.3.9 Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ sont-elles semblables ?

3.3.10 Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ sont-elles semblables ?

3.3.11 Soient $a \in K$, $n \in \mathbb{N}^*$, f l'endomorphisme de $K_n[X]$ défini par : $\forall P \in K_n[X]$,

$$f(P) = (X - a)(P' - P'(a)) - 2(P - P(a)).$$

Déterminer valeurs propres, vecteurs propres, noyau, image de f ; f est-il diagonalisable ?

3.3.12 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $H \in \mathbf{M}_n(K)$ telle que $\mathrm{rg}(H) = 1$.

a) Montrer que H est diagonalisable si et seulement si :

$$\mathrm{tr}(H) \neq 0.$$

b) Établir :

α) Si H est diagonalisable, alors

$$H \sim \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \mathrm{tr}(H) \end{pmatrix}$$

β) Si H n'est pas diagonalisable, alors

$$H \sim \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(On pourra utiliser la relation $H^2 = \mathrm{tr}(H)H$, cf. Algèbre PCSI-PTSI, ex. 8.1.30 *b)*).

c) En déduire que, pour toutes matrices H_1, H_2 de $\mathbf{M}_n(K)$ de rang 1, on a :

$$H_1 \sim H_2 \iff \mathrm{tr}(H_1) = \mathrm{tr}(H_2).$$

3.3.13 Soient $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A,B \in \mathbf{M}_n(K), \qquad \varphi : \begin{array}{rcl} \mathbf{M}_n(K) & \longrightarrow & \mathbf{M}_n(K) \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(AM)B \end{array}.$$

CNS sur (A,B) pour que φ soit diagonalisable ? (Utiliser l'exercice 3.3.12 *a)*).

3.3.14 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in K^n$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ a_0 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$$

(cf. exercice 3.2.11 p. 85).

Démontrer que A est diagonalisable si et seulement si le polynôme $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est scindé sur K et à zéros tous simples.

3.3.15 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A,B \in \mathbf{M}_n(K)$.

Démontrer :

$$A \sim B \Longrightarrow \mathrm{com}(A) \sim \mathrm{com}(B).$$

(Utiliser l'ex. 2.9.1.

Pour le cas $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 1$, utiliser les exercices 3.2.3 p. 85 et 3.3.12 *c)*).

3.3.16 Établir que tout endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul.

3.3.17 Déterminer l'ensemble des $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels qu'il existe $(A,B) \in \big(\mathbf{M}_2(\mathbb{R})\big)^2$ tel que :

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -3 & b \end{pmatrix}.$$

3.3.18 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A,B \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que AB soit diagonalisable.

a) Montrer que, si A ou B est inversible, alors BA est diagonalisable.

b) Le résultat précédent est-il valable sans l'hypothèse d'inversibilité ?

3.3.19 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'on peut décomposer A en la somme de deux matrices diagonalisables.

3.3.20 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathbf{M}_n(K)$ diagonalisable, $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$M^k A = 0 \iff MA = 0.$$

3.3.21 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$ diagonalisable, $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ les valeurs propres (deux à deux distinctes) de A, ω_k l'ordre de multiplicité de λ_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$, $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ une matrice inversible telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{\omega_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \mathrm{I}_{\omega_p} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

a) Déterminer le commutant $C(A)$ de A, c'est-à-dire

$$C(A) = \{B \in \mathbf{M}_n(K);\ AB = BA\}.$$

b) Vérifier que $C(A)$ est un K-ev, et calculer sa dimension. Si $n = 5$, peut-on avoir $\dim(C(A)) = 10$?

c) Montrer : $\quad \dim(C(A)) = n \iff p = n.$

3.3.22 Soit $n \in \mathbb{N}^*$; pour $A \in \mathbf{M}_n(K)$, on note $C_A = \{M \in \mathbf{M}_n(K);\ M \sim A \text{ et } AM = MA\}$.

a) Soient $A,B \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que $A \sim B$. Montrer qu'il existe une bijection de C_A dans C_B.

b) En déduire que, si $A \in \mathbf{M}_n(K)$ admet n vp deux à deux distinctes, alors C_A est fini et $\mathrm{Card}(C_A) = n!$.

3.3.23 Soient $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$n = p + q$, $A \in \mathbf{M}_p(K)$, $B \in \mathbf{M}_q(K)$, $C \in \mathbf{M}_{p,q}(K)$,

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K).$$

On suppose A et B diagonalisables et

$$\mathrm{Sp}_K(A) \cap \mathrm{Sp}_K(B) = \varnothing.$$

Démontrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et est diagonalisable.

3.3.24 Trouver les sev de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3.25 Soient E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $f,g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $\begin{cases} f \circ g - g \circ f = \alpha f \\ g \text{ est diagonalisable} \end{cases}$.

a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n \circ g - g \circ f^n = n\alpha f^n.$$

b) En déduire que f est nilpotent.

3.3.26 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que χ_A soit scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

3.4 Trigonalisation

Dans ce § 3.4, E désigne un K-ev de dimension finie n, $n \geqslant 1$.

Définition

C'est une généralisation de la notion de diagonalisabilité.

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **trigonalisable** si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire.

2) Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$. On dit que A est **trigonalisable** si et seulement s'il existe une matrice triangulaire T de $\mathbf{M}_n(K)$ semblable à A.

Si $A \in \mathbf{M}_n(K)$ est trigonalisable, on appelle **trigonalisation** de A la donnée de P, T (et P^{-1}) telles que : $P \in \mathbf{GL}_n(K)$, $T \in \mathbf{T}_{n,\mathrm{s}}(K)$ (ou $\mathbf{T}_{n,\mathrm{i}}(K)$), $A = PTP^{-1}$.
Trigonaliser A, c'est déterminer P,T, (et P^{-1}) convenant.

Au lieu de « trigonalisable », on dit aussi : **triangulable**, ou : **triangularisable**, ou : **réductible à la forme triangulaire**.

Remarques :

1) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}_0$ une base de E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$. Alors f est trigonalisable si et seulement si A est trigonalisable.

2) Toute matrice triangulaire est trigonalisable.

Cette matrice de passage P « renverse » l'ordre des éléments de la base canonique.

3) Toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure, et réciproquement. En effet, si $T = (t_{ij}) \in \mathbf{T}_{n,\mathrm{i}}(K)$, en notant $P = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \diagup & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$, on a

Effectuer le produit PTP^{-1}.

$$P \in \mathbf{GL}_n(K),\ P^{-1} = P \text{ et } PTP^{-1} = \begin{pmatrix} t_{n\,n} & t_{n\,n-1} & \cdots & t_{n\,1} \\ & \ddots & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & t_{11} \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,\mathrm{s}}(K).$$

Donc, pour qu'une matrice A de $\mathbf{M}_n(K)$ soit semblable à une matrice triangulaire inférieure, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice triangulaire supérieure. Dans la suite de ce cours, nous privilégierons, conformément à l'usage, les matrices triangulaires supérieures.

4) Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable, alors les éléments diagonaux d'une matrice triangulaire représentant f sont les valeurs propres de f, écrites sur cette diagonale autant de fois que l'indiquent leurs ordres de multiplicité (cf. par exemple, (i) $\Longrightarrow$ (ii) du Th. ci-dessous).

Théorème

1) Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est trigonalisable

(ii) χ_A est scindé sur K.

2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est trigonalisable

(ii) χ_f est scindé sur K.

Preuve

Cette preuve n'est pas au programme. Cependant, la démarche (récurrence sur n et utilisation de blocs) intervient dans des exercices.

1) **(i) $\Longrightarrow$ (ii) :**

Supposons A trigonalisable. Il existe $T = \begin{pmatrix} t_{11} & & \cdots \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,s}(K)$ telle que $A \sim T$. Alors :

$\forall \lambda \in K, \chi_A(\lambda) = \chi_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(t_{ii} - \lambda)$, donc χ_A est scindé sur K.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :
Récurrence sur n.
La propriété est triviale pour $n = 1$.
Supposons-la vraie pour un n de $\mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathbf{M}_{n+1}(K)$ telle que χ_A soit scindé sur K. Alors A admet au moins une vp λ_1 et un $\overrightarrow{\text{vp}}$ associé V_1 ($V_1 \in \mathbf{M}_{n+1,1}(K)$), et donc il existe $L \in \mathbf{M}_{1,n}(K)$, $A_2 \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

Utilisation d'un changement de base, la nouvelle base commençant par V_1.

On a : $\forall \lambda \in K, \ \chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & L \\ 0 & A_2 - \lambda \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)\chi_{A_2}(\lambda)$.

Comme χ_A est scindé sur K, il en résulte que χ_{A_2} est scindé sur K. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $Q \in \mathbf{GL}_n(K)$, $T \in \mathbf{T}_{n,s}(K)$ telles que $A_2 = QTQ^{-1}$.

Plus généralement, tout polynôme qui divise un polynôme scindé est lui-même scindé.

Notons $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(K)$, qui est inversible et d'inverse $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.

Montrons qu'il existe $X \in \mathbf{M}_{1,n}(K)$ telle qu'en notant $T_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & X \\ 0 & T \end{pmatrix}$, on ait

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = RT_1R^{-1}.$$

On a : $RT_1R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & X \\ 0 & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & XQ^{-1} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

Effectuer le produit de trois matrices.

Il suffit donc de choisir $X = LQ$ pour obtenir $\begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = RT_1R^{-1}$.

Ceci montre $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & X \\ 0 & T \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n+1,s}(K)$, donc A est trigonalisable.

2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le K-ev E admet au moins une base $\mathcal{B}$ et on a, en utilisant *1)* et en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$:

$$(f \text{ trigonalisable}) \iff (A \text{ trigonalisable}) \iff (\chi_A \text{ scindé}) \iff (\chi_f \text{ scindé}).$$

■

Résultat utile en pratique.

Corollaire

1) Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie $\geqslant 1$. Tout endomorphisme de E est trigonalisable.

2) Toute matrice carrée de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ $(n \geqslant 1)$ est trigonalisable.

Cf. Algèbre PCSI-PTSI, 5.3.4 Th.

Preuve

D'après le théorème de d'Alembert, χ_f (ou χ_A) est scindé sur $\mathbb{C}$, donc (théorème précédent) f (ou A) est trigonalisable. ■

Exemples de trigonalisation de matrices carrées d'ordre $\leqslant 3$

Soit $A \in \mathbf{M}_3(K)$. Si χ_A est scindé sur K, alors A est **trigonalisable**, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_3(K)$ et $T \in \mathbf{T}_{3,s}(K)$ telles que $A = PTP^{-1}$. Nous allons, sur des exemples, montrer comment trouver un tel couple (P,T).
Supposons A non diagonalisable et χ_A scindé sur K. Alors :
• ou bien A admet une vp double λ_1 et une vp simple λ_2
• ou bien A admet une vp triple λ_1.
Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{3,1}(K)$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{M}_{3,1}(K)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = A$.

Exemple 1 :

Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Formons le polynôme caractéristique de A :

Après développement.

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -17 & 25 \\ 2 & -9-\lambda & 16 \\ 1 & -5 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \\ &= -(\lambda-2)^2(\lambda-1).\end{aligned}$$

Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et les vp de A sont 2 (double) et 1 (simple).

$$\bullet\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(A,2) \iff \begin{cases} 3x - 17y + 25z = 0 \\ 2x - 11y + 16z = 0 \\ x - 5y + 7z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5y - 7z \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \end{cases}.$$

Donc $\mathrm{SEP}(A,2)$ est de dimension 1 et admet pour base (V_1) où $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puisque 2 est valeur propre double de A et que $\dim(\mathrm{SEP}(A,2)) = 1$, A n'est pas diagonalisable.

$$\bullet\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(A,1) \iff \begin{cases} 4x - 17y + 25z = 0 \\ 2x - 10y + 16z = 0 \\ x - 5y + 8z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5y - 8z \\ 3y - 7z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x = 11z \\ 3y = 7z \end{cases}.$$

Donc $\mathrm{SEP}(A,1)$ est de dimension 1 et admet pour base (V_3) où $V_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Cherchons un vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de façon que $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ soit une base de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

On cherche V_2 par ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

et que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire supérieure : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & \bullet & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ceci revient à : $\begin{cases} \mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ f(V_2) - 2V_2 \in \mathbb{R}V_1 \end{cases}$.

On a : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f(V_2) - 2V_2) = AV_2 - 2V_2 = \begin{pmatrix} 3x - 17y + 25z \\ 2x - 11y + 16z \\ x - 5y + 7z \end{pmatrix}$.

On écrit que $AV_2 - 2V_2$ est colinéaire à $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où : $\quad AV_2 - 2V_2 \in \mathbb{R}V_1 \iff \begin{cases} 3x - 17y + 25z = 3(x - 5y + 7z) \\ 2x - 11y + 16z = 2(x - 5y + 7z) \end{cases} \iff y = 2z$.

On peut ainsi choisir $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et alors :

$$AV_2 = 2V_2 + V_1.$$

On peut vérifier, par produit de trois matrices, que :
$$A = PTP^{-1}.$$

En notant $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a donc $A = PTP^{-1}$.

La calculette fournit : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exemple 2 :

Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Formons le polynôme caractéristique de A :

Après calculs.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^3.$$

Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et A admet une seule vp, -1, qui est d'ordre 3.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(A,-1) \iff -x + 2y - z = 0.$$

Donc $\mathrm{SEP}(A,-1)$ est de dimension 2 et admet pour base, par exemple, (V_1, V_2) où

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Cherchons $V_3 \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de façon que $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ soit une base de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire supérieure : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \bullet \\ 0 & -1 & \bullet \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $V_3 \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ soit une base de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

Comme $\chi_{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}(\lambda) = \chi_f(\lambda) = -(\lambda+1)^3$, on a nécessairement $\gamma = -1$.

Ce cas est assez simple.

Ainsi, tout V_3 de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, tel que (V_1, V_2, V_3) soit libre, convient.

Choisissons, par exemple, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En notant $P = \mathrm{Pass}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = P^{-1}AP$, T est triangulaire supérieure ; on obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier que : $A = PTP^{-1}$.

On peut montrer qu'on peut choisir $\mathcal{B}$ de façon que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit de la forme : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \bullet \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple 3 :

Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Après calculs.

On obtient : $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^3$.

Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et A admet une seule vp, 2, qui est d'ordre 3.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(A,2) \Longleftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}.$$

Donc $\mathrm{SEP}(A,2)$ est de dimension 1 et admet pour base (V_1), où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cherchons V_2, V_3 pour que $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ soit une base de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire supérieure : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ceci revient à : $\begin{cases} \mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ f(V_2) - 2V_2 \in \mathrm{Vect}\,(V_1) \\ f(V_3) - 2V_3 \in \mathrm{Vect}\,(V_1, V_2). \end{cases}$

On cherche V_2 par ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

En notant $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$f(V_2) - 2V_2 \in \mathrm{Vect}(V_1) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} z \\ x - y \\ -x + y + z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \Longleftrightarrow x - y = z.$$

Choisissons, par exemple, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ensuite, n'importe quel V_3 (tel que (V_1, V_2, V_3) soit libre) convient, par exemple $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Notons $P = \mathrm{Pass}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, et $T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

On peut vérifier que : $A = PTP^{-1}$.

Remarque : On peut montrer (réduction de Jordan, hors programme) que, si χ_A est scindé et si on note $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ (non nécessairement distincts) les zéros de χ_A, alors A est semblable à l'une de matrices suivantes :

- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ si $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ sont deux à deux distincts
- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ si $\lambda_2 = \lambda_1 \neq \lambda_3$
- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Exemple :

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable, et trigonaliser A.

Les colonnes de A sont toutes colinéaires à la 1ère colonne de A, et cette colonne n'est pas nulle, donc : $\mathrm{rg}\,(A) = 1$.

Remarquons $\mathrm{rg}(A) = 1$, d'où (théorème du rang) : $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rg}(A) \geqslant 1$; donc A admet 0 pour vp, et l'ordre de multiplicité de la vp 0 est $\geqslant n-1$, puisque :

$$\dim(\mathrm{SEP}(A,0)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n-1.$$

Il existe donc $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que : $\chi_A = (-1)^n \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \lambda_1)$.

Comme $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + (n-1)\cdot 0 = \lambda_1$ et $\mathrm{tr}(A) = (1-n) + (n-1) = 0$, on déduit $\lambda_1 = 0$.

Ainsi, A admet une vp et une seule, qui est 0, et est d'ordre n ; comme le SEP associé à 0 est de dimension $n-1$, $(\neq n)$, A n'est pas diagonalisable (cf. aussi ex. 3.3.12 p. 97).

Le $\mathrm{SEP}(A,0)$ a pour équation $x_1 + \ldots + x_{n-1} + (1-n)x_n = 0$, donc admet pour base $(V_1,\ldots,V_{n-1})$, où : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\ldots$, $V_{n-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On peut choisir pour V_n n'importe quel vecteur n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}(A)$.

En notant $V_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $V_n \notin \mathrm{Ker}(A)$ (car $AV_n = V_{n-1} \neq 0$), donc $(V_1,\ldots,V_n)$ est une base de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = (V_1,\ldots,V_n)$,

$$P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors : $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$, $A = PTP^{-1}$.

Enfin, la résolution du système $\begin{cases} V_1 = e_1 - e_2 \\ \vdots \\ V_{n-2} = e_1 - e_{n-1} \\ V_{n-1} = e_1 + \ldots + e_n \\ V_n = e_1 \end{cases}$ donne

$$\begin{cases} e_1 = V_n \\ e_2 = -V_1 + V_n \\ \vdots \\ e_{n-1} = -V_{n-2} + V_n \\ e_n = V_1 + \ldots + V_{n-1} - (n-1)V_n \end{cases}, \text{ d'où } \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{pmatrix}$$

Exercices 3.4.1 à 3.4.17.

Exercice-type résolu

Un exemple d'utilisation de la trigonalisation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que χ_A soit scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer :

$$\operatorname{tr}(A^2 + A + \mathrm{I}_n) \geqslant \frac{3n}{4}.$$

Solution

Puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, d'après le Cours, A est trigonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe donc $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ telles que : $A = PTP^{-1}$. On a alors :

$$A^2 + A + \mathrm{I}_n = P(T^2 + T + \mathrm{I}_n)P^{-1}.$$

En notant $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les éléments diagonaux de T, on a donc :

$$\operatorname{tr}(A^2 + A + \mathrm{I}_n) = \operatorname{tr}(T^2 + T + \mathrm{I}_n) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^2 + \lambda_k + 1).$$

On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2 + \lambda + 1 = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4},$$

donc :

$$\operatorname{tr}(A^2 + A + \mathrm{I}_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{4} = \frac{3n}{4}.$$

Conseils

Cf. § 3.4 Th. p. 99.

Deux matrices carrées semblables ont la même trace.

On cherche la borne inférieure de $\lambda^2 + \lambda + 1$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$.

Les méthodes à retenir

Trigonalisation

- **Pour résoudre des exercices sur les matrices nilpotentes**, on pourra utiliser les caractérisations de la nilpotence d'une matrice obtenues dans l'ex. 3.4.1.
- **Pour étudier une question dans un contexte de polynômes de matrices carrées**, penser, même si l'énoncé ne l'indique pas, à la possibilité de faire intervenir une trigonalisation (ex. 3.4.3, 3.4.7 à 3.4.17).

- **Pour résoudre des exercices portant sur la trigonalisation**, penser à utiliser la CNS de trigonalisabilité du Cours (A est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé, th. p. 99) (ex. 3.4.4).
- **Pour déterminer les sev de $\mathbb{R}^3$ stables par un endomorphisme donné f de $\mathbb{R}^3$** (ex. 3.4.5), on pourra commencer par diagonaliser ou trigonaliser f, en passant éventuellement par les nombres complexes. Les droites vectorielles stables par f sont les droites vectorielles engendrées par les vecteurs propres de f. Pour déterminer les plans vectoriels stables par f, on pourra remarquer que, si P_1 et P_2 sont stables par f, alors $P_1 \cap P_2$ est stable par f.
- **Pour montrer que deux polynômes caractéristiques sont égaux**, il suffit de montrer, lorsque le corps K est infini, qu'ils coïncident sauf en un nombre fini de points (souvent liés à des valeurs propres d'une matrice) (ex. 3.4.8).
- **Pour résoudre une question de trigonalisabilité**, on pourra penser à faire un raisonnement par récurrence sur l'ordre d'une matrice (ex. 3.4.13, 3.4.14) ce qui amène souvent à des calculs par blocs.

Exercices

3.4.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :
(i) A est nilpotente
(ii) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$
(iii) $\chi_A = (-1)^n \mathrm{X}^n$
(iv) $A^n = 0$.

3.4.2 Soient E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que, pour tout k de $\{0,\dots,n\}$, il existe un sev de E de dimension k et stable par f.

3.4.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $P \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \mathrm{X})$ le polynôme caractéristique de A.

Montrer $\chi_{P(A)} = \prod_{i=1}^{n}(P(\lambda_i) - \mathrm{X})$, et en déduire :
$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(P(A)) = P(\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)).$$

3.4.4 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_p(K)$, $C \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$, $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Montrer que M est trigonalisable si et seulement si A et B sont trigonalisables. Généraliser à une matrice trigonale par blocs.

3.4.5 Trouver tous les sev de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ est : $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

3.4.6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que, si χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, χ_{A^k} est scindé sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que, si χ_{A^2} est scindé sur $\mathbb{R}$ et à zéros tous $\geqslant 0$, alors χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.
c) Donner un exemple de $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que χ_A ne soit pas scindé sur $\mathbb{R}$ et que χ_{A^3} soit scindé sur $\mathbb{R}$.

3.4.7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ les valeurs propres de A. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont deux à deux distincts
(ii) $\det\Big((\mathrm{tr}(A^{i+j-2}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\Big) \neq 0$.

3.4.8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A,B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$ et B nilpotente. Montrer que $A+B$ et A ont le même polynôme caractéristique ; en particulier :
$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) \quad \text{et} \quad \det(A+B) = \det(A).$$

3.4.9 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un K-ev de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, ν l'indice de f. Montrer :
$$\nu = n \iff \mathrm{rg}(f) = n-1.$$

3.4.10 Soient E un K-ev de dimension finie $\geqslant 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable, F un sev de E stable par f et tel que $F \neq \{0\}$, g l'endomorphisme induit par f sur F. Montrer que g est trigonalisable (utiliser l'ex. 3.2.1 p. 85).

3.4.11 Trigonalisation simultanée
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un K-ev de dimension finie n, I un ensemble non vide, $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables de E et commutant deux à deux.

a) Montrer qu'il existe un vecteur propre commun à tous les f_i (on pourra faire une récurrence sur n).

b) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des f_i sont toutes trigonales supérieures (on pourra faire une récurrence sur n).

3.4.12 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A,B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.
Montrer :
$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A+B) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) + \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B),$$
$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B).$$

(Utiliser l'exercice 3.4.11).

3.4.13 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A,B,C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$AB - BA = C, \quad AC = CA, \quad BC = CB.$$

Montrer que A,B,C sont simultanément trigonalisables, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$, $P^{-1}CP$ soient trigonales supérieures. (On pourra effectuer une récurrence sur n et utiliser l'exercice 3.4.11 *a*)).

3.4.14 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A,B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables. La propriété s'étend-elle au cas de trois matrices ?

3.4.15 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A,B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\rho(A)\rho(B) < 1$, où $\rho(\cdot)$ désigne le rayon spectral :

$$\rho(A) = \operatorname*{Max}_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|.$$

Montrer :

$$\forall C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ AXB - X = C.$$

(Utiliser l'exercice 3.4.12 appliqué aux endomorphismes a,b de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ définis par :

$$a : X \longmapsto AX, \quad b : X \longmapsto XB).$$

3.4.16 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A,B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) $\forall C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = C$

(ii) $\forall X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ (AX = XB \Longrightarrow X = 0)$

(iii) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \varnothing$.

3.4.17 Trigonaliser les matrices suivantes dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.5 Polynômes d'endomorphismes, polynômes de matrices carrées

Dans ce § 3.5, E désigne un K-ev ; on note $e = \mathrm{Id}_E$.

3.5.1 Généralités

Définition-Notation

Soit $P = a_0 + a_1 \mathrm{X} + \ldots + a_N \mathrm{X}^N \in K[\mathrm{X}]$.

1) Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $P(f) = a_0 e + a_1 f + \ldots + a_N f^N$, et $P(f)$ est appelé un **polynôme d'endomorphisme**.

2) Pour $A \in \mathbf{M}_n(K)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, on note $P(A) = a_0 \mathrm{I}_n + a_1 A + \ldots + a_N A^N$, et $P(A)$ est appelé un **polynôme de matrice**.

Autrement dit, pour obtenir $P(f)$ (ou $P(A)$), on remplace la constante 1 par e (ou I_n), X par f (ou A), X^k par f^k (ou A^k) pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Remarques :

1) Ne pas confondre $1(f)$ (qui vaut e) et $\mathrm{X}(f)$ (qui vaut f).

Par exemple : $(2 + 3\mathrm{X})(f) = 2e + 3f$.

2) Soient E un K-ev de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $f \in \mathcal{L}(E)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$; on a alors, d'après Algèbre PCSI-PTSI, 8.1.4 Prop. 1 : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f)) = P(A)$.

Ainsi dans le cadre de la dimension finie, on pourra choisir le point de vue « endomorphisme » ou le point de vue matriciel.

Cette proposition revient à remarquer que les opérations loi externe, addition, multiplication (ou composition) s'effectuent formellement de la même façon sur X et sur f ou A.

Proposition 1

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'application $P \longmapsto P(f)$ est un morphisme d'algèbres unitaires de $K[\mathrm{X}]$ dans $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire :

$$\forall \alpha \in K,\ \forall P,Q \in K[\mathrm{X}],\quad \begin{cases} (\alpha P+Q)(f)=\alpha P(f)+Q(f) \\ (PQ)(f)=P(f)\circ Q(f) \\ 1(f)=e \end{cases}$$

2) Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$. L'application $P \longmapsto P(A)$ est un morphisme d'algèbres unitaires de $K[\mathrm{X}]$ dans $\mathbf{M}_n(K)$, c'est-à-dire :

$$\forall \alpha \in K,\ \forall P,Q \in K[\mathrm{X}],\quad \begin{cases} (\alpha P+Q)(A)=\alpha P(A)+Q(A) \\ (PQ)(A)=P(A)Q(A) \\ 1(A)=\mathrm{I}_n. \end{cases}$$

Preuve

1) Notons $P=\sum_{k=0}^{N} a_k \mathrm{X}^k,\ Q=\sum_{k=0}^{N} b_k \mathrm{X}^k.$

• $(\alpha P+Q)(f)=\left(\sum_{k=0}^{N}(\alpha a_k+b_k)\mathrm{X}^k\right)(f)=\sum_{k=0}^{N}(\alpha a_k+b_k)f^k=\alpha\sum_{k=0}^{N}a_k f^k+\sum_{k=0}^{N}b_k f^k$

$=\alpha P(f)+Q(f).$

• En notant de plus $a_k=b_k=0$ si $k>N$, on a :

$$(PQ)(f)=\left(\sum_{k=0}^{2N}\left(\sum_{i=0}^{k}a_i b_{k-i}\right)\mathrm{X}^k\right)(f)=\sum_{k=0}^{2N}\sum_{i=0}^{k}a_i b_{k-i} f^k=\left(\sum_{i=0}^{N}a_i f^i\right)\circ\left(\sum_{j=0}^{N}b_j f^j\right)$$

$=P(f)\circ Q(f).$

2) Même méthode.

On peut aussi se ramener à *1)* en passant aux matrices. ■

Remarque : Pour $A \in \mathbf{M}_n(K)$ $(n \geqslant 2)$, l'application $\theta : \begin{array}{l} K[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbf{M}_n(K) \\ P \longmapsto P(A) \end{array}$ peut n'être ni injective ni surjective. Par exemple, si $K=\mathbb{R}$ et $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, en remarquant $A^2=\mathrm{I}_2$:

• θ n'est pas injective, car : $\theta(\mathrm{X}^2-1)=(\mathrm{X}^2-1)(A)=A^2-\mathrm{I}_2=0$

• θ n'est pas surjective car : $\mathrm{Im}(\theta)=\mathrm{Vect}\,\{\mathrm{I}_2,A,A^2,\ldots\}=\mathrm{Vect}\,\{\mathrm{I}_2,A\}$ est de dimension 2, alors que $\mathbf{M}_2(K)$ est de dimension 4.

Autrement dit, si $f,\ g, \in \mathcal{L}(E)$ commutent, alors, pour tous polynômes $P,\ Q \in K[X]$:

$P(f)\circ Q(g)=Q(g)\circ P(f).$

En particulier, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et tous $P,\ Q \in K[X]$:

$P(f)\circ Q(f)=Q(f)\circ P(f).$

Proposition 2

1) Si $f,g \in \mathcal{L}(E)$ commutent, alors tout polynôme en f commute avec tout polynôme en g.

2) Si $A,B \in \mathbf{M}_n(K)$ commutent, alors tout polynôme en A commute avec tout polynôme en B.

Preuve

1) Soient $f,g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g\circ f=f\circ g$.

• Montrons, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ g^k\circ f=f\circ g^k$.

La propriété est triviale pour $k=0$ (car $g^0=e$), et vraie pour $k=1$ par hypothèse. Si elle est vraie pour un entier k, alors :

Utilisation de l'hypothèse de récurrence pour k puis pour 1.

$$g^{k+1}\circ f=g\circ(g^k\circ f)=g\circ(f\circ g^k)=(g\circ f)\circ g^k=(f\circ g)\circ g^k=f\circ g^{k+1}.$$

Exercice 3.5.1.

• Il en résulte, par linéarité : $\forall Q \in K[\mathrm{X}], \quad Q(g) \circ f = f \circ Q(g)$.

• Le résultat précédent, appliqué à $(Q(g), f)$ au lieu de (f,g), montre alors :

$$\forall P, Q \in K[\mathrm{X}], \quad Q(g) \circ P(f) = P(f) \circ Q(g).$$

2) Même méthode.

On peut aussi se ramener à *1)* en passant aux matrices.

Exercice-type résolu

Étude du noyau et de l'image d'un polynôme d'endomorphisme

Soient E un K-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$, $P \in K[\mathrm{X}]$. Montrer :

a)

$$P(0) = 0 \implies \begin{cases} \operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}\big(P(f)\big) \\ \operatorname{Im}\big(P(f)\big) \subset \operatorname{Im}(f) \end{cases}$$

b)

$$P(0) \neq 0 \implies \operatorname{Ker}\big(P(f)\big) \subset \operatorname{Im}(f)$$

c)

$$\begin{cases} \operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}\big(P(f)\big) \\ \operatorname{Ker}(f) \neq \{0\} \end{cases} \implies P(0) = 0$$

d)

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\big(P(f)\big) \subset \operatorname{Im}(f) \\ \operatorname{Im}(f) \neq E \end{cases} \implies P(0) = 0.$$

Solution

a) On suppose $P(0) = 0$. Il existe alors $Q \in K[\mathrm{X}]$ tel que : $P = \mathrm{X}Q$.

• On a, pour tout $x \in \operatorname{Ker}(f)$:

$$\big(P(f)\big)(x) = \big(Q(f) \circ f\big)(x) = Q(f)(0) = 0,$$

donc $x \in \operatorname{Ker}\big(P(f)\big)$.

Ceci montre : $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}\big(P(f)\big)$.

• Soit $y \in \operatorname{Im}\big(P(f)\big)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = P(f)(x)$. On a alors :

$$y = P(f)(x) = \big(f \circ Q(f)\big)(x) = f\big(Q(f)(x)\big) \in \operatorname{Im}(f).$$

Ceci montre : $\operatorname{Im}\big(P(f)\big) \subset \operatorname{Im}(f)$.

b) On suppose $P(0) \neq 0$.

Il existe alors $Q \in K[\mathrm{X}]$ tel que : $P = a_0 + \mathrm{X}Q$ et $a_0 \neq 0$.

Soit $x \in \operatorname{Ker}\big(P(f)\big)$. On a alors $P(f)(x) = 0$,

c'est-à-dire $a_0 x + \big(f \circ Q(f)\big)(x) = 0$, d'où, puisque $a_0 \neq 0$:

$$x = -\frac{1}{a_0} f\big(Q(f)(x)\big) = f\left(-\frac{1}{a_0} Q(f)(x)\right) \in \operatorname{Im}(f).$$

Ceci montre : $\operatorname{Ker}\big(P(f)\big) \subset \operatorname{Im}(f)$.

Conseils

On a $P = \mathrm{X}\,Q = Q\mathrm{X}$, donc $P(f) = f \circ Q(f) = Q(f) \circ f$.

On écrit :

$$P = a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_d\mathrm{X}^d$$
$$= a_0 + \mathrm{X}\,(a_1 + \cdots + a_d\mathrm{X}^{d-1}).$$

Solution

c) On suppose : $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}\big(P(f)\big)$ et $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0\}$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons $P(0) \neq 0$.

Il existe alors $a_0 \in K$, $Q \in K[\mathrm{X}]$ tels que : $P = a_0 + \mathrm{X}Q$ et $a_0 \neq 0$.

Puisque $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0\}$, il existe $x \in \operatorname{Ker}(f)$ tel que $x \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned} 0 = P(f)(x) &= a_0 x + \big(Q(f) \circ f\big)(x) = a_0 x + Q(f)\big(f(x)\big) \\ &= a_0 x + Q(f)(0) = a_0 x, \end{aligned}$$

contradiction avec $a_0 \neq 0$ et $x \neq 0$.

Ceci montre : $P(0) = 0$.

d) On suppose : $\operatorname{Im}\big(P(f)\big) \subset \operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Im}(f) \neq E$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons $P(0) \neq 0$.

Il existe alors $a_0 \in K$, $Q \in K[\mathrm{X}]$ tels que : $P = a_0 + \mathrm{X}Q$ et $a_0 \neq 0$.

Puisque $\operatorname{Im}(f) \neq E$, il existe $y \in E$ tel que $y \notin \operatorname{Im}(f)$. En notant $z = P(f)(y)$, on a : $z = a_0 y + \big(f \circ Q(f)\big)(y)$, donc $a_0 y = z - f\big(Q(f)(y)\big)$.

Comme $z \in \operatorname{Im}\big(P(f)\big) \subset \operatorname{Im}(f)$, il s'ensuit $a_0 y \in \operatorname{Im}(f)$, puis $y \in \operatorname{Im}(f)$, contradiction.

Ceci montre : $P(0) = 0$.

Conseils

Comme en *b)*.

$f(x) = 0$ car $x \in \operatorname{Ker}(f)$.

Comme en *b)*.

On a supposé $a_0 \neq 0$.

3.5.2 Polynômes annulateurs

Définition

1) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $P \in K[\mathrm{X}]$. On dit que P **annule** f (ou : P est un **polynôme annulateur** de f) si et seulement si : $P(f) = 0$.

2) Soient $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $P \in K[\mathrm{X}]$. On dit que P **annule** A (ou : P est un **polynôme annulateur** de A) si et seulement si : $P(A) = 0$.

Exemples :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- f est un projecteur si et seulement si $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}$ est annulateur de f.
- f est une symétrie si et seulement si $\mathrm{X}^2 - 1$ est annulateur de f.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$:

f projecteur $\iff f^2 - f = 0$,

f symétrie $\iff f^2 - e = 0$.

Remarques :

1) Soient E un K-ev de dimension finie, $n = \dim(E)$, $f \in \mathcal{L}(E)$. Puisque $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie n^2, la famille $(e, f, f^2, \ldots, f^{n^2})$, qui comporte $n^2 + 1$ éléments, est liée.

Il existe donc $(a_0, \ldots, a_{n^2}) \in K^{n^2+1} - \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que $a_0 e + a_1 f + \ldots + a_{n^2} f^{n^2} = 0$.

En notant $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k \mathrm{X}^k$, on a donc : $P \neq 0$ et $P(f) = 0$.

Ainsi, f admet au moins un polynôme annulateur autre que 0.

2) De même, toute matrice A de $\mathbf{M}_n(K)$ admet au moins un polynôme annulateur autre que 0.

3) Si E n'est pas de dimension finie, il se peut qu'un endomorphisme f de E n'admette que 0 pour polynôme annulateur (cf. exercice 3.5.2 p. 115).

4) Au lieu de « P annule f (ou A) », on dit aussi : « f (ou A) annule P ».

Formules utiles en pratique.

Proposition

1) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_K(f)$, $x \in \mathrm{SEP}(f,\lambda)$. On a alors :

$$\forall P \in K[\mathrm{X}], \quad \big(P(f)\big)(x) = P(\lambda)x.$$

2) Soient $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_K(A)$, $V \in \mathrm{SEP}(A,\lambda)$. On a alors :

$$\forall P \in K[\mathrm{X}], \quad P(A)V = P(\lambda)V.$$

Preuve

Utilisation de l'hypothèse de récurrence pour k puis pour 1.

1) • Montrons, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, f^k(x) = \lambda^k x$. La propriété est triviale pour $k = 0$ (car $f^0 = e$ et $\lambda^0 = 1$), et vraie pour $k = 1$ par hypothèse. Si elle est vraie pour un k de $\mathbb{N}$, alors :

$$f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(\lambda^k x) = \lambda^k f(x) = \lambda^k \lambda x = \lambda^{k+1} x.$$

• On a alors, pour tout $P = \sum_{k=0}^{N} a_k \mathrm{X}^k$ de $K[\mathrm{X}]$:

$$(P(f))(x) = \left(\sum_{k=0}^{N} a_k f^k\right)(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k f^k(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k x = P(\lambda)x.$$

2) Même méthode.

On peut aussi se ramener à *1)* en passant aux matrices. ■

Autrement dit, toute vp de f (resp. A) est zéro de tout polynôme annulateur de f (resp. A).

Corollaire

1) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, P un polynôme annulateur de f.

On a alors : $\mathrm{Sp}_K(f) \subset P^{-1}(\{0\})$.

2) Soient $A \in \mathbf{M}_n(K)$, P un polynôme annulateur de A.

On a alors : $\mathrm{Sp}_K(A) \subset P^{-1}(\{0\})$.

Preuve

1) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_K(f)$; on a : $P(\lambda)x = (P(f))(x) = 0(x) = 0$,

donc $P(\lambda) = 0$, puisque $x \neq 0$.

2) Analogue. ■

Un zéro d'un polynôme annulateur de f n'est pas nécessairement une valeur propre de f.

Remarque : Les inclusions précédentes peuvent ne pas être des égalités, comme le montre l'exemple :

$$K = \mathbb{R}, A = 0, P = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1).$$

Théorème important, surtout dans le sens suivant : si f admet un polynôme annulateur scindé simple, alors f est diagonalisable.

On peut abréger « scindé et à zéros simples » en : **scindé simple**.

Théorème

1) Soient E un K-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour que f soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il existe $P \in K[\mathrm{X}]$ scindé sur K et à zéros simples, tel que $P(f) = 0$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(K)$. Pour que A soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il existe $P \in K[\mathrm{X}]$ scindé sur K et à zéros simples, tel que $P(A) = 0$.

Preuve

1) a) Supposons que f soit diagonalisable.

Notons $N = \mathrm{Card}(\mathrm{Sp}_K(f))$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ les éléments de $\mathrm{Sp}_K(f)$ (ainsi, $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ sont deux à deux distincts).

Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \mathrm{I}_{d_N} \end{pmatrix}, \text{ où : } \quad \forall k \in \{1,\ldots,N\},\, d_k = \dim(\mathrm{SEP}(f,\lambda_k)).$$

Considérons $P = \prod_{k=1}^{N} (\mathrm{X} - \lambda_k)$, qui est scindé simple. On a :

$$P(A) = \prod_{k=1}^{N} (A - \lambda_k \mathrm{I}_n) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & (\lambda_2 - \lambda_1)\mathrm{I}_{d_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & (\lambda_N - \lambda_1)\mathrm{I}_{d_N} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda_N)\mathrm{I}_{d_1} & & & \\ & (\lambda_2 - \lambda_N)\mathrm{I}_{d_2} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi, il existe $P \in K[\mathrm{X}]$ scindé simple et annulateur de f.

b) Réciproquement, supposons qu'il existe $P \in K[\mathrm{X}]$ scindé simple tel que $P(f) = 0$.

Il existe donc $\alpha \in K - \{0\}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in K$ deux à deux distincts, tels que

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X} - \lambda_k).$$

Considérons, pour $k \in \{1,\ldots,p\}$, $A_k = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq k}} (\mathrm{X} - \lambda_j)$. Comme $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ sont deux à deux distincts, on a :

$$\forall k \in \{1,\ldots,p\}, \quad A_k(\lambda_k) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq k}} (\lambda_k - \lambda_j) \neq 0.$$

Notons, pour $k \in \{1,\ldots,p\}$: $\quad u_k = \dfrac{1}{A_k(\lambda_k)} \in K$.

Le polynôme $1 - \sum_{k=1}^{p} u_k A_k$ est de degré $\leqslant p - 1$ et s'annule en $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ car :

$$\forall j \in \{1,\ldots,p\}, \quad \left(\sum_{k=1}^{p} u_k A_k\right)(\lambda_j) = u_j A_j(\lambda_j) = 1.$$

Variante : utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange en les $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

Ceci montre : $\sum_{k=1}^{p} u_k A_k = 1$.

En passant aux endomorphismes, on obtient : $\quad e = 1(f) = \sum_{k=1}^{p} u_k A_k(f)$.

Soit $x \in E$; on a :

$$x = e(x) = \left(\sum_{k=1}^{p} u_k A_k(f)\right)(x) = \sum_{k=1}^{p} u_k (A_k(f))(x).$$

Notons, pour $k \in \{1,\ldots,p\}$: $\quad x_k = u_k \Big(A_k(f)\Big)(x)$.

On a alors $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$ et, pour tout k de $\{1,\ldots,p\}$:

$$\begin{aligned} (f - \lambda_k e)(x_k) &= (\mathrm{X} - \lambda_k)(f)\Big(u_k(A_k(f))\Big)(x) = (u_k(\mathrm{X} - \lambda_k)A_k)(f)(x) \\ &= (\alpha^{-1} u_k P)(f)(x) = 0(x) = 0. \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$, $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_k e)$ est égal à $\mathrm{SEP}\,(f,\lambda_k)$ (si λ_k est valeur propre de f) ou à $\{0\}$ (si λ_k n'est pas valeur propre de f).

Ainsi : $\forall k \in \{1,\dots,p\},\quad x_k \in \mathrm{Ker}(f-\lambda_k e)$.

On en déduit : $E = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f-\lambda_k e)$.

On a vu (cf. Cor. *1)* p. 110) : $\mathrm{Sp}_K(f) \subset \{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$; d'autre part, par définition, pour tout k de $\{1,\dots,p\}$ tel que $\lambda_k \notin \mathrm{Sp}_K(f)$, on a : $\mathrm{Ker}(f-\lambda_k e) = \{0\}$.

Donc $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}_K(f)} \mathrm{SEP}(f,\lambda) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f-\lambda_k e) = E$,

et par suite (cf. 3.3 Prop. p. 87), f est diagonalisable.

2) Se déduit de *1)* en passant aux matrices. ■

Remarque : D'après le théorème précédent et le point *1)* de sa preuve, $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si f annule le polynôme $\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}_K(f)} (\mathrm{X}-\lambda)$.

Exemples :

Pour tout $p \in \mathcal{L}(E)$:

p projecteur $\iff p^2 = p$.

Pour tout $s \in \mathcal{L}(E)$:

s symétrie $\iff s^2 = e$.

1) Soit E un K-ev de dimension finie. Tout projecteur p de E est diagonalisable, puisque p annule le polynôme $\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)$, qui est scindé simple.

2) Soit E un $\mathbb{K}$-ev (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie. Toute symétrie s de E est diagonalisable, puisque s annule le polynôme $(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)$, qui est scindé simple.

3) Soit $A \in \mathbf{M}_{10}(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 7A - 6\,\mathrm{I}_{10}$.

Le polynôme $\mathrm{X}^3 - 7\mathrm{X} + 6 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}+3)$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est scindé simple et annulateur de A, donc A est diagonalisable.

4) Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{B}_0 = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, f l'endomorphisme de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de matrice A par rapport à $\mathcal{B}_0$. Puisque $f(e_1) = e_n,\ f(e_2) = e_1,\dots,f(e_n) = e_{n-1}$, il est clair que : $f^n = \mathrm{Id}_{\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, et donc $A^n = \mathrm{I}_n$. Ainsi, A annule le polynôme $\mathrm{X}^n - 1$, qui est scindé simple (ses zéros sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de 1), donc A est diagonalisable.

Remarques :

1) Soient $A \in \mathbf{M}_n(K)$, P un polynôme annulateur de A tel que $P \neq 0$. On ne peut pas affirmer que χ_A divise P, ni que P divise χ_A. Par exemple, si $A = \mathrm{I}_n$ $(n \geqslant 2)$, alors $\chi_A = (-1)^n(\mathrm{X}-1)^n$ et, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $(\mathrm{X}-1)^k$ est annulateur de A.

2) D'après le théorème de Cayley-Hamilton (cf. plus loin 3.5.3 Th. p. 116) :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K),\ \chi_A(A) = 0.$$

Autrement dit, χ_A est annulateur de A.

Exercices 3.5.2 à 3.5.14.

Exercice-type résolu 1

Diagonalisabilité d'un endomorphisme d'un espace de matrices

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A,B \in \mathbf{M}_n(K)$ telles que $\mathrm{tr}\,(AB) \neq 0$. On considère l'application

$$f : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow \mathbf{M}_n(K),\quad M \longmapsto f(M) = \mathrm{tr}\,(AM)B.$$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(K)$.

b) Démontrer que f est diagonalisable.

Solution

a) L'application f va de $\mathbf{M}_n(K)$ dans $\mathbf{M}_n(K)$ et est linéaire car, pour tous $\alpha \in K$, $M, N \in \mathbf{M}_n(K)$:

$$f(\alpha M + N) = \operatorname{tr}\big(A(\alpha M + N)\big)B = \operatorname{tr}(\alpha AM + AN)B$$
$$= (\alpha \operatorname{tr}(AM) + \operatorname{tr}(AN))B = \alpha \operatorname{tr}(AM)B + \operatorname{tr}(AN)B = \alpha f(M) + f(N).$$

b) On a, pour toute $M \in \mathbf{M}_n(K)$:

$$(f \circ f)(M) = \operatorname{tr}(Af(M))B = \operatorname{tr}(A(\operatorname{tr}(AM)B))B$$
$$= \operatorname{tr}(AM)\operatorname{tr}(AB)B = \operatorname{tr}(AB)\big(\operatorname{tr}(AM)B\big) = \operatorname{tr}(AB)f(M),$$

donc : $f \circ f = \operatorname{tr}(AB)f$.

Ceci montre que le polynôme $P = \mathrm{X}^2 - \operatorname{tr}(AB)X$ est annulateur de f. Comme $P = \mathrm{X}\big(\mathrm{X} - \operatorname{tr}(AB)\big)$ et que $\operatorname{tr}(AB) \neq 0$, P est scindé simple sur K.

D'après le Cours, puisque f admet au moins un polynôme annulateur scindé simple, f est diagonalisable.

Conseils

Linéarité de la trace.

On va former un polynôme annulateur de f. À cet effet, on commence par calculer f^2, c'est-à-dire $f \circ f$.

§ 3.5.2 Théorème p. 110.

Exercice-type résolu 2

Obtention de résultats portant sur $\det(A)$ à partir d'une équation satisfaite par A

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^3 + A^2 + \mathrm{I}_n = 0$. Démontrer :

$$0{,}8^n \leqslant |\det(A)| \leqslant 1{,}5^n.$$

Solution

Notons $P = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + 1 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, qui est annulateur de A.

Étudions les zéros de P.

L'application P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $P' = 3\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} = \mathrm{X}(3\mathrm{X} + 2)$, d'où le tableau des variations de P :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	>0	$\searrow$	>0	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\quad P\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} + 1 > 0 \quad$ et $\quad P(0) = 1 > 0.$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de P par intervalles, on conclut que P admet un zéro réel et un seul, noté α, et que $\alpha < -\frac{2}{3}$.

Comme $\deg(P) = 3$, P admet aussi deux zéros complexes conjugués non réels, notés $\beta, \overline{\beta}$.

Puisque $\alpha, \beta, \overline{\beta}$ sont deux à deux distincts, P est scindé simple dans $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ et : $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\alpha, \beta, \overline{\beta}\}$.

Conseils

Penser à faire intervenir la notion de polynôme annulateur.

On peut aussi remarquer :

$$P\left(-\frac{2}{3}\right) > P(0) > 0.$$

Cf. § 3.5.2, Théorème p. 110.

Solution

Puisque le polynôme caractéristique de A est à coefficients réels, il existe $p,q \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\mathrm{X}-\alpha)^p(\mathrm{X}-\beta)^q(\mathrm{X}-\overline{\beta})^q.$$

Ainsi, A est semblable, dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, à la matrice diagonale :

$$D = \mathrm{diag}\,(\underbrace{\alpha,\ldots,\alpha}_{p \text{ fois}},\underbrace{\beta,\ldots,\beta}_{q \text{ fois}},\underbrace{\overline{\beta},\ldots,\overline{\beta}}_{q \text{ fois}}).$$

On a : $n = \deg(\chi_A) = p + 2q$, et :

$$|\det(A)| = |\det(D)| = |\alpha^p\beta^q\overline{\beta}^q| = |\alpha|^p|\beta\overline{\beta}|^q.$$

D'après les relations entre coefficients et racines, on a : $\alpha\beta\overline{\beta} = -1$,

donc $\beta\overline{\beta} = -\dfrac{1}{\alpha}$. D'où : $|\det(A)| = \alpha^p\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|^q = |\alpha|^{p-q}$.

On a :

$$\begin{cases} p - q \leqslant n, \text{ car } p \leqslant n \text{ et } q \geqslant 0, \\ p - q \geqslant -\dfrac{n}{2}, \text{ car } p \geqslant 0 \text{ et } 2q \leqslant n. \end{cases}$$

D'autre part : $P(-1{,}5) = -0{,}125 < 0$ et $P(-1{,}4) = 0{,}210 > 0$,

donc : $-1{,}5 \leqslant \alpha \leqslant -1{,}4$, puis $1{,}4 < |\alpha| < 1{,}5$.

On conclut :

$$\begin{cases} |\det(A)| \leqslant 1{,}5^n \\ |\det(A)| \geqslant 1{,}4^{-\frac{n}{2}} = \left(\dfrac{1}{1{,}4}\right)^{\frac{n}{2}} \geqslant 0{,}8^n. \end{cases}$$

Conseils

Le cas $p = 0$ (resp. $q = 0$) correspond au cas où α (resp. β) n'est pas zéro de χ_A. Les ordres de multiplicité de β et $\overline{\beta}$ dans χ_A sont égaux, car $\chi_A \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Avec les notations habituelles :

$$\sigma_3 = -\frac{a_3}{a_0}.$$

Il est clair que $\alpha \neq 0$, puisque $\alpha < -\dfrac{2}{3}$.

Les méthodes à retenir

Polynômes d'endomorphismes, polynômes de matrices carrées

- **Pour manipuler des polynômes d'endomorphismes ou des polynômes de matrices carrées**, il est important d'avoir assimilé les notations, et de les utiliser correctement.

  Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{N} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, alors $P(f) = \sum_{k=0}^{N} a_k f^k$, où $f^0 = \mathrm{Id}_E$, et pour tout $x \in E$, on a $(P(f))(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k f^k(x)$. La notation $(P(f))(x)$ peut être allégée en $P(f)(x)$; mais l'écriture $P(f(x))$ n'a pas de sens.
- **Pour étudier une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ qui annule un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ scindé simple sur $\mathbb{C}$ mais non scindé sur $\mathbb{R}$**, essayer d'utiliser une diagonalisation de A dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, puis de revenir aux réels (ex. 3.5.3).
- **Pour montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie (ou une matrice) est diagonalisable**, d'après le Théorème du § 3.5.2 p. 110, il (faut et il) suffit de trouver un polynôme annulateur de f (ou de A) qui soit scindé simple sur K (ex. 3.5.4, 3.5.8, 3.5.10).
- **Pour obtenir des renseignements, par exemple sur la trace d'une matrice A de $\mathbf{M}_n(K)$ lorsque l'on dispose d'un polynôme annulateur P de A**, penser à utiliser : le spectre de A est inclus dans l'ensemble des zéros de P dans K (ex. 3.5.5 à 3.5.7).

Exercices

3.5.1 Soient E un K-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_K(f)$, $P \in K[X]$.

Montrer : $\begin{cases} P(\lambda) \in \mathrm{Sp}_K\big(P(f)\big) \\ \mathrm{SEP}\big(P(f), P(\lambda)\big) \supset \mathrm{SEP}(f, \lambda). \end{cases}$

3.5.2 Soient E le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$.

Vérifier $f \in \mathcal{L}(E)$ et montrer que le seul polynôme annulateur de f est le polynôme nul.

3.5.3 Soient $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A^3 + A = 0$ et $A \neq 0$. Montrer : $A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.5.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^{\mathrm{t}}A \end{array}$.

Vérifier que f est linéaire.
Déterminer les éléments propres de f ; f est-il diagonalisable ?

3.5.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + \mathrm{I}_n$.
Montrer :

$$\det(A) > 0.$$

3.5.6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A^4 = 7A^3 - 12A^2.$$

Montrer :

$$\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(A) \leqslant 4n.$$

3.5.7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 = A^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(A) = n.$$

Montrer : $A = \mathrm{I}_n$.

3.5.8 Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{N}^*$, $A_i \in \mathbf{M}_{n_i}(K)$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$.

Montrer que $\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $A_1, \ldots, A_N$ sont diagonalisables.

3.5.9 Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{N}^*$,

$$n = \sum_{k=1}^{N} n_k,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in K,$$

$$T_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & \ldots & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n_k,\mathrm{s}}(K) \ (1 \leqslant k \leqslant N),$$

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_N \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,\mathrm{s}}(K).$$

Montrer que T est diagonalisable si et seulement si :

$$\forall k \in \{1, \ldots, N\},\ T_k = \lambda_k \mathrm{I}_{n_k}.$$

(Utiliser l'exercice 3.5.8).

3.5.10 Soient E un K-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, F un sev de E stable par f, f' l'endomorphisme induit par f sur F. Montrer que f' est diagonalisable.

3.5.11 *a)* Soient E un K-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les vp de f deux à deux distinctes, $N_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, F un sev de E.
Montrer que F est stable par f si et seulement s'il existe des sev $N'_1, \ldots, N'_p$ de E tels que :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, p\}, \quad N'_i \subset N_i \\ F = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} N'_i \end{cases}.$$

(Utiliser l'exercice 3.5.10).
En particulier, si les vp de f sont toutes simples, il y a exactement 2^n sev de E stables par f.

b) Exemple : Trouver tous les sev de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.5.12 Diagonalisation simultanée
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un K-ev de dimension finie n, I un ensemble non vide, $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E et commutant deux à deux, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in I^2, \quad f_i \circ f_j = f_j \circ f_i.$$

Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des f_i sont toutes diagonales (on dit que les f_i sont **simultanément diagonalisables**). (On pourra faire une récurrence sur n).
En particulier, si deux matrices diagonalisables commutent, alors elles sont simultanément diagonalisables.

3.5.13 Soient E un K-ev de dimension finie $\geqslant 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ deux à deux distincts tels que :

$$(f - \lambda_1 e) \circ \ldots \circ (f - \lambda_p e) = 0 \ (\text{où } e = \mathrm{Id}_E).$$

Montrer qu'il existe $v_1, \ldots, v_p \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$\forall P \in K[X],\ P(f) = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) v_k.$$

3.5.14 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, $p \in \mathbb{N}^*$, $B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^p = A$. Montrer que A et B sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}),\ \left(P^{-1}AP \in \mathbf{D}_n(\mathbb{C}) \text{ et } P^{-1}BP \in \mathbf{D}_n(\mathbb{C})\right).$$

3.5.15 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, G un sous-groupe fini abélien de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les éléments de G sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire :

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}),\ \forall A \in G,\quad P^{-1}AP \in \mathbf{D}_n(\mathbb{C}).$$

(Utiliser l'exercice 3.5.12).

3.5.3 Théorème de Cayley et Hamilton

Dans ce § 3.5.3, E est supposé de dimension finie n, $n \geqslant 1$.

Autrement dit : le polynôme caractéristique de f (resp. A) annule f (resp. A).

Théorème **Théorème de Cayley et Hamilton**

1) $\forall f \in \mathcal{L}(E),\quad \chi_f(f) = 0$ *2)* $\forall A \in \mathbf{M}_n(K),\quad \chi_A(A) = 0.$

Cette preuve n'est pas exigible.

Preuve

Il est clair que *2)* est la traduction matricielle de *1)*.

L'entier p_x dépend de x.

Soit $x \in E - \{0\}$. La famille $(f^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant n}$, ayant $n+1$ éléments, est liée. Il existe donc un plus grand entier p_x dans $\mathbb{N}^*$ tel que $(x, f(x), \ldots, f^{p_x-1}(x))$ soit libre. Comme $(x, f(x), \ldots, f^{p_x}(x))$ est liée, il existe $(a_0, \ldots, a_{p_x-1}) \in K^{p_x}$ tel que :

$$f^{p_x}(x) = \sum_{k=0}^{p_x-1} a_k f^k(x).$$

Notons $E_f(x) = \mathrm{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{p_x-1}(x))$.

Puisque $f^{p_x}(x)$ se décompose linéairement sur $x, f(x), \ldots, f^{p_x-1}(x)$, il est clair que $E_f(x)$ est stable par f.

Notons g_x l'endomorphisme induit par f sur $E_f(x)$.

La matrice B de g_x dans la base $(x, f(x), \ldots, f^{p_x-1}(x))$ de $E_f(x)$ est : $B = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{p_x-1} \end{pmatrix}$.

On a, pour tout λ de K :

Cf. exercice 3.2.11 p. 85.

$$\chi_{g_x}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & -\lambda & a_{p_x-2} \\ 0 & & 1 & a_{p_x-1} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^{p_x}\left(\lambda^{p_x} - a_{p_x-1}\lambda^{p_x-1} - \ldots - a_1\lambda - a_0\right).$$

D'où : $(\chi_{g_x}(f))(x) = (-1)^{p_x}(f^{p_x}(x) - a_{p_x-1}f^{p_x-1}(x) - \ldots - a_0 x) = 0$.

D'autre part (cf. exercice 3.2.1 p. 85) : $\chi_{g_x} | \chi_f$. Il existe donc $Q_x \in K[X]$ tel que $\chi_f = Q_x \chi_{g_x}$. On a alors : $\chi_f(f) = Q_x(f) \circ \chi_{g_x}(f)$, puis :

$$(\chi_f(f))(x) = Q_x(f)\Big((\chi_{g_x}(f))(x)\Big) = Q_x(f)(0) = 0.$$

Ceci prouve : $\forall x \in E$, $(\chi_f(f))(x) = 0$, c'est-à-dire : $\chi_f(f) = 0$. ■

Exercices 3.5.16 à 3.5.20.

Exercice-type résolu

Un exemple d'utilisation du théorème de Cayley et Hamilton

Soient E un K-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, $r = \mathrm{rg}\,(f)$. Montrer qu'il existe $P \in K[\mathrm{X}]$ tel que :

$$P(f) = 0 \quad \text{et} \quad \deg(P) = r + 1.$$

Solution

Notons $n = \dim(E)$.

1) D'après le théorème du rang : $\dim \mathrm{Ker}\,(f) = n - r$.

Le sev $\mathrm{Ker}\,(f)$ de E admet au moins une base $(e_1,\dots,e_{n-r})$. D'après le théorème de la base incomplète, la famille libre $(e_1,\dots,e_{n-r})$ peut être complétée d'au moins une façon en une base $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E.

La matrice A de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme : $A = \begin{pmatrix} 0 & U \\ 0 & V \end{pmatrix}$,

où $U \in \mathbf{M}_{n-r,r}(K)$, $V \in \mathbf{M}_r(K)$.

2) Montrons, par récurrence sur k :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k = \begin{pmatrix} 0 & UV^{k-1} \\ 0 & V^k \end{pmatrix}.$$

La formule est vraie pour $k = 1$, car $V^0 = \mathrm{I}_r$.
Si la formule est vraie pour un $k \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 0 & UV^{k-1} \\ 0 & V^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & U \\ 0 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & UV^k \\ 0 & V^{k+1} \end{pmatrix},$$

donc la formule est vraie pour $k + 1$.
Ceci établit la formule voulue, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par récurrence sur k.

3) On a alors, pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{N} a_k \mathrm{X}^k \in K[\mathrm{X}]$:

$$AQ(A) = \sum_{k=0}^{N} a_k A^{k+1} = \sum_{k=0}^{N} a_k \begin{pmatrix} 0 & UV^k \\ 0 & V^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sum_{k=0}^{N} a_k UV^k \\ 0 & \sum_{k=0}^{N} a_k V^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & UQ(V) \\ 0 & VQ(V) \end{pmatrix}.$$

4) D'après le théorème de Cayley et Hamilton, $\chi_V(V) = 0$.
En notant $P = \mathrm{X}\chi_V$, on a alors $\deg(P) = 1 + \deg(\chi_V) = r + 1$ et :

$$P(A) = A\chi_V(A) = \begin{pmatrix} 0 & U\chi_V(V) \\ 0 & V\chi_V(V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc P convient.

Conseils

Recherche d'une base de E dans laquelle f soit représenté par une matrice assez simple.

Les images par f des $n - r$ premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ sont toutes nulles, puisque ces vecteurs sont dans $\mathrm{Ker}\,(f)$.

Pour conjecturer la forme de A^k, on peut d'abord calculer A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & U \\ 0 & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & U \\ 0 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & UV \\ 0 & V^2 \end{pmatrix}.$$

Combinaison linéaire par blocs.

Exercices

Les exercices 3.5.16 *et* 3.5.17 *n'utilisent pas le théorème de Cayley et Hamilton.*

3.5.16 Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $n_1,\ldots,n_N \in \mathbb{N}^*$, $A_i \in \mathbf{M}_{n_i}(K)$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$, $P \in K[X]$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N \end{pmatrix}.$$

Montrer : $$P(A) = \begin{pmatrix} P(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(A_N) \end{pmatrix}.$$

3.5.17 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{GL}_n(K)$. Montrer :

$$\exists P \in K[X],\ A^{-1} = P(A).$$

3.5.18 Soient $n, N \in \mathbb{N}^*$,

$$A_1,\ldots,A_N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ P_1,\ldots,P_N \in \mathbb{C}[X].$$

On suppose que $A_1,\ldots,A_N$ n'ont, deux à deux, aucune valeur propre commune. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\forall i \in \{1,\ldots,N\},\quad P(A_i) = P_i(A_i).$$

3.5.19 Une démonstration du théorème de Cayley et Hamilton (lorsque $K = \mathbb{C}$)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer : $\forall A \in E,\quad \chi_A(A) = 0.$

b) En admettant que E est dense dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, en déduire le théorème de Cayley et Hamilton (pour $K = \mathbb{C}$) :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\quad \chi_A(A) = 0.$$

3.5.20 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \varnothing.$$

a) Montrer : $\chi_A(B) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

b) Etablir : $\forall X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ (AX = XB \Longrightarrow X = 0)$.

c) En déduire :

$$\forall C \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\quad AX - XB = C.$$

Cf. aussi ex. 3.4.15 p. 106.

3.5.4 Idéaux de $K[X]$ (PSI)

Définition

On appelle **idéal** de $K[X]$ toute partie $\mathfrak{I}$ de $K[X]$ telle que :

- $\mathfrak{I} \neq \varnothing$
- $\forall (P,Q) \in \mathfrak{I}^2,\quad P + Q \in \mathfrak{I}$
- $\forall A \in K[X],\ \forall P \in \mathfrak{I},\ AP \in \mathfrak{I}.$

Remarques :

1) Si $\mathfrak{I}$ est un idéal de $K[X]$, alors en particulier :

$$\begin{cases} \mathfrak{I} \neq \varnothing \\ \forall (P,Q) \in \mathfrak{I}^2, \quad P + Q \in \mathfrak{I}\,, \\ \forall P \in \mathfrak{I},\ -P \in \mathfrak{I} \end{cases}$$

et donc $\mathfrak{I}$ est un sous-groupe de $(K[X],+)$.

2) Soient $P_0 \in K[X]$ et $P_0K[X]$ l'ensemble des multiples de P_0 dans $K[X]$, c'est-à-dire :

$$P_0K[X] = \{P_0A;\ A \in K[X]\}.$$

Il est clair que $P_0K[X]$ est un idéal de $K[X]$.

Théorème 1

Pour tout idéal $\mathfrak{I}$ de $K[X]$, il existe $P_0 \in K[X]$ tel que :

$$\mathfrak{I} = P_0K[X] = \{P \in K[X];\ \exists A \in K[X],\ P = P_0A\}.$$

On exprime ce résultat par : tout idéal de $K[X]$ est **principal**, ou encore : $K[X]$ est un **anneau principal**.

Utilisation d'une division euclidienne.

Preuve

Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de $K[X]$.

Si $\mathfrak{I} = \{0\}$, alors $\mathfrak{I} = 0K[X]$.

Supposons $\mathfrak{I} \neq \{0\}$. L'ensemble $\{\deg(P);\ P \in \mathfrak{I} - \{0\}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc admet un plus petit élément, noté n_0, et il existe $P_0 \in \mathfrak{I} - \{0\}$ tel que $\deg(P_0) = n_0$.

Nous allons montrer : $\mathfrak{I} = P_0 K[X]$.

1) Puisque $P_0 \in \mathfrak{I}$ et que $\mathfrak{I}$ est un idéal de $K[X]$, on a : $\forall A \in K[X],\ \ P_0 A \in \mathfrak{I}$,

c'est-à-dire : $P_0 K[X] \subset \mathfrak{I}$.

2) Réciproquement, soit $P \in \mathfrak{I}$. Par division euclidienne de P par P_0, il existe $(Q,R) \in (K[X])^2$ tel que : $P = P_0 Q + R$ et $\deg(R) < \deg(P_0)$.

Comme $R = P - P_0 Q$, que P, P_0 sont dans $\mathfrak{I}$, et que $\mathfrak{I}$ est un idéal de $K[X]$, on déduit : $R \in \mathfrak{I}$. Puis, par définition de P_0, comme $\deg(R) < \deg(P_0)$, on obtient $R = 0$, d'où : $P = P_0 Q \in P_0 K[X]$. ■

Proposition

Soient E un K-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble $\{P \in K[X];\ P(f) = 0\}$, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes annulateurs de f, est un idéal de $K[X]$.

Preuve

Notons $\mathfrak{I} = \{P \in K[X];\ P(f) = 0\}$.

• $\mathfrak{I} \neq \varnothing$, car $0 \in I$.

• Soient $P, Q \in \mathfrak{I}$. On a :

$$(P+Q)(f) = P(f) + Q(f) = 0 + 0 = 0,$$

donc $P + Q \in \mathfrak{I}$.

• Soient $A \in K[X]$, $P \in \mathfrak{I}$. On a :

$$(AP)(f) = A(f) \circ P(f) = A(f) \circ 0 = 0,$$

donc $AP \in \mathfrak{I}$.

On conclut que $\mathfrak{I}$ est un idéal de $K[X]$. ■

3.6 Applications de la diagonalisation

3.6.1 Calcul des puissances d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$.
Supposons A diagonalisable ; il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$, $D \in \mathbf{D}_n(K)$ telles que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Montrons, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ \ A^k = PD^kP^{-1}$.
La propriété est triviale pour $k = 0$ (car $A^0 = D^0 = \mathrm{I}_n$) et vraie pour $k = 1$.
Si elle est vraie pour un k de $\mathbb{N}$, alors :

$$A^{k+1} = A^k A = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = P(D^kD)P^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}.$$

D'autre part, en notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, on a clairement :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

On en déduit la valeur de A^k.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que A est inversible et calculer, pour tout k de $\mathbb{Z}$, A^k.

Formons le polynôme caractéristique :

Après développement.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -8 & 6 \\ -1 & -8-\lambda & 7 \\ 1 & -14 & 11-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12)$$
$$= -(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3).$$

Puisque $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ et que A admet trois vp distinctes $(-2,2,3)$, A est diagonalisable.

On calcule les SEP :

• $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(A,-2) \iff \begin{cases} 2x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 6y + 7z = 0 \\ x - 14z + 13z = 0 \end{cases} \iff x = y = z.$

Donc $\mathrm{SEP}(A,-2)$ est de dimension 1 et admet pour base (V_1) où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(A,2) \iff \begin{cases} -2x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 10y + 7z = 0 \\ x - 14y + 9z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ 3y = 2z \end{cases}.$

Donc $\mathrm{SEP}(A,2)$ est de dimension 1 et admet pour base (V_2) où $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

• $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(A,3) \iff \begin{cases} -3x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 11y + 7z = 0 \\ x - 14y + 8z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5y = 3z \\ 3x = 2y \end{cases}.$

Donc $\mathrm{SEP}(A,3)$ est de dimension 1 et admet pour base (V_3) où $V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier : $A = PDP^{-1}$.

En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

et $A = PDP^{-1}$.

Matrice obtenue par produit de trois matrices.

Alors, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$A^k = PD^kP^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} (-2)^k - 2\cdot 2^k + 2\cdot 3^k & (-2)^k + 3\cdot 2^k - 4\cdot 3^k & -(-2^k) - 2^k + 2\cdot 3^k \\ (-2)^k - 4\cdot 2^k + 3\cdot 3^k & (-2)^k + 6\cdot 2^k - 6\cdot 3^k & -(-2^k) - 2\cdot 2^k + 3\cdot 3^k \\ (-2)^k - 6\cdot 2^k + 5\cdot 3^k & (-2)^k + 9\cdot 2^k - 10\cdot 3^k & -(-2^k) - 3\cdot 2^k + 5\cdot 3^k \end{pmatrix}.$$

D'autre part, comme $0 \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, A est inversible ; ainsi A^{-1}, puis A^k $(k \in \mathbb{Z}_-^*)$ existent.

On a : $\quad \forall k \in \mathbb{Z}_-^*$,

$$A^k = (A^{-1})^{-k} = ((PDP^{-1})^{-1})^{-k} = (PD^{-1}P^{-1})^{-k} = P(D^{-1})^{-k}P^{-1} = PD^kP^{-1}.$$

Autrement dit, la formule $A^k = PD^kP^{-1}$ est valable pour tout k de $\mathbb{Z}$, et le résultat obtenu plus haut pour A^k aussi.

Exercices 3.6.1 à 3.6.3.

Exercice-type résolu

Exemple d'étude des puissances d'une matrice carrée d'ordre trois

On note, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ z^3 & 3z^2 & 3z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C})$.

Déterminer l'ensemble $E = \left\{ z \in \mathbb{C} ;\ \left(M(z)\right)^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$.

Solution

Calculons le polynôme caractéristique de $M(z)$:

$$\chi_{M(z)}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ z^3 & 3z^2 & 3z-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2(3z-\lambda) + z^3 + 3\lambda z^2 = -\lambda^3 + 3z\lambda^2 + 3z^2\lambda + z^3$$
$$= (\lambda+z)^3 - 2\lambda^3.$$

Donc :

$$\chi_{M(z)}(\lambda) = 0 \iff (\lambda+z)^3 - 2\lambda^3 = 0$$
$$\iff \lambda + z = \sqrt[3]{2}\,\lambda \quad \text{ou} \quad \lambda + z = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{j}\lambda \quad \text{ou} \quad \lambda + z = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{j}^2\lambda.$$

• Si $z = 0$, alors $M(z) = M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

donc $\left(M(z)\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\left(M(z)\right)^3 = 0$, $\left(M(z)\right)^n = 0$ pour tout $n \geqslant 3$, et

donc : $\left(M(z)\right)^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

Conseils

On commence par réduire $M(z)$, si possible, à la forme diagonale.

Développement par la règle de Sarrus, par exemple, valable pour un déterminant d'ordre 2 ou 3.
Remarquer les coefficients

1 3 3 1

et penser au binôme de Newton.

Résolution de l'équation $a^3 = b^3$ dans les nombres complexes.

Solution

Conseils

• Supposons $z \neq 0$.

Alors $M(z)$ admet trois valeurs propres deux à deux distinctes :

$$\lambda_1 = \frac{z}{\sqrt[3]{2} - 1}, \quad \lambda_2 = \frac{z}{\sqrt[3]{2}\,\mathrm{j} - 1}, \quad \lambda_3 = \frac{z}{\sqrt[3]{2}\,\mathrm{j}^2 - 1}.$$

Puisque $M(z)$ est carrée d'ordre trois et admet trois valeurs propres deux à deux distinctes, d'après le Cours, $M(z)$ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$.

Condition suffisante de diagonalisabilité.

En notant $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, il existe $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que : $M(z) = PDP^{-1}$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \big(M(z)\big)^n = PD^nP^{-1}$, donc

$$\begin{aligned}\big(M(z)\big)^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 &\iff D^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \forall k \in \{1,2,3\}, \ \lambda_k^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\iff \forall k \in \{1,\ldots,3\}, \ |\lambda_k| < 1 \\ &\iff \Big(|z| < \sqrt[3]{2} - 1 \quad \text{et} \quad |z| < \big|\sqrt[3]{2}\,\mathrm{j} - 1\big| \quad \text{et} \quad |z| < \big|\sqrt[3]{2}\,\mathrm{j}^2 - 1\big| \Big).\end{aligned}$$

On a :

$$\big|\sqrt[3]{2}\mathrm{j} - 1\big|^2 = (\sqrt[3]{2}\mathrm{j} - 1)(\sqrt[3]{2}\mathrm{j}^2 - 1) = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}(\mathrm{j} + \mathrm{j}^2) + 1 = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1.$$

Utilisation de :

$$\overline{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = -1.$$

Par conjugaison : $\big|\sqrt[3]{2}\,\mathrm{j}^2 - 1\big|^2 = \big|\sqrt[3]{2}\,\mathrm{j} - 1\big|^2$.

Comme : $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} > 1 > (\sqrt[3]{2} - 1)^2$, on obtient :

$$\big|\sqrt[3]{2}\,\mathrm{j} - 1\big| = \big|\sqrt[3]{2}\,\mathrm{j}^2 - 1\big| > \big|\sqrt[3]{2} - 1\big|.$$

D'où :

$$\big(M(z)\big)^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \iff |z| < \sqrt[3]{2} - 1.$$

On remarque que cette condition contient le cas $z = 0$ examiné au début de l'étude.

Finalement, l'ensemble cherché E est :

$$E = \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < \sqrt[3]{2} - 1\big\},$$

c'est-à-dire le disque ouvert de centre 0 et de rayon $\sqrt[3]{2} - 1$.

Les méthodes à retenir

Calcul des puissances d'une matrice carrée

- **Pour calculer les puissances d'une matrice carrée A**, on peut essayer d'utiliser une diagonalisation de A (ex. 3.6.1). On peut aussi, dans certains exemples simples, décomposer A en $A = \alpha \mathrm{I}_n + N$, où $\alpha \in K$ et N est nilpotente (ou les puissances de N sont de calcul aisé), et appliquer la formule du binôme de Newton.
- **Pour l'étude de puissances entières positives ou négatives d'une matrice carrée**, la formule obtenue dans le cas où l'exposant est un entier naturel est souvent aussi valable dans le cas où l'exposant est un entier relatif négatif (ex. 3.6.1).

Exercices

3.6.1 Calculer A^n :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{Z}.$$

3.6.2 Soient $a,b \in K$ tels que $a \neq b$, E un K-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable tel que

$$\mathrm{Sp}_K(f) = \{a,b\}.$$

Montrer qu'il existe deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans K telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = \alpha_n e + \beta_n f,$$

et calculer α_n et β_n.

3.6.3 Trouver une matrice B de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$, où $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

3.6.2 Suites récurrentes linéaires simultanées du 1^er ordre à coefficients constants

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in K^n$.

On considère les **suites récurrentes linéaires simultanées du 1^er ordre à coefficients constants** $(x_{1,k})_{k\in\mathbb{N}},\ldots,(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} \forall j \in \{1,\ldots,n\}, & x_{j,0} = \alpha_j \\ \forall j \in \{1,\ldots,n\},\ \forall k \in \mathbb{N}, & x_{j,k+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{ji} x_{i,k}. \end{cases}$$

Il s'agit de calculer les $x_{j,k}$.

En notant $X_k = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{pmatrix}$, (E) se ramène à : $\begin{cases} X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = AX_k \end{cases}$.

Récurrence immédiate.

On a donc : $\forall k \in \mathbb{N},\ X_k = A^k X_0$,

et la détermination de X_k se ramène au calcul de A^k.

Exemple :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad v_0 = 22, \quad w_0 = 22 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases} \end{cases}.$$

Calculer u_n, v_n, w_n et étudier la convergence de ces trois suites.

Notons $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$, donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

• Réduction de A

Formons le polynôme caractéristique :

Comme dans chaque ligne de A, la somme est égale à 1, il est judicieux d'effectuer $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \quad - C_1 + C_2 + C_3$$

Puisque la 1ère colonne du déterminant précédent n'est formée que de 1, on effectue des opérations sur les lignes, par différence.

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{12}-\lambda & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \quad - L_2 - L_1 \\ L_3 \quad - L_3 - L_1 \end{matrix}$$

Déterminant d'une matrice triangulaire.

$$= (1-\lambda)\left(\frac{1}{12}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}-\lambda\right).$$

Puisque A admet trois vp distinctes et que A est d'ordre 3, A est diagonalisable.

On calcule les SEP. On obtient une base (V_1, V_2, V_3) de $\overrightarrow{\text{vp}}$ associés respectivement à $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}$: $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$.

En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$,

On peut vérifier :
$A = PDP^{-1}$.

on a $P^{-1} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = PDP^{-1}$.

• D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0$

On effectue le produit de ces quatre matrices.

$$= \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 12^{-n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix}$$

et donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_n = 14 - 11 \cdot 4^{-n} - 3 \cdot 12^{-n} \\ v_n = 14 + 8 \cdot 12^{-n} \\ w_n = 14 + 11 \cdot 4^{-n} - 3 \cdot 12^{-n} \end{cases}.$

Il est clair que $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ convergent vers 14.

3.6.3 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in K^p$. On considère la **suite récurrente linéaire à coefficients constants** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} (u_0, \dots, u_{p-1}) \in K^p \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i} = a_0 u_n + \ldots + a_{p-1} u_{n+p-1}. \end{cases}$$

Il s'agit de calculer u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$. Cette équation a été résolue dans le cas particulier $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $p = 2$, dans Analyse PCSI-PTSI, 3.4.2.

Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_p(K)$, et, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}.$$

On a, pour tout n de $\mathbb{N}$:

Par récurrence immédiate :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} = AX_n.$$

Ainsi, le calcul de u_n se ramène à celui des puissances de A.
D'ailleurs, en notant $u_{j,n} = u_{n+j}$ pour $j \in \{0,\dots,p-1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on peut aussi se ramener au § 3.6.2 p. 123.

Cf. ex. 3.2.11 p. 85.

Remarquons :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\lambda & 1 \\ a_0 & \dots & a_{p-2} & a_{p-1}-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^p(\lambda^p - a_{p-1}\lambda^{p-1} - \dots - a_0),$$

Exemple :

Calculer u_n pour tout n de $\mathbb{N}$ sachant : $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2} \end{cases}.$

Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \end{pmatrix}$ et formons le polynôme caractéristique :

Développement par la règle de Samus, puis factorisation, par exemple en remarquant que 3 est solution.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 45 & -39 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 39\lambda + 45 = -(\lambda-3)^2(\lambda-5).$$

Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et les vp de A sont 3 (double) et 5 (simple).

On calcule les SEP et on obtient :

Après calculs.

$$\begin{cases} \mathrm{SEP}(A,3) = \mathrm{Vect}\,(V_1), \quad \text{où } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \\ \mathrm{SEP}(A,5) = \mathrm{Vect}\,(V_3), \quad \text{où } V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Puisque 3 est vp double et que $\dim\big(\mathrm{SEP}(A,3)\big) = 1$, A n'est pas diagonalisable.

On va trigonaliser A. Cherchons $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour que $AV_2 = 3V_2 + V_1$.

On a : $AV_2 = 3V_2 + V_1 \iff \begin{cases} y = 3x+1 \\ z = 9x+6 \end{cases}$.

On peut donc choisir $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & 25 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, on a donc

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 6 & -1 \\ -30 & 16 & -2 \\ 9 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = PTP^{-1}.$$

On peut vérifier : $A = PTP^{-1}$.

Une récurrence immédiate montre : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$.

D'où, pour tout n de $\mathbb{N}$: $X_n = PT^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} -4n3^{n-1} + 5^n \\ -4(n+1)3^n + 5^{n+1} \\ -4(n+2)3^{n+1} + 5^{n+2} \end{pmatrix}$.

Après calcul du produit de quatre matrices.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -4n3^{n-1} + 5^n$.

On peut contrôler les valeurs de u_0, u_1, u_2.

L'étude des **systèmes différentiels linéaires du 1er ordre à coefficients constants** est faite dans Analyse PC-PSI-PT, § 8.3.6.

Exercices 3.6.4, 3.6.5.

Exercices

3.6.4 Soient $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = \frac{2}{\dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n}}.$$

Calculer u_n, puis $\lim\limits_{n\infty} u_n$.

3.6.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1} \\ u_{2n} = u_{2n-1} + 2u_{2n-2} \end{cases} \end{cases}.$$

Calculer u_n en fonction de n.

Problèmes

P 3.1 Rayon spectral

Ce problème P 3.1 étudie le rayon spectral d'une matrice carrée, son lien avec des normes sous-multiplicatives, et le comportement de la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ donnée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(A) = \underset{\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)}{\mathrm{Max}} |\lambda|$, appelé **rayon spectral** de A.

1) Propriétés élémentaires de ρ

a) Montrer, pour tous α de $\mathbb{C}$, k de $\mathbb{N}^*$, A, B de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ et P de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$:

$\alpha)$ $\rho(\alpha A) = |\alpha|\rho(A)$

$\beta)$ $\rho(A^k) = \big(\rho(A)\big)^k$

$\gamma)$ $\rho(AB) = \rho(BA)$

δ) $\rho(P^{-1}AP) = \rho(A)$.

b) A-t-on, pour toutes A, B de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\rho(A+B) \leqslant \rho(A)+\rho(B) \text{ ? } \rho(AB) \leqslant \rho(A)\rho(B)\text{ ?}$$

On rappelle (cf. Analyse PC-PSI-PT, 1.1.1 *4)* Déf.) qu'une norme $||\cdot||$ sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **sous-multiplicative** (ou : **norme d'algèbre**) si et seulement si :

$$\forall (A,B) \in \left(\mathbf{M}_n(\mathbb{C})\right)^2,\ ||AB|| \leqslant ||A||\ ||B||.$$

On dit aussi **multiplicative**, ou : **matricielle**, au lieu de sous-multiplicative.

2) a) Montrer que, si $||\cdot||$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ ||A^k|| \leqslant ||A||^k.$$

b) Montrer que l'application $N : \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad N(A) = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$$

est une norme sous-multiplicative sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

c) Soient $||\cdot||$ une norme sous-multiplicative sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que l'application $||\cdot||_P : \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), ||A||_P = ||P^{-1}AP||$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

3) Soit $||\cdot||$ une norme sous-multiplicative sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Etablir :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ \rho(A) \leqslant ||A||.$$

4) Soient $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe une norme sous-multiplicative $||\cdot||$ sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $||A|| \leqslant \rho(A) + \varepsilon$.

(Utiliser une trigonalisation $A = PTP^{-1}$ de A, $T = (t_{ij})_{ij} \in \mathbf{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{C})$. Puis, pour $u \in \mathbb{R}_+^*$, soit $D_u = \mathrm{diag}(u, u^2, \ldots, u^n)$; calculer $D_u T D_u^{-1}$ et montrer que, pour u assez grand : $N(D_u T D_u^{-1}) \leqslant \rho(A) + \varepsilon$, où N est définie en *2) b)*.

Définir enfin $||\cdot||$ par $||M|| = N(D_u P^{-1} M P D_u^{-1})$ pour toute M de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$).

En notant $\mathcal{N}$ l'ensemble des normes sous-multiplicatives sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, les résultats précédents (*3)* et *4)*) montrent :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad \rho(A) = \underset{||\cdot||\in\mathcal{N}}{\mathrm{Inf}} ||A||.$$

5) Démontrer :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ \left(A^k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \rho(A) < 1\right).$$

(Utiliser *3)* et *4)*).

6) Démontrer que, pour toute norme $||\cdot||$ sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ et toute matrice A de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$:

$$||A^k||^{\frac{1}{k}} \underset{k\infty}{\longrightarrow} \rho(A).$$

(Commencer par montrer le résultat lorsque $||\cdot||$ est sous-multiplicative, en utilisant *3)* et *4)*).

7) Déduire de *6)* que, si $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ commutent, alors $\rho(AB) \leqslant \rho(A)\rho(B)$.

Autre méthode pour établir le résultat de *7)* : utiliser l'exercice 3.4.12 p. 105.

8) a) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que, si $A_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\rho(A_k) \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Soient $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \left(P_k \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad B_k = P_k A P_k^{-1}\right) \\ B_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

Etablir que A est nilpotente.

9) Soient $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ |a_{ij}| \leqslant m_{ij}.$$

Démontrer : $\rho(A) \leqslant \rho(M)$.

P 3.2 Produit de Kronecker

K désigne un corps commutatif, n, n', p, p' des entiers $\geqslant 1$. Pour $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_{n,n'}(K)$ et $B \in \mathbf{M}_{p,p'}(K)$, on définit le produit de Kronecker de A et B, noté $A \otimes B$, par :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \ldots & a_{1n'}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \ldots & a_{nn'}B \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{np,n'p'}(K).$$

La (longue) partie I est facile ; on y expose les propriétés de calcul du produit de Kronecker.

I Propriétés élémentaires du produit de Kronecker

a) Pour $A \in \mathbf{M}_{n,n'}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,p'}(K)$, on note $f_{A,B}$: $\mathbf{M}_{n',p'}(K) \longrightarrow \mathbf{M}_{n,p}(K)$.

$$M \longmapsto AM\,{}^{\mathrm{t}}B$$

Démontrer que $A \otimes B$ est la matrice de $f_{A,B}$ dans les bases canoniques (ordonnées convenablement).

b) Montrer les résultats suivants (on précisera le format des matrices envisagées) :

1) $\begin{cases} (\alpha A + \alpha' A') \otimes B = \alpha A \otimes B + \alpha' A' \otimes B \\ A \otimes (\beta B + \beta' B') = \beta A \otimes B + \beta' A \otimes B' \end{cases}$

2) $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$

3) $A \otimes B = (A \otimes \mathrm{I})(\mathrm{I} \otimes B)$

4) $\forall k \in \mathbb{N},\ (A \otimes B)^k = A^k \otimes B^k$

5) $A \otimes B = 0 \Longleftrightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$

6) En supposant A et B carrées, $A \otimes B$ est inversible si et seulement si A et B sont inversibles, et on a alors $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$

7) $A \otimes B$ est nilpotente si et seulement si A ou B est nilpotente

8) ${}^{t}(A \otimes B) = {}^{t}A \otimes {}^{t}B$

9) Si $\left\{\begin{array}{l} A \text{ et } A' \text{ sont de même format} \\ B \text{ et } B' \text{ sont de même format} \\ A \neq 0 \quad \text{et} \quad B \neq 0 \end{array}\right|$, alors :

$$A \otimes B = A' \otimes B' \Longleftrightarrow \exists\ \alpha \in K - \{0\}, \left\{\begin{array}{l} A' = \alpha A \\ B' = \dfrac{1}{\alpha} B \end{array}\right)$$

10) • Si A et B sont symétriques, alors $A \otimes B$ est symétrique
• Si $A \otimes B$ est symétrique et $A \neq 0$ et $B \neq 0$, alors A et B sont symétriques ou sont antisymétriques

11) Si $B \neq 0$, alors : $A \otimes B$ est triangulaire supérieure si et seulement si A est triangulaire supérieure

12) Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$, alors : $A \otimes B$ est diagonale si et seulement si A et B sont diagonales

13) Si $(A_i)_{i \in I}$ (resp. $(B_j)_{j \in J}$) est une famille de matrices commutant deux à deux, alors les $A_i \otimes B_j$ $((i,j) \in I \times J)$ commutent deux à deux.

14) • $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\ \mathrm{tr}(B)$
• $\det(A \otimes B) = (\det(A))^p (\det(B))^n$.

II On suppose ici K algébriquement clos (par exemple $K = \mathbb{C}$).

Soient $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_p(K)$,

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mathrm{X}), \quad \chi_B = \prod_{j=1}^{p} (\mu_j - \mathrm{X}).$$

1) Etablir : $\chi_{A \otimes B} = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} (\lambda_i \mu_j - \mathrm{X})$.

2) On suppose dans cette question $K = \mathbb{C}$, et on utilise le vocabulaire des matrices hermitiennes (cf. 5.1.2 2) Déf. 2 p. 191). Montrer que, si A et B sont hermitiennes, alors $A \otimes B$ est hermitienne.

3) Montrer que si A, B sont diagonalisables, alors $A \otimes B$ est diagonalisable.
On peut montrer réciproquement que, si $A \otimes B$ est diagonalisable et si $A \neq 0$ et $B \neq 0$, alors A et B sont diagonalisables, en utilisant, par exemple, la décomposition de Dunford (hors programme).

Espaces préhilbertiens réels

CHAPITRE 4

Plan

Introduction

La notion de produit scalaire, vue en première année, est un cas particulier de la notion de forme bilinéaire symétrique, dont nous allons effectuer une étude élémentaire.

Dans un espace vectoriel euclidien, certains endomorphismes sont remarquables : les endomorphismes symétriques et les endomorphismes orthogonaux.

Enfin, le théorème fondamental de ce chapitre est le théorème de réduction orthogonale d'une matrice symétrique réelle, dont les applications sont innombrables, en mathématiques et dans les mathématiques appliquées.

Prérequis

- Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices, déterminants et systèmes linéaires (Algèbre PCSI-PTSI, ch. 6 à 9)
- Trace, blocs (§ 1.4)
- Déterminants, systèmes linéaires (ch. 2)
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (ch. 3).

Objectifs

- Définition et propriétés élémentaires des formes bilinéaires symétriques
- Consolidation des acquis sur les espaces vectoriels euclidiens : produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme euclidienne, orthogonalité
- Définition et étude des endomorphismes symétriques et des endomorphismes orthogonaux
- Définition de la notion d'adjoint ; son lien, en dimension finie, avec la transposition des matrices carrées
- Énoncé et utilisations du théorème fondamental, en particulier pour l'étude des matrices symétriques positives et des matrices symétriques définies-positives.

4.1 Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques

Dans ce § 4.1, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1.1 Généralités

Dans ce § 4.1.1, E désigne un K-ev.

1) Formes bilinéaires

Il s'agit d'un cas particulier de la Définition du § 2.2.1.

Au lieu de « place », on dit aussi « variable ».

Définition 1

On appelle **forme bilinéaire** sur $E \times E$ toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ telle que :

(i) $\forall \alpha \in K,\ \forall (x,x',y) \in E^3,\ \varphi(\alpha x + x', y) = \alpha\varphi(x,y) + \varphi(x',y)$

(φ est linéaire par rapport à la $1^{\text{ère}}$ place)

(ii) $\forall \beta \in K,\ \forall (x,y,y') \in E^3,\ \varphi(x, \beta y + y') = \beta\varphi(x,y) + \varphi(x,y')$

(φ est linéaire par rapport à la $2^{\text{ème}}$ place).

Nous notons $\mathcal{L}(E,E;K)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times E$ (cf. § 2.2.1). Il est immédiat que $\mathcal{L}(E,E;K)$ est un K-ev.

On dit qu'on développe par bilinéarité.

Proposition 1

Soient φ une forme bilinéaire sur $E \times E, (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ \beta_1,\ldots,\beta_p \in K,\ x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_p \in E$. On a alors :

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j\right) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \alpha_i\beta_j\varphi(x_i,y_j).$$

Preuve

On a, par récurrence immédiate sur n :

$$\forall Y \in E,\ \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, Y\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi(x_i,Y),$$

Linéarité par rapport à la $1^{\text{ère}}$ place, puis linéarité par rapport à la $2^{\text{ème}}$ place.

d'où

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi\left(x_i, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left(\sum_{j=1}^{p} \beta_j\varphi(x_i,y_j)\right) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \alpha_i\beta_j\varphi(x_i,y_j).$$

2) Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques

Définition 2

Une application $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ est dite **symétrique** si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \ \varphi(y,x) = \varphi(x,y).$$

On abrègera forme bilinéaire symétrique en : fbs.

Nous notons $\mathcal{S}(E;K)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur $E \times E$.

Il est immédiat que $\mathcal{S}(E;K)$ est un K-ev, sev de $\mathcal{L}(E,E;K)$.

La Proposition suivante est immédiate, et d'un usage commode.

Autrement dit, la symétrie et la linéarité par rapport à la deuxième place entraînent la linéarité par rapport à la première place.

Cf. aussi Analyse PC-PSI-PT, 1.4.1 Déf. 1, et Algèbre PCSI-PTSI, 10.1.1, Déf. 1.

Proposition 2

Pour qu'une application $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ soit une fbs, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\begin{cases} \varphi \text{ est symétrique} \\ \varphi \text{ est linéaire par rapport à la } 2^{\text{ème}} \text{ place.} \end{cases}$$

Bien distinguer les ensembles de départ de φ et de ϕ :

$$\varphi : E \times E \longrightarrow K,$$
$$\phi : E \longrightarrow K.$$

Définition 3

Soit φ une fbs sur $E \times E$. On appelle **forme quadratique associée à** φ l'application, souvent notée ϕ, de E dans K définie par :

$$\forall x \in E,\ \ \phi(x) = \varphi(x,x).$$

On abrègera forme quadratique en : fq.

Exemples :

1) Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, défini par $\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{array}$

est une fbs et la fq associée est $\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \end{array}$.

2) L'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \longmapsto x_1y_2 + x_2y_1 \end{array}$ est une fbs et la fq associée est ϕ : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) \longmapsto 2x_1x_2 \end{array}$.

La Proposition suivante est immédiate à partir de Prop.1 p. 130.

Proposition 3

Soient φ une fbs sur $E \times E$, ϕ la fq associée à φ. On a :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in K,\ \forall x_1,\ldots,x_n \in E,$

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \phi(x_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_i \alpha_j \varphi(x_i, x_j)$$

La formule *3)* ou la formule *4)*, exprimant $\varphi(x,y)$ à l'aide de ϕ, porte le nom d'**identité de polarisation**.

2) $\forall (\alpha,\beta) \in K^2, \forall (x,y) \in E^2,$

$$\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha^2\phi(x) + 2\alpha\beta\varphi(x,y) + \beta^2\phi(y)$$

3) $\forall (x,y) \in E^2,\ \phi(x+y) = \phi(x) + 2\varphi(x,y) + \phi(y)$

4) $\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = \dfrac{1}{4}\big(\phi(x+y) - \phi(x-y)\big)$

5) $\forall (x,y) \in E^2,\ \phi(x+y) + \phi(x-y) = 2\big(\phi(x) + \phi(y)\big).$

Remarque :

Les formules *3)* et *4)* précédentes montrent que ϕ détermine entièrement φ ; φ est appelée la **forme polaire** de ϕ.

En pratique, pour montrer qu'une application

$$\phi : E \longrightarrow K$$

est une forme quadratique, on construit une forme bilinéaire symétrique

$$\varphi : E \times E \longrightarrow K$$

telle que :

$$\forall x \in E,\ \phi(x) = \varphi(x,x).$$

Définition 4

Soit $\phi : E \longrightarrow K$ une application. On dit que ϕ est une **forme quadratique** si et seulement s'il existe une fbs $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ telle que ϕ soit la fq associée à φ.

Remarque :

Notons $Q(E)$ l'ensemble des fq sur E.

Il est clair que l'application $U : \mathcal{S}(E;K) \longrightarrow Q(E)$ qui, à toute fbs φ sur $E \times E$ fait correspondre la fq associée à φ, et l'application $V : Q(E) \longrightarrow \mathcal{S}(E;K)$ qui, à toute fq ϕ sur E associe la forme polaire de ϕ, sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

4.1.2 Interprétation matricielle

Dans ce § 4.1.2, E désigne un K-ev de dimension finie, $n = \dim(E) \geqslant 1$.

1) Matrice d'une fbs dans une base

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique car φ étant symétrique, on a, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$:

$$\varphi(e_i,e_j) = \varphi(e_j,e_i).$$

Définition

Soient φ une fbs sur $E \times E$ et $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On appelle **matrice de φ dans (ou : relativement à) $\mathcal{B}$**, et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, la matrice carrée d'ordre n, symétrique, suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \big(\varphi(e_i,e_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Exemple :

Considérons $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$, $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ et

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \longmapsto & \alpha x_1y_1 + \beta(x_1y_2 + x_2y_1) + \gamma x_2y_2 \end{array}.$$

Il est clair que φ est une fbs sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, et on a :

$$\varphi(e_1,e_1) = \alpha,\ \ \varphi(e_1,e_2) = \varphi(e_2,e_1) = \beta,\ \ \varphi(e_2,e_2) = \gamma,$$

donc : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}.$

Rappelons que la notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(.)$ a été définie par ailleurs pour un vecteur de E ($\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ pour $x \in E$, cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.1.2 Déf. 1) et pour un endomorphisme de E ($\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ pour $f \in \mathcal{L}(E)$, cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.1.2 Déf. 3).

Formule importante.

Proposition 1 **Expression du produit scalaire dans une base quelconque**

Soient : $\left|\begin{array}{l}\varphi \text{ une fbs sur } E\times E\\ \mathcal{B} \text{ une base de } E\\ A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)\\ x,y\in E,\ \ X=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x),\ \ Y=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(y).\end{array}\right.$

On a alors : $\varphi(x,y) = {}^{\mathrm{t}}XAY$

Preuve

En notant $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$, $A=(a_{ij})_{ij}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, on a :

Développement par bilinéarité.

$$\varphi(x,y)=\varphi\Big(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\ \sum_{j=1}^n y_je_j\Big)=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} x_iy_j\varphi(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^n x_i\Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j\Big).$$

D'autre part : ${}^{\mathrm{t}}X=(x_1,\ldots,x_n)$, $\quad AY=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1j}y_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n a_{nj}y_j\end{pmatrix}$,

donc : $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j\Big)={}^{\mathrm{t}}XAY.$ ■

Rappelons (cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.3.1 *1)* Déf.) que l'on note $\mathbf{S}_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans K.

Proposition 2

Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

L'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}: \begin{array}[t]{rcl}\mathcal{S}(E,K) & \longrightarrow & \mathbf{S}_n(K)\\ \varphi & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)\end{array}$ est un isomorphisme de K-ev.

Preuve

On a vu (4.1.1 p. 131, et Algèbre PCSI-PTSI, 8.4.1 1) Prop. 1) que $\mathcal{S}(E,K)$ et $\mathbf{S}_n(K)$ sont des K-ev. Notons $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$.

1) Soient $\alpha\in K$, $\varphi,\psi\in\mathcal{S}(E;K)$. Comme :

$$\forall (i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2,\ \ (\alpha\varphi+\psi)(e_i,e_j)=\alpha\varphi(e_i,e_j)+\psi(e_i,e_j),$$

on a : $\quad\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\alpha\varphi+\psi)=\alpha\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)+\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ est linéaire.

2) Soit $A=(a_{ij})_{ij}\in\mathbf{S}_n(K)$. Considérons l'application $\varphi: E\times E\longrightarrow K$ définie par :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \ \varphi(x,y)={}^{\mathrm{t}}XAY,$$

où $X=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.

L'application φ est une fbs car :

On confond $\varphi(x,y)$, élément de K, et la matrice de $\mathbf{M}_1(K)$ ayant pour seul élément $\varphi(x,y)$.

• $\forall (x,y)\in E^2,\quad \varphi(y,x)={}^{\mathrm{t}}YAX={}^{\mathrm{t}}Y\,{}^{\mathrm{t}}AX={}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}XAY)=\varphi(x,y)$

• $\forall\alpha\in K,\ \forall x,y,y'\in E,$

$$\varphi(x,\alpha y+y')={}^{\mathrm{t}}XA(\alpha Y+Y')=\alpha\,{}^{\mathrm{t}}XAY+{}^{\mathrm{t}}XAY'=\alpha\varphi(x,y)+\varphi(x,y').$$

$(\mathrm{E}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(K)$.

De plus, pour tout (i,j) de $\{1,\ldots,n\}^2$:

$$\varphi(e_i,e_j) = {}^t\mathrm{E}_i A \mathrm{E}_j = a_{ij}$$

donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$.

Ceci montre que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ est surjective.

3) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(E;\,K)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = 0$.

On a alors : $\forall\,(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ \varphi(e_i,e_j) = 0$, d'où par bilinéarité (cf. 4.1.1 Prop.1 p. 130) :

$$\forall\,(x,y) \in E^2,\quad \varphi(x,y) = 0,$$

et donc $\varphi = 0$.

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ est injective.

Remarque :

On a donc :

$$\forall\,(A,B) \in (\mathbf{S}_n(K))^2,\quad \Big(\big(\forall\,(X,Y) \in \mathbf{M}_{n,1}(K)^2,\ {}^tXAY = {}^tXBY\big) \Longrightarrow A = B\Big).$$

En particulier, puisque $\dim\big(\mathbf{S}_n(K)\big) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.4.1 1)), on a aussi :

$$\dim\,(\mathcal{S}(E\,;\,K)) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) Notion de polynôme quadratique, règle du dédoublement

Ce paragraphe n'est pas au programme, mais éclaire la situation.

Étant donné n variables $x_1,\ldots,x_n$, on appelle **polynôme quadratique en** $x_1,\ldots,x_n$ toute application $\phi : K^n \longrightarrow K$ telle qu'il existe des éléments $\alpha_{ii}\,(1 \leqslant i \leqslant n)$ et $\alpha_{ij}\,(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ de K tels que :

$$\forall\,(x_1,\ldots,x_n) \in K^n,\quad \phi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \alpha_{ij}x_ix_j.$$

Par exemple, la « forme générale » d'un polynôme quadratique à deux variables x_1,x_2 est :

$$\phi(x_1,x_2) = \alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2.$$

Avec les notations précédentes, ϕ est une fq sur K^n et la matrice de la forme polaire φ de ϕ dans la base canonique de K^n est :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

On peut, à partir de ϕ, retrouver φ par la règle dite du **dédoublement** : connaissant

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \alpha_{ij}x_ix_j,$$

on obtient $\varphi\Big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\Big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}x_iy_i + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \alpha_{ij}(x_iy_j + x_jy_i)$

en dédoublant : $\left|\begin{array}{ll} x_i^2 \text{ en } x_iy_i & (1 \leqslant i \leqslant n) \\ 2x_ix_j \text{ en } x_iy_j + x_jy_i & (1 \leqslant i < j \leqslant n). \end{array}\right.$

3) Changement de base pour une fbs

Formule de changement de base pour une fbs.

Proposition 3

Soient $\left|\begin{array}{l} \varphi \text{ une fbs sur } E\times E \\ \mathcal{B},\mathcal{B}' \text{ deux bases de } E \\ P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}') \\ A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi),\ A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi). \end{array}\right.$

On a alors : $A' = {}^{t}PAP.$

Preuve

Soient $x,y \in E,\ X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x),\ Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y),\ X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x),\ \ Y' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(y)$; on a donc : $X = PX'$ et $Y = PY'$ (cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.2.2 Prop.).

D'une part : $\varphi(x,y) = {}^{t}X'A'Y'$.

D'autre part : $\varphi(x,y) = {}^{t}XAY = {}^{t}(PX')A(PY') = {}^{t}X'\,{}^{t}PAP\,Y'$.

Par unicité de la matrice de φ dans $\mathcal{B}'$ et puisque ${}^{t}PAP \in \mathbf{S}_n(K)$, on conclut : $A' = {}^{t}PAP$. ■

Exercices 4.1.1 à 4.1.2.

Exercice-type résolu

Étude du déterminant de la matrice de terme général $\varphi(x_i, y_j)$

Soient E un K-ev de dimension finie, $n = \dim(E)$, φ une fbs sur E.

On note :

$$D : (E^n)^2 \longrightarrow K,\ \ \big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big) \longmapsto \det\Big(\big(\varphi(x_i,y_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Big).$$

a) Soient $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E, $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Montrer que, pour tous $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)$ de E^n, en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y_1,\ldots,y_n)$, on a :

$$D\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big) = \det(A)\det(S)\det(B).$$

b) En déduire, pour tous $f,g \in \mathcal{L}(E)$ et tous $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)$ de E^n :

$$D\Big(\big(f(x_1),\ldots,f(x_n)\big),\big(g(y_1,),\ldots,g(y_n)\big)\Big) = \det(f)\det(g)D\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big).$$

Solution

Conseils

a) Notons $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{ij})_{ij}$, $S = (s_{ij})_{ij}$. On a donc :

$$\forall j \in \{1,\ldots,n\},\ \ x_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k \quad \text{et} \quad y_j = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}e_k.$$

Solution

D'où, pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$:

$$\varphi(x_i, y_j) = (\,a_{1i} \quad \ldots \quad a_{ni}\,)\, S \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} a_{ki} s_{kl} b_{lj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(a_{ki} \sum_{l=1}^{n} s_{kl} b_{lj} \right) = \left({}^{\mathrm{t}}A(SB)\right)_{ij}.$$

Il en résulte :

$$D\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big) = \det({}^{\mathrm{t}}ASB)$$

$$= \det({}^{\mathrm{t}}A)\det(S)\det(B) = \det(A)\det(S)\det(B).$$

b) Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Notons $F = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $G = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$, $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Soient $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in E^n$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y_1,\ldots,y_n)$.

On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(f(x_1),\ldots,f(x_n)\big) = FA$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(g(y_1),\ldots,g(y_n)\big) = GB$.

On déduit de *a)* :

$$D\Big(\big(f(x_1),\ldots,f(x_n)\big),\big(g(y_1),\ldots,g(y_n)\big)\Big) = \det(FA)\det(S)\det(GB)$$

$$= \big(\det(F)\det(A)\big)\det(S)\big(\det(G)\det(B)\big)$$

$$= \det(F)\det(G)\big(\det(A)\det(S)\det(B)\big)$$

$$= \det(F)\det(G)\,D\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big).$$

Conseils

Expression d'une fbs dans une base, cf. § 4.1.2 1) Prop. 1.

On reconnaît le terme ligne i, colonne j du produit de trois matrices.

Les matrices ${}^{\mathrm{t}}A$, S, B sont carrées.

L'ev E admet au moins une base $\mathcal{B}$.

La j-ème colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(x_1),\ldots,f(x_n))$ est formée des coordonnées de $f(x_j)$ dans $\mathcal{B}$, donc est la j-ème colonne de FA.

Les matrices F, A, S, B sont toutes carrées et de même ordre.

Utilisation de *a)*.

Les méthodes à retenir

Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques

- **Pour simplifier par ${}^{\mathrm{t}}X$ ou par Y dans des expressions du genre ${}^{\mathrm{t}}XAY$** où X, Y sont des matrices-colonnes et A une matrice carrée, essayer de faire intervenir le produit scalaire canonique $(X,Y) \longmapsto {}^{\mathrm{t}}XY$ sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et de faire apparaître un vecteur fixe orthogonal à tout vecteur de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ex. 4.1.1 *a)*).

Exercices

4.1.1 *a)* Soit $(A,B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer :

$$\left(\forall (X,Y) \in \big(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2,\ {}^{\mathrm{t}}XAY = {}^{\mathrm{t}}XBY\right) \iff A = B.$$

b) Soit $(A,B) \in \big(\mathbf{S}_n(\mathbb{R})\big)^2$. Montrer :

$$\left(\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^{\mathrm{t}}XAX = {}^{\mathrm{t}}XBX\right) \iff A = B.$$

c) Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$\left(\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^{\mathrm{t}}XAX = 0\right) \iff A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R}).$$

4.1.2 Matrices congruentes

Dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la relation « **être congruente à** », notée ici $\mathcal{C}$, par :

$$A\ \mathcal{C}\ B \iff \left(\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}),\ B = {}^{\mathrm{t}}PAP\right).$$

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Quels liens y a-t-il entre congruence, équivalence, similitude ? On rappelle (cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.2.3 2) Déf., et 8.2.4 Déf.1) que :

• deux matrices A, B de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites **équivalentes**, et on note A eq B, si et seulement si :

$$\exists\, P, Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}),\quad B = Q^{-1}AP$$

• deux matrices A, B de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites **semblables**, et on note $A \sim B$ si et seulement si :

$$\exists\, P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}),\quad B = P^{-1}AP.$$

b) 1) A-t-on : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall A, B, A', B' \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{cases} A\ \mathcal{C}\ B \\ A'\ \mathcal{C}\ B' \end{cases} \Longrightarrow \alpha A + A'\ \mathcal{C}\ \alpha B + B' ?$$

2) Montrer :

$$\forall A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),\ (A\ \mathcal{C}\ B \Longrightarrow {}^{\mathrm{t}}A\ \mathcal{C}\ {}^{\mathrm{t}}B).$$

c) Soit $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$\forall A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),\ (A\ \mathcal{C}\ B \Longrightarrow {}^{\mathrm{t}}MAM\ \mathcal{C}\ {}^{\mathrm{t}}MBM).$$

La propriété subsiste-t-elle si on suppose seulement $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$?

d) Soient $A, B \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R}), A', B' \in \mathbf{M}_q(\mathbb{R})$. Montrer :

$$\begin{cases} A\ \mathcal{C}\ B \\ A'\ \mathcal{C}\ B' \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \mathcal{C} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}.$$

e) Soient $A, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et B sont congruentes si et seulement si elles représentent une même fbs sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans deux bases.

4.2 Rappels sur les espaces euclidiens

L'étude des espaces préhilbertiens réels ou complexes figure déjà dans Analyse PC-PSI-PT, § 1.4, et celle des espaces euclidiens dans Algèbre PCSI-PTSI, §§ 10.1 et 10.2.

Pour le confort du lecteur, nous rappelons ici ce qui est nécessaire à la suite de notre étude.

Dans tout ce § 4.2, le corps utilisé est $\mathbb{R}$, et E désigne un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.

4.2.1 Produit scalaire

Définition 1

On appelle **produit scalaire** sur E toute fbs φ sur $E \times E$ telle qu'en notant ϕ la fq associée à φ, on ait :

(i) $\forall x \in E,\ \phi(x) \geqslant 0$

(ii) $\forall x \in E,\ (\phi(x) = 0 \Longrightarrow x = 0)$.

Lorsque φ est un produit scalaire, on note souvent $(x|y)$ ou $< x, y >$ ou $x \cdot y$ à la place de $\varphi(x, y)$.

Exercice 4.2.1.

Définition 2

On appelle **espace euclidien** tout couple (E, φ) où E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et φ un produit scalaire sur E.

On note souvent E au lieu de (E, φ), le contexte précisant φ.

On abrègera espace (vectoriel) euclidien en : eve.

Ces deux exemples sont fondamentaux.

Exemples :

1) Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

L'application $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé **produit scalaire usuel** (ou : **canonique**) sur $\mathbb{R}^n$.

Revoir la définition et les propriétés de la trace d'une matrice carrée, cf. Algèbre PCSI-PTSI, § 8.1.9 et ce volume, Algèbre et géométrie PC-PSI-PT, § 1.4.

2) Produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

L'application $\varphi : \begin{array}{rcl} (\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \longmapsto & \mathrm{tr}({}^{t}AB) \end{array}$ est un produit scalaire sur $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelé **produit scalaire canonique** sur $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou $\mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{R})$) est, à la notation près, le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soient (E,φ) un eve, ϕ la fq associée à φ. On a :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \big(\varphi(x,y)\big)^2 \leqslant \phi(x)\phi(y).$$

Proposition 1 **Étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soient (E,φ) un eve, ϕ la fq associée à φ, $(x,y) \in E^2$; on a :

$$\big(\varphi(x,y)\big)^2 = \phi(x)\phi(y) \iff (x,y) \text{ lié.}$$

Théorème 2 **Inégalité de Minkowski**

Soient (E,φ) un eve, ϕ la fq associée à φ ; on a :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \big(\phi(x+y)\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \big(\phi(x)\big)^{\frac{1}{2}} + \big(\phi(y)\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 2 **Étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski**

Soient (E,φ) un eve, ϕ la fq associée à φ, $(x,y) \in E^2$; on a :

$$\big(\phi(x+y)\big)^{\frac{1}{2}} = \big(\phi(x)\big)^{\frac{1}{2}} + \big(\phi(y)\big)^{\frac{1}{2}} \iff \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+,\ y = \alpha x \end{array} \right. .$$

On traduit cette dernière condition par : (x,y) est **positivement liée**.

Proposition – Définition 3

Soient (E,φ) un eve, ϕ la fq associée à φ. L'application $||\cdot|| : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\phi(x))^{\frac{1}{2}} \end{array}$ est une norme sur E, appelée **norme euclidienne associée à φ**.

Remarque :

Soient $< .,. >$ un produit scalaire sur E, $||.||$ la norme euclidienne associée. Les formules obtenues en 4.1.1 Prop. 3, *3)*, *4)*, *5)* pp. 131-132 peuvent être récrites sous la forme suivante, pour tout (x,y) de E^2 :

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2 < x,y > + ||y||^2$$
$$||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 4 < x,y >$$
$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz (Th. 1) peut être récrite :

$$(< x,y >)^2 \leqslant ||x||^2 ||y||^2$$

et l'inégalité de Minkowski (Th. 2) peut être récrite :

$$||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||.$$

Exercices 4.2.2 à 4.2.11.

Exercice-type résolu

Famille équiangulaire

Soient $\big(E,(.\,|\,.)\big)$ un eve, $||.||$ la norme euclidienne associée, $n = \dim(E)$.

Pour $(u,v) \in \big(E - \{0\}\big)^2$, on définit l'angle de u et v par : $\operatorname{Arccos} \dfrac{(u\,|\,v)}{||u||\,||v||}$.

On considère $n+1$ éléments $u_0,\ldots,u_n$ de E, unitaires, faisant deux à deux un même angle noté α, tel que $\alpha \neq 0$.

Montrer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = 0$ et calculer α.

Solution

Notons $k = \cos\alpha \in [-1\,;1[$.

Par hypothèse :

$$\begin{cases} \forall i \in \{0,\ldots,n\}, \ \ ||u_i|| = 1 \\ \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \ \ \big(i \neq j \implies (u_i\,|\,u_j) = k\big). \end{cases}$$

Puisque $\dim(E) = n < n+1$, la famille $(u_0,\ldots,u_n)$ est liée.

Il existe donc $(a_0,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{(0,\ldots,0)\}$ tel que : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j u_j = 0$.

On a, pour tout $i \in \{0,\ldots,n\}$:

$$0 = \left(u_i \,\middle|\, \sum_{j=0}^{n} a_j u_j\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j (u_i\,|\,u_j) = a_i + \sum_{0\leqslant j\leqslant n,\ j\neq i} a_j k$$
$$= (a_i - a_i k) + \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right) k.$$

Comme $k \neq 1$, on déduit :

$$\forall i \in \{0,\ldots,n\}, \ \ a_i = \frac{k}{k-1} \sum_{j=0}^{n} a_j.$$

Conseils

En particulier, les a_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, sont tous égaux.

Solution

Notons $t = \dfrac{k}{k-1}\sum_{j=0}^{n} a_j$.

Si $t = 0$, alors $a_0 = \ldots = a_n = t = 0$, contradiction.

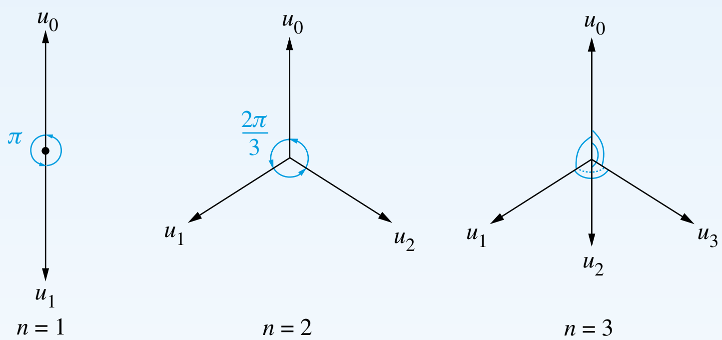
Donc $t \neq 0$, puis : $0 = \sum_{j=0}^{n} a_j u_j = t\sum_{j=0}^{n} u_j$, donc : $\sum_{j=0}^{n} u_j = 0$.

Ensuite :

$$0 = \left|\left|\sum_{j=0}^{n} u_j\right|\right|^2 = \sum_{j=0}^{n} ||u_j||^2 + \sum_{0\leqslant i\neq j\leqslant n} (u_i \mid u_j)$$
$$= (n+1) + (n+1)nk = (n+1)(1+nk).$$

On déduit : $k = -\dfrac{1}{n}$ et donc : $\alpha = \text{Arccos}\left(-\dfrac{1}{n}\right)$.

On peut faire un schéma pour $n = 1, 2, 3$



$\alpha = \text{Arccos}\,(-1) = \pi$ $\quad$ $\alpha = \text{Arccos}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$ $\quad$ $\alpha = \text{Arccos}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

Conseils

t ne dépend pas de i.

La sommation $\sum_{0\leqslant i\neq j\leqslant n}$ comporte $(n+1)n$ termes, tous égaux.

Les méthodes à retenir

Produit scalaire

- **Pour établir une inégalité portant sur des produits scalaires ou des normes**, à utiliser éventuellement l'inégalité de Cauchy-Schwarz (ex. 4.2.2, 4.2.8, 4.2.11 *a*)).
- **Pour montrer qu'une matrice réelle M (*a priori* rectangulaire) est nulle**, il suffit de montrer que sa norme euclidienne usuelle est nulle, c'est-à-dire que $\text{tr}({}^{\text{t}}MM) = 0$ (ex. 4.2.3, 4.2.4, 4.2.6).
- Le résultat de l'exercice 4.2.5, essentiellement l'égalité $\text{rg}({}^{\text{t}}AA) = \text{rg}(A)$, peut être utile pour d'autres exercices (ex. 4.2.9). La ligne de calcul :

$$< X, {}^{\text{t}}AAX >= {}^{\text{t}}X\,{}^{\text{t}}AAX = {}^{\text{t}}(AX)AX = ||AX||_2^2$$

  est importante.
- **Pour étudier une matrice H de rang $\leqslant 1$** (ex. 4.2.10), il peut être utile de se rappeler qu'on peut décomposer H en $H = U\,{}^{\text{t}}V$, où U, V sont des colonnes (cf. Algèbre PCSI-PTSI, ex. 8.1.30).

Exercices

4.2.1 Soient E un $\mathbb{R}$-ev $\neq \{0\}$, φ un produit scalaire sur E, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\psi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\psi(x,y) = a\varphi(x,x) + b\varphi(x,y) + c\varphi(y,y).$$

CNS sur (a,b,c) pour que ψ soit un produit scalaire sur E.

4.2.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A,B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), X,\ Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer :

$$({}^tX\,{}^tABY)^2 \leqslant ({}^tX\,{}^tAAX)({}^tY\,{}^tBBY).$$

4.2.3 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer :

$${}^tAA = 0 \Longrightarrow A = 0.$$

4.2.4 Soient $n,p,q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $B,\ C \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer :

$$BA\,{}^tA = CA\,{}^tA \Longrightarrow BA = CA.$$

4.2.5 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Comparer noyaux, images, rangs de A, ${}^tA$, ${}^tAA$, $A\,{}^tA$.

4.2.6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$${}^tAA = A\,{}^tA \quad \text{et} \quad A^4 = 2A^2 - \mathrm{I}_n.$$

Montrer : $A^2 = \mathrm{I}_n$.

4.2.7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & {}^tV \\ V & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Quels sont les rangs de A et A^2 ?

4.2.8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A,B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ tels que (A,B) soit libre, et $f : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(X) = \mathrm{tr}({}^tAX)B - \mathrm{tr}({}^tBX)A.$$

L'endomorphisme f de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est-il diagonalisable ?

4.2.9 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = p$; on note $B = {}^tAA$.

a) Montrer : $B \in \mathbf{GL}_p(\mathbb{R})$. (Utiliser l'ex. 4.2.5).

b) On note $C = AB^{-1}\,{}^tA$. Établir :

$$C^2 = C, \quad \mathrm{Im}(C) = \mathrm{Im}(A), \quad \mathrm{Ker}(C) = \mathrm{Ker}({}^tA).$$

4.2.10 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $H \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ non symétrique et telle que $\mathrm{rg}(H) = 1$; on note $A = H + {}^tH$.
a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A (dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). On pourra montrer qu'il existe $(U,V) \in \big(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2$ libre tel que $H = U\,{}^tV$, puis exprimer les vp et les $\overrightarrow{\text{vp}}$ de H en fonction de U et V.
b) A est-elle diagonalisable (dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$) ?

4.2.11 Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ||AV|| \leqslant ||V||,$$

où $||\cdot||$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Montrer : $\quad \forall V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ||{}^tAV|| \leqslant ||V||$.

b) Montrer :

$$\forall V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ (AV = V \Longleftrightarrow {}^tAV = V).$$

c) Établir que $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n)$ et $\mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n)$ sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

4.2.2 Orthogonalité

Définition

Soit $(E, <\cdot,\cdot>)$ un espace vectoriel euclidien.

1) Soit $(x,y) \in E^2$; on dit que x est **orthogonal à** y, et on note $x \perp y$, si et seulement si : $\quad <x,y> = 0$.

2) Soient $x \in E$, $A \in \mathfrak{P}(E)$; on dit que x est **orthogonal à** A, et on note $x \perp A$, si et seulement si : $\ \forall a \in A,\ <x,a> = 0$.

3) Pour toute partie A de E, on définit l'**orthogonal de** A, noté $A^\perp$:

$$A^\perp = \{x \in E;\ \forall a \in A,\ <x,a> = 0\}.$$

4) Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est dite **orthogonale** si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in I^2,\ (i \neq j \Longrightarrow\ <x_i,x_j> = 0).$$

5) Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est dite **orthonormale** si et seulement si :

$$\begin{cases} (x_i)_{i\in I} \text{ est orthogonale} \\ \forall i \in I,\ ||x_i|| = 1. \end{cases}$$

Proposition 1

Soit $(E,<\cdot,\cdot>)$ un eve.

1) Pour toute partie A de E , $A^\perp$ est un sev de E.

2) $\forall (A,B) \in (\mathfrak{P}(E))^2,\ (A \subset B \Longrightarrow A^\perp \supset B^\perp)$.

3) $\forall A \in \mathfrak{P}(E),\ \ A^\perp = \big(\text{Vect}\,(A)\big)^\perp$.

4) Pour tout sev F de E : $F \oplus F^\perp = E$, et donc : $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

5) $\forall A \in \mathfrak{P}(E),\ \ A^{\perp\perp} = \text{Vect}\,(A)$.

6) $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$.

7) $\forall A \in \mathfrak{P}(E),\ A \cap A^\perp \subset \{0\}$.

8) Pour tous sev F,G de E :

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad \text{et} \quad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

D'après *1)* et *7)*, si A est un sev de E, alors :

$$A \cap A^\perp = \{0\}.$$

Proposition 2

Soient $(E,<\cdot,\cdot>)$ un eve, $(x_i)_{i\in I}$ une famille dans E.

Si $\left\{\begin{array}{l} (x_i)_{i\in I} \text{ est orthogonale} \\ \forall i \in I,\ x_i \neq 0 \end{array}\right|$, alors $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

Propriété souvent utile pour les exercices.

Proposition 3 Théorème de Pythagore

Soient $(E,<\cdot,\cdot>)$ un eve, $(x,y) \in E^2$. On a :

$$x \perp y \Longleftrightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \Longleftrightarrow ||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Théorème Orthogonalisation de Schmidt

Soient $(E,<\cdot,\cdot>)$ un eve, $p \in \mathbb{N}^*$, $(e_1,\ldots,e_p)$ une famille libre dans E. Il existe $(V_1,\ldots,V_p) \in E^p$ tel que :

$$\begin{cases} V_1,\ldots,V_p \text{ sont deux à deux orthogonaux} \\ \forall k \in \{1,\ldots,p\},\ \text{Vect}\,(V_1,\ldots,V_k) = \text{Vect}\,(e_1,\ldots,e_k) \end{cases}$$

(et donc : $\forall k \in \{1,\ldots,p\},\ V_k \neq 0$).

Le procédé d'orthogonalisation de Schmidt intervient, par exemple, dans la construction de suites de polynômes orthogonaux.

Remarque :

En imposant à $(V_1,\ldots,V_p)$ la condition :

$$\forall k \in \{1,\ldots,p\},\ < V_k,e_k >= 1,$$

il y a alors unicité de $(V_1,\ldots,V_p)$, et la matrice de passage de $(e_1,\ldots,e_p)$ à $(V_1,\ldots,V_p)$ est triangulaire supérieure à termes diagonaux égaux à 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

On abrège base orthonormale (ou : orthonormée) en : b.o.n.

Corollaire 1 Théorème de la base orthonormée incomplète

Pour toute famille orthonormale $(e_1,\ldots,e_p)$ d'un eve E, il existe $e_{p+1},\ldots,e_n \in E$ (où $n = \dim(E)$) tels que $(e_1,\ldots,e_n)$ soit une b.o.n. de E.

Corollaire 2

Tout eve admet au moins une b.o.n.

Proposition 4

Décomposition d'un vecteur sur une b.o.n.

Si $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ est une b.o.n. de $(E,< \cdot,\cdot >)$ alors :

$$\forall x \in E,\quad x = \sum_{i=1}^{n} < e_i,x > e_i.$$

Proposition 5

Soient $(E,<\cdot,\cdot>)$ un eve, $\mathcal{B}$ une base de E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(<\cdot,\cdot>)$. Alors :

$$\left|\begin{array}{l} \mathcal{B} \text{ est orthogonale si et seulement si } A \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}) \\ \mathcal{B} \text{ est orthonormale si et seulement si } A = \mathrm{I}_n\ . \end{array}\right.$$

Preuve

D'après 4.1.2 1) Déf. p. 132 : $A = (< e_i,e_j >)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Proposition 6

Expression dans une b.o.n., du produit scalaire de deux vecteurs.

Si $\mathcal{B}$ est une b.o.n. de E, on a, pour tout (x,y) de E^2 et en notant $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$:

$$< x,y > = {}^{\mathrm{t}}XY.$$

Exercices 4.2.12 à 4.2.15.

Exercice-type résolu

Déterminant de Gram et un exemple

Soient $\big(E,(.\,|\,.)\big)$ un espace préhilbertien réel, $||.||$ la norme associée.

a) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\ldots,x_p) \in E^p$, on note :

$$\begin{cases} G(x_1,\ldots,x_p) = \big((x_i\,|\,x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R}) \\ \gamma(x_1,\ldots,x_p) = \det\big(G(x_1,\ldots,x_p)\big), \end{cases}$$

appelés respectivement **matrice de Gram** et **déterminant de Gram** de la famille $(x_1,\ldots,x_p)$.

1) Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une bon de $X = \mathrm{Vect}\,(x_1,\ldots,x_p)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_p)$. Montrer : $G(x_1,\ldots,x_p) = {}^{\mathrm{t}}AA$.

2) Établir :

$$\mathrm{rg}\,\big(G(x_1,\ldots,x_p)\big) = \mathrm{rg}\,(x_1,\ldots,x_p).$$

3) Montrer :

$$\begin{cases} (x_1,\ldots,x_p) \text{ liée} \iff \gamma(x_1,\ldots,x_p) = 0 \\ (x_1,\ldots,x_p) \text{ libre} \iff \gamma(x_1,\ldots,x_p) > 0. \end{cases}$$

b) Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(u_1,\ldots,u_p)$ une famille d'éléments de E telle qu'il existe $a \in [-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}] - \{0\}$ tel que :

$$\begin{cases} \forall\, i \in \{1,\ldots,p\},\ \ ||u_i|| = 1 \\ \forall\,(i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2,\ \ \big(i \neq j \implies ||u_i - u_j|| = a\big). \end{cases}$$

Montrer que la famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est libre.

Solution

a) 1) L'eve X admet au moins une b.o.n. $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$.
En notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_p) = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall\, j \in \{1,\ldots,p\},\ \ x_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k,$$

donc, puisque $\mathcal{B}$ est orthonormale :

$$\forall\,(i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2,\ \ (x_i\,|\,x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}.$$

Il en résulte : $G(x_1,\ldots,x_p) = {}^{\mathrm{t}}AA$.

2) • Soit $Y \in \mathrm{Im}\,({}^{\mathrm{t}}AA)$.

Il existe $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que : $Y = ({}^{\mathrm{t}}AA)X$.

On a alors : $Y = {}^{\mathrm{t}}A(AX) \in \mathrm{Im}\,({}^{\mathrm{t}}A)$.

Ceci montre : $\mathrm{Im}\,({}^{\mathrm{t}}AA) \subset \mathrm{Im}\,({}^{\mathrm{t}}A)$, et donc, en passant aux dimensions :

$$\mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}AA) \leqslant \mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{rg}\,(A).$$

• Soit $X \in \mathrm{Ker}\,({}^{\mathrm{t}}AA)$. On a alors $({}^{\mathrm{t}}AA)X = 0$, donc :

$$||AX||_2^2 = {}^{\mathrm{t}}(AX)(AX) = {}^{\mathrm{t}}X({}^{\mathrm{t}}AAX) = 0,$$

donc $AX = 0$, $X \in \mathrm{Ker}\,(A)$.

Conseils

$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$ est le terme, ligne i, colonne j, de la matrice ${}^{\mathrm{t}}AA$.

C'est un cas particulier de l'inclusion :

$$\mathrm{Im}\,(g\circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g),$$

pour $f \in \mathcal{L}(E,f)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$, E,F,G K-ev.

D'après le Cours de MPSI, A et ${}^{\mathrm{t}}A$ ont le même rang.

$||.||_2$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Solution

Ceci montre : $\operatorname{Ker}({}^tAA) \subset \operatorname{Ker}(A)$, et donc, en passant aux dimensions :

$$\dim\big(\operatorname{Ker}({}^tAA)\big) \leqslant \dim\big(\operatorname{Ker}(A)\big).$$

Il en résulte, en utilisant le théorème du rang :

$$\operatorname{rg}({}^tAA) = p - \dim\big(\operatorname{Ker}({}^tAA)\big) \geqslant p - \dim\big(\operatorname{Ker}(A)\big) = \operatorname{rg}(A).$$

Finalement : $\operatorname{rg}({}^tAA) = \operatorname{rg}(A)$.

D'après *1)*, on peut conclure : $\operatorname{rg}\big(G(x_1,\dots,x_p)\big) = \operatorname{rg}(x_1,\dots,x_p)$.

3) • D'après *2)* :

$$(x_1,\dots,x_p) \text{ liée} \iff \operatorname{rg}(A) < p$$

$$\iff \operatorname{rg}\big(G(x_1,\dots,x_p)\big) < p \iff \gamma(x_1,\dots,x_p) = 0.$$

• Si $(x_1,\dots,x_p)$ est libre, alors, avec les notations de *a) 1)*, $p = n$, $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, donc :

$$\gamma(x_1,\dots,x_p) = \det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A) = \big(\det(A)\big)^2 > 0.$$

Réciproquement, si $\gamma(x_1,\dots,x_p) > 0$, alors $(x_1,\dots,x_p)$ n'est pas liée, donc est libre.

On conclut : $(x_1,\dots,x_p)$ libre $\iff \gamma(x_1,\dots,x_p) > 0$.

b) On a, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ tel que $i \neq j$:

$$a^2 = ||u_i - u_j||^2 = ||u_i||^2 - 2(u_i \mid u_j) + ||u_j||^2 = 2 - 2(u_i \mid u_j),$$

d'où : $(u_i \mid u_j) = 1 - \dfrac{a^2}{2}$, noté b.

Calculons le déterminant de Gram de $(u_1,\dots,u_n)$:

$$\gamma(u_1,\dots,u_n) = \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ b & \ddots & (b) & \vdots \\ \vdots & (b) & \ddots & b \\ b & \dots & b & 1 \end{vmatrix}_{[n]} = \big(1+(n-1)b\big)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 1 & \ddots & (b) & \vdots \\ \vdots & (b) & \ddots & b \\ 1 & \dots & b & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= \big(1+(n-1)b\big)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 0 & 1-b & 0 & (0) & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1-b \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= \big(1+(n-1)b\big)(1-b)^{n-1}.$$

On a :

$$1+(n-1)b = 1+(n-1)\left(1-\frac{a^2}{2}\right) = n-(n-1)\frac{a^2}{2} \geqslant n-(n-1) = 1,$$

et :

$$1-b = 1-\left(1-\frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2} \neq 0, \text{ car } a \neq 0.$$

On déduit $\gamma(u_1,\dots,u_n) \neq 0$, et, d'après *a) 3)*, on conclut : $(u_1,\dots,u_n)$ est libre.

Conseils

On applique le théorème du rang à A et à ${}^tAA$.

Attention : ne pas développer $\det({}^tAA)$ en $\det({}^tA)\det(A)$, qui n'est pas défini puisque A est **rectangulaire**.

Ici, les matrices A et ${}^tA$ sont carrées.

$C_1 \longleftarrow C_1 + (C_2 + \dots + C_n)$.

$L_i \longleftarrow L_i - L_1,\ 2 \leqslant i \leqslant n$.

Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.

Car $a \in [-\sqrt{2}\ \sqrt{2}]$, donc $\dfrac{a^2}{2} \leqslant 1$.

Les méthodes à retenir

Orthogonalité

- **Pour obtenir certaines inégalités portant sur des produits scalaires ou des normes**, il peut être intéressant d'introduire un paramètre λ réel dans une inégalité liée à la notion de produit scalaire, puis de faire varier λ et de choisir λ au mieux (ex. 4.2.12), cf. la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, Algèbre PCSI-PTSI, § 10.1.2.
- **Pour l'étude d'un espace vectoriel euclidien**, songer à faire intervenir une base orthonormée (ex. 4.2.13).
- **Pour montrer qu'un sev G d'un espace vectoriel euclidien E est l'orthogonal d'un sev F de E** (ex. 4.2.14), il suffit de montrer :

$$\begin{cases} \forall x \in F,\ \forall y \in G,\ < x,y > = 0 \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E). \end{cases}$$

Exercices

4.2.12 Soient $(E,(\cdot|\cdot))$, un espace préhilbertien réel, $||\cdot||$ la norme associée, F un sev de E, $x \in E$. Montrer :

$$x \in F^{\perp} \Longleftrightarrow \left(\forall\, y \in F,\ (x|y) \leqslant ||y||^2\right).$$

4.2.13 Soient φ, ψ deux produits scalaires sur un $\mathbb{R}$-ev E de dimension finie tels que :

$$\forall\,(x,y) \in E^2,\ \left(\varphi(x,y) = 0 \Longrightarrow \psi(x,y) = 0\right).$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall\,(x,y) \in E^2,\ \psi(x,y) = \alpha\varphi(x,y).$$

4.2.14 On munit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Quels sont les orthogonaux de $\mathbf{D}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$?

4.2.15 Soient $n \in \mathbb{N}^*$,

$A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$,

$$H = \{Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R});\ {}^{t}XY = 0\}.$$

Montrer que X est vecteur propre de ${}^{t}A$ si et seulement si H est stable par A.

4.3 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien

Dans ce § 4.3, $(E,< \cdot,\cdot >)$ désigne un eve, $n = \dim(E) \geqslant 1$.

4.3.1 Endomorphismes symétriques

1) Généralités

Définition 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **symétrique** (ou : **auto-adjoint**) si et seulement si :

$$\forall\,(x,y) \in E^2,\ < f(x),y > = < x,f(y) > .$$

Notons $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Il est clair que $\mathcal{S}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 1

Soient $(E, <\cdot,\cdot>)$ un eve, $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E, $f \in \mathcal{L}(E)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On a :

$$f \in \mathcal{S}(E) \iff A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi, le vocabulaire est cohérent : les endomorphismes symétriques correspondent, dans une b.o.n., aux matrices symétriques.

Preuve

On a : $\quad \forall x,y \in E, \quad < f(x), y > = < x, f(y) >$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall X,Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^t(AX)Y = {}^tXAY \\
&\iff \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left(\forall Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^t((A - {}^tA)X)Y = 0\right) \\
&\iff \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ (A - {}^tA)X = 0 \\
&\iff A - {}^tA = 0 \iff A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Le vecteur $(A - {}^tA)X$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc est nul.

Cf. aussi ex. 4.1.1 p. 136.

Remarques :

1) Soient $(E, <\cdot,\cdot>)$ un eve, $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E. L'application

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{S}(E) &\longrightarrow \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \\
f &\longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)
\end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev. En particulier, $\mathcal{S}(E)$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathcal{S}(E)) = \dim(\mathbf{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Étudier un endomorphisme symétrique revient à étudier une matrice symétrique, à l'aide d'une b.o.n.

2) On veillera à ne pas confondre :

$\mathcal{S}(E;K)$	et	$\mathcal{S}(E)$
fbs φ	et	endomorphisme symétrique f
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$	et	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Rappel de notation :
$\mathcal{S}(E,K)$ est l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E.

Plus précisément l'application $\theta : \mathcal{S}(E) \longrightarrow \mathcal{S}(E;K)$ qui, à chaque endomorphisme symétrique f de E associe la fbs φ définie par

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = < x, f(y) >$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev et, pour toute b.o.n. $\mathcal{B}$ de E : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, puisque, en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, on a, pour tout (x,y) de en notant E^2, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$:

$$< x, f(y) > = {}^tX(AY) = {}^tXAY.$$

Proposition 2

On a :

1) $\forall f,g \in \mathcal{S}(E), \quad \left(g \circ f \in \mathcal{S}(E) \iff g \circ f = f \circ g\right)$

2) $\forall f \in \mathcal{S}(E), \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k \in \mathcal{S}(E)$

3) $\forall f \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{GL}(E), \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ f^k \in \mathcal{S}(E).$

Attention : le composé de deux endomorphismes symétriques n'est pas, en général, symétrique.

Preuve :

1ère méthode

1) Soit $(f,g) \in (\mathcal{S}(E))^2$. On a :

$$\begin{aligned} g \circ f \in \mathcal{S}(E) &\Longleftrightarrow \Big(\forall (x,y) \in E^2,\ <(g \circ f)(x), y> = <x, (g \circ f)(y)>\Big) \\ &\Longleftrightarrow \Big(\forall (x,y) \in E^2,\ <f(x), g(y)> = <x, (g \circ f)(y)>\Big) \\ &\Longleftrightarrow \Big(\forall (x,y) \in E^2,\ <x, (f \circ g)(y)> = <x, (g \circ f)(y)>\Big) \\ &\Longleftrightarrow \Big(\forall y \in E,\ f \circ g(y) = g \circ f(y)\Big) \\ &\Longleftrightarrow f \circ g = g \circ f. \end{aligned}$$

Le vecteur

$$(f \circ g)(y) - (g \circ f)(y)$$

est orthogonal à tout vecteur de E si et seulement s'il est nul.

2) Résulte de *1)* pour $k \in \mathbb{N}^*$, par récurrence ; et $f^0 = \mathrm{Id}_E \in \mathcal{S}(E)$.

3) Soit $f \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{GL}(E)$.

• On a, pour tout (x,y) de E^2 :

$$\begin{aligned} <f^{-1}(x), y> = <f^{-1}(x), f(f^{-1}(y))> &= <f\big(f^{-1}(x)\big), f^{-1}(y)> \\ &= <x, f^{-1}(y)>, \end{aligned}$$

donc $f^{-1} \in \mathcal{S}(E)$.

Si $k \in \mathbb{Z}_-$, alors $-k \in \mathbb{N}$.

• Appliquer *2)* à f^{-1} et $-k$ pour obtenir : $\quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f^k = (f^{-1})^{-k} \in \mathcal{S}(E)$.

2ème méthode

La Prop. est conséquence de la Prop. analogue sur les matrices symétriques réelles (cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.4.1 1) Prop. 2 et 3). ■

Exercices 4.3.1 à 4.3.4.

2) Orthoprojecteurs, symétries orthogonales

Nous rappelons et complétons l'étude vue dans Algèbre PCSI-PTSI, § 10.2.2.

Définition 2

Pour tout sev F de E, on appelle **orthoprojecteur** (ou : **projecteur orthogonal**) sur F, et on note p_F le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$. Pour $x \in E$, $p_F(x)$ s'appelle le **projeté orthogonal de x sur F**.

On a donc :

$$\begin{cases} p_F \circ p_F = p_F, \quad \mathrm{Im}(p_F) = F, \quad \mathrm{Ker}(p_F) = F^\perp \\ \forall x \in E, \quad \big(p_F(x) \in F,\ x - p_F(x) \in F^\perp\big). \end{cases}$$

Définition 3

Soient F un sev de E, $x \in E$. On appelle **distance de x à F**, et on note $d(x,F)$, le réel défini par :

$$d(x,F) = \operatorname*{Inf}_{y \in F} ||x - y||.$$

Proposition 3

Soient F un sev de E, $x \in E$. On a

$$\begin{cases} \forall y \in F, \ ||x - y|| \geqslant ||x - p_F(x)|| \\ \forall y \in F, \ \big(||x - y|| = ||x - p_F(x)|| \iff y = p_F(x)\big). \end{cases}$$

Autrement dit, l'application $\begin{matrix} F \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto ||x-y|| \end{matrix}$ admet une borne inférieure et celle-ci est atteinte en $p_F(x)$ seulement.

Expression du projeté orthogonal de x sur F à l'aide d'une b.o.n. de F.

Proposition 4

Soient F un sev de E, $(e_1,\dots,e_p)$ une b.o.n. de F. On a alors :

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < e_i, x > e_i .$$

Caractérisation des orthoprojecteurs parmi les projecteurs.

Proposition 5

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur $(p \circ p = p)$. Alors p est un orthoprojecteur si et seulement si p est symétrique.

Preuve

1) Soient p un orthoprojecteur et $(x,y) \in E^2$. On a :

On remplace y par :

$$(y - p(y)) + p(y).$$

$$< p(x), y > = < p(x), y - p(y) > + < p(x), p(y) > = < p(x), p(y) >$$

car $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et $y - p(y) \in \mathrm{Ker}(p) = (\mathrm{Im}(p))^{\perp}$.

De même : $< x, p(y) > = < p(y), x > = < p(y), p(x) > = < p(x), p(y) >$.

On a donc : $\forall (x,y) \in E^2,\ < p(x), y > = < (x, p(y) > \big(= < p(x), p(y) > \big)$,

et finalement, p est symétrique.

2) Réciproquement, soit p un projecteur symétrique de E. On a :

Puisque p est un projecteur, on a, pour tout $y \in \mathrm{Im}(p)$:

$$p(y) = y.$$

$$\forall (x,y) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p), \quad < x, y > = < x, p(y) > = < p(x), y > = 0,$$

donc p est un orthoprojecteur. ■

Proposition 6

Soit p un projecteur orthogonal de E. Il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $r = \mathrm{rg}(p)$.

Preuve

Il existe une b.o.n. $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Im}(p)$ et une b.o.n. $\mathcal{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(p)$. Comme $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une b.o.n. de E convenant. ■

Exercice 4.3.5.

Définition 4

Pour tout sev F de E, on appelle **symétrie orthogonale par rapport à F** l'endomorphisme s_F de E défini par $s_F = 2p_F - e$, où p_F est le projecteur orthogonal sur F, et $e = \mathrm{Id}_E$.

Il est clair que :
$$\begin{cases} s_F \circ s_F = e \\ \mathrm{Ker}(s_F - e) = F, \ \ \mathrm{Ker}(s_F + e) = F^{\perp} \\ p_F = \dfrac{1}{2}(e + s_F). \end{cases}$$

• $\mathrm{Ker}(s_F - e)$ est l'ensemble des invariants de s_F

• $\mathrm{Ker}(s_F + e)$ est l'ensemble des anti-invariants de s_F.

Caractérisation des symétries orthogonales parmi les symétries.

Proposition 7

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie $(s \circ s = e)$. Alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est symétrique.

Preuve

Notons $p = \dfrac{1}{2}(e+s)$.

Comme $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(s+e)$ et $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(s-e)$ (car $x = p(x) \iff s(x) = x$), on a schématiquement, en utilisant la Prop. 5 p. 149 :

$$\begin{aligned}(s \text{ symétrie orthogonale}) &\iff (p \text{ projecteur orthogonal})\\ &\iff (p \text{ symétrique}) \iff (s \text{ symétrique}).\end{aligned}$$

Remarque :

On notera l'incohérence du vocabulaire établi : endomorphisme symétrique et symétrie sont loin d'être synonymes.

Ne pas confondre l'entier p et un éventuel projecteur p.

Proposition 8

Soit s une symétrie orthogonale de E. Il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_q \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad p = \dim\big(\mathrm{Ker}(s-e)\big), \quad q = \dim\big(\mathrm{Ker}(s+e)\big).$$

Définition 5

On appelle **réflexion** (de E) toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

Exercice-type résolu 1

Un exemple d'endomorphisme symétrique sur un espace de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note E le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire $(.\,|\,.)$ défini par :

$$\forall\, P, Q \in E, \quad (P\,|\,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $P \in E$, on note $T(P) = (\mathrm{X}^2 - \mathrm{X})P'' + (2\mathrm{X}-1)P'$. Montrer que T est un endomorphisme symétrique de $\big(E, (.\,|\,.)\big)$.

Solution

1) Soit $P \in E$. Il est clair que $T(P) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, et on a :

$$\deg\big((\mathrm{X}^2-\mathrm{X})P''\big) = 2 + \deg(P'') \leqslant 2 + (n-2) = n$$

et

$$\deg\big((2\mathrm{X}-1)P'\big) = 1 + \deg(P') \leqslant 1 + (n-1) = n,$$

d'où, par addition :

$$\deg\big(T(P)\big) \leqslant \mathrm{Max}\Big(\deg\big((\mathrm{X}^2-\mathrm{X})P''\big), \deg\big((2\mathrm{X}-1)P'\big)\Big) \leqslant n.$$

Ceci montre :

$$\forall\, P \in E, \quad T(P) \in E.$$

Conseils

Ne pas oublier de montrer que T va de E dans E.

Solution

Conseils

2) La linéarité de T est immédiate, car, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $P, Q \in E$:

$$T(\alpha P + Q) = (X^2 - X)(\alpha P + Q)'' + (2X - 1)(\alpha P + Q)'$$
$$= \alpha(X^2 - X)P'' + (X^2 - X)Q'' + \alpha(2X - 1)P' + (2X - 1)Q'$$
$$= \alpha\big((X^2 - X)P'' + (2X - 1)P'\big) + \big((X^2 - X)Q'' + (2X - 1)Q'\big)$$
$$= \alpha T(P) + T(Q).$$

3) Soit $(P, Q) \in E^2$.

On a :

$$\big(T(P) \,|\, Q\big) = \int_0^1 T(P)(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \big((x^2 - x)P''(x) + (2x - 1)P'(x)\big)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

On intègre par parties :

$$\begin{cases} u' = (x^2 - x)P''(x) + (2x - 1)P'(x) \\ v = Q(x), \end{cases}$$
$$\begin{cases} u = (x^2 - x)P'(x) \\ v' = Q'(x). \end{cases}$$

$$\big(T(P) \,|\, Q\big) = \big[(x^2 - x)P'(x)Q(x)\big]_0^1 - \int_0^1 (x^2 - x)P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_0^1 (x^2 - x)P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans cette dernière expression, P et Q ont des rôles symétriques, donc, en appliquant le résultat ci-dessus au couple (Q, P) à la place du couple (P, Q), on obtient :

$$\big(T(P) \,|\, Q\big) = \int_0^1 (x^2 - x)P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x = \big(T(Q) \,|\, P\big) = \big(P \,|\, T(Q)\big).$$

Le produit scalaire est symétrique.

Finalement : T est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice-type résolu 2

Orthoprojecteurs

Soient $\big(E, (.\,|\,.)\big)$ un eve, $||.||$ la norme euclidienne associée.

a) Soit p un projecteur de E. Montrer que p est un orthoprojecteur si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad ||p(x)|| \leqslant ||x||.$$

b) Soient p, q deux orthoprojecteurs de E. On suppose que $p \circ q$ est un projecteur de E. Montrer que $p \circ q$ est un orthoprojecteur et que : $p \circ q = q \circ p$.

Solution

Conseils

a) 1) Supposons que p est un orthoprojecteur de E.

Soit $x \in E$. On a : $x - p(x) \in \operatorname{Ker}(p)$ et $p(x) \in \operatorname{Im}(p)$, donc $x - p(x) \perp p(x)$, d'où, d'après le théorème de Pythagore :

Puisque p est un orthoprojecteur, $\operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont orthogonaux entre eux.

$$||x||^2 = \big|\big|\big(x - p(x)\big) + p(x)\big|\big|^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x)||^2,$$

et on conclut : $||p(x)|| \leqslant ||x||$.

Solution

2) Réciproquement, supposons : $\forall x \in E,\ ||p(x)|| \leqslant ||x||$.

Soit $(x,y) \in \text{Ker}\,(p) \times \text{Im}\,(p)$.

On a donc $p(x) = 0$ et $p(y) = y$.

On a alors, d'après l'hypothèse :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||p(y+\lambda x)||^2 \leqslant ||y+\lambda x||^2,$$

c'est-à-dire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||y||^2 \leqslant ||y||^2 + 2\lambda(x \mid y) + \lambda^2||x||^2,$$

ou encore :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||x||^2\lambda^2 + 2(x \mid y)\lambda \geqslant 0.$$

Il s'ensuit : $4(x \mid y)^2 \leqslant 0$, donc $(x \mid y) = 0$.

Ceci montre que $\text{Ker}\,(p)$ et $\text{Im}\,(p)$ sont orthogonaux, donc p est un orthoprojecteur.

b) • On a, d'après *a)* :

$$\forall x \in E,\ ||(p \circ q)(x)|| = \big|\big|p\big(q(x)\big)\big|\big| \leqslant ||q(x)|| \leqslant ||x||.$$

Comme $p \circ q$ est un projecteur, d'après *a)*, il en résulte que $p \circ q$ est un orthoprojecteur.

• Puisque $p,\ q,\ p \circ q$ sont des orthoprojecteurs, ils sont symétriques, d'où, pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$\big(x \mid (q \circ p)(y)\big) = \big(q(x) \mid p(y)\big) = \big(p\big(q(x)\big) \mid y\big) = \big(p \circ q(x) \mid y\big) = \big(x \mid p \circ q(y)\big),$$

d'où : $\forall y \in E,\ q \circ p(y) = p \circ q(y)$, et donc : $q \circ p = p \circ q$.

Remarque : En utilisant la notion d'adjoint, vue plus loin (§ 4.4 p. 158), on peut donner une solution plus courte pour cette dernière question :

$$q \circ p = q^* \circ p^* = (p \circ q)^* = p \circ q.$$

Conseils

Puisque p est un projecteur et que $y \in \text{Im}\,(p)$, on a : $p(y) = y$.

Penser à introduire un paramètre réel, comme dans la preuve classique de l'inégalité de Cauchy et Schwarz.

On a : $p(y) = y$ et $p(x) = 0$.

Si un trinôme réel est $\geqslant 0$ pour tous les réels, alors son discriminant est $\leqslant 0$.

On applique un sens de *a)* à p puis à q, qui sont des orthoprojecteurs.

Le vecteur fixé $q \circ p(y) - p \circ q(y)$ est orthogonal à tout vecteur x de E, donc est nul.

Les méthodes à retenir

Endomorphismes symétriques

- **Pour établir certaines inégalités**, penser à l'intervention de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (ex. 4.3.3 *b)*).
- **Pour calculer le projeté orthogonal d'un élément x d'un espace vectoriel euclidien $(E, <.,.>)$ sur un sev F de E, si l'on connaît une b.o.n. $(e_1,\dots,e_p)$ de F** (ex. 4.3.5), il suffit d'appliquer la formule de la Prop. 4 :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < e_i, x > \ e_i.$$

Exercices

4.3.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent chaque fois la troisième :

(i) ${}^tA = A$ (ii) ${}^tAA = A$ (iii) $A^2 = A$.

4.3.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, λ, μ deux vp de A telles que $\lambda \neq \mu$, U (resp. V) un $\overrightarrow{\text{vp}}$ pour A associé à λ (resp. μ). Montrer que ${}^tVU = 0$ et que $U\,{}^tV$ est nilpotente.

4.3.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = A$ et $A^2 = A$. Montrer :

a) $0 \leqslant \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} \leqslant n$

b) $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{\text{rg}(A)}$

c) $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| < n^{\frac{3}{2}}$ (si $n \geqslant 2$).

4.3.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$; déterminer le commutant de $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire :

$$\{M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R});\ \forall A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}.$$

4.3.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on munit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, et on note $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$,

$F = \text{Vect}\{U^k ; 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & 0 & \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $(U^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base orthogonale de F.

b) En déduire le projeté orthogonal de A sur F.

4.3.2 Endomorphismes orthogonaux

Nous reprenons et complétons ici l'étude figurant dans Algèbre PCSI-PTSI, 10.3.

Dans ce § 4.3.2, $(E, < \cdot, \cdot >)$ désigne un eve, $n = \dim(E) \geqslant 1$.

1) Généralités

Définition 1

Un endomorphisme f de E est dit **orthogonal** si et seulement si f conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) > = < x, y > .$$

On note $\mathcal{O}(E, < \cdot, \cdot >)$ (ou : $\mathcal{O}(E)$) l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

Le vocabulaire classique est ici inconséquent, puisqu'un projecteur orthogonal de E (autre que Id_E), n'est pas un endomorphisme orthogonal de E.

Proposition 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in \mathcal{O}(E)$

(ii) $\forall x \in E,\ ||f(x)|| = ||x||$.

Les éléments de $\mathcal{O}(E)$ sont aussi appelés **isométries vectorielles**.

En pratique :

• Si $f \in \mathcal{O}(E)$ et si $\mathcal{B}$ est une b.o.n. de E, alors $f(\mathcal{B})$ est une b.o.n. de E

• Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et s'il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E, telle que $f(\mathcal{B})$ soit une b.o.n. de E, alors $f \in \mathcal{O}(E)$.

Proposition 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) $f \in \mathcal{O}(E)$

(ii) Pour toute b.o.n. $\mathcal{B}$ de E, $f(\mathcal{B})$ est une b.o.n. de E

(iii) Il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E telle que $f(\mathcal{B})$ soit une b.o.n. de E.

Proposition - Définition 3

L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des endomorphismes orthogonaux de E est un groupe pour la loi $\circ$, appelé **groupe orthogonal de** $(E, < \cdot,\cdot >)$ (ou : de E).

Définition 2

Une matrice Ω de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, représenté par Ω dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel.

On note $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 4

Soient $\Omega \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n, $< \cdot,\cdot >$ un produit scalaire sur E. Les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

1) $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$

2) ${}^t\Omega\,\Omega = \mathrm{I}_n$

3) $\Omega\,{}^t\Omega = \mathrm{I}_n$

4) Pour toute b.o.n. $\mathcal{B}$ de E, l'endomorphisme représenté par Ω dans $\mathcal{B}$ est orthogonal

5) Il existe une b.o.n. de E dans laquelle l'endomorphisme représenté par Ω est orthogonal

6) Les colonnes de Ω forment une b.o.n. de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique

7) Les lignes de Ω forment une b.o.n. de $\mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

En particulier, si $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, alors Ω est inversible et $\Omega^{-1} = {}^t\Omega$.

Proposition - Définition 5

$\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication, appelé **groupe orthogonal** (d'ordre n).

Remarque :

Soient $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\Omega = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

On a alors : $f \in \mathcal{O}(E) \iff \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(E) & \longrightarrow & \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme de groupes ($\mathcal{O}(E)$ étant muni de la composition, et $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ muni de la multiplication).

Lien entre endomorphisme orthogonal et matrice orthogonale.

Rappel de notation :
$\mathrm{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Proposition 6

Soient $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E, $\mathcal{B}'$ une base de E, $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}')$. Alors, $\mathcal{B}'$ est une b.o.n. de E si et seulement si P est orthogonale.

Les « réciproques » sont fausses : une matrice de déterminant 1 ou -1 n'est pas nécessairement orthogonale, comme le montre l'exemple de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 7

1) $\forall\, \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}),\quad \det(\Omega) \in \{-1,1\}$

2) $\forall\, f \in \mathcal{O}(E),\quad \det(f) \in \{-1,1\}$.

2) Endomorphismes orthogonaux et orientation

Définition 3

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. On dit que f est un **endomorphisme orthogonal direct** (resp. **indirect**) si et seulement si $\det(f) = 1$ (resp. -1).

On dit aussi : | **droit** au lieu de direct
| **gauche** au lieu d'indirect.

Proposition - Définition 8

L'ensemble des endomorphismes orthogonaux directs de E est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$, appelé **groupe spécial orthogonal de** E, et noté $\mathcal{SO}(E)$.

Proposition - Définition 9

Soit $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. On dit que Ω est **orthogonale droite** (resp. **gauche**) si et seulement si $\det(\Omega) = 1$ (resp. -1).

L'ensemble des matrices orthogonales droites d'ordre n est un sous-groupe de $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, appelé **groupe spécial orthogonal**, noté $\mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{SO}_n(\mathbb{R}) = \{\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R});\ \det(\Omega) = 1\}.$$

Remarque :

Soient $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\Omega = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors : $f \in \mathcal{SO}(E) \iff \Omega \in \mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$.

L'application $\begin{array}{l} \mathcal{SO}(E) \longrightarrow \mathbf{SO}_n(\mathbb{R}) \\ f \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme de groupes, $\mathcal{SO}(E)$ étant muni de la composition, et $\mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$ muni de la multiplication.

Les « réciproques » sont fausses : une matrice carrée dont le spectre réel est inclus dans $\{-1,1\}$ n'est pas nécessairement orthogonale, comme le montre l'exemple de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 10

1) $\forall\, f \in \mathcal{O}(E),\quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1,1\}$

2) $\forall\, \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}),\quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\Omega) \subset \{-1,1\}$.

Preuve

Il est clair que *2)* est la traduction matricielle de *1)*.

Soient $f \in \mathcal{O}(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E - \{0\}$ tels que $f(x) = \lambda x$.

On a : $\quad ||x|| = ||f(x)|| = ||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$, d'où $|\lambda| = 1$, et donc $\lambda \in \{-1,1\}$. ■

Exercices 4.3.6 à 4.3.13.

3) Traduction matricielle du procédé d'orthogonalisation de Schmidt

Décomposition d'une matrice inversible en produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire supérieure.

Proposition 11

$$\forall A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}),\ \exists(\Omega,T) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R}), \quad A = \Omega T.$$

Preuve

Notons $C_1,\ldots,C_n$ les colonnes de A et $\mathcal{C} = (C_1,\ldots,C_n)$ qui est donc une famille libre dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans l'eve $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, appliquons à $\mathcal{C}$ le **procédé d'orthogonalisation de Schmidt** (4.2.2 Th. p. 142). Il existe $V_1,\ldots,V_n \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$\begin{cases} V_1,\ldots,V_n \ \text{ sont deux à deux orthogonaux} \\ \forall k \in \{1,\ldots,n\},\ \|V_k\| = 1 \\ \forall k \in \{1,\ldots,n\},\ \mathrm{Vect}(V_1,\ldots,V_k) = \mathrm{Vect}(C_1,\ldots,C_k). \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{B} = (V_1,\ldots,V_n)$ est une b.o.n. de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\Omega = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$T_1 = \mathrm{Pass}(\mathcal{C},\mathcal{B}) \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Alors (cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.2.1 Prop. 2) :

$$A = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_0,\mathcal{C}) = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B})\mathrm{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \Omega T_1^{-1}.$$

En notant $T = T_1^{-1} \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$, on obtient finalement : $A = \Omega T$. ■

Exercice-type résolu

Étude de $\mathrm{rg}(A+B) + \mathrm{rg}(A-B)$ pour A, B orthogonales telles que $(AB^{-1})^2 = \mathrm{I}_n$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A,B \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $(AB^{-1})^2 = \mathrm{I}_n$. Montrer :

$$\mathrm{rg}\,(A+B) + \mathrm{rg}\,(A-B) = n.$$

Solution

1) On a, pour tous K-ev E,F et toutes $f,g \in \mathcal{L}(E,F)$:

$$\mathrm{Im}\,(f+g) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g).$$

En effet, pour tout $y \in \mathrm{Im}\,(f+g)$, il existe $x \in E$ tel que $y = (f+g)(x)$, d'où : $y = f(x) + g(x) \in \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$.

Ici, on obtient :

$$\mathrm{Im}\,(2A) \subset \mathrm{Im}\,(A+B) + \mathrm{Im}\,(A-B).$$

On déduit, en passant aux dimensions :

$$\mathrm{rg}\,(A) = \dim\big(\mathrm{Im}\,(A)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{Im}\,(A+B) + \mathrm{Im}\,(A-B)\big).$$

Conseils

On va établir l'égalité voulue en montrant deux inégalités.

Il est clair que : $\mathrm{Im}\,(2A) = \mathrm{Im}\,(A)$.

Solution

Mais, d'après la formule de Grassmann :

$$\dim\big(\mathrm{Im}\,(A+B)+\mathrm{Im}\,(A-B)\big)$$

$$=\dim\big(\mathrm{Im}\,(A+B)\big)+\dim\big(\mathrm{Im}\,(A-B)\big)-\dim\big(\mathrm{Im}\,(A+B)\cap\mathrm{Im}\,(A-B)\big)$$

$$\leqslant\dim\big(\mathrm{Im}\,(A+B)\big)+\dim\big(\mathrm{Im}\,(A-B)\big)=\mathrm{rg}\,(A+B)+\mathrm{rg}\,(A-B).$$

Ceci montre : $\mathrm{rg}\,(A)\leqslant\mathrm{rg}\,(A+B)+\mathrm{rg}\,(A-B)$.

D'autre part, comme $A\in\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, A est inversible, donc $\mathrm{rg}\,(A)=n$.

On obtient : $n\leqslant\mathrm{rg}\,(A+B)+\mathrm{rg}\,(A-B)$.

2) On a :

$$(A-B)\,{}^{\mathrm{t}}(A+B)=(A-B)({}^{\mathrm{t}}A+{}^{\mathrm{t}}B)$$

$$=A{}^{\mathrm{t}}A+A{}^{\mathrm{t}}B-B{}^{\mathrm{t}}A-B{}^{\mathrm{t}}B=AB^{-1}-BA^{-1},$$

car $A{}^{\mathrm{t}}A=B{}^{\mathrm{t}}B=\mathrm{I}_n$ et ${}^{\mathrm{t}}A=A^{-1}$, ${}^{\mathrm{t}}B=B^{-1}$.

Par hypothèse : $(AB^{-1})^2=\mathrm{I}_n$, donc AB^{-1} est inversible et $AB^{-1}=(AB^{-1})^{-1}$ $=BA^{-1}$, d'où : $AB^{-1}-BA^{-1}=0$.

Il en résulte : $(A-B)\,{}^{\mathrm{t}}(A+B)=0$,

d'où : $\mathrm{Im}\,\big({}^{\mathrm{t}}(A+B)\big)\subset\mathrm{Ker}\,(A-B)$.

On déduit, en passant aux dimensions :

$$\dim\Big(\mathrm{Im}\,\big({}^{\mathrm{t}}(A+B)\big)\Big)\leqslant\dim\big(\mathrm{Ker}\,(A-B)\big).$$

Mais, d'une part :

$$\dim\Big(\mathrm{Im}\,\big({}^{\mathrm{t}}(A+B)\big)\Big)=\mathrm{rg}\,\big({}^{\mathrm{t}}(A+B)\big)=\mathrm{rg}\,(A+B),$$

et, d'autre part, d'après le théorème du rang :

$$\dim\big(\mathrm{Ker}\,(A-B)\big)=n-\mathrm{rg}\,(A-B).$$

On obtient :

$$\mathrm{rg}\,(A+B)\leqslant n-\mathrm{rg}\,(A-B),$$

ou encore :

$$\mathrm{rg}\,(A+B)+\mathrm{rg}\,(A-B)\leqslant n.$$

On conclut finalement :

$$\mathrm{rg}\,(A+B)+\mathrm{rg}\,(A-B)=n.$$

Conseils

Puisque l'inégalité précédente a été obtenue en examinant les images, pour obtenir l'autre inégalité, on va étudier les noyaux.

Comme $A,B\in\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, on essaie de faire intervenir $A{}^{\mathrm{t}}A=\mathrm{I}_n$ et $B{}^{\mathrm{t}}B=\mathrm{I}_n$.

Pour tous K-ev E,F,G et toutes $f\in\mathcal{L}(E,F)$, $g\in\mathcal{L}(F,G)$, on a :

$$g\circ f=0\iff\mathrm{Im}\,(f)\subset\mathrm{Ker}\,(g).$$

Les méthodes à retenir

Endomorphismes orthogonaux

- **Pour étudier un endomorphisme orthogonal f d'un espace vectoriel euclidien E**, penser à utiliser, pour tout $(x,y)\in E^2$, l'égalité $<f(x),f(y)>=<x,y>$ (ex. 4.3.7).
- **Pour étudier une isométrie f d'un espace vectoriel euclidien E**, il peut être commode de passer à l'aspect matriciel (ex. 4.3.8) en faisant intervenir la notion de transposée d'une matrice.
- **Pour étudier une matrice orthogonale dont l'un des termes est égal à 1 ou à –1**, il est utile de remarquer que, si $A=(a_{ij})_{ij}\in\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, alors tous les a_{ij} sont dans $[-1;1]$, et, si l'un des a_{ij} est égal à – 1 ou 1, alors tous les éléments de la i-ème ligne et tous les éléments de la j-ème colonne de A sont nuls, sauf a_{ij} lui-même (ex. 4.3.11).

Exercices

4.3.6 Déterminer le commutant de $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire :

$$\{M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R});\ \forall \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}),\ M\Omega = \Omega M\}.$$

4.3.7 Soient E un eve, $f \in \mathcal{O}(E)$.

a) Montrer :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{Ker}(f-e) \times \mathrm{Im}(f-e), \quad < x,y > = 0.$$

b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f-e)$ et $\mathrm{Im}(f-e)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

4.3.8 Soient $(E,(\cdot|\cdot))$ un eve, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent chaque fois la troisième :

(i) f est une isométrie

(ii) $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$

(iii) $\forall x \in E,\ (x|f(x)) = 0$.

4.3.9 Soient $(E,< \cdot,\cdot >)$ un eve, $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale.

4.3.10 On munit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Montrer que $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ est borné et calculer son diamètre.

4.3.11 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, Σ_n l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\Sigma_n = \left\{ \begin{array}{l} A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}); \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ a_{ij} \in [0;1] \\ \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \end{array} \right. \end{array} \right\},$$

Π_n l'ensemble des **matrices de permutation** de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})_{ij}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ a_{ij} = \delta_{\sigma(i),j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{si } j \neq \sigma(i) \end{cases}.$$

Montrer : $\Pi_n = \Sigma_n \cap \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

4.3.12 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+p}(\mathbb{R}).$$

On suppose :

$$M \in \mathbf{O}_{n+p}(\mathbb{R}) \text{ et } \big(A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \text{ ou } D \in \mathbf{O}_p(\mathbb{R})\big).$$

Montrer :

$$B = 0,\ C = 0,\ A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}),\ D \in \mathbf{O}_p(\mathbb{R}).$$

4.3.13 Soient $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = BA.$$

a) Montrer :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^{t}(AX)BX = 0.$$

b) Montrer :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ||(A+B)X|| = ||(A-B)X||,$$

où $||\cdot||$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

c) On suppose de plus B inversible. Montrer que $A+B$ et $A-B$ sont inversibles et que $(A+B)(A-B)^{-1}$ est orthogonale.

4.4 Adjoint

4.4.1 Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien

Dans ce § 4.4, $(E,< .,. >)$ désigne un espace vectoriel euclidien, $n = \dim(E)$; la norme associée est notée $||.||$.

Proposition-Définition 1

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ unique tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ < f(x), y > = < x, g(y) > .$$

Cet élément g de $\mathcal{L}(E)$ est appelé l'**adjoint** de f et noté f^*.

Pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big).$$

Preuve

Soient $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E, $f,g \in \mathcal{L}(E)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$. On a :

Cf. aussi la preuve de la Prop.1 du § 4.3.1 p. 147.

$$\begin{aligned}
&\forall (x,y) \in E^2, \ < f(x), y > = < x, g(y) > \\
\iff &\forall (X,Y) \in \big(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2, \ {}^t(AX)Y = {}^tX(BY) \\
\iff &\forall (X,Y) \in \big(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2, \ {}^tX{}^tAY = {}^tXBY \\
\iff &\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ \Big(\forall Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ {}^t\big((A - {}^tB)X\big)Y = 0\Big) \\
\iff &\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ (A - {}^tB)X = 0 \\
\iff &A - {}^tB = 0 \iff B = {}^tA.
\end{aligned}$$

$(A -{}^t B)X$ est orthogonal à tout vecteur de E, donc est nul.

Ceci montre l'existence et l'unicité de g et détermine la matrice de g dans $\mathcal{B}$. ■

On a donc :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ < f(x), y > = < x, f^*(y) >$$

Proposition 2

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $f,g \in \mathcal{L}(E)$. On a :

1) $(\alpha f + g)^* = \alpha f^* + g^*$

2) $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$

3) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

4) $(f^*)^* = f$

5) $f \in \mathcal{GL}(E) \iff f^* \in \mathcal{GL}(E)$

6) $\forall f \in \mathcal{GL}(E), \ (f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$

7) $\mathrm{rg}\,(f^*) = \mathrm{rg}\,(f), \ \mathrm{tr}\,(f^*) = \mathrm{tr}\,(f), \ \det(f^*) = \det(f), \ \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f^*) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

Preuve

1ère méthode : pour *1)* à *6)* : utilisation de la définition et de l'unicité de l'adjoint.

1) On a, pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}
< (\alpha f + g)(x), y > &= \alpha < f(x), y > + < g(x), y > \\
&= \alpha < x, f^*(y) > + < x, g^*(y) > = < x, \alpha f^*(y) + g^*(y) >,
\end{aligned}$$

et donc, par définition et unicité de $(\alpha f + g)^*$, on conclut :

$$(\alpha f + g)^* = \alpha f^* + g^*.$$

2) On a, pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$< \mathrm{Id}_E(x)\,,\, y > = < x\,,\, y > = < x\,,\, \mathrm{Id}_E(y) > ,$$

donc :

$$(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E .$$

3) On a, pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$< (g \circ f)(x)\,,\, y > = < g\big(f(x)\big)\,,\, y > = < f(x)\,,\, g^*(y) >$$

$$= < x\,,\, f^*\big(g^*(y)\big) > = < x\,,\, (f^* \circ g^*)(y) > ,$$

d'où :

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* .$$

4) On a, pour tout $(x,y) \in E^2$, en utilisant la symétrie du produit scalaire :

$$< x\,,\, f(y) > = < f(y)\,,\, x > = < y\,,\, f^*(x) > = < f^*(x)\,,\, y > = < x\,,\, (f^*)^*(y) > ,$$

donc :

$$f = (f^*)^* .$$

5) et *6)* Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

• Si $f \in \mathcal{GL}(E)$, alors, d'après *4)* :

$$\begin{cases} f^* \circ (f^{-1})^* = (f^{-1} \circ f)^* = (\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E \\ (f^{-1})^* \circ f^* = (f \circ f^{-1})^* = (\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E , \end{cases}$$

donc $f^* \in \mathcal{GL}(E)$ et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

• Si $f^* \in \mathcal{GL}(E)$, alors $f = (f^*)^* \in \mathcal{GL}(E)$, d'après le point précédent, appliqué à f^* à la place de f.

2ème méthode : passer par les matrices dans une b.o.n.

Cf. Algèbre PCSI-PTSI, § 8.1.8.

L'espace vectoriel euclidien E admet au moins une b.o.n. $\mathcal{B}$. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $f,g \in \mathcal{L}(E)$ $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$. On a, en utilisant les propriétés de la transposition des matrices :

1) ${}^{\mathrm{t}}(\alpha A + B) = \alpha\, {}^{\mathrm{t}}A + {}^{\mathrm{t}}B$, donc $(\alpha f + g)^* = \alpha f^* + g^*$

2) ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$, donc $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$

3) ${}^{\mathrm{t}}(BA) = {}^{\mathrm{t}}A\, {}^{\mathrm{t}}B$, donc $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

4) ${}^{\mathrm{t}}\,({}^{\mathrm{t}}A) = A$, donc $(f^*)^* = f$

5) $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \iff {}^{\mathrm{t}}A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, donc : $f \in \mathcal{GL}(E) \iff f^* \in \mathcal{GL}(E)$

6) $\forall\, A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $({}^{\mathrm{t}}A)^{-1} = {}^{\mathrm{t}}(A^{-1})$, donc : $\forall\, f \in \mathcal{GL}(E)$, $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

7) Avec les notations précédentes :

$$\mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{rg}\,(A),\ \ \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{tr}\,(A),\ \ \det\,({}^{\mathrm{t}}A) = \det\,(A),\ \ \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\,({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\,(A),$$

d'où les résultats analogues sur les endomorphismes. ■

Remarque :

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$; bien que A et ${}^{\mathrm{t}}A$ aient les mêmes valeurs propres, « en général » A et ${}^{\mathrm{t}}A$ n'ont pas les mêmes vecteurs propres, comme le montre l'exemple : $n = 2, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice-type résolu

Étude d'adjoint

Soient $\big(E,(.\,|\,.)\big)$ un eve, $e = \mathrm{Id}_E$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -e$. Montrer :

$$f^* \circ f = f \circ f^* \iff f^* = -f.$$

Solution

1) Supposons $f^* = -f$.

On a :

$$\begin{cases} f^* \circ f = (-f) \circ f = -f^2 = e \\ f \circ f^* = f \circ (-f) = -f^2 = e, \end{cases}$$

donc : $f^* \circ f = f \circ f^*$.

2) Réciproquement, supposons $f^* \circ f = f \circ f^*$.

• Alors :

$$\begin{aligned} (f^* \circ f)^* \circ (f^* \circ f) &= (f^* \circ f) \circ (f^* \circ f) = f^* \circ (f \circ f^*) \circ f \\ &= f^* \circ (f^* \circ f) \circ f = (f^*)^2 \circ f^2 = (-e) \circ (-e) = e. \end{aligned}$$

Ceci montre : $f^* \circ f \in \mathcal{O}(E)$.

• On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|(f^* + f)(x)\|^2 &= \big(f^*(x) + f(x) \,|\, f^*(x) + f(x)\big) \\ &= \big(f^*(x)|f^*(x)\big) + \big(f^*(x)|f(x)\big) + \big(f(x)|f^*(x)\big) + \big(f(x)|f(x)\big) \\ &= \big(f(f^*(x))|x\big) + \big(x|f(f(x))\big) + \big(f(f(x))|x\big) + \big(f(x)|f(x)\big) \\ &= \big(f^* \circ f(x)|x\big) - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \|f(x)\|^2 \\ &= 2\|f(x)\|^2 - 2\|x\|^2. \end{aligned}$$

Ceci montre : $\forall x \in E, \quad \|x\| \leqslant \|f(x)\|$.

• Comme f^* vérifie : $(f^*)^2 = (f^2)^* = (-e)^* = -e$ et $f^* \circ f = f \circ f^*$, on a aussi : $\forall y \in E, \ \|y\| \leqslant \|f^*(y)\|$.

• D'où, pour tout $x \in E$:

$$\|x\| \leqslant \|f(x)\| \leqslant \|f^*(f(x))\| = \|(f^* \circ f)(x)\| = \|x\|.$$

Il en résulte : $\forall x \in E, \ \|x\| = \|f(x)\|$,

puis : $\forall x \in E, \ \|(f^* + f)(x)\| = 0$,

et donc : $f^* + f = 0, \ f^* = -f$.

Conseils

Commencer par le sens le plus facile.

Pour montrer $f^* + f = 0$, on va établir que, pour tout x de E :

$$\|(f^* + f)(x)\|^2 = 0.$$

Utilisation de la définition de l'adjoint f^*.

On sait : $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^2 = -e$.

Utilisation de la définition de l'adjoint f^*.

f^* vérifie les mêmes hypothèses que f.

On a vu : $f^* \circ f \in \mathcal{G}(E)$.

Les méthodes à retenir

Adjoint

• **Pour calculer l'adjoint d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel euclidien** $(E, <\cdot,\cdot>)$, on peut essayer de :

* se ramener à la définition, c'est-à-dire, exprimer pour $x, y \in E$ quelconques, $< f(x), y >$ sous la forme $< x, g(y) >$, où g est à trouver, indépendant de x et y (ex. 4.4.1)

* utiliser la matrice A de f dans une b.o.n $\mathcal{B}$ de E ; on a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^{\mathrm{t}}A$.

Exercices

4.4.1 On munit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $(X,Y) \longmapsto \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}XY)$.

Soient $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi_A : \begin{array}{rcl} \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & {}^{\mathrm{t}}AXA \end{array}$. Montrer $\varphi_A \in \mathcal{L}\,(\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))$ et calculer l'adjoint $(\varphi_A)^*$ de φ_A.

4.4.2 Soient $(E, < \cdot,\cdot >)$ un eve, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$, F un sev de E stable par f, g l'endomorphisme de F induit par f ; on munit F du produit scalaire induit par $< \cdot,\cdot >$. Montrer :

$$g \circ g^* = g^* \circ g.$$

4.4.2 Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Nous reprenons en partie et prolongeons l'étude vue en 4.3 et 4.4.1.

Proposition 1

1) Caractérisation des endomorphismes symétriques à l'aide de l'adjoint.

2) Caractérisation des endomorphismes orthogonaux à l'aide de l'adjoint.

Soient E un eve, $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) f est symétrique si et seulement si : $f^* = f$.

2) Les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) f est orthogonal

(ii) $f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$

(iii) $f \circ f^* = \mathrm{Id}_E$.

Preuve

1) f symétrique $\Longleftrightarrow \forall\,(x,y) \in E^2,\ < f(x)\,,\,y > = < x\,,\,f(y) >$

$\Longleftrightarrow f^* = f$.

2) f orthogonal $\Longleftrightarrow \forall\,(x,y) \in E^2,\ < f(x)\,,\,f(y) > = < x\,,\,y >$

$\Longleftrightarrow \forall\,(x,y) \in E^2,\ < x\,,\,f^*\big(f(y)\big) > = < x\,,\,y >$

$\Longleftrightarrow f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$.

D'autre part, puisque E est de dimension finie et que $(f, f^*) \in \big(\mathcal{L}(E)\big)^2$, on a :

$$f^* \circ f = \mathrm{Id}_E \Longleftrightarrow f \circ f^* = \mathrm{Id}_E.$$

■

Définition 1

Soient E un eve, $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **antisymétrique** si et seulement si :

$$f^* = -f.$$

La Proposition suivante est immédiate, grâce au lien entre adjoint pour un endomorphisme et transposée pour une matrice.

Proposition 2

Caractérisation des endomorphismes symétriques (resp. antisymétrique, resp. orthogonaux) à l'aide de leur matrice dans une base **orthonormée**.

Soient E un eve, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On a :

1) f est symétrique si et seulement si : ${}^{\mathrm{t}}A = A$

2) f est antisymétrique si et seulement si : ${}^{\mathrm{t}}A = -A$

3) f est orthogonal si et seulement si : ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n$.

Définition 2

Un endomorphisme symétrique f de E est dit :

1) **symétrique positif** si et seulement si :

$$\forall x \in E, \ < x, f(x) > \geqslant 0$$

2) **symétrique défini-positif** si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall x \in E, & < x, f(x) > \geqslant 0 \\ \forall x \in E, & (< x, f(x) > = 0 \Longrightarrow x = 0) \end{cases}.$$

Remarques :

1) Un endomorphisme symétrique f de E est symétrique défini-positif si et seulement si :

$$\forall x \in E - \{0\}, \ < x, f(x) >> 0.$$

2) Les qualificatifs « positif », « défini-positif » ne peuvent s'appliquer ici qu'à un endomorphisme *symétrique* (et non à tout endomorphisme).

3) Un endomorphisme symétrique f de E est dit **négatif** (resp. **défini-négatif**) si et seulement si $-f$ est symétrique positif (resp. défini-positif).

4) Soit f un endomorphisme symétrique de E ; notons $\phi_f : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto < x, f(x) > \end{array}$. Il est clair que ϕ_f est une forme quadratique sur E (appelée **forme quadratique associée** à f), et que f est symétrique positif (resp. défini-positif) si et seulement si ϕ_f est une fq positive (resp. définie-positive).

4.5 Réduction des matrices symétriques réelles

4.5.1 Théorème fondamental

Proposition 1

Soient $(E, < \cdot, \cdot >)$ un eve, f un endomorphisme symétrique de E. Alors les sous-espaces propres pour f sont orthogonaux entre eux, c'est-à-dire : pour toutes vp λ, μ de f telles que $\lambda \neq \mu$ et tous $\overrightarrow{\text{vp}}$ x associé à λ, et y associé à μ : $< x, y > = 0$.

Preuve

Soient $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$ tels que $\lambda \neq \mu$, $x \in \mathrm{SEP}(f, \lambda)$, $y \in \mathrm{SEP}(f, \mu)$. On a donc :

$$x \neq 0, \ y \neq 0, \ f(x) = \lambda x, \ f(y) = \mu y.$$

D'où : $< \lambda x, y > = < f(x), y > = < x, f(y) > = < x, \mu y >$, donc : $(\lambda - \mu) < x, y > = 0$,

et finalement : $$< x, y > = 0.$$ ∎

Proposition 2

Soit f un endomorphisme symétrique de E. Pour tout sev F de E stable par f, $F^{\perp}$ est stable par f.

Preuve

Soient F un sev de E stable par f, $x \in F^{\perp}$. On a : $\forall y \in F$, $< f(x), y > = < x, f(y) > = 0$, (car $x \in F^{\perp}$ et $f(y) \in F$), d'où : $f(x) \in F^{\perp}$. ∎

Ce théorème fondamental porte aussi le nom de **théorème spectral**.

Théorème **Théorème fondamental**

1) Soient $(E, < \cdot, \cdot >)$ un eve, f un endomorphisme symétrique de E. Il existe une b.o.n. de E dans laquelle la matrice de f est diagonale

2) $\forall S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}),\ \exists (\Omega, D) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{D}_n(\mathbb{R}),\ S = \Omega D \Omega^{-1}$

Le lecteur trouvera une autre démonstration « réelle » en exercice (ex. 4.5.1 p. 169).

Preuve

Il est clair que *2)* est la traduction matricielle de *1)*.

Récurrence sur n $(n = \dim(E))$

La propriété est immédiate lorsque $n = 1$.

Supposons-la vraie pour un entier n de $\mathbb{N}^*$, et soient E un eve de dimension $n+1$, f un endomorphisme symétrique de E, $\mathcal{B}_1$ une b.o.n. de E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)$. Décomposons A en blocs :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & {}^{\mathrm{t}}C \\ C & B \end{pmatrix}, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R},\ C \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = \Omega D \Omega^{-1}$.

En notant $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}$, il est clair que U est orthogonale et $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega^{-1} \end{pmatrix}$, d'où, après produit par blocs : $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \alpha & {}^{\mathrm{t}}C\Omega \\ \Omega^{-1}C & D \end{pmatrix}$.

On a :

${}^{\mathrm{t}}G = {}^{\mathrm{t}}(\Omega^{-1}C) = {}^{\mathrm{t}}C\,{}^{\mathrm{t}}\Omega^{-1} = {}^{\mathrm{t}}C\Omega$, car Ω est orthogonale.

Notons $G = \Omega^{-1}C$ et $A' = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \alpha & {}^{\mathrm{t}}G \\ G & D \end{pmatrix}$.

1) Montrons que A' admet au moins une vp et un $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$.

En notant $G = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$, on a : $A' = \begin{pmatrix} \alpha & g_1 & \dots & g_n \\ g_1 & d_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ g_n & 0 & & d_n \end{pmatrix}$.

Si $g_k = 0$, alors la colonne $n^\circ\ k+1$ de A' est $d_k \mathrm{E}_{k+1}$.

S'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $g_k = 0$, alors d_k est vp de A' (et un $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ associé est E_{k+1}).

Nous pouvons donc supposer : $\forall k \in \{1, \dots n\},\quad g_k \neq 0$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $V \in \mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

En décomposant V en blocs $V = \begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$A'V = \lambda V \iff \begin{pmatrix} \alpha & {}^{\mathrm{t}}G \\ G & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha x + {}^{\mathrm{t}}GX = \lambda x \\ xG + DX = \lambda X \end{cases}.$$

On peut supposer $d_1 \geqslant \dots \geqslant d_n$. Supposons $\lambda > d_1$; alors $D - \lambda \mathrm{I}_n$ est inversible, et donc :

$xG + DX = \lambda X \iff (D - \lambda \mathrm{I}_n)X = -xG.$

$$A'V = \lambda V \iff \begin{cases} X = -x(D - \lambda \mathrm{I}_n)^{-1}G \\ \alpha x - x\,{}^{\mathrm{t}}G(D - \lambda \mathrm{I}_n)^{-1}G = \lambda x \end{cases}.$$

On a :

$${}^{\mathrm{t}}G(D - \lambda \mathrm{I}_n)^{-1}G + \lambda = \alpha \iff \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i^2}{d_i - \lambda} + \lambda = \alpha.$$

Intervention de l'analyse dans un contexte d'algèbre.

L'application $\varphi: \begin{array}{l}]d_1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{g_i^2}{d_i-\lambda} + \lambda \end{array}$ est continue sur $]d_1\,;+\infty[$, de limite $-\infty$ en d_1^+ et de limite $+\infty$ en $+\infty$, donc (théorème des valeurs intermédiaires) il existe $\lambda \in]d_1\,;+\infty[$ tel que $\varphi(\lambda) = \alpha$.

On a ainsi montré que A' admet au moins une vp et un $\overrightarrow{\text{vp}}$ réels, donc f admet au moins une vp est un $\overrightarrow{\text{vp}}$.

2) En notant x_0 un $\overrightarrow{\text{vp}}$ pour f, $\mathbb{R}x_0$ est stable par f, donc (cf. Prop. 2 p. 147) $(\mathbb{R}x_0)^\perp$ est aussi stable par f. Dans une b.o.n. de E commençant par $\dfrac{1}{||x_0||}x_0$, la matrice de f est donc de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$, où $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\Omega_1 \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D_1 \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = \Omega_1 D_1 \Omega_1^{-1}$. En notant $\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_1 \end{pmatrix}$ et $D_2 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$, il est clair que :

$$\Omega_2 \in \mathbf{O}_{n+1}(\mathbb{R}), \quad D_2 \in \mathbf{D}_{n+1}(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \Omega_2 D_2 \Omega_2^{-1}.$$

Ceci montre qu'il existe une b.o.n. de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. ■

Remarque :

L'existence d'une valeur propre réelle pour une matrice $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ peut être démontrée autrement, en passant par les nombres complexes, de la façon suivante.

D'après le théorème de d'Alembert, A admet au moins une valeur propre complexe.

Montrons que les valeurs propres de A, a priori complexes, sont toutes réelles.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$ et $X \neq 0$.

On a alors, en utlisant la notion de transconjuguée (cf. plus loin, § 5.1.2 1) p. 190) :

$$\begin{cases} X^*AX = X^*(AX) = X^*\lambda X = \lambda X^*X = \lambda ||X||_2^2 \\ X^*AX = (A^*X)^*X = (AX)^*X = (\lambda X)^*X = \overline{\lambda} X^*X = \overline{\lambda}||X||_2^2, \end{cases}$$

où $||.||_2$ désigne la norme hermitienne usuelle sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

D'où : $(\overline{\lambda} - \lambda)||X||_2^2 = 0$. Comme $X \neq 0$, on a $||X|| \neq 0$, et donc $\overline{\lambda} - \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ceci montre que toute valeur propre de A est réelle.

Finalement, A admet au moins une valeur propre réelle.

Remarques :

1) Le Th. précédent peut aussi s'énoncer sous la forme suivante : pour tout endomorphisme symétrique f de E, E est somme directe orthogonale des SEP pour f.

2) En pratique, comme Ω est orthogonale, on pourra remplacer Ω^{-1} par ${}^t\Omega$.

3) Une matrice symétrique *complexe* (d'ordre $\geqslant 2$) peut ne pas être diagonalisable (ex. 4.5.2).

Exercices 4.5.1 à 4.5.8.

Exercice-type résolu 1

Propriété des endomorphismes symétriques f tels que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \cap]a\,;b[= \varnothing$.

Soient $(E,(.\,|\,.))$ un eve, $f \in \mathcal{S}(E)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

On suppose :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \cap]a\,;b[= \varnothing.$$

Montrer :

$$\forall x \in E, \ \big(f(x) - ax \,\big|\, f(x) - bx\big) \geqslant 0,$$

et étudier le cas d'égalité en supposant $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \cap [a\,;b] = \varnothing$.

Solution

Puisque $f \in \mathcal{S}(E)$, d'après le théorème fondamental, il existe une bon $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E et une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$.

Soit $x \in E$.

Notons $X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a :

$$f(x) - ax = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) - a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i e_i - \sum_{i=1}^{n} a x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - a) x_i e_i.$$

De même : $f(x) - bx = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - b) x_i e_i.$

Puisque $(e_1,\dots,e_n)$ est une bon, il en résulte :

$$\big(f(x) - ax \mid f(x) - bx\big) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - a)(\lambda_i - b) x_i^2.$$

Comme $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \cap]a\,;b[= \varnothing$, on a :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \big(\lambda_i \leqslant a \quad \text{ou} \quad \lambda_i \geqslant b\big),$$

donc :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ (\lambda_i - a)(\lambda_i - b) \geqslant 0,$$

puis, par addition, puisque les x_i^2 sont tous $\geqslant 0$:

$$\big(f(x) - ax \mid f(x) - bx\big) \geqslant 0.$$

Étude du cas d'égalité :

Supposons $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \cap [a\,;b] = \varnothing$.

Soit $x \in E$ tel que $\big(f(x) - ax \mid f(x) - bx\big) = 0$.

Avec les notations précédentes, on a alors :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - a)(\lambda_i - b) x_i^2 = 0 \\ \forall i \in \{1,\dots,n\},\ (\lambda_i - a)(\lambda_i - b) > 0. \end{cases}$$

D'où : $\forall i \in \{1,\dots,n\},\ x_i^2 = 0$, et donc $x = 0$.

La réciproque est immédiate.

On conclut que, si $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \cap [a\,;b] = \varnothing$, il y a égalité dans l'inégalité de l'énoncé si et seulement si $x = 0$.

Conseils

Lorsqu'intervient un endomorphisme symétrique ou une matrice symétrique, penser à utiliser éventuellement le théorème fondamental.

On a, par définition de D :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ f(e_i) = \lambda_i e_i.$$

Puisque $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \cap [a\,;b] = \varnothing$, on a :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \lambda_i \notin [a\,;b].$$

Exercice-type résolu 2

Racine cubique d'une matrice carrée symétrique réelle, exemple

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $S = \big(P(S)\big)^3$.

b) Calculer un tel P pour $S = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 10 & 7 & 7 \\ 7 & 10 & 7 \\ 7 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

Solution

a) D'après le théorème fondamental, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

Notons $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt[3]{\lambda_1},\dots,\sqrt[3]{\lambda_n})$ et $R = \Omega\Delta\Omega^{-1}$.

Alors :

$$ {}^{\mathrm{t}}R = {}^{\mathrm{t}}(\Omega\Delta\Omega^{-1}) = {}^{\mathrm{t}}\Omega^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}\Delta{}^{\mathrm{t}}\Omega = \Omega\Delta\Omega^{-1} = R $$

et

$$ R^3 = (\Omega\Delta\Omega^{-1})^3 = \Omega\Delta^3\Omega^{-1} = \Omega D\Omega^{-1} = S. $$

D'après l'étude des polynômes d'interpolation de Lagrange sur les λ_k qui sont deux à deux distincts, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$ \forall i \in \{1,\dots,n\},\ \ \sqrt[3]{\lambda_i} = P(\lambda_i). $$

On a alors :

$$ \begin{aligned} \Delta &= \operatorname{diag}(\sqrt[3]{\lambda_1},\dots,\sqrt[3]{\lambda_n}) = \operatorname{diag}\big(P(\lambda_1),\dots,P(\lambda_n)\big) \\ &= P\big(\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\big) = P(D), \end{aligned} $$

puis :

$$ R = \Omega\Delta\Omega^{-1} = \Omega P(D)\Omega^{-1} = P(\Omega\Delta\Omega^{-1}) = P(S). $$

Ainsi, P convient.

b) Remarquer d'abord que S est symétrique réelle.

On détermine les valeurs propres de S en formant le polynôme caractéristique de S :

$$ \begin{aligned} \chi_S(\lambda) = \det(S - \lambda \mathrm{I}_3) &= \begin{vmatrix} \frac{10}{3}-\lambda & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{10}{3}-\lambda & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & \frac{10}{3}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 10-3\lambda & 7 & 7 \\ 7 & 10-3\lambda & 7 \\ 7 & 7 & 10-3\lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{27}(24-3\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 7 & 7 \\ 1 & 10-3\lambda & 7 \\ 1 & 7 & 10-3\lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{9}(8-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 7 & 7 \\ 0 & 3-3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-3\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(8-\lambda)(3-3\lambda)^2 \\ &= (8-\lambda)(1-\lambda)^2 = -(\lambda-1)^2(\lambda-8). \end{aligned} $$

On en déduit les valeurs propres de S : 1 (double), 8 (simple).

On va déterminer un polynôme d'interpolation P envoyant respectivement 1 en 1 et 8 en 2.

En notant $P = a\mathrm{X} + b$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$ \begin{cases} P(1) = 1 \\ P(8) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 1 \\ 8a + b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 7a = 1 \\ 7b = 6. \end{cases} $$

Le polynôme $P = \frac{1}{7}\mathrm{X} + \frac{6}{7}$ convient.

Conseils

Lorsqu'une matrice symétrique réelle intervient, penser à utiliser éventuellement le théorème fondamental.

Pour tout (i,j) tel que $\lambda_i = \lambda_j$, on a : $\sqrt[3]{\lambda_i} = \sqrt[3]{\lambda_j}$.

Attention : Bien placer le coefficient $\frac{1}{3}$ dans chaque terme de la matrice.

$C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$.

$\begin{cases} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1. \end{cases}$

On contrôle :

$1 + 1 + 8 = \operatorname{tr}(S) = \frac{1}{3}(10 + 10 + 10)$.

On peut choisir P de degré 1, c'est-à-dire $n-2$, car S admet une valeur propre double.

Solution

Vérification :

On a :

$$P(S) = \frac{1}{7}(S + 6\mathrm{I}_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

et :

$$\big(P(S)\big)^3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 10 & 7 & 7 \\ 7 & 10 & 7 \\ 7 & 7 & 10 \end{pmatrix} = S.$$

Conseils

Par calcul du produit de trois matrices.

Exercice-type résolu 3

Étude de certaines matrices carrées réelles commutant avec leur transposée

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A\,{}^tA = {}^tA\,A$ et que $A\,{}^tA$ admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

Démontrer : ${}^tA = A$.

Solution

Notons $S = A\,{}^tA = {}^tA\,A$, qui est symétrique car :

$${}^tS = {}^t(A\,{}^tA) = {}^t\,{}^tA\,{}^tA = A\,{}^tA = S.$$

D'après le théorème fondamental, il existe

$\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

Notons $B = \Omega^{-1} A \Omega$, de sorte que : $A = \Omega B \Omega^{-1}$.

On a :

$$AS = A({}^tA\,A) = (A\,{}^tA)A = SA,$$

donc :

$$BD = (\Omega^{-1}A\Omega)(\Omega^{-1}S\Omega) = \Omega^{-1}(AS)\Omega$$
$$= \Omega^{-1}(SA)\Omega = (\Omega^{-1}S\Omega)(\Omega^{-1}A\Omega) = DB.$$

On a, en notant $B = (b_{ij})_{ij}$:

$$BD = DB \iff \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ b_{ij}\lambda_j = \lambda_i b_{ij}$$
$$\iff \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ b_{ij}(\lambda_j - \lambda_i) = 0$$
$$\iff \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ \big(i \neq j \implies b_{ij} = 0\big).$$

Ceci montre que B est diagonale.

On a alors :

$${}^tA = {}^t(\Omega B \Omega^{-1}) = \Omega\,{}^tB\,{}^t\Omega = \Omega B \Omega^{-1} = A.$$

Conseils

Lorsqu'une matrice symétrique réelle intervient, penser à utiliser éventuellement le théorème fondamental.

On utilise $S = {}^tA\,A$ et $S = A\,{}^tA$.

Autrement dit, comme A et S commutent, par changement de base, B et D commutent.

Lorsqu'une matrice diagonale intervient, penser à passer éventuellement aux éléments des matrices.

Car $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont deux à deux distincts.

Les méthodes à retenir

Réduction des matrices symétriques réelles : théorème fondamental

- **Dès qu'une matrice symétrique réelle intervient**, penser à la possibilité d'appliquer le théorème fondamental. Si, dans le contexte considéré, une seule matrice symétrique réelle intervient (ex. 4.5.3 à 4.5.8), le théorème fondamental permet souvent de se ramener au cas d'une matrice diagonale.

  Voir aussi plus loin la rubrique « Les méthodes à retenir » p. 179.

Exercices

4.5.1 Une démonstration du théorème fondamental

Soient $(E,<\cdot,\cdot>)$ un eve de dimension $\geqslant 2$,
$S=\{x\in E;\ ||x||=1\}, f\in\mathcal{S}(E),\quad \varphi : \begin{array}{l} S\longrightarrow \mathbb{R} \\ x\longmapsto <x,f(x)> \end{array}$.

a) Montrer que φ est bornée et qu'il existe $x_0\in S$ tel que $\varphi(x_0)=\operatorname*{Sup}_{x\in S}\varphi(x)$.

b) Soit $x_1\in E$ tel que (x_0,x_1) soit une famille orthonormale. En considérant $\cos\theta\ x_0+\sin\theta\ x_1$ pour $\theta\in\mathbb{R}$, démontrer : $<x_1,f(x_0)>=0$.

c) En déduire que x_0 est un vecteur propre pour f.

4.5.2 Trouver un exemple de matrice symétrique complexe d'ordre 2 non diagonalisable.

4.5.3 Soit $A\in\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, si $A+{}^{\mathrm{t}}A$ est nilpotente, alors A est antisymétrique.

4.5.4 Soit $A\in\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $X\in\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$${}^{\mathrm{t}}XX=n \quad\text{et}\quad {}^{\mathrm{t}}XAX=\mathrm{tr}(A).$$

4.5.5 Soient $S\in\mathbf{S}_n(\mathbb{R}),\ A=S+\mathrm{i}\mathrm{I}_n\in\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que A est inversible.

4.5.6 Résoudre dans $(\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2$: $\begin{cases} {}^{\mathrm{t}}XYX=\mathrm{I}_n \\ {}^{\mathrm{t}}YXY=\mathrm{I}_n \end{cases}$.

4.5.7 Soient $S\in\mathbf{S}_n(\mathbb{R}),\ \lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les valeurs propres de S. Montrer :

a) Pour tout X de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^{\mathrm{t}}XX=1$:

$$\operatorname*{Min}_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i\leqslant {}^{\mathrm{t}}XSX\leqslant \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i$$

b) $\displaystyle\operatorname*{Min}_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i=\operatorname*{Inf}_{\substack{X\in\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\\ {}^{\mathrm{t}}XX=1}}{}^{\mathrm{t}}XSX$

et $\displaystyle\operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i=\operatorname*{Sup}_{\substack{X\in\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\\ {}^{\mathrm{t}}XX=1}}{}^{\mathrm{t}}XSX.$

4.5.8 Soient $n\in\mathbb{N}-\{0,1\},\ d_1,\ldots,d_n\in\mathbb{R}$ tels que

$$d_1<\cdots<d_n,\quad A=\begin{pmatrix} d_1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & d_n\end{pmatrix}.$$

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ vérifient :

$$d_1-1<\lambda_1<d_2-1<\ldots<\lambda_{n-1}<d_n-1<\lambda_n<d_n+n-1.$$

4.5.2 Réduction simultanée

Théorème

Soient $(E,<\cdot,\cdot>)$ un eve, φ une fbs sur $E\times E$. Il existe une b.o.n. de E dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Preuve

$\mathcal{B}_1$ est une b.o.n. de $(E,<.,.>)$.

L'eve E admet au moins une b.o.n. $\mathcal{B}_1$; notons $A_1=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi)$.

Puisque A_1 est symétrique, d'après le théorème fondamental (4.5.1 Th. p. 164), il existe $\Omega\in\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D\in\mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_1=\Omega D\Omega^{-1}$.

Notons $\mathcal{B}$ la base déduite de $\mathcal{B}_1$ par la matrice de passage Ω. Alors $\mathcal{B}$ est orthonormée (puisque $\mathcal{B}_1$ est orthonormée et Ω orthogonale, cf. 4.3.2 Prop. 6 p. 155), et (cf. formule de changement de base, 4.1.2 3) Prop. 3. p. 135) : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = {}^{t}\Omega A_1 \Omega = {}^{t}\Omega(\Omega D \Omega^{-1})\Omega = D$. ■

4.5.3 Positivité

1) Formes quadratiques positives, définies-positives

Définition 1

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, ϕ une fq sur E.

1) On dit que ϕ est **positive** si et seulement si : $\forall x \in E,\ \phi(x) \geqslant 0$.

2) On dit que ϕ est **définie-positive** si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall x \in E,\ \ \phi(x) \geqslant 0 \\ \forall x \in E,\ \ (\phi(x) = 0 \Longrightarrow x = 0). \end{cases}$$

ϕ est définie-positive si et seulement si : $\forall x \in E - \{0\},\ \phi(x) > 0$.

Exercices 4.5.9, 4.5.10.

Remarque :

Soient φ une fbs sur un ev E, ϕ la fq associée à φ ; φ est un produit scalaire si et seulement si ϕ est définie-positive.

Proposition 1 **Inégalité de Cauchy Schwarz pour une fq positive**

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, ϕ une fq positive sur E, φ la forme polaire de ϕ.

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|\varphi(x, y)|^2 \leqslant \phi(x)\phi(y).$$

Preuve

Comme pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire (cf. Algèbre PCSI-PTSI, § 10.1.2, Th. 1), la condition $\phi \geqslant 0$ étant suffisante. ■

2) Matrices symétriques positives, définies-positives

Définition 2

Soient $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, φ la fbs sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est S, ϕ la fq associée à φ.

1) On dit que S est **symétrique positive** si et seulement si ϕ est positive.

2) On dit que S est **symétrique définie-positive** si et seulement si ϕ est définie-positive.

Notation

On note : $\left| \begin{array}{l} \mathbf{S}_n^{+} \text{ l'ensemble des matrices symétriques positives de } \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \\ \mathbf{S}_n^{++} \text{ l'ensemble des matrices symétriques définies-positives de } \mathbf{S}_n(\mathbb{R}). \end{array} \right.$

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition 2

Soit $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. On a :

- $S \in \mathbf{S}_n^+ \iff \left(\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0\right)$

- $S \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \left(\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \begin{cases} {}^tXSX \geqslant 0 \\ {}^tXSX = 0 \Longrightarrow X = 0 \end{cases}\right)$
$\iff \left(\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\},\ {}^tXSX > 0\right).$

Ces propriétés sont souvent utiles dans les exercices et problèmes.

Remarques :

1) On déduit facilement de la Prop. précédente les propriétés élémentaires suivantes de $\mathbf{S}_n^+$ et $\mathbf{S}_n^{++}$:

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \forall S \in \mathbf{S}_n^+,\ \ \alpha S \in \mathbf{S}_n^+$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall S \in \mathbf{S}_n^{++},\ \ \alpha S \in \mathbf{S}_n^{++}$

3) $\forall (S_1, S_2) \in (\mathbf{S}_n^+)^2,\ \ S_1 + S_2 \in \mathbf{S}_n^+$

4) $\forall S_1, S_2 \in \mathbf{S}_n^+ \times \mathbf{S}_n^{++},\ S_1 + S_2 \in \mathbf{S}_n^{++}$

5) $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),\ \ {}^tAA \in \mathbf{S}_n^+$.

2) On munit $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ d'une relation, notée $\leqslant$, définie par :

$$\forall (A,B) \in \left(\mathbf{S}_n(\mathbb{R})\right)^2, \quad (A \leqslant B \iff B - A \in \mathbf{S}_n^+).$$

Cette relation $\leqslant$ est un ordre sur $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$:

• *Réflexivité* : $\ \forall A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}), A - A = 0 \in \mathbf{S}_n^+$

• *Antisymétrie* : Soient $A, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \leqslant B$ et $B \leqslant A$. On a alors $B - A \in \mathbf{S}_n^+$ et $A - B \in \mathbf{S}_n^+$, d'où : $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX(A-B)X = 0,$ et donc, comme $A - B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, $A - B = 0$ (cf. 4.1.2 Prop. 2 p. 133)

• Transitivité : On a, pour toutes A, B, C de $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} A \leqslant B \\ B \leqslant C \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B - A \in \mathbf{S}_n^+ \\ C - B \in \mathbf{S}_n^+ \end{cases} \Longrightarrow C - A = (C - B) + (B - A) \in \mathbf{S}_n^+ \Longrightarrow A \leqslant C.$$

Mais, si $n \geqslant 2$:

Attention : L'ordre $\leqslant$ sur $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ n'est pas total (si $n \geqslant 2$).

• $\leqslant$ n'est pas un ordre total sur $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on n'a ni $A \leqslant B$ ni $B \leqslant A$.

Attention : L'ordre $\leqslant$ sur $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ n'est pas compatible avec la multiplication qui n'est d'ailleurs pas une loi interne dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ si $n \geqslant 2$.

• $\leqslant$ n'est pas compatible avec la multiplication (même si les matrices qui interviennent sont toutes symétriques). Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5/4 \end{pmatrix}$, on a $A \leqslant B$ (car $B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5/4 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_2^+$) et $A^2 \not\leqslant B^2$ (car $B^2 - A^2 = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 64 & 52 \\ 52 & 41 \end{pmatrix} \notin \mathbf{S}_2^+$).

On note souvent $<$ la relation définie dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (A,B) \in \left(\mathbf{S}_n(\mathbb{R})\right)^2, \quad (A < B \iff B - A \in \mathbf{S}_n^{++}).$$

On prendra garde à ce que, lorsque $n \geqslant 2$, les relations $\begin{cases} A \leqslant B \\ A \neq B \end{cases}$ n'entraînent pas $A < B$, comme le montre l'exemple : $\ n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Soient E un eve, $n = \dim(E)$, $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E, φ une fbs sur E, ϕ la fq associée à φ, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$. On a :

$$\left| \begin{array}{ll} A \text{ symétrique positive} & \Longleftrightarrow \phi \text{ positive} \\ A \text{ symétrique définie-positive} & \Longleftrightarrow \phi \text{ définie-positive.} \end{array} \right.$$

Exercices 4.5.11 à 4.5.21.

3) Endomorphismes symétriques positifs, symétriques définis-positifs

Définition 3

Un endomorphisme symétrique f de E est dit :

1) **symétrique positif** si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad < x, f(x) > \geqslant 0$$

2) **symétrique défini-positif** si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall x \in E, & < x, f(x) > \geqslant 0 \\ \forall x \in E, & (< x, f(x) > = 0 \Longrightarrow x = 0) \end{cases}.$$

Remarques :

1) Un endomorphisme symétrique f de E est symétrique défini-positif si et seulement si :

$$\forall x \in E - \{0\}, \quad < x, f(x) > > 0.$$

2) Les qualificatifs « positif », « défini-positif » ne peuvent s'appliquer ici qu'à un endomorphisme *symétrique* (et non à tout endomorphisme).

3) Un endomorphisme symétrique f de E est dit **négatif** (resp. **défini-négatif**) si et seulement si $-f$ est symétrique positif (resp. défini-positif).

4) Soit f un endomorphisme symétrique de E ; notons $\phi_f : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto < x, f(x) > \end{array}$. Il est clair que ϕ_f est une forme quadratique sur E (appelée **forme quadratique associée** à f), et que f est symétrique positif (resp. défini-positif) si et seulement si ϕ_f est une fq positive (resp. définie-positive).

4) Caractérisation de la positivité par le spectre

Théorème

Très utile.

Soit $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. On a :

1) $S \in \mathbf{S}_n^+ \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+$ *2)* $S \in \mathbf{S}_n^{++} \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Preuve

1) • Soient $S \in \mathbf{S}_n^+$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$; il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ tel que $SX = \lambda X$.

On a : $\quad {}^{\mathrm{t}}XSX \geqslant 0, \quad {}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}X(\lambda X) = \lambda\, {}^{\mathrm{t}}XX, \quad {}^{\mathrm{t}}XX = ||X||^2 > 0,$

d'où : $\quad \lambda \geqslant 0.$

• Réciproquement, supposons $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+$.

D'après le th. fondamental (4.4.1 Th. p. 164), il existe $(\Omega, D) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; notons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $Y = \Omega^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On a alors : $\quad {}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}X\Omega D \Omega^{-1}X = {}^{\mathrm{t}}YDY = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant 0.$

Ceci montre : $S \in \mathbf{S}_n^+$.

2) En reprenant les notations précédentes :

• ${}^{t}XSX > 0$, d'où $\lambda > 0$

• ${}^{t}XSX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 > 0$

car $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $Y \neq 0$ (sinon, $X = \Omega Y = 0$, exclu). ■

Exercices 4.5.22 à 4.5.39, 4.5.42 à 4.5.52, 4.5.56 à 4.5.75.

On a même : $\mathbf{S}_n^{++} = \mathbf{S}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Remarque :

Du Th. fondamental (4.4.1 Th. p. 164) et de la Prop. précédente, on déduit : $\mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Le Corollaire suivant se déduit immédiatement du Théorème précédent.

Corollaire

Soit f un endomorphisme symétrique de E.

1) f est symétrique positif si et seulement si : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \mathbb{R}_+$

2) f est symétrique défini-positif si et seulement si : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Exercice-type résolu 1

Une caractérisation des matrices carrées réelles diagonalisables

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$

(ii) $\exists\, S \in \mathbf{S}_n^{++},\ {}^{t}A = S^{-1}AS$.

Solution

1) Supposons A diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = PDP^{-1}$.

On a alors ${}^{t}A = {}^{t}(PDP^{-1}) = {}^{t}P^{-1}D\,{}^{t}P$ et $D = P^{-1}AP$, d'où :

$$ {}^{t}A = {}^{t}P^{-1}(P^{-1}AP)\,{}^{t}P = ({}^{t}P^{-1}P^{-1})A(P\,{}^{t}P) = (P\,{}^{t}P)^{-1}A(P\,{}^{t}P). $$

En notant $S = P\,{}^{t}P$, on a donc : ${}^{t}A = S^{-1}AS$.

La matrice S est symétrique car ${}^{t}S = {}^{tt}P\,{}^{t}P = P\,{}^{t}P = S$, et on a, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$:

$$ {}^{t}XSX = {}^{t}X(P\,{}^{t}P)X = ({}^{t}XP)({}^{t}PX) = {}^{t}({}^{t}PX)\,{}^{t}PX = ||\,{}^{t}PX||_2^2 > 0. $$

On conclut : $S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

2) Réciproquement, supposons qu'il existe $S \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que : ${}^{t}A = S^{-1}AS$.

On a alors :

$$ {}^{t}(AS) = {}^{t}S\,{}^{t}A = S(S^{-1}AS) = AS, $$

donc $AS \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

Conseils

$||.||_2$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

${}^{t}PX \neq 0$ car ${}^{t}P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$.

Solution

D'autre part, comme $S \in \mathbf{S}_n^{++}$, d'après un exercice classique, il existe $R \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que $R^2 = S$.

La matrice $R^{-1}(AS)R^{-1}$ est alors symétrique, car :

$$ {}^{\mathrm{t}}\big(R^{-1}(AS)R^{-1}\big) = {}^{\mathrm{t}}R^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}(AS){}^{\mathrm{t}}R^{-1} = R^{-1}(AS)R^{-1}. $$

Il en résulte, d'après le théorème fondamental, que $R^{-1}(AS)R^{-1}$ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Mais :

$$ R^{-1}(AS)R^{-1} = R^{-1}(AR^2)R^{-1} = R^{-1}AR. $$

Ainsi, A est semblable à $R^{-1}(AS)R^{-1}$ et $R^{-1}(AS)R^{-1}$ est symétrique réelle donc diagonalisable.

On conclut que A est diagonalisable.

Conseils

Racine carrée d'une matrice symétrique définie-positive, cf. ex. 4.5.62 p. 184.

Si une matrice carrée est semblable à une matrice diagonalisable, alors elle est elle-même diagonalisable.

Exercice-type résolu 2

Convexité, inégalité de Hadamard

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{S}_n^{+}$.

a) On suppose ici $S \in \mathbf{S}_n^{++}$. On note $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les valeurs propres de S. Soit $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application convexe. Montrer :

$$ \sum_{i=1}^{n} f(a_{ii}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k). $$

b) En déduire l'inégalité de Hadamard :

$$ \det(S) \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}. $$

Solution

a) Puisque $S \in \mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème fondamental, il existe $P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que, en notant $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, on ait : $S = PDP^{-1}$.

En notant $P = (p_{ij})_{ij}$, on a, pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$:

$$ a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\lambda_k p_{jk} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}p_{jk}\lambda_k. $$

Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$ fixé. On a $a_{ii} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}^2\lambda_k$ et :

$$ \begin{cases} \forall k \in \{1,\ldots,n\},\quad p_{ik}^2 \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_{ik}^2 = 1. \end{cases} $$

De plus, comme $S \in \mathbf{S}_n^{++}$, on a : $\forall k \in \{1,\ldots,n\},\ \ \lambda_k > 0$, et $\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \ a_{ii} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{E}_i S \mathrm{E}_i$.

Conseils

Lorsqu'une matrice symétrique réelle intervient, penser à utiliser éventuellement le théorème fondamental.

Terme général du produit de trois matrices, $PD\,{}^{\mathrm{t}}P$, dont l'une, D, est diagonale.

La matrice P est orthogonale, donc la somme des carrés des termes de chaque ligne est égale à 1.

E_i est la i-ème matrice colonne de la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Solution

Puisque f est convexe, on a alors, d'après l'inégalité de Jensen :

$$f(a_{ii}) = f\left(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}^2 \lambda_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_{ik}^2 f(\lambda_k).$$

On en déduit, en sommant pour i allant de 1 à n :

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_{ii}) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ik}^2 f(\lambda_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ik}^2\right) f(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k),$$

car : $\quad \forall k \in \{1,\dots,n\},\ \sum_{i=1}^{n} p_{ik}^2 = 1.$

On conclut : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(a_{ii}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k).$

b) • Si $S \notin \mathbf{S}_n^{++}$, alors $\det(S) = 0$ et, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $a_{ii} \geqslant 0$, donc :

$0 = \det(S) \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$

• Supposons $S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

On a alors : $\forall i \in \{1,\dots,n\},\ a_{ii} > 0.$

Appliquons le résultat de *a)* à :

$$f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = -\ln x,$$

qui est convexe sur $]0\,;+\infty[$, puisque f est deux fois dérivable et que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[,\ f''(x) = \dfrac{1}{x^2} \geqslant 0.$

On a donc :

$$\sum_{i=1}^{n} -\ln(a_{ii}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} -\ln(\lambda_k),$$

c'est-à-dire :

$$-\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ii}\right) \leqslant -\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \lambda_k\right) = -\ln\big(\det(S)\big).$$

En passant aux opposés et en appliquant l'exponentielle, qui est croissante, on conclut :

$$\det(S) \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Conseils

Permutation de deux symboles $\sum$.

La matrice P étant orthogonale, la somme des carrés des éléments de chaque colonne est égale à 1.

$a_{ii} = {}^{t}E_i S E_i \geqslant 0.$

$a_{ii} = {}^{t}E_i S E_i > 0$, car $S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

Puisque S est diagonalisable, on a :

$$\det(S) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Exercice-type résolu 3

Étude des matrices carrées réelles A telles que $A + {}^{t}A \in \mathbf{S}_n^{+}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A + {}^{t}A \in \mathbf{S}_n^{+}$. Montrer : $\operatorname{Ker}({}^{t}A) = \operatorname{Ker}(A)$.

Solution

Notons $S = A + {}^{t}A \in \mathbf{S}_n^+$.

1) Soit $X \in \mathrm{Ker}\,(A)$, c'est-à-dire $AX = 0$.

On a :

$$ {}^{t}XSX = {}^{t}X(A + {}^{t}A)X = {}^{t}XAX + {}^{t}X{}^{t}AX = {}^{t}X(AX) + {}^{t}(AX)X = 0. $$

D'après un exercice classique, puisque $S \in \mathbf{S}_n^+$, il existe $R \in \mathbf{S}_n^+$ telle que $R^2 = S$. On a alors :

$$ 0 = {}^{t}XSX = {}^{t}XR^2X = ({}^{t}X{}^{t}R)(RX) = {}^{t}(RX)(RX) = ||RX||_2^2, $$

d'où $RX = 0$, puis $SX = R^2X = R(RX) = R0 = 0$.

Ensuite :

$$ {}^{t}AX = (A + {}^{t}A)X - AX = 0 - 0 = 0, $$

et donc $X \in \mathrm{Ker}\,({}^{t}A)$.

Ceci montre : $\mathrm{Ker}\,(A) \subset \mathrm{Ker}\,({}^{t}A)$.

2) En appliquant le résultat précédent à ${}^{t}A$, on obtient :

$$ \mathrm{Ker}\,({}^{t}A) \subset \mathrm{Ker}\,({}^{t}{}^{t}A) = \mathrm{Ker}\,(A). $$

On conclut :

$$ \mathrm{Ker}\,({}^{t}A) = \mathrm{Ker}\,(A). $$

Conseils

Existence de la racine carrée d'une matrice symétrique positive, cf. exercice 4.5.62 p. 184.

Faire intervenir la norme euclidienne usuelle $||.||_2$ dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

${}^{t}A$ vérifie la même hypothèse que A, car :

$$ {}^{t}A + {}^{t}({}^{t}A) = {}^{t}A + A = A + {}^{t}A \in \mathbf{S}_n^+. $$

Exercice-type résolu 4

Étude du noyau et de l'image de $A + B$ pour $(A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{S}_n^+$.

Montrer :

1) pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^{t}XAX = 0 \iff AX = 0$

2) $\mathrm{Im}\,(A) = \big(\mathrm{Ker}\,(A)\big)^{\perp}$.

b) Soient $A, B \in \mathbf{S}_n^+$. Montrer :

1) $\mathrm{Ker}\,(A + B) = \mathrm{Ker}\,(A) \cap \mathrm{Ker}\,(B)$

2) $\mathrm{Im}\,(A + B) = \mathrm{Im}\,(A) + \mathrm{Im}\,(B)$.

c) En déduire que, en notant $\mathcal{V}_n$ l'ensemble des sev de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, les applications

$$ \mathrm{Ker} : \begin{array}{ccc} \mathbf{S}_n^+ & \longrightarrow & \mathcal{V}_n \\ A & \longmapsto & \mathrm{Ker}\,(A) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im} : \begin{array}{ccc} \mathbf{S}_n^+ & \longrightarrow & \mathcal{V}_n \\ A & \longmapsto & \mathrm{Im}\,(A) \end{array} $$

sont respectivement décroissante et croissante, lorsqu'on munit $\mathbf{S}_n^+$ de l'ordre $\leqslant$ défini par :

$$ \forall (A, B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2, \ \big(A \leqslant B \iff B - A \in \mathbf{S}_n^+\big) $$

et que l'on munit $\mathcal{V}_n$ de l'inclusion.

Solution

a) 1) • On a : $AX = 0 \Longrightarrow {}^tXAX = {}^tX0 = 0.$

• Réciproquement, soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tXAX = 0.$

Puisque $A \in \mathbf{S}_n^+$, d'après un exercice classique, il existe $R \in \mathbf{S}_n^+$ telle que $A = R^2$. On a alors :

$$0 = {}^tXAX = {}^tXR^2X = ({}^tX{}^tR)(RX) = {}^t(RX)(RX) = ||RX||_2^2,$$

d'où $RX = 0$, puis : $AX = R^2X = R(RX) = R0 = 0.$

On conclut : ${}^tXAX = 0 \iff AX = 0.$

2) • Soit $Y \in \mathrm{Im}\,(A)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = AX$.

On a, pour tout $Z \in \mathrm{Ker}\,(A)$:

$${}^tYZ = {}^t(AX)Z = {}^tX{}^tAZ = {}^tXAZ = {}^tX0 = 0,$$

donc $Y \in \big(\mathrm{Ker}\,(A)\big)^\perp$.

Ceci montre : $\mathrm{Im}\,(A) \subset \big(\mathrm{Ker}\,(A)\big)^\perp$.

• On a, en utilisant le théorème du rang :

$$\dim\big(\mathrm{Im}\,(A)\big) = n - \dim\big(\mathrm{Ker}\,(A)\big) = \dim\Big(\big(\mathrm{Ker}\,(A)\big)^\perp\Big).$$

On conclut : $\mathrm{Im}\,(A) = \big(\mathrm{Ker}\,(A)\big)^\perp$.

b) 1) • On a, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$X \in \mathrm{Ker}\,(A) \cap \mathrm{Ker}\,(B) \iff \begin{cases} AX = 0 \\ BX = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (A+B)X = AX + BX = 0 \iff X \in \mathrm{Ker}\,(A+B).$$

Ceci montre : $\mathrm{Ker}\,(A) \cap \mathrm{Ker}\,(B) \subset \mathrm{Ker}\,(A+B)$.

• Soit $X \in \mathrm{Ker}\,(A+B)$. On a alors :

$${}^tXAX + {}^tXBX = {}^tX(A+B)X = {}^tX0 = 0.$$

Comme ${}^tXAX \geqslant 0$ et ${}^tXBX \geqslant 0$, il en résulte ${}^tXAX = 0$ et ${}^tXBX = 0$, puis, d'après *a) 1)* : $AX = 0$ et $BX = 0$, donc $X \in \mathrm{Ker}\,(A)$ et $X \in \mathrm{Ker}\,(B)$.

On obtient : $\mathrm{Ker}\,(A+B) \subset \mathrm{Ker}\,(A) \cap \mathrm{Ker}\,(B)$.

On conclut : $\mathrm{Ker}\,(A+B) = \mathrm{Ker}\,(A) \cap \mathrm{Ker}\,(B)$.

2) On a, d'après *a) 2)* et *b) 1)* :

$$\mathrm{Im}\,(A+B) = \big(\mathrm{Ker}\,(A+B)\big)^\perp = \big(\mathrm{Ker}\,(A) \cap \mathrm{Ker}\,(B)\big)^\perp$$

$$= \big(\mathrm{Ker}\,(A)\big)^\perp + \big(\mathrm{Ker}\,(B)\big)^\perp = \mathrm{Im}\,(A) + \mathrm{Im}\,(B).$$

c) Soit $(A,B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$ tel que $A \leqslant B$. Notons $C = B - A$. On a alors : $A,B,C \in \mathbf{S}_n^+$ et $B = A + C$.

1) D'après *b) 1)* :

$$\mathrm{Ker}\,(B) = \mathrm{Ker}\,(A+C) = \mathrm{Ker}\,(A) \cap \mathrm{Ker}\,(C) \subset \mathrm{Ker}\,(A),$$

donc l'application Ker : $\mathbf{S}_n^+ \longrightarrow \mathcal{V}_n$ est décroissante.

2) D'après *b) 2)* :

$$\mathrm{Im}\,(B) = \mathrm{Im}\,(A+C) = \mathrm{Im}\,(A) + \mathrm{Im}\,(C) \supset \mathrm{Im}\,(A),$$

donc l'application Im : $\mathbf{S}_n^+ \longrightarrow \mathcal{V}_n$ est croissante.

Conseils

On commence par le sens qui paraît le plus facile.

Existence de la racine carrée d'une matrice symétrique positive, cf. exercice 4.5.62 p. 184.

Penser à utiliser la norme euclidienne canonique $||.||_2$ sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Une inclusion du type $F \subset G^\perp$ revient à :
$\forall f \in F, \forall g \in G, \ (f \mid g) = 0.$

Ayant établi une inclusion entre deux sev, on compare ensuite leurs dimensions.

On commence par l'inclusion qui paraît la plus facile.

On peut appliquer *a) 2)* à A, B, $A+B$.

Attention : il ne s'agit pas ici de diagonalisation de matrices carrées : les formules font intervenir ${}^{t}P$ et non P^{-1}, et P n'est pas, a priori, orthogonale.

Exercices 4.5.40, 4.5.41, 4.5.53 à 4.5.55.

5) Réduction simultanée d'un produit scalaire et d'une forme quadratique

Proposition **Expression matricielle du théorème de réduction simultanée**

Soient $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, $B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $(P,D) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$A = {}^{t}PP \quad \text{et} \quad B = {}^{t}PDP.$$

Preuve

Puisque $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, la fbs $\varphi_A : \begin{array}{l}\big(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X,Y) \longmapsto {}^{t}XAY\end{array}$ est un produit scalaire sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons φ_B la fbs représentée par B dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après le th. de réduction simultanée (4.5.2 Th. p. 169), il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ de $\big(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\varphi_A\big)$ telle que la matrice D de φ_B dans $\mathcal{B}$ soit diagonale. Notons $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}_0,\mathcal{B})$.

Comme φ_A est représenté dans $\mathcal{B}_0$ par A et dans $\mathcal{B}$ par I_n (car $\mathcal{B}$ est orthonormale pour φ_A), on a (formule de changement de base pour une fbs, 4.1.2 3) Prop. 3 p. 135) : $A = {}^{t}P\mathrm{I}_nP = {}^{t}PP$. De même $B = {}^{t}PDP$. ■

Remarque :

Dans cette Proposition, les éléments diagonaux de D *ne sont pas* (« en général ») les valeurs propres de B.

Exercice-type résolu

Inégalité portant sur des déterminants de matrices symétriques définies-positives

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S_1,S_2 \in \mathbf{S}_n^{++}$, $a_1,a_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a_1 + a_2 = 1$.

Montrer :

$$\det(a_1S_1 + a_2S_2) \geqslant \big(\det(S_1)\big)^{a_1}\big(\det(S_2)\big)^{a_2}.$$

Solution

Puisque $S_1,S_2 \in \mathbf{S}_n^{++}$, on a : $\det(S_1) > 0$, $\det(S_2) > 0$.

D'autre part, puisque $a_1,a_2 \in \mathbb{R}_+^*$, et $S_1,S_2 \in \mathbf{S}_n^{++}$, on a : $a_1S_1 + a_2S_2 \in \mathbf{S}_n^{++}$, donc $\det(a_1S_1 + a_2S_2) > 0$.

Puisque $S_1,S_2 \in \mathbf{S}_n^{++}$, d'après le **théorème de réduction simultanée**, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}_+^*)$ telles que : $S_1 = {}^{t}PP$ et $S_2 = {}^{t}PDP$.

On a alors :

$$a_1S_1 + a_2S_2 = a_1\,{}^{t}PP + a_2\,{}^{t}PDP = {}^{t}P(a_1\mathrm{I}_n + a_2D)P,$$

d'où, en notant (1) l'inégalité demandée :

$$(1) \iff \det\big({}^{t}P(a_1\mathrm{I}_n + a_2D)P\big) \geqslant \big(\det({}^{t}PP)\big)^{a_1}\big(\det({}^{t}PDP)\big)^{a_2}$$

$$\iff \big(\det(P)\big)^2\det(a_1\mathrm{I}_n + a_2D) \geqslant \big(\det(P)\big)^{2a_1}\big(\det(P)\big)^{2a_2}\big(\det(D)\big)^{a_2}$$

$$\iff \det(a_1\mathrm{I}_n + a_2D) \geqslant \big(\det(D)\big)^{a_2}.$$

Conseils

$\mathbf{D}_n(\mathbb{R}_+^*)$ désigne l'ensemble des matrices diagonales de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont les termes diagonaux sont tous > 0.

Rappel : $a_1 + a_2 = 1$.

Solution

En notant $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, on a :

$$(1) \iff \prod_{k=1}^{n}(a_1 + a_2\lambda_k) \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^{a_2} = \prod_{k=1}^{n}\lambda_k^{a_2}$$
$$\Longleftarrow \forall k \in \{1,\ldots,n\},\ a_1 + a_2\lambda_k \geqslant \lambda_k^{a_2}.$$

Considérons l'application $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ \lambda \longmapsto f(\lambda) = a_1 + a_2\lambda - \lambda^{a_2}$.

L'application f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et :

$$\forall \lambda \in]0\,;+\infty[,\ \ f'(\lambda) = a_2 - a_2\lambda^{a_2-1} = a_2(1 - \lambda^{-(1-a_2)}).$$

On en déduit le tableau de variations de f :

λ	0	1	$+\infty$
$f'(\lambda)$	$-$	0	$+$
$f(\lambda)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Comme $f(1) = a_1 + a_2 - 1 = 0$, on conclut : $\forall \lambda \in]0\,;+\infty[,\ \ f(\lambda) \geqslant 0$, d'où l'inégalité voulue.

Conseils

Les réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont tous > 0 car $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}_+^*)$.

L'implication renversée traduit une condition suffisante.

Pour établir une inégalité à une variable réelle, on peut essayer d'étudier les variations d'une fonction.

Comme $a_1,a_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $a_1 + a_2 = 1$, on a : $1 - a_2 > 0$.

Les méthodes à retenir

Réduction des matrices symétriques réelles, formes quadratiques positives, formes quadratiques définies-positives

- **Pour résoudre certains exercices portant sur les formes quadratiques positives ou les formes quadratiques définies-positives**, il peut suffire de revenir simplement à la définition du § 4.5.3 1) Déf. 1 p. 170 (ex. 4.5.9, 4.5.10).
- **Pour étudier une question portant sur une matrice symétrique réelle**, penser à utiliser éventuellement le théorème fondamental (ex. 4.5.25).
- **Pour étudier des inégalités dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$**, on manipulera les symboles $\leqslant$, $<$ dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ (cf. Remarque *2)* p. 171) avec précaution. De manière générale, on ramènera, une inégalité dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ à l'intervention d'une matrice symétrique positive ou définie-positive ; si $A, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$A \leqslant B \iff B - A \in \mathbf{S}_n^+$$

et :

$$A < B \iff B - A \in \mathbf{S}_n^{++}$$

(ex. 4.5.11 à 4.5.14).
- Les propriétés vues en Remarque 1) p. 171 sont souvent utiles (ex. 4.5.12 à 4.5.14).
- **Pour travailler sur une matrice symétrique positive**, on dispose de deux points de vue :

  * la définition : une matrice symétrique réelle $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive si et seulement si :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad {}^{t}XSX \geqslant 0$$

* le théorème du § 4.5.3 4) p. 172 : une matrice symétrique réelle $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive si et seulement si :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+.$$

On dispose de résultats analogues pour caractériser, parmi les matrices symétriques réelles, celle qui sont définies-positives.

Le deuxième point de vue (utilisation du spectre) n'a d'intérêt que si on a accès aux valeurs propres de la matrice symétrique réelle considérée (ex. 4.5.22, 4.5.24 à 4.5.27, 4.5.30 à 4.5.35, 4.5.37, 4.5.38).

- L'existence d'une racine carrée symétrique positive pour une matrice symétrique positive donnée (ex. 4.5.25 *b)*) est utile pour de nombreux exercices (ex. 4.5.37, …).
- **Lorsqu'interviennent deux matrices symétriques réelles A, B** (ex. 4.5.27, 4.5.37), on ne peut pas, en général, les diagonaliser dans une même base (car alors elles commuteraient). On essaiera de diagonaliser l'une des deux : $A = \Omega D \Omega^{-1}$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$, $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, et on fera subir à l'autre matrice le changement de b.o.n. induit par Ω : $B = \Omega C \Omega^{-1}$, où on montrera $C \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. L'étude qui portait sur *A, B* sera ainsi ramenée à une étude sur D, C (et peut être Ω), qui a des chances d'être plus simple.
- **Pour montrer que deux matrices commutent**, il suffit de montrer que l'une est un polynôme de l'autre (ex. 4.5.35) ; on pourra, à cet effet, faire intervenir un polynôme d'interpolation à partir des valeurs propres d'une matrice.
- **Lorsqu'interviennent deux matrices symétriques réelles A, B dont l'une est définie-positive** (ex. 4.5.40, 4.5.41), on peut essayer d'utiliser l'expression matricielle du théorème de réduction simultanée, § 4.5.3, Prop. 2 *2)* p. 171 ; si $A \in \mathbf{S}_n^{++}$ et $B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = {}^{\mathrm{t}}PP$ et $B = {}^{\mathrm{t}}PDP$. On portera attention au fait que (si $A \neq \mathrm{I}_n$), la matrice P n'est pas orthogonale, et donc P^{-1} et ${}^{\mathrm{t}}P$ sont distinctes.

Exercices

Les exercices 4.5.9 *à* 4.5.21 *ne nécessitent pas l'application du théorème fondamental*

4.5.9 Soient E un $\mathbb{R}$-ev, φ une fbs sur E, ϕ la fq associée à φ, $(a,b) \in E^2$.
On note $\Psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in E,\ \ \Psi(x) = \phi(a)\phi(b)\phi(x) - \varphi(a,b)\varphi(a,x)\varphi(b,x).$$

a) Montrer que Ψ est une fq et exprimer sa forme polaire ψ.

b) Montrer que, si ϕ est définie-positive et (a,b) libre, alors Ψ est définie-positive.

4.5.10 Soient E un $\mathbb{R}$-ev, ϕ une forme quadratique sur E telle que $\phi \neq 0$.
Montrer :

a) ϕ est positive si et seulement si $\phi(E) = \mathbb{R}_+$

b) ϕ est négative si et seulement si $\phi(E) = \mathbb{R}_-$

c) ϕ n'est ni positive ni négative si et seulement si $\phi(E) = \mathbb{R}$.

4.5.11 Montrer que $\leqslant$ est compatible dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ avec l'addition, c'est-à-dire : $\forall A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{cases} A_1 \leqslant B_1 \\ A_2 \leqslant B_2 \end{cases} \Longrightarrow A_1 + A_2 \leqslant B_1 + B_2.$$

Montrer de plus : $\forall A_1, A_2, B_1, B_2, \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{cases} A_1 \leqslant B_1 \\ A_2 < B_2 \end{cases} \Longrightarrow A_1 + A_2 < B_1 + B_2.$$

4.5.12 Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $S_1, \ldots, S_p \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$,

$$S = \sum_{k=1}^{p} S_k^2.$$

a) Montrer : $S \in \mathbf{S}_n^+$.

b) Montrer : $S = 0 \Longleftrightarrow (\forall k \in \{1, \ldots, p\},\ S_k = 0)$.

4.5.13 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer :

a) ${}^{\mathrm{t}}ASA \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$

b) $S \in \mathbf{S}_n^+ \implies {}^{\mathrm{t}}ASA \in \mathbf{S}_n^+$

c) $\left\{\begin{array}{l} S \in \mathbf{S}_n^{++} \\ A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \end{array}\right| \implies {}^{\mathrm{t}}ASA \in \mathbf{S}_n^{++}.$

4.5.14 Soient $n \in \mathbb{N}^*,\ A,B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$AB + BA \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad AB + BA \leqslant A^2 + B^2.$$

4.5.15 A-t-on :

$$\forall (A,B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2,\ AB + BA \in \mathbf{S}_n^+ \ ?$$

4.5.16 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, $B \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$
Montrer : $A + B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

4.5.17 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer :

a) ${}^{\mathrm{t}}AA \in \mathbf{S}_p^+$

b) ${}^{\mathrm{t}}AA \in \mathbf{S}_p^{++} \iff \mathrm{rg}(A) = p$.

En particulier :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),\ \left({}^{\mathrm{t}}AA \in \mathbf{S}_n^{++} \iff A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})\right).$$

4.5.18 Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $n_1,\dots,n_N \in \mathbb{N}^*$,
$S_1 \in \mathbf{S}_{n_1}(\mathbb{R}),\dots,S_N \in \mathbf{S}_{n_N}(\mathbb{R})$,

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_N \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \text{ où } n = \sum_{k=1}^{N} n_k.$$

Montrer :

a) $S \in \mathbf{S}_n^+ \iff \left(\forall k \in \{1,\dots,N\},\ S_k \in \mathbf{S}_{n_k}^+\right)$

b) $S \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \left(\forall k \in \{1,\dots,N\},\ S_k \in \mathbf{S}_{n_k}^{++}\right)$.

4.5.19 Soient $p,q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{S}_p^+$, $B \in \mathbf{S}_q^{++}$,

$$U \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ S = \begin{pmatrix} A & U \\ {}^{\mathrm{t}}U & B \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_{p+q}(\mathbb{R}),$$

$$C = A - UB^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}U.$$

Montrer :

a) $S \in \mathbf{S}_{p+q}^+ \iff C \in \mathbf{S}_p^+$

b) $S \in \mathbf{S}_{p+q}^{++} \iff C \in \mathbf{S}_p^{++}$.

4.5.20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$; montrer :

a) $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$

b) $\mathbf{S}_n^+$ est fermé dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

4.5.21 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S \in \mathbf{S}_n^{++}$, $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On suppose : $\left\{\begin{array}{l} SX \geqslant 0 \\ X \leqslant 0 \end{array}\right.$,

où « $\geqslant$ » dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ signifie que les composantes (dans la base canonique) sont toutes $\geqslant 0$.
Montrer : $X = 0$.

4.5.22 Soient $(\alpha,\beta,\gamma) \in]0\,;\pi[^3$,
$\delta = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\beta & 1 \end{pmatrix}.$$

On suppose $\delta > 0$; montrer : $S \in \mathbf{S}_3^{++}$.

4.5.23 Le produit de deux matrices symétriques réelles est-il toujours diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$?

4.5.24 Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, φ une fbs sur E, ϕ la fq associée à φ, $\mathcal{B}$ une base de E,
$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Montrer :

a) si ϕ est positive, alors $\det(A) \geqslant 0$

b) si ϕ est définie-positive, alors $\det(A) > 0$.

4.5.25 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

a) si p est impair, alors :

$$\forall S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}),\ \exists R \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}),\ R^p = S$$

b) si p est pair, alors : $\forall S \in \mathbf{S}_n^+,\ \exists R \in \mathbf{S}_n^+,\ R^p = S$.

En particulier : $\forall S \in \mathbf{S}_n^+,\ \exists R \in \mathbf{S}_n^+,\ R^2 = S$.

(Pour l'unicité, voir plus loin ex. 4.5.62 p. 184).

4.5.26 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $\mu_1,\dots,\mu_n$ les vp de ${}^{\mathrm{t}}AA$.

Montrer :

a) $\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \mu_i \geqslant 0$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2$.

4.5.27 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

a) $\forall (S,S') \in (\mathbf{S}_n^+)^2,\ \mathrm{tr}(SS') \leqslant \mathrm{tr}(S)\,\mathrm{tr}(S')$

b) $\forall (S,S') \in (\mathbf{S}_n^{++})^2,\ \mathrm{tr}(SS') < \mathrm{tr}(S)\,\mathrm{tr}(S')$, si $n \geqslant 2$.

4.5.28 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\forall (A,B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ ||AB|| \leqslant ||A||\,||B||,$$

où $||\cdot||$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, définie par $||A|| = (\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AA))^{\frac{1}{2}}$.

(Utiliser l'ex. 4.5.27).

4.5.29 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ $p \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $A_1,\dots,A_p \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer : $$\left|\operatorname{tr}\left(\prod_{i=1}^{p} A_i\right)\right| \leqslant \prod_{i=1}^{p} ||A_i||,$$

où $||\cdot||$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. (Utiliser l'ex. 4.5.28).

4.5.30 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $\mu_1 \geqslant \dots \geqslant \mu_n \geqslant 0$ les vp de ${}^tAA$ (${}^tAA \in \mathbf{S}_n^+$, cf. ex. 4.5.17 *a)*.

Montrer :

a) Pour tout X de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $||X|| = 1$:
$$\sqrt{\mu_n} \leqslant ||AX|| \leqslant \sqrt{\mu_1}$$

b) $\sqrt{\mu_n} = \operatorname*{Inf}_{\substack{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ ||X||=1}} ||AX||$

et $\sqrt{\mu_1} = \operatorname*{Sup}_{\substack{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ ||X||=1}} ||AX||$, où $||\cdot||$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

(Utiliser l'ex. 4.5.7 p. 169).

4.5.31 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$,

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}).$$

Montrer : $S \in \mathbf{S}_n^{++} \iff 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

4.5.32 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a,b \in \mathbb{R}$,

$$S = \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}).$$

CNS sur (a,b) pour que $S \in \mathbf{S}_n^+$ (resp. $\mathbf{S}_n^{++}$) ?

(Cf. § 2.7.2 4) Exemple).

4.5.33 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}, \alpha, \beta, x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$,

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & \beta & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ x_n & 0 & & \beta \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

CNS pour que $S \in \mathbf{S}_{n+1}^{++}$?

4.5.34 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a,b \in \mathbb{R}$,

$$S = \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}).$$

CNS pour que $S \in \mathbf{S}_n^+$ (resp. $\mathbf{S}_n^{++}$) ?

(Utiliser l'ex. 3.3.7 p. 96).

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique définie-positive.

4.5.35 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S \in \mathbf{S}_n^+, A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer :
$$\begin{cases} AS = SA \Longrightarrow (\forall k \in \mathbb{N}^*,\ AS^k = S^kA) \\ AS = SA \Longleftarrow (\exists k \in \mathbb{N}^*,\ AS^k = S^kA). \end{cases}$$

En particulier : $AS = SA \iff AS^2 = S^2A$.

4.5.36 Soient $(E,(\cdot|\cdot))$ un eve, $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)e_i.$$

a) Montrer que f est symétrique *défini-positif* (c'est-à-dire : f est symétrique et la fq $\phi_f : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x|f(x)) \end{array}$ est définie-positive).

b) En déduire qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique défini-positif tel que $u \circ u = f^{-1}$ (utiliser l'ex. 4.5.25 p. 181 ; si on veut aussi l'unicité de u, utiliser l'ex. 4.5.62 p. 184) .

c) Montrer que $(u(e_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une b.o.n. de E.

4.5.37 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{S}_n^+$, $B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer : $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) \subset \mathbb{R}$.

(Utiliser l'ex. 4.5.25 p. 165 et l'ex. 3.2.12 p. 86).

b) Montrer que, si $B \in \mathbf{S}_n^+$, alors $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) \subset \mathbb{R}_+$.

c) Montrer que, si $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, alors AB est diagonalisable (dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$).

d) Donner un exemple où : $A \in \mathbf{S}_2^+, B \in \mathbf{S}_2(\mathbb{R})$ et AB n'est pas diagonalisable.

4.5.38 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer : $\mathbf{S}_n^{++} = \mathbf{S}_n^+ \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

b) En déduire que $\mathbf{S}_n^{++}$ est un ouvert de $\mathbf{S}_n^+$.

(On pourra utiliser : $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, cf. Analyse PC-PSI-PT, ex. 1.3.2).

c) Montrer que $\mathbf{S}_n^{++}$ est dense dans $\mathbf{S}_n^+$.

4.5.39 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in (\mathbf{S}_n^+)^2$.

Montrer : $A \leqslant B \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{tr}(A) \leqslant \operatorname{tr}(B) \\ \det(A) \leqslant \det(B) \end{cases}$.

(On pourra utiliser l'ex. 4.5.24 p. 181).

4.5.40 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{S}_n^{++}$ telles que $A \leqslant B$. Démontrer : $B^{-1} \leqslant A^{-1}$.

4.5.41 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, $B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

Montrer : $\det(A) \leqslant |\det(A + \mathrm{i}B)|$,

et étudier le cas d'égalité.

4.5.42 Soient $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $A = {}^t\!MM - M\,{}^t\!M$. On suppose $A \in \mathbf{S}_n^+$; montrer : ${}^t\!MM = M\,{}^t\!M$.

4.5.43 Soient E un eve, $f \in \mathcal{O}(E) - \mathcal{SO}(E)$; montrer :

$$-1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f).$$

4.5.44 Soient $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}\,(a_{11}, \ldots, a_{nn})$.

Montrer : $A \sim D \Longrightarrow A = D$.

(Rappelons que la notation $A \sim D$ signifie que A et D sont semblables, c'est-à-dire :

$$\exists\, P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}),\ D = P^{-1}AP,$$

cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.2.4 Déf. 1).

On pourra examiner le coefficient de λ^{n-2} dans $\chi_A(\lambda)$.

4.5.45 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}, (B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_k^2 + B_k^2 \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer :

$$A_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad B_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4.5.46 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n + A_k^2 \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

b) On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $B_k = (\mathrm{I}_n + A_k^2)^{-1}A_k$.

On suppose $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bornée et $B_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$. Démontrer :

$$A_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4.5.47 Soient $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $A_k = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \Omega^i$. Trouver $\lim\limits_{k\infty} A_k$.

4.5.48 *a)* Soit $(A, B) \in \mathbf{S}_n^{++} \times \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

α) Montrer que AB est diagonalisable (cf. aussi ex. 4.5.37 p. 182).

β) Etablir : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(AB) \subset \mathbb{R}_+^* \Longleftrightarrow B \in \mathbf{S}_n^{++}$.

b) Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists (A, B) \in (\mathbf{S}_n^{++})^2,\ M = AB$

(ii) M est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$.

c) En déduire que $-\mathrm{I}_n$ n'est pas le produit de quatre éléments de $\mathbf{S}_n^{++}$.

4.5.49 Mineurs de Gauss

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$; pour chaque p de $\{1, \ldots, n\}$, on note $A_p = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathbf{S}_p(\mathbb{R})$.

a) α) Montrer :

$$A \in \mathbf{S}_n^+ \Longrightarrow \Big(\forall\, p \in \{1, \ldots, n\},\ \det(A_p) \geqslant 0\Big).$$

β) La réciproque du résultat précédent est-elle vraie ?

b) α) Démontrer :

$$A \in \mathbf{S}_n^{++} \Longleftrightarrow \Big(\forall\, p \in \{1, \ldots, n\},\ \det(A_p) > 0\Big).$$

β) En déduire que $\mathbf{S}_n^{++}$ est ouvert dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

4.5.50 Soient $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^t\!AA = D^2$. Montrer qu'il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = \Omega D$ (cf. aussi plus loin ex. 4.5.69 p. 185).

Rappelons qu'on a défini dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ *les relations* $\leqslant$ *et* $<$ *par (cf. 4.5.3 Rem. 2) p. 171) :*

$$A \leqslant B \Longleftrightarrow B - A \in \mathbf{S}_n^+$$
$$A < B \Longleftrightarrow B - A \in \mathbf{S}_n^{++}.$$

4.5.51 Soient $A, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \leqslant B$, et $E = \{S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R});\ A \leqslant S \leqslant B\}$. Montrer que E est une partie compacte de $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

(On pourra utiliser l'ex. 4.5.25 p. 181).

4.5.52 Soient $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 < p < n$, $A \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathbf{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$,

$$C \in \mathbf{M}_{n-p,p}(\mathbb{R}),\ D \in \mathbf{M}_{n-p}(\mathbb{R}),\ \Omega = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

On suppose : $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer : $|\det(A)| = |\det(D)|$. (On pourra utiliser l'ex. 3.2.12 p. 86).

b) Etablir : $|\det(A)| \in [0; 1]$.

4.5.53 Soient $A, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose $A \in \mathbf{S}_n^{++}$ et AB nilpotente. Montrer $B = 0$.

4.5.54 Soient $n \in \mathbb{N}$ et φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ telle que :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X] - \{0\},\quad \varphi(P^2) > 0.$$

a) Montrer qu'il existe $n+1$ formes linéaires $\varphi_0,\ldots,\varphi_n$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $n+1$ réels $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$ tels que :

$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,$
$$\begin{cases} \varphi(PQ) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(P)\varphi_i(Q) \\ \varphi(XPQ) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\varphi_i(P)\varphi_i(Q) \end{cases}.$$

b) En déduire qu'il existe $n+1$ réels $a_0,\ldots,a_n$ tels que :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \quad \varphi(PQ) = \sum_{i=0}^{n} a_i^2 P(\alpha_i)Q(\alpha_i).$$

4.5.55 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$${}^tA = A \quad \text{et} \quad A + \overline{A} \in \mathbf{S}_n^{++}.$$

Montrer qu'il existe $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$ et $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$${}^tPAP = \operatorname{diag}(1+\mathrm{i}t_1,\ldots,1+\mathrm{i}t_n).$$

4.5.56 Soient $n \in \mathbb{N}-\{0,1\}$, $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $U \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $||U|| = 1$ $\Big($où $||\cdot||$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\Big)$. Montrer :

$$||AU||^2 > \frac{(\det(A))^2}{(\operatorname{tr}({}^tAA))^{n-1}}(n-1)^{n-1}.$$

(On pourra utiliser la comparaison entre moyennes arithmétique et géométrique, Analyse PCSI-PTSI, P 1.1).

4.5.57 Montrer :

$$\forall A \in \mathbf{S}_n^+,\ \forall \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}),\ |\operatorname{tr}(A\Omega)| \leqslant \operatorname{tr}(A).$$

4.5.58 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $U \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ unitaires (pour la norme euclidienne usuelle $||.||_2$ sur $\mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ ou sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) tels que :

$$\begin{cases} AU = \alpha V \\ {}^tAV = \alpha U \\ \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ||AX||_2 \leqslant \alpha ||X||_2. \end{cases}$$

4.5.59 *a)* Soit $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\operatorname{tr}(S) = 0$

(ii) Il existe une matrice symétrique A à éléments diagonaux tous nuls et une matrice orthogonale Ω telles que $S = \Omega A \Omega^{-1}$.

b) Soient $(E,<\cdot,\cdot>)$ un eve, $f \in \mathcal{L}(E)$ symétrique, ϕ la fq définie sur E par :

$$\forall x \in E,\ \phi(x) = <x, f(x)>.$$

Montrer que $\operatorname{tr}(f) = 0$ si et seulement s'il existe une b.o.n. de E formée de vecteurs isotropes pour ϕ.

4.5.60 Soient $(E,<\cdot,\cdot>)$ un eve, p,q deux projecteurs orthogonaux de E, $F = \operatorname{Im}(p)$, $G = \operatorname{Im}(q)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $p \circ q = q \circ p$

(ii) Les sev $(F \cap G)^\perp \cap F$ et $(F \cap G)^\perp \cap G$ sont orthogonaux.

4.5.61 Soient E un eve,

$$A = \{f \in \mathcal{L}(E);\ f \circ f^* \circ f = f\}.$$

a) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) $f \in A$

(ii) $f^* \circ f$ est un projecteur orthogonal

(iii) $\forall x \in (\operatorname{Ker}(f))^\perp,\ ||f(x)|| = ||x||$.

b) Soit $f \in A$. Montrer :

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ker}(f))^\perp &= \{x \in E;\ ||f(x)|| = ||x||\} \\ &= \{x \in E;\ (f^* \circ f)(x) = x\}\end{aligned}.$$

c) Etablir que $\mathcal{O}(E)$ est ouvert et fermé dans A.

4.5.62 Racine carrée dans $\mathbf{S}_n^+$

Montrer : $\forall S \in \mathbf{S}_n^+,\ \exists! R \in \mathbf{S}_n^+,\ S = R^2$.

(Cf. aussi ex. 4.5.25 p. 181).

On dit que R est la **racine carrée** de S, et on note $R = \sqrt{S}$ ou $R = S^{\frac{1}{2}}$.

4.5.63 *a)* Soient $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathbf{S}_n^+$. Montrer :

$$\Omega \sim S \Longrightarrow \Omega = S = \mathrm{I}_n.$$

b) Soient $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

Montrer : $\Omega S \in \mathbf{S}_n^+ \Longrightarrow \Omega = \mathrm{I}_n$.

(Utiliser l'ex. 4.5.62).

4.5.64 Soient $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists S \in \mathbf{S}_n^{++},\ M \sim S$

(ii) $\exists (A,B) \in (\mathbf{S}_n^{++})^2,\ M = AB$.

(Utiliser l'ex. 4.5.62 ; cf. aussi ex. 4.5.48 p. 183.)

4.5.65 Soient $A \in \mathbf{S}_n^+$, $R = A^{\frac{1}{2}}$ (cf. ex. 4.5.62), $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$AM = MA \Longleftrightarrow RM = MR.$$

(On pourra montrer que R est un polynôme en A).

4.5.66 Soit $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Trouver toutes les $B \in \mathbf{S}_n^{++}$ telles que :

$$AB = BA \quad \text{et} \quad (AB)^2 = -\mathrm{I}_n.$$

(Utiliser les ex. 4.5.62 et 4.5.65).

4.5.67 *a)* Soient $(E, <\cdot,\cdot>)$ un eve, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $\forall x \in E,\ ||f(x)|| = ||g(x)||$.

Démontrer qu'il existe $h \in \mathcal{O}(E)$ tel que : $f = h \circ g$.

b) Montrer, pour tout (A,B) de $(\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2$:

$$^{\mathrm{t}}AA = {}^{\mathrm{t}}BB \iff \big(\exists \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}),\ A = \Omega B\big).$$

4.5.68 Décomposition polaire dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$

Montrer :

$$\forall A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}),\ \exists!(\Omega, S) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}_n^{++},\ \ A = \Omega S.$$

(On pourra utiliser l'ex. 4.5.62).

On dit que $A = \Omega S$ est la **décomposition polaire** de $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

4.5.69 Décomposition polaire dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(\Omega, S) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}_n^{+}$ tel que $M = \Omega S$, et que S est unique.

On notera qu'il peut ne pas y avoir unicité de Ω.

Application : Retrouver le résultat de l'ex. 4.5.67 *b)*.

4.5.70 Pour $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ donnée, résoudre l'équation ${}^{\mathrm{t}}XX + {}^{\mathrm{t}}XA + {}^{\mathrm{t}}AX = 0$, d'inconnue $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

(Utiliser l'ex. 4.5.69).

4.5.71 Soient $(A,B) \in (\mathbf{S}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $0 \leqslant B \leqslant A$.

Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{t}}XX + {}^{\mathrm{t}}YY = A \\ {}^{\mathrm{t}}XY + {}^{\mathrm{t}}YX = B \end{cases},$$

d'inconnue $(X,Y) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2$. (Utiliser l'ex. 4.5.69).

4.5.72 Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe U, V orthogonales, D diagonale à termes diagonaux $\geqslant 0$, telles que :

$$A = UDV.$$

(Utiliser l'ex. 4.5.69).

4.5.73 Orthodiagonalisation simultanée d'une famille commutative de matrices symétriques

Soient I un ensemble non vide, $(S_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ commutant deux à deux. Démontrer qu'il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in I,\ \ \Omega^{-1} S_i \Omega \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}).$$

4.5.74 Soit $(A,B) \in (\mathbf{S}_n^{+})^2$ (resp. $(\mathbf{S}_n^{++})^2$) tel que

$$AB = BA.$$

Montrer :

$$AB \in \mathbf{S}_n^{+} \text{ (resp. } \mathbf{S}_n^{++}).$$

(Utiliser l'ex 4.5.73).

4.5.75 Soient $A, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = BA.$$

Montrer : $\ (0 \leqslant A \leqslant B \Longrightarrow A^2 \leqslant B^2)$.

(Utiliser l'ex. 4.5.73).

Problème

P 4.1 Valeur absolue d'une matrice symétrique réelle

On se propose, dans ce problème P 4.1, d'étendre aux matrices symétriques réelles la notion de valeur absolue, déjà connue sur les nombres réels.

Pour toute $S \in \mathbf{S}_n^+$, on note $S^{\frac{1}{2}}$ l'unique élément de $\mathbf{S}_n^+$ tel que :

$$(S^{\frac{1}{2}})^2 = S.$$

Dans plusieurs questions (1), 4), 5), 6)), on utilisera le théorème fondamental.

Manipuler précautionneusement la relation $\leqslant$ dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

Pour $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, on note $|A| = (A^2)^{\frac{1}{2}}$ (cf. ex. 4.5.62 p. 184).

1) Montrer, pour toute A de $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$:

$$A \leqslant |A|, \quad -A \leqslant |A|, \quad |A| = A \iff A \in \mathbf{S}_n^+.$$

2) Montrer : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}),\ \ |\alpha A| = |\alpha|\ |A|$.

3) Calculer $|A|$ dans les exemples suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) a) Soient $A, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

Montrer : $\begin{cases} A \leqslant B \\ -A \leqslant B \end{cases} \iff |A| \leqslant B.$

(Utiliser l'ex 4.5.73 p. 185).

b) A-t-on :

$$\forall (A,B) \in (\mathbf{S}_n(\mathbb{R}))^2, \quad \left(\begin{cases} A \leqslant B \\ -A \leqslant B \end{cases} \Longrightarrow |A| \leqslant B \right) ?$$

5) a) Soient $A, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

Montrer : $\quad |A + B| \leqslant |A| + |B|$.

(Utiliser l'ex. 4.5.73).

b) A-t-on :

$$\forall (A,B) \in (\mathbf{S}_n(\mathbb{R}))^2, \quad |A + B| \leqslant |A| + |B| ?$$

6) Montrer :

$$\forall A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}),\ \forall \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), \quad |{}^t\Omega A \Omega| = {}^t\Omega |A| \Omega.$$

Espaces préhilbertiens complexes

CHAPITRE 5

Plan

Introduction

On développe dans ce chapitre une théorie proche de celle vue dans le chapitre 3, faisant intervenir le corps des nombres complexes au lieu du corps des nombres réels. Les preuves analogues ne sont pas répétées.

Le corps utilisé ici est $\mathbb{C}$.

Prérequis

- Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices (Algèbre PCSI-PTSI, ch. 6 à 9)
- Trace, blocs (§ 1.4)
- Déterminants (ch. 2)
- Algèbre bilinéaire (ch. 4).

Objectifs

- Définition et propriétés élémentaires des formes sesquilinéaires à symétrie hermitienne
- Notion de produit scalaire hermitien ; inégalité de Cauchy-Schwarz, norme hermitienne ; orthogonalité.

5.1 Formes sesquilinéaires

5.1.1 Généralités

Dans ce § 5.1.1, E désigne un $\mathbb{C}$-ev.

Bien noter la conjugaison sur le scalaire relatif à la première place.

Au lieu de « place », on dit aussi « variable ».

Définition 1

On appelle **forme sesquilinéaire sur** $E \times E$ (ou : **sur** E) toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

(i) $\forall \alpha \in \mathbb{C},\ \forall (x,x',y) \in E^3,\ \varphi(\alpha x + x', y) = \overline{\alpha}\varphi(x,y) + \varphi(x',y)$

(φ est **semi-linéaire par rapport à la 1ère place**)

(ii) $\forall \beta \in \mathbb{C},\ \forall (x,y,y') \in E^3,\ \varphi(x, \beta y + y') = \beta\varphi(x,y) + \varphi(x,y')$

(φ est **linéaire par rapport à la 2ème place**).

Il est immédiat que l'ensemble des formes sesquilinéaires sur $E \times E$ est un $\mathbb{C}$-ev.

Développement par semi-linéarité par rapport à la 1ère place et linéarité par rapport à la 2ème place.

Proposition 1

Soient φ une forme sesquilinéaire sur $E \times E$, $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, $\beta_1,\ldots,\beta_p \in \mathbb{C}$, $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_p \in E$. On a alors :

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j\right) = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \overline{\alpha_k}\beta_j\varphi\left(x_k, y_j\right).$$

Preuve

On a, par récurrence sur n :

$$\forall Y \in E,\ \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, Y\right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}\varphi(x_k, Y),$$

d'où :

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}\,\varphi\left(x_k, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}\left(\sum_{j=1}^{p} \beta_j \varphi(x_k, y_j)\right) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n\ 1\leqslant j\leqslant p} \overline{\alpha_k}\beta_j\varphi(x_k, y_j).$$ ■

Définition 2

Une forme sesquilinéaire φ sur $E \times E$ est dite **à symétrie hermitienne** si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)}.$$

Au lieu de forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne, on dit aussi **forme sesquilinéaire hermitienne**, qu'on abrège ici en fsh.

Nous notons $SH(E)$ l'ensemble des fsh sur $E \times E$. Il est immédiat que $SH(E)$ est un $\mathbb{R}$-ev (pour les lois usuelles) mais (sauf si $E = \{0\}$) n'est pas un $\mathbb{C}$-ev ; en effet, si φ est une fsh sur $E \times E$ autre que l'application nulle, il existe $(x,y) \in E \times E$ tel que $\overline{\varphi(x,y)} \neq 0$, et on a alors $\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{i}\varphi)(y,x) = \mathrm{i}\varphi(y,x) = \mathrm{i}\,\overline{\varphi(x,y)} \\ \overline{(\mathrm{i}\varphi)(x,y)} = -\mathrm{i}\,\overline{\varphi(x,y)} \end{array}\right|$, donc $\mathrm{i}\varphi \notin SH(E)$.

Autrement dit, la symétrie hermitienne et la linéarité par rapport à la deuxième place entraînent la semi-linéarité par rapport à la première place.

La Proposition suivante est immédiate et d'un usage commode.

Proposition 2

Pour qu'une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ soit une fsh, il faut et il suffit que l'on ait :

(i) $\forall (x,y) \in E \times E, \quad \overline{\varphi(y,x)} = \varphi(x,y)$

(φ est à symétrie hermitienne)

(ii) $\forall \beta \in \mathbb{C}, \forall (x,y,y') \in E^3, \quad \varphi(x,\beta y + y') = \beta\varphi(x,y) + \varphi(x,y')$

(φ est linéaire par rapport à la $2^{\text{ème}}$ place).

La formule

$\forall x \in E,\ \phi(x) = \varphi(x,x)$

permet d'exprimer ϕ à l'aide de φ.

Définition 3

Soit φ une fsh sur $E \times E$. On appelle **forme hermitienne associée à** φ l'application, souvent notée ϕ, de E dans $\mathbb{C}$, définie par :

$$\forall x \in E,\ \ \phi(x) = \varphi(x,x).$$

Remarque :
ϕ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit aussi **forme quadratique hermitienne** au lieu de forme hermitienne.

On abrège ici forme hermitienne en fh.

Remarquer le parallélisme dans le vocabulaire :

en algèbre bilinéaire :	en algèbre sesquilinéaire :
forme bilinéaire	forme sesquilinéaire
forme bilinéaire symétrique	forme sesquilinéaire hermitienne
forme quadratique	forme hermitienne

Exemples :

Exemple important.

1) **Le produit scalaire hermitien canonique sur $\mathbb{C}^n$**, défini par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{x_k}\, y_k \end{array},$$

(cf. Analyse PC-PSI-PT, 1.4.1, Exemple *1)*) est une fsh et la fh associée est :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \end{array}.$$

2) L'application $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) & \longmapsto & \overline{x_1}y_2 + \overline{x_2}y_1 \end{array}$ est une fsh et la fh associée est $\phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & \overline{x_1}x_2 + \overline{x_2}x_1 \end{array}$.

3) Notons E le $\mathbb{C}$-ev des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{C}$; l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \overline{f}g \end{array}$ est une fsh, et la fh associée est : $\phi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 |f|^2 \end{array}$.

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition 3

Soient φ une fsh sur $E \times E$, ϕ la fh associée à φ. On a :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C},\ \forall x_1,\ldots,x_n \in E,$

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \phi(x_k) + 2 \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} \mathrm{Ré}\big(\overline{\alpha_k}\alpha_j \varphi(x_k,x_j)\big)$$

2) $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2,\ \forall (x,y) \in E^2,$

$$\phi(\alpha x + \beta y) = |\alpha|^2 \phi(x) + 2\,\mathrm{Ré}\left(\overline{\alpha}\beta\varphi(x,y)\right) + |\beta|^2\phi(y)$$

3) $\forall (x,y) \in E^2,\ \ \phi(x+y) = \phi(x) + 2\,\mathrm{Ré}\left(\varphi(x,y)\right) + \phi(y)$

4) $\forall (x,y) \in E^2,\ \ \varphi(x,y) = \dfrac{1}{4}\big(\phi(x+y) - \mathrm{i}\phi(x+\mathrm{i}y) - \phi(x-y) + \mathrm{i}\phi(x-\mathrm{i}y)\big)$

5) $\forall (x,y) \in E^2,\ \ \phi(x+y) + \phi(x-y) = 2\big(\phi(x)+\phi(y)\big).$

Cette formule *4)* permet d'exprimer φ à l'aide de ϕ.

Preuve

Pour *4)*, développer le second membre (cf. aussi Analyse PC-PSI-PT, ex. 1.4.1).

Remarque : La formule 4) précédente montre que ϕ détermine entièrement φ (c'est-à-dire, si ϕ est une fh, il existe une fsh φ unique telle que ϕ soit la fh associée à φ) ; φ est appelée la **forme polaire** de ϕ.

Définition 4

Soit $\phi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. On dit que ϕ est une **forme hermitienne** si et seulement s'il existe une fsh $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que ϕ soit la fh associée à φ.

En pratique, pour montrer qu'une application

$$\phi\ :\ E \longrightarrow \mathbb{C}$$

est une forme hermitienne, on construit une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne

$$\varphi\ :\ E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que :

$$\forall x \in E,\ \phi(x) = \varphi(x,x).$$

Dans cette Déf. 4, on peut remplacer $\phi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ par : $\quad \phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Notons $H(E)$ l'ensemble des formes hermitiennes sur E. Il est clair que $H(E)$ est un $\mathbb{R}$-ev, que l'application $U : SH(E) \longrightarrow H(E)$ (qui, à toute fsh φ sur $E \times E$ fait correspondre la fh associée à φ) et l'application $V : H(E) \longrightarrow SH(E)$ (qui à toute fh ϕ sur E associe la forme polaire de ϕ) sont des isomorphismes de $\mathbb{R}$-ev réciproques l'un de l'autre.

Remarque :

Si ϕ est une fh sur E, alors : $\forall x \in E,\ \ \phi(x) \in \mathbb{R}$,

puisque : $\forall x \in E,\ \ \phi(x) = \varphi(x,x) = \overline{\varphi(x,x)} = \overline{\phi(x)}$.

Définition 5

Une fh ϕ sur E est dite **définie** si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \ (\phi(x) = 0 \Longrightarrow x = 0)\,.$$

Définition 6

On dit que la fh ϕ est **positive** si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \ \phi(x) \in \mathbb{R}_+.$$

5.1.2 Cas de la dimension finie

1) Transconjugaison

Dans ce § 1), $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Ainsi, la transconjuguée de A est la transposée de la conjuguée de A.

Transposition et conjugaison commutent :

$$\forall A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}),\ {}^{\mathrm{t}}\overline{A} = \overline{{}^{\mathrm{t}}A}.$$

Propriétés de calcul sur les transconjuguées.

Autrement dit, pour transconjuguer une matrice décomposée en blocs : on échange les blocs (en les écrivant en colonnes de blocs au lieu de lignes de blocs, par exemple), et on transconjugue chaque bloc.

Exercices 5.1.1 à 5.1.4.

Ainsi, pour toute $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A \in \mathbf{H}_n \iff A^* = A.$$

Définition 1

Soit $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. On appelle **transconjuguée** de A, et on note A^*, la matrice de $\mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ définie par : $A^* = {}^{\mathrm{t}}\overline{A}$.

En notant $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, on a $A^* = (\overline{a_{ij}})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ 1\leqslant i\leqslant n}}$; A^* est donc aussi la conjuguée de la transposée de A : $A^* = \overline{{}^{\mathrm{t}}A}$.

Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 2+\mathrm{i} & 3 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$, alors $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 3 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

La Proposition suivante est immédiate.

Proposition 1

1) $\forall (A,B) \in (\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}))^2,\ (A+B)^* = A^* + B^*$

2) $\forall A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}),\ A^{**} = A$

3) $\forall \alpha \in \mathbb{C},\ \forall A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}),\ (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$

4) $\forall A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}), \forall B \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{C}),\ (AB)^* = B^* A^*$

5) $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ \big(A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \iff A^* \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})\big)$

6) $\forall A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}),\ (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

7) $\forall A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}),\ \mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}\,(A)$

8) $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ \big(\mathrm{tr}\,(A^*) = \overline{\mathrm{tr}\,(A)}\quad \text{et} \quad \det(A^*) = \overline{\det(A)}\big)$

9) $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A^*) = \overline{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)}$.

Proposition 2 **Transconjugaison par blocs**

On a, pour toute décomposition en blocs :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \dots & A_{st} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & \dots & A_{s1}^* \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1t}^* & \dots & A_{st}^* \end{pmatrix}.$$

Exemples :

Soient $a \in \mathbb{C},\ V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ A,B,C,D \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

On a : $\begin{pmatrix} a \\ V \end{pmatrix}^* = (\overline{a} \quad V^*)$, $\quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix}$.

2) Matrices hermitiennes

Dans ce § 2), $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 2

Une matrice A de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **hermitienne** si et seulement si :

$$A^* = A.$$

On note $\mathbf{H}_n$ l'ensemble des matrices hermitiennes d'ordre n.

En notant $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, A est hermitienne si et seulement si :
$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ a_{ji} = \overline{a_{ij}}$,
d'où en particulier :
$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ a_{ii} = \overline{a_{ii}}$,
et donc :
$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ a_{ii} \in \mathbb{R}$.

Remarques :

1) La condition $A^* = A$ impose à A d'être carrée.

2) Si A est hermitienne, alors les éléments diagonaux de A sont réels.

Exemples :

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & -5 \end{pmatrix}$ sont hermitiennes
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ n'est pas hermitienne.

Attention : $\mathbf{H}_n$ n'est pas un $\mathbb{C}$-ev, car $\mathrm{I}_n \in \mathbf{H}_n$ et $\mathrm{i}\mathrm{I}_n \notin \mathbf{H}_n$.

Proposition 3

$\mathbf{H}_n$ est un $\mathbb{R}$-ev.

Preuve

Montrons que $\mathbf{H}_n$ est un sev du $\mathbb{R}$-ev $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

• Il est clair que $\mathbf{H}_n \neq \varnothing$ $(0 \in \mathbf{H}_n)$.

• Si $H_1, H_2 \in \mathbf{H}_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors : $(\alpha H_1 + H_2)^* = \overline{\alpha} H_1^* + H_2^* = \alpha H_1 + H_2$,

donc $\alpha H_1 + H_2 \in \mathbf{H}_n$. ■

Proposition 4

1) $\forall (H_1, H_2) \in (\mathbf{H}_n)^2,\ (H_1 H_2 \in \mathbf{H}_n \iff H_1 H_2 = H_2 H_1)$

2) $\forall H \in \mathbf{H}_n \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}),\ H^{-1} \in \mathbf{H}_n$.

Preuve

1) $H_1 H_2 \in \mathbf{H}_n \iff (H_1 H_2)^* = H_1 H_2 \iff H_2^* H_1^* = H_1 H_2 \iff H_2 H_1 = H_1 H_2$.

2) $(H^{-1})^* = (H^*)^{-1} = H^{-1}$, cf. 1) Prop.1 *6)* p. 191. ■

Exercices 5.1.5 à 5.1.8.

Exercice-type résolu

Exemple de calcul de transconjugaison

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$AA^*A + 2A + A^* + \mathrm{I}_n = 0.$$

Montrer que A est inversible.

Solution

Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que : $AX = 0$.

On a alors, en utilisant l'hypothèse :

$$0 = (AA^*A + 2A + A^* + \mathrm{I}_n)X = AA^*(AX) + 2AX + A^*X + X = A^*X + X,$$

d'où : $A^*X = -X$.

On déduit :

$$\begin{cases} X^*A^*X = X^*(A^*X) = X^*(-X) = -X^*X \\ X^*A^*X = (AX)^*X = 0^*X = 0, \end{cases}$$

D'où $||X||_2^2 = X^*X = 0$, puis $X = 0$.

Ceci montre :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\quad AX = 0 \implies X = 0$$

et on conclut : A est inversible.

Conseils

Pour montrer que A est inversible, on va montrer, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

$$AX = 0 \implies X = 0.$$

Penser à faire intervenir une expression du type X^*AX ou X^*A^*X.

$||.||_2$ désigne la norme hermitienne usuelle sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Les méthodes à retenir

Formes sesquilinéaires : généralités, cas de la dimension finie

- **Pour simplifier par X^* ou par Y** (ex. 5.1.1), on se ramènera au produit scalaire canonique $(X,Y) \longmapsto X^*Y$ sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, et on fera apparaître un vecteur fixe orthogonal à tout vecteur de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (ex. 5.1.1 *a)*).
- **Pour résoudre des questions portant sur des transconjuguées de matrices à coefficients complexes**, il peut suffire d'utiliser les formules élémentaires sur la conjugaison, la transposition et la transconjugaison, cf. § 5.1.2 1), 2) pp. 191-192 (ex. 5.1.2 à 5.1.7.).

Exercices

5.1.1 *a)* Soit $(A,B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Montrer :

$$\Big(\forall (X,Y) \in (\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2,\ X^*AY = X^*BY\Big) \Longleftrightarrow A = B.$$

b) Soit $(A,B) \in (\mathbf{H}_n)^2$. Montrer :

$$\Big(\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ X^*AX = X^*BX\Big) \Longleftrightarrow A = B.$$

5.1.2 Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que deux quelconques des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

(i) $A^* = A$, (ii) $A^*A = A$, (iii) $A^2 = A$.

5.1.3 Soient $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) - \{0\}$, $(X,Y) \in (\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ tel que $X + \mathrm{i}Y \in \mathrm{SEP}(A,\lambda)$. Montrer :

$$\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R},\ {}^{\mathrm{t}}XY = 0 \quad \text{et} \quad {}^{\mathrm{t}}XX = {}^{\mathrm{t}}YY.$$

5.1.4 Soient $X, Y \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $A = X + \mathrm{i}Y$.
a) Montrer que, si $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, alors :

$$A^{-1}(X^2 + Y^2) = \overline{A} \Longleftrightarrow XY = YX.$$

b) Si A est n'est pas inversible, $X^2 + Y^2$ peut-elle être inversible ?

c) Si A est inversible, peut-on avoir $X^2 + Y^2 = 0$?

5.1.5 Soient $A, B \in \mathbf{H}_n$. Montrer : $\chi_{AB} \in \mathbb{R}[X]$ (on pourra utiliser $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, cf. ex. 3.2.12 p. 86) ; en particulier : $\mathrm{tr}(AB) \in \mathbb{R}$.

5.1.6 Montrer :

a) $\mathbf{H}_n \cap \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}) = \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$

b) $\forall A \in \mathbf{H}_n$, $({}^{\mathrm{t}}A \in \mathbf{H}_n$ et $\overline{A} \in \mathbf{H}_n)$

c) $\forall A \in \mathbf{H}_n$, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A) \in \mathbf{H}_n$.

5.1.7 Soient $H \in \mathbf{H}_n$, λ, μ deux vp de H telles que $\lambda \neq \mu$, U (resp. V) un $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ pour H associé à λ (resp. μ). Montrer que $V^*U = 0$ et que UV^* est nilpotente.

5.2 Espaces préhilbertiens complexes et espaces hermitiens

L'étude des espaces préhilbertiens complexes et des espaces hermitiens figure déjà dans Analyse PC-PSI-PT, dans un point de vue orienté vers l'Analyse. Pour le confort du lecteur, nous rappelons ici ce qui est nécessaire à la suite de notre étude.
Dans ce § 5.2, E désigne un $\mathbb{C}$-ev (non nécessairement de dimension finie).

5.2.1 Produit scalaire hermitien

1) Définition

Définition 1

On appelle **produit scalaire hermitien** (ou : **produit scalaire**) sur E toute fsh φ sur $E \times E$ telle qu'en notant ϕ la fh associée à φ, on ait :

(i) $\forall x \in E,\ \phi(x) \geqslant 0$ (ϕ est positive)

(ii) $\forall x \in E,\ (\phi(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0)$ (ϕ est définie).

On abrège produit scalaire hermitien en psh.

Lorsque φ est un psh, on note souvent $(x|y)$ ou $< x,y >$ ou $x \cdot y$ à la place de $\varphi(x,y)$.

On note souvent E au lieu de (E,φ), le contexte précisant φ.

Définition 2

On appelle **espace préhilbertien complexe** tout couple (E,φ) où E est un $\mathbb{C}$-ev et φ un psh sur E.

On appelle **espace hermitien** tout espace préhilbertien complexe de dimension finie.

On abrège espace (vectoriel) hermitien en evh.

Exercices 5.2.8 à 5.2.11.

Ces trois exemples sont importants pour la pratique.

Exemples :

1) **Produit scalaire hermitien usuel sur $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$**

L'application $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi\Big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots y_n)\Big) = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k$$

est un psh sur $\mathbb{C}^n$, appelée psh usuel (ou : canonique) sur $\mathbb{C}^n$.

2) **Produit scalaire hermitien canonique sur $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$**

L'application $\varphi : \begin{array}{l} \big(\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})\big)^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (A,B) \longmapsto \operatorname{tr}(A^*B) \end{array}$ est un psh sur $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, appelé psh canonique sur $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Exercices 5.2.2 à 5.2.5, 5.2.12, 5.2.13.

Le psh canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (ou $\mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{C})$) est, à la notation près, le psh usuel sur $\mathbb{C}^n$.

3) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, et $E = C^0([a;b],\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-ev des applications continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{C}$.

L'application $\varphi : \begin{array}{l} E^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (f,g) \longmapsto \displaystyle\int_a^b \overline{f} g \end{array}$ est un psh sur E (cf. Analyse PC-PSI-PT, 1.4.1 Exemple 3).

2) Inégalités, normes hermitiennes

Théorème 1 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soient (E,φ) un espace préhilbertien complexe , ϕ la fh associée à φ.

On a : $\forall (x,y) \in E^2,\ |\varphi(x,y)|^2 \leqslant \phi(x)\phi(y)$.

Ne pas oublier le module sur $\varphi(x,y)$ ni le carré sur $|\varphi(x,y)|$.

Proposition 1 **Étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soient (E,φ) un espace préhilbertien complexe, ϕ la fh associée à φ, $(x,y) \in E^2$. On a :

$$|\varphi(x,y)|^2 = \phi(x)\phi(y) \iff (x,y) \text{ lié.}$$

Théorème 2 **Inégalité de Minkowski**

Soient (E,φ) un espace préhilbertien complexe, ϕ la fh associée à φ.

On a :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \big(\phi(x+y)\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \big(\phi(x)\big)^{\frac{1}{2}} + \big(\phi(y)\big)^{\frac{1}{2}}.$$

On veillera à ne pas confondre $\phi(x)$ et $(\phi(x))^{\frac{1}{2}}$.

Proposition 2 **Étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski**

Soient (E,φ) un espace préhilbertien complexe, ϕ la fh associée à φ, $(x,y) \in E^2$.

On a :

$$\left(\phi(x+y)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\phi(x)\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\phi(y)\right)^{\frac{1}{2}} \iff \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+,\ y = \alpha x. \end{array} \right.$$

Proposition - Définition 3

Soient (E,φ) un espace préhilbertien complexe, ϕ la fh associée à φ. L'application $\begin{array}{rl} ||\cdot|| : E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \left(\phi(x)\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$ est une norme sur E, appelée **norme hermitienne associée à** φ.

Remarque : Soient $<\cdot,\cdot>$ un psh sur E, $||\cdot||$ la norme hermitienne associée. Les formules obtenues en 5.1.1 Prop. 3 p. 190 et les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski peuvent être récrites sous la forme suivante, pour tout (x,y) de E^2 :

Bien noter la présence de parties réelles.

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\,\text{Ré}\,(<x,y>) + ||y||^2$$

$$||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 4\,\text{Ré}\,(<x,y>)$$

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

$$<x,y> = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - \mathrm{i}||x+\mathrm{i}y||^2 - ||x-y||^2 + \mathrm{i}||x-\mathrm{i}y||^2\right)$$

$$|<x,y>|^2 \leqslant ||x||^2 \cdot ||y||^2$$

$$||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||.$$

Exercices 5.2.1, 5.2.6 à 5.2.13.

Exercice-type résolu

Une inégalité portant sur des normes dans un espace préhilbertien complexe

Soient $\left(E,(.\,|\,.)\right)$ un espace préhilbertien complexe non réduit à 0, $||.||$ la norme associée. Montrer :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \ ||x|| + ||y|| \leqslant \sqrt{2}\,\text{Max}\left(||x+y||,\, ||x-y||\right)$$

et établir que $\sqrt{2}$ est la meilleure constante possible.

Solution

1) Soit $(x,y) \in E^2$.

On a : $||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 4\,\text{Ré}\,(x\,|\,y)$.

Séparons en deux cas, selon le signe de Ré $(x\,|\,y)$.

Conseils

Comme Max $\left(||x+y||,\, ||x-y||\right)$ intervient, on essaie de comparer $||x+y||$ et $||x-y||$, et, puisque $||.||$ est une norme hermitienne, on compare plutôt leurs carrés.

Solution

1^er^ cas : $\text{Ré}\,(x \mid y) \geqslant 0$

On a alors $\text{Max}\,\big(||x+y||,\,||x-y||\big) = ||x+y||$ et :

$$\begin{aligned}\big(\sqrt{2}||x+y||\big)^2 - \big(||x||+||y||\big)^2 &= 2\big(||x||^2 + 2\,\text{Ré}\,(x \mid y) + ||y||^2\big) - \big(||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2\big)\\ &= ||x||^2 + 4\,\text{Ré}\,(x \mid y) + ||y||^2 - 2||x||\,||y||\\ &= \big(||x|| - ||y||\big)^2 + 4\,\text{Ré}\,(x \mid y) \geqslant 0,\end{aligned}$$

donc :

$$||x|| + ||y|| \leqslant \sqrt{2}||x+y|| = \sqrt{2}\,\text{Max}\,\big(||x+y||,\,||x-y||\big).$$

2^ème^ cas : $\text{Ré}\,(x \mid y) \leqslant 0$

En notant $y' = -y$, on a : $\text{Ré}\,(x \mid y') = -\text{Ré}\,(x \mid y) \geqslant 0$,

d'où, en utilisant le résultat du 1^er^ cas, appliqué à (x, y') :

$$\begin{aligned}||x|| + ||y|| = ||x|| + ||y'|| &\leqslant \sqrt{2}\,\text{Max}\,\big(||x+y'||,\,||x-y'||\big)\\ &= \text{Max}\,\big(||x-y||,\,||x+y||\big).\end{aligned}$$

2) Puisque $E \neq \{0\}$, il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \neq 0$. Notons $y_0 = \mathrm{i}\,x_0 \in E$.
On a alors : $||x_0|| + ||y_0|| = 2||x_0||$ et :

$$\text{Max}\,\big(||x_0+y_0||,\,||x_0-y_0||\big) = \text{Max}\,\big(|1+\mathrm{i}|\,||x_0||,\,|1-\mathrm{i}|\,||x_0||\big) = \sqrt{2}\,||x_0||.$$

Si une constante $C \in \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \ ||x|| + ||y|| \leqslant C\,\text{Max}\,\big(||x+y||,\,||x-y||\big),$$

alors en particulier : $2||x_0|| \leqslant C\sqrt{2}\,||x_0||$, et donc, puisque $||x_0|| > 0$, on déduit : $C \geqslant \sqrt{2}$.

On conclut que $\sqrt{2}$ est la meilleure constante possible pour l'inégalité de l'énoncé.

Conseils

On forme la différence des carrés des deux membres de l'inégalité demandée.

On se ramène au 1^er^ cas.

On cherche $(x_0, y_0) \in E^2$ vérifiant l'égalité dans l'inégalité demandée, et tel que le second membre ne soit pas nul.

Les méthodes à retenir

Produit scalaire hermitien

- **Pour établir une inégalité sur des produits scalaires hermitiens**, penser à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (ex. 5.2.1, 5.2.15) ou l'inégalité de Minkowski.
- **Pour montrer qu'une matrice M (a priori rectangulaire) est nulle**, il suffit de montrer que sa norme hermitienne usuelle est nulle, c'est-à-dire que $\text{tr}(M^*M) = 0$ (ex. 5.2.2, 5.2.4, 5.2.12, 5.2.13).
- Dans la résolution de l'exercice 5.2.3, la ligne de calcul :

$$< X, A^*AX > = X^*A^*AX = (AX)^*(AX) = ||AX||_2^2$$

  est importante.
- **Pour une étude dans un espace préhilbertien complexe**, penser à utiliser le nombre complexe i (ex. 5.2.11) ; les résultats relatifs au cas complexe peuvent différer sensiblement de ceux relatifs au cas réel.

Exercices

5.2.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $X, Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer :

$$|X^* A^* BY|^2 \leqslant (X^* A^* AX)(Y^* B^* BY).$$

5.2.2 Montrer :

$$\forall A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C}),\ (A^* A = 0 \Longrightarrow A = 0).$$

5.2.3 Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.
Comparer les noyaux, images, rangs de A, A^*, A^*A, AA^*.

5.2.4 Résoudre l'équation $(\mathrm{I}_n + A)A^* = A$, d'inconnue $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

5.2.5 Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = p$, $B \in \mathbf{M}_{n,q}(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}\,(B) = q$.
Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists (X, Y) \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \times \mathbf{M}_{q,1}(\mathbb{C}),\quad \begin{cases} (X,Y) \neq (0,0) \\ AX = BY \end{cases}$

(ii) $B^*B - B^*A(A^*A)^{-1}A^*B$ n'est pas inversible.

Référence : Crux Mathematicorum, Problème 863.

5.2.6 Établir, pour tout X de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

$$||X||_p = \underset{\substack{Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ ||Y||_p = 1}}{\mathrm{Sup}} |Y^* X|,$$

où $p \in \{1, 2, \infty\}$ et $q = \begin{cases} \infty & \text{si } p = 1 \\ 2 & \text{si } p = 2 \\ 1 & \text{si } p = \infty \end{cases}$.

On rappelle que, pour $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note

$$||Y||_1 = \sum_{k=1}^{n} |y_k|,\ ||Y||_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$||Y||_\infty = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |y_k|$, cf. Analyse PC-PSI-PT, 1.1.1.

5.2.7 Soient E un evh, $(x, y) \in E^2$; montrer :

$$||x + y||\ ||x - y|| \leqslant ||x||^2 + ||y||^2,$$

et étudier le cas d'égalité.

5.2.8 Soient E un evh, $(x, y) \in E^2$; vérifier :

$$2 < x, y > \\ = ||x + y||^2 + \mathrm{i}\,||\mathrm{i}x + y||^2 - (1 + \mathrm{i})(||x||^2 + ||y||^2).$$

5.2.9 Soient $N \in \mathbb{N}$, tel que $N \geqslant 3$, E un espace préhilbertien complexe, $(x, y) \in E^2$. Montrer :

$$< x, y > = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} ||\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{N}} x + y||^2 \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{N}}.$$

5.2.10 Soient E un espace préhilbertien complexe, $(x, y) \in E^2$. Montrer :

$$< x, y > = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ||\mathrm{e}^{i\theta} x + y||^2 \mathrm{e}^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

5.2.11 Soient E un espace préhilbertien complexe, $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que, si $(\forall x \in E,\ < f(x), x >= 0)$, alors $f = 0$.
Le résultat est-il vrai en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

5.2.12 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer :

$$A^* AB = 0 \Longrightarrow AB = 0.$$

5.2.13 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}\,(A^2) = \mathrm{tr}\,(AA^*)$. Démontrer : $A \in \mathbf{H}_n$.
(On pourra calculer $||A - A^*||^2$, où $||\cdot||$ est la norme hermitienne canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$).

5.2.14 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{C}))^2$ libre ; l'endomorphisme f de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ défini par :

$$\forall X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ f(X) = \mathrm{tr}\,(A^* X)B - \mathrm{tr}\,(B^* X)A$$

est-il diagonalisable ?

5.2.2 Orthogonalité

1) Généralités

Rappelons la Déf. suivante (cf. Analyse PC-PSI-PT, 1.4.3 Déf.1 et ce volume Algèbre et géométrie PC-PSI-PT, 4.2.2 Déf. p. 141).

Définition

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien complexe.

1) Soit $(x, y) \in E^2$; on dit que x est **orthogonal à** y, et on note $x \perp y$, si et seulement si : $< x, y > = 0$.

2) Soient $x \in E$, $A \in \mathfrak{P}(E)$; on dit que x est **orthogonal à** A, et on note $x \perp A$ si et seulement si : $\forall a \in A,\ < x,a > = 0$.

3) Pour toute partie A de E, on définit l'**orthogonal de** A, noté $A^{\perp}$:

$$A^{\perp} = \{x \in E;\ \forall a \in A,\ < x,a > = 0\}.$$

4) Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite **orthogonale** si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in I^2,\ (i \neq j \Longrightarrow\ < x_i,x_j > = 0).$$

5) Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite **orthonormale** si et seulement si :

$$\begin{cases} (x_i)_{i \in I} & \text{est orthogonale} \\ \forall i \in I, & ||x_i|| = 1. \end{cases}$$

Proposition 1

Soit $(E, < \cdot,\cdot >)$ un espace préhilbertien complexe.

1) Pour toute partie A de E, $A^{\perp}$ est un sev de E.

Bien noter, dans *2)*, le renversement de l'inclusion.

2) $\forall (A,B) \in (\mathfrak{P}(E))^2,\ (A \subset B \Longrightarrow A^{\perp} \supset B^{\perp})$.

3) $\forall A \in \mathfrak{P}(E),\ \ A^{\perp} = \big(\mathrm{Vect}(A)\big)^{\perp}$.

4) Si E est de dimension finie, alors pour tout sev F de E : $F \oplus F^{\perp} = E$,

et donc : $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$.

5) $\begin{cases} \bullet\ \forall A \in \mathfrak{P}(E),\ \ A^{\perp\perp} \supset \mathrm{Vect}(A) \\ \bullet\ \text{Si } E \text{ est de dimension finie, alors : } \ \forall A \in \mathfrak{P}(E),\ A^{\perp\perp} = \mathrm{Vect}(A). \end{cases}$

6) $E^{\perp} = \{0\}$ et $\{0\}^{\perp} = E$.

7) $\forall A \in \mathfrak{P}(E),\ \ A \cap A^{\perp} \subset \{0\}$.

8) Pour tous sev F,G de E :

$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp} \quad \text{et} \quad (F \cap G)^{\perp} \supset F^{\perp} + G^{\perp}$$

et, si E est de dimension finie : $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Exercice 5.2.16.

Proposition 2

Soient $(E, < \cdot,\cdot >)$ un espace préhilbertien complexe, $(x_i)_{i \in I}$ une famille dans E.

Si $\begin{cases} (x_i)_{i \in I} \text{ est orthogonale} \\ \forall i \in I,\ x_i \neq 0 \end{cases}$, alors $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

Proposition 3 Théorème de Pythagore

Il s'agit d'une implication et non d'une équivalence logique, cf. la Remarque ci-après.

Soient $(E, < \cdot,\cdot >)$ un espace préhilbertien complexe, $(x,y) \in E^2$. On a :

$$x \perp y \Longrightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Remarque : La réciproque est *fausse* (si $\dim(E) \geqslant 1$). En effet :

Attention : $\mathrm{Ré}(< x,y >) = 0$ n'entraîne pas $< x,y > = 0$.

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \Longleftrightarrow\ < x,y > + < y,x > = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Ré}(< x,y >) = 0.$$

2) Orthogonalisation

Théorème 1 **Orthogonalisation de Schmidt**

Soient $(E,<\cdot,\cdot>)$ un espace préhilbertien complexe, $p \in \mathbb{N}^*$, $(e_1,\ldots,e_p)$ une famille libre dans E. Il existe $(V_1,\ldots,V_p) \in E^p$ tel que :

$$\begin{cases} V_1,\ldots,V_p \text{ sont deux à deux orthogonaux} \\ \forall k \in \{1,\ldots,p\},\ \mathrm{Vect}(V_1,\ldots,V_k) = \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k). \end{cases}$$

Remarque : En imposant à $(V_1,\ldots,V_p)$ la condition $\forall k \in \{1,\ldots,p\},\ < e_k,V_k > = 1$, il y a alors unicité de $(V_1,\ldots,V_p)$, et la matrice de passage de $(e_1,\ldots,e_p)$ à $(V_1,\ldots,V_p)$ est triangulaire supérieure à termes diagonaux égaux à 1 : $\begin{pmatrix} 1 & & \ldots \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

On abrège base orthonormale en b.o.n.

Corollaire 1 **Théorème de la base orthonormale incomplète**

Pour toute famille orthonormale $(e_1,\ldots,e_p)$ d'un evh E, il existe $e_{p+1},\ldots,e_n \in E$ (où $n = \dim(E)$) tels que $(e_1,\ldots,e_n)$ soit une b.o.n. de E.

Corollaire 2

Tout evh admet au moins une b.o.n.

3) Calculs dans une base orthonormale

Bien noter la présence de $< e_k,x >$ et non de $< x,e_k >$, qui est son conjugué.

Proposition 4

Si $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ est une b.o.n. de $(E,<\cdot,\cdot>)$, alors, pour tout $x \in E$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} < e_k,x > e_k.$$

$X^* = {}^t\overline{X}$ est la transconjuguée de X.

Corollaire

En particulier, si $\mathcal{B}$ est une b.o.n. de E, on a, pour tout (x,y) de E^2 et en notant $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$:

$$< x,y > = X^*Y.$$

4) Théorème de la projection orthogonale

Théorème 2 **Théorème de projection orthogonale sur un sev de dimension finie**

Soient $(E,<.,.>)$ un espace préhilbertien, F un sev de dimension finie de E, $x \in E$. Il existe un élément et un seul y de F tel que $(x-y)\perp F$; il s'agit de

$$y = \sum_{k=1}^{n} < f_k,x > f_k,$$

où $(f_1,\ldots,f_n)$ est n'importe quelle base orthonormale de F. Cet élément y est appelé le **projeté orthogonal** (ou : la **projection orthogonale**) **de x sur F**.

Proposition 5

Soient $(E,<.,.>)$ un espace préhilbertien, F un sev de dimension finie de E. On note $p_F : E \longrightarrow E$ l'application qui, à chaque x de E, associe l'unique élément y de F tel que $(x-y)\perp F$.

Alors :

1) p_F est un projecteur de E, c'est-à-dire : $p_F \in \mathcal{L}(E)$ et $p_F \circ p_F = p_F$

2) $\mathrm{Im}(p_F) = F$ et $\mathrm{Ker}(p_F) = F^{\perp}$

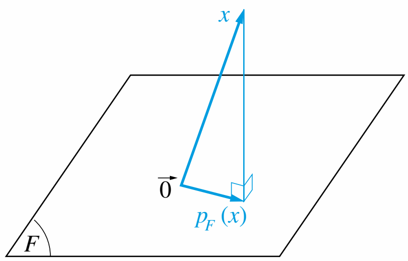
3) p_F est symétrique, c'est-à-dire :

$$\forall (x,x') \in E^2,\ < p_F(x),x' > = < x,p_F(x') >$$

4) $p_F \in \mathcal{LC}(E)$ et, si $F \neq \{0\}$, $|||p_F||| = 1$

5) L'application $\begin{array}{l} F \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto ||x-f|| \end{array}$ admet une borne inférieure, atteint celle-ci et l'atteint en $p_F(x)$ seulement.

L'application p_F est appelé le **projecteur orthogonal sur** F.



Rappel de notation : $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E.
Pour $f \in \mathcal{L}(E)$:
$$|||f||| = \operatorname*{Sup}_{||x||\leqslant 1} ||f(x)||\,.$$

Corollaire

Pour tout sev F de dimension finie d'un espace préhilbertien E, on a :

$$F \oplus F^{\perp} = E.$$

On peut même écrire :
$$F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = E.$$

Exercice-type résolu

Diverses caractérisations d'une base orthonormale

Soient $\big(E,(.\,|\,.)\big)$ un espace préhilbertien complexe, $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1,\ldots,e_n) \in E^n$ tel que : $\forall\, p \in \{1,\ldots,n\}$, $||e_p|| \geqslant 1$.

Montrer que les quatre propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(1) $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormale de E

(2) $\forall\, x \in E,\ x = \sum_{p=1}^{n} (e_p\,|\,x)e_p$

(3) $\forall\, (x,y) \in E^2,\ (x\,|\,y) = \sum_{p=1}^{n} \overline{(e_p\,|\,x)}(e_p\,|\,y)$

(4) $\forall\, x \in E,\ ||x||^2 = \sum_{p=1}^{n} |(e_p\,|\,x)|^2.$

Solution

(1) $\Longrightarrow$ (2) :

Supposons que $(e_1,\dots,e_n)$ soit une base orthonormale de E.

Soit $x \in E$. Il existe $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que : $x = \sum_{q=1}^{n} x_q e_q$.

On a, pour tout $p \in \{1,\dots,n\}$:

$$(e_p \,|\, x) = \left(e_p \,\middle|\, \sum_{q=1}^{n} x_q e_q\right) = \sum_{q=1}^{n} x_q (e_p \,|\, e_q) = x_p,$$

d'où : $x = \sum_{p=1}^{n} (e_p \,|\, x) e_p$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) :

On suppose : $\forall x \in E,\ \ x = \sum_{p=1}^{n} (e_p \,|\, x) e_p$.

Soit $(x,y) \in E^2$. On a :

$$(x \,|\, y) = \left(\sum_{p=1}^{n} (e_p \,|\, x) e_p \,\middle|\, \sum_{q=1}^{n} (e_q \,|\, y) e_q\right)$$

$$= \sum_{1 \leqslant p,q \leqslant n} \overline{(e_p \,|\, x)} (e_q \,|\, y)(e_p \,|\, e_q) = \sum_{p=1}^{n} \overline{(e_p \,|\, x)} (e_p \,|\, y).$$

(3) $\Longrightarrow$ (4) :

On suppose : $\forall (x,y) \in E^2,\ \ (x \,|\, y) = \sum_{p=1}^{n} \overline{(e_p \,|\, x)} (e_p \,|\, y)$.

En particulier, pour tout $x \in E$:

$$||x||^2 = (x \,|\, x) = \sum_{p=1}^{n} \overline{(e_p \,|\, x)} (e_p \,|\, x) = \sum_{p=1}^{n} |(e_p \,|\, x)|^2.$$

(4) $\Longrightarrow$ (1) :

On suppose : $\forall x \in E,\ \ ||x||^2 = \sum_{p=1}^{n} |(e_p \,|\, x)|^2$.

• Notons $F = \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_n)$.

Soit $x \in E$.

Puisque F est un sev de dimension finie de l'espace préhilbertien E, d'après le théorème de la projection orthogonale, il existe $y \in E$ tel que :

$$x = y + (x - y), \quad y \in F, \quad x - y \in F^{\perp}.$$

D'après (4) : $||x - y||^2 = \sum_{p=1}^{n} |(e_p \,|\, x - y)|^2 = 0$, car $x - y$ est orthogonal à chacun des e_p.

Il en résulte $x = y \in F$.

Ceci montre $E = F$, donc $(e_1,\dots,e_n)$ engendre E.

• Soit $q \in \{1,\dots,n\}$. On a, d'après (4) :

$$||e_q||^2 = \sum_{p=1}^{n} |(e_p \,|\, e_q)|^2 = \sum_{1 \leqslant p \leqslant n,\ p \neq q} |(e_p \,|\, e_q)|^2 + ||e_q||^4,$$

d'où :

$$||e_q||^2 - ||e_q||^4 = \sum_{1 \leqslant p \leqslant n,\ p \neq q} |(e_p \,|\, e_q)|^2 \geqslant 0.$$

Conseils

On va essayer de former un cycle d'implications :
(1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (1).

$$(e_p \,|\, e_q) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

car $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille orthonormale.

Développement d'un produit scalaire complexe par sesquilinéarité.

Intervention du théorème de la projection orthogonale.

Application de l'hypothèse (4) à $x - y$.

En particulier, E est de dimension finie.

Application de l'hypothèse (4) à e_q.

Solution

Conseils

Mais, par hypothèse, $||e_q|| \geqslant 1$, d'où $||e_q||^2 - ||e_q||^4 \leqslant 0$.

Il en résulte $||e_q|| \in \{0,1\}$, puis $||e_q|| = 1$.

De plus, comme $\displaystyle\sum_{1 \leqslant p \leqslant n,\ p \neq q} |(e_p \,|\, e_q)|^2 = 0$, on déduit :

$$\forall\, p \in \{1,...,n\},\quad p \neq q \implies (e_p \,|\, e_q) = 0.$$

Ceci montre que $(e_1,...,e_n)$ est une famille orthonormale.

En particulier, comme $(e_1,...,e_n)$ est une famille orthogonale à vecteurs tous non nuls, $(e_1,...,e_n)$ est libre.

Finalement, $(e_1,...,e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercices

5.2.15 Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts, $E = \mathbb{C}_n[X]$, $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie, pour tout $(P,Q) \in E \times E$, par :

$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} \overline{P(a_k)}\,Q(a_k).$$

a) Vérifier que φ est un produit scalaire sur E.

b) Trouver une base de E orthonormale pour φ.

5.2.16 Soient $\big(E,(.\,|\,.)\big)$ un espace hermitien, $n = \dim(E)$, $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormale de E, $(u_1,\ldots,u_n) \in E^n$. On note, pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, $v_k = u_k + e_k$. On suppose $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ||u_k|| < 1$. Démontrer que $(v_1,\ldots,v_n)$ est une base de E.

Géométrie

CHAPITRE 6

Plan

Introduction

Les étudiant(e)s de seconde année PT-PT* étudient les courbes obtenues comme enveloppes de familles de droites du plan.

Dans le plan, nous avons considéré des courbes (Géométrie PCSI-PTSI, ch. 3). Dans l'espace de dimension 3, nous allons étudier les courbes (objets « de dimension 1 ») et les surfaces (objets « de dimension 2 »).

Prérequis

- Géométrie affine dans l'espace de dimension 3 (Géométrie PCSI-PTSI, ch. 1)
- Géométrie affine euclidienne dans l'espace de dimension 3 (Géométrie PCSI-PTSI, §§ 2.1, 2.3)
- Courbes du plan (Géométrie PCSI-PTSI, ch. 3).

Objectifs

- Détermination de l'enveloppe d'une famille de droites du plan
- Détermination de la développée d'une courbe du plan et des développantes d'une courbe du plan
- Étude affine d'une courbe de l'espace : tangente en un point
- Acquisition de la notion de surface et des relations entre courbes et surfaces
- Détermination du plan tangent en un point régulier d'une surface.
- Étude élémentaire des quadriques
- Étude des surfaces usuelles : cylindres, cônes, surfaces de révolution, surfaces réglées.

6.1 Courbes du plan

6.1.1 Enveloppe d'une famille de droites du plan

Ce § 6.1.1 est destiné aux étudiants de seconde année, PT et PT*.

1) Théorie

Soit $(D_t)_{t \in I}$ une famille de droites du plan, indexée par un intervalle I de $\mathbb{R}$ (non vide ni réduit à un point). On suppose qu'il existe des applications $a,b,c : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I telles que, pour tout t de I, D_t admette pour EC : $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$.

1) Supposons qu'il existe un arc paramétré $\Gamma \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t \in I)$ tel que x, y soient de classe C^1 sur I et que, pour tout t de I, la tangente en $M(t)$ à Γ soit la droite D_t.

La première équation traduit que $M(t)$ est sur D_t.
La deuxième équation traduit que le vecteur $x'(t)\,\overrightarrow{i} + y'(t)\,\overrightarrow{j}$, qui est tangent à Γ en $M(t)$, dirige D_t.

On a donc : $\quad \forall t \in I, \quad \begin{cases} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0 \\ a(t)x'(t) + b(t)y'(t) \qquad = 0 \end{cases}.$

En dérivant dans la première égalité, puis en soustrayant, on obtient :

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0 \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0. \end{cases}$$

Supposons : $\quad \forall t \in I, \quad \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$

Alors, pour tout $t \in I$, le système de deux équations à deux inconnues

$$(\mathrm{S}_t) \qquad \begin{cases} a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0 \end{cases}$$

Cette solution dépend de t

admet une solution (x,y) et une seule dans $\mathbb{R}^2$, que l'on peut d'ailleurs calculer, par exemple, à l'aide des formules de Cramer.

2) Réciproquement, supposons : $\quad \forall t \in I, \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0$, et considérons l'arc paramétré Γ représenté par $\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right|$, où $\big(x(t), y(t)\big)$ est la solution dans $\mathbb{R}^2$ du système d'équations

$$(\mathrm{S}_t) \qquad \begin{cases} a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0. \end{cases}$$

D'après l'hypothèse précédente portant sur un déterminant d'ordre 2, ce système admet une solution et une seule.

On peut (en théorie) exprimer $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t à l'aide des formules de Cramer :

$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} -c(t) & b(t) \\ -c'(t) & b'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix}}, \qquad y(t) = \frac{\begin{vmatrix} a(t) & -c(t) \\ a'(t) & -c'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix}}.$$

Supposons a,b,c de classe C^2 sur I ; alors x, y sont de classe C^1 sur I. En dérivant dans la 1e égalité de (S_t), puis en soustrayant, on obtient :

$$\forall t \in I, \quad a(t)x'(t) + b(t)y'(t) = 0.$$

Il en résulte que, pour tout t de I tel que $\big(x'(t), y'(t)\big) \neq (0,0)$, la tangente en $M(t)$ à Γ a pour EC : $\quad a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$, donc est D_t.

Résumons l'étude en une Définition et un Théorème.

On peut montrer que la notion d'enveloppe d'une famille de droites du plan ne dépend pas du choix du repère.

Définition

Soit $(D_t)_{t\in I}$ une famille de droites du plan d'EC :

$$D_t \mid a(t)x + b(t)y + c(t) = 0,$$

où $a,b,c : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 et :

$$\forall t \in I, \quad \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

On appelle **enveloppe** de $(D_t)_{t\in I}$ toute courbe Γ du plan telle que :

- chaque D_t est tangente à Γ
- Γ admet en chaque point une tangente et celle-ci est une droite de la famille $(D_t)_{t\in I}$.

Méthode :

- On obtient une représentation paramétrique $x = x(t), y = y(t)$ de l'enveloppe en résolvant le système d'équations ci-contre.
- On obtient une équation cartésienne de l'enveloppe en éliminant t dans le système ci-contre.

Théorème

Soit $(D_t)_{t\in I}$ une famille de droites du plan d'EC :

$$D_t \mid a(t)x + b(t)y + c(t) = 0,$$

où $a,b,c : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^2 et :

$$\forall t \in I, \quad \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Alors $(D_t)_{t\in I}$ admet une enveloppe Γ, et Γ est l'arc paramétré $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ où, pour tout t de I, $\big(x(t),y(t)\big)$ est la solution du système d'équations (d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) :

$$\begin{cases} a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0. \end{cases}$$

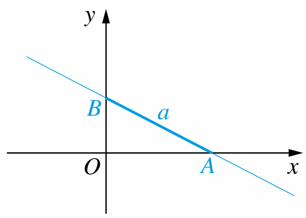
(On suppose ici : $\quad \forall t \in I, \quad \big(x'(t),y'(t)\big) \neq (0,0)$).

Pour tout t de I, le point $\big(x(t),y(t)\big)$, solution du système d'équations précédent, s'appelle le **point caractéristique** de D_t (ou de Γ).
La droite d'EC $a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0$ est souvent notée D'_t, et appelée **droite-dérivée** de D_t.

2) Exemples

C'est le problème de l'échelle qui glisse le long d'un mur.

1) **Déterminer l'enveloppe de la droite (AB), où $A \in x'x$, $B \in y'y$, $AB = a > 0$ (a fixé).**



Choix d'un paramètre.

Paramétrons : $A(a\cos t, 0)$, $B(0, a\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.
La droite (AB), notée D_t, admet pour EC :

$$D_t \mid x\sin t + y\cos t = a\cos t\sin t.$$

On obtient D'_t en dérivant par rapport à t dans l'équation de D_t.

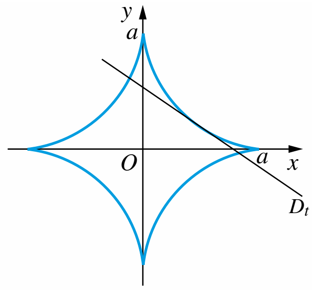
D'où : $\quad D'_t \mid x\cos t - y\sin t = a(\cos^2 t - \sin^2 t).$

Par résolution du système de deux équations, on obtient :

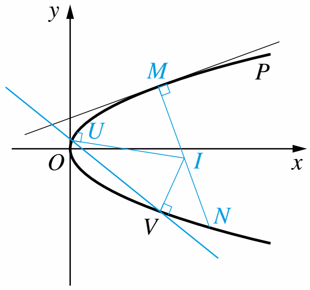
$$\begin{cases} x = a\cos t\sin^2 t + a\cos t(\cos^2 t - \sin^2 t) = a\cos^3 t \\ y = a\cos^2 t\sin t - a\sin t(\cos^2 t - \sin^2 t) = a\sin^3 t. \end{cases}$$

Ainsi, l'enveloppe Γ de (AB) est l'astroïde (cf. Géométrie PCSI-PTSI, § 3.1.7 1)) de RP $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

Le point caractéristique de D_t, de coordonnées $(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ est le point en lequel D_t est tangente à Γ.



2) **Soit P la parabole d'EC $y^2 = 2px$ ($p > 0$ fixé). Un point M décrit P ; la normale en M à P recoupe P en un point N. Du milieu I de MN, on mène les normales à P (autres que (IM)), qui coupent P en deux points U,V. Déterminer l'enveloppe de (UV).**



Choix d'un paramètre.

Paramétrons : $M\left(\dfrac{t^2}{2p}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Un vecteur tangent en M à P est : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{t}{p}, 1\right)$, ou encore, par colinéarité, (t,p).

D'où une EC de la normale N_t en M à P :

$$t\left(x - \frac{t^2}{2p}\right) + p(y - t) = 0.$$

On étudie alors $N_t \cap P$:

$$(x,y) \in N_t \cap P \iff \begin{cases} y^2 = 2px \\ t\left(x - \dfrac{t^2}{2p}\right) + p(y-t) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2p} \\ (y-t)\left(\dfrac{t}{2p}(y+t) + p\right) = 0, \end{cases}$$

Calcul, en fonction de t, des coordonnées de N, puis de celles de I.

d'où les coordonnées de N :

$$y_N = -\frac{2p^2}{t} - t, \quad \text{puis} \quad x_N = \frac{y_N^2}{2p} = \frac{2p^3}{t^2} + 2p + \frac{t^2}{2p},$$

et enfin celles du milieu I de MN :

$$x_I = \frac{1}{2}(x_M + x_N) = \frac{p^3}{t^2} + p + \frac{t^2}{2p}, \qquad y_I = \frac{1}{2}(y_M + y_N) = -\frac{p^2}{t}.$$

On va maintenant déterminer, en fonction de t, l'équation cartésienne de la droite (UV).

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $W\left(\dfrac{\lambda^2}{2p}, \lambda\right)$ un point de P ; une EC de la normale N_λ en W à P est (cf. plus haut) :

$$\lambda\left(x - \frac{\lambda^2}{2p}\right) + p(y - \lambda) = 0.$$

D'où : $$I \in N_\lambda \iff \lambda\left(\frac{p^3}{t^2} + p + \frac{t^2}{2p} - \frac{\lambda^2}{2p}\right) + p\left(-\frac{p^2}{t} - \lambda\right) = 0$$

$$\iff \frac{p^3}{t^2}(\lambda - t) + \frac{\lambda}{2p}(t^2 - \lambda^2) = 0$$

$$\iff -2p^4 + \lambda t^2(t + \lambda) = 0, \quad \text{si } t \neq \lambda.$$

Puisque, dans une EC de (UV), u et v jouent des rôles symétriques, on essaie de faire intervenir leur somme et leur produit.

Ceci montre que les ordonnées u,v des points U,V sont les solutions de l'équation du second degré $t^2\lambda^2 + t^3\lambda - 2p^4 = 0$, d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le discriminant en est : $t^6 + 8p^4t^2 \geqslant 0$.

On a : $u + v = -t$ et $uv = -\dfrac{2p^4}{t^2}$.

Une EC de (UV) est (puisque $u \neq v$) :

$$\begin{vmatrix} x - \dfrac{u^2}{2p} & \dfrac{v^2}{2p} - \dfrac{u^2}{2p} \\ y - u & v - u \end{vmatrix} = 0 \iff x - \frac{u^2}{2p} - \frac{u+v}{2p}(y - u) = 0$$

$$\iff 2px - (u+v)y + uv = 0.$$

$$\iff 2px + ty - \frac{2p^4}{t^2} = 0.$$

Ainsi, la droite (UV), notée D_t, a pour EC :

$$D_t \;\Big|\; 2px + ty - \frac{2p^4}{t^2} = 0.$$

On obtient une RP de l'enveloppe Γ de (UV) en résolvant le système :

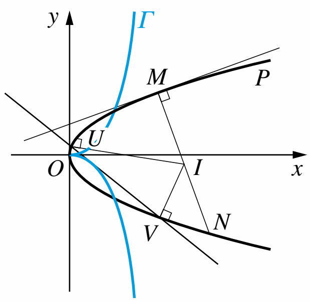
D'_t est obtenue en dérivant D_t par rapport à t.

$$\begin{cases} 2px + ty - \dfrac{2p^4}{t^2} = 0 & D_t \\ y + \dfrac{4p^4}{t^3} = 0 & D'_t. \end{cases}$$

On obtient ainsi une représentation paramétrique de Γ.

D'où Γ : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2p}\left(\dfrac{2p^4}{t^2} + \dfrac{4p^4}{t^2}\right) = \dfrac{3p^3}{t^2} \\ y = -\dfrac{4p^4}{t^3}. \end{cases}$

On obtient une EC de Γ en éliminant t : Γ : $27py^2 = 16x^3$.



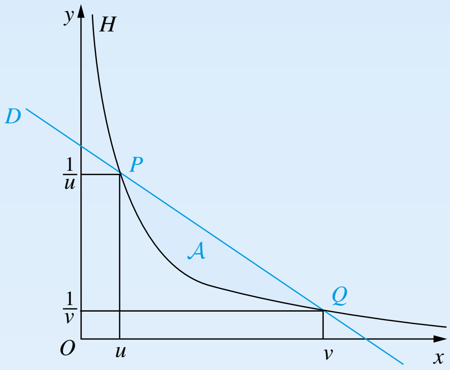
Exercices 6.1.1 à 6.1.13.

Exercice-type résolu

Exemple d'enveloppe d'une famille de droites du plan

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$, on considère la demi-hyperbole H définie par : $xy = 1$, $x > 0$. Déterminer, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, l'enveloppe de la famille des droites D du plan coupant H en deux points tels que l'aire comprise entre D et H soit égale à a.

Solution



Soient $u, v \in]0\,;+\infty[$, tels que $u < v$ par exemple, $P\left(u, \dfrac{1}{u}\right)$, $Q\left(v, \dfrac{1}{v}\right)$.

Une équation cartésienne de la droite (PQ) est :

$$\begin{vmatrix} x-u & v-u \\ y-\frac{1}{u} & \frac{1}{v}-\frac{1}{u} \end{vmatrix} = 0 \iff (v-u)\begin{vmatrix} x-u & 1 \\ y-\frac{1}{u} & -\frac{1}{uv} \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -\frac{1}{uv}(x-u) - \left(y-\frac{1}{u}\right) = 0 \iff -x+u-uvy+v=0$$

$$\iff x+uvy-(u+v)=0.$$

La droite $D=(PQ)$ et la demi-hyperbole H sont les courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \dfrac{u+v-x}{uv}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ respectivement. D'où :

$$\mathcal{A} = \int_u^v \left(\frac{u+v-x}{uv} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{u+v}{uv}x - \frac{x^2}{2uv} - \ln x\right]_u^v$$

$$= \frac{u+v}{uv}(v-u) - \frac{1}{2uv}(v^2-u^2) - \ln v + \ln u = \frac{v^2-u^2}{2uv} - \ln\frac{v}{u}.$$

Notons $t = \dfrac{v}{u}$; ainsi, t décrit $]1\,;+\infty[$. On a donc : $\mathcal{A} = \dfrac{t^2-1}{2t} - \ln t$.

L'application $\varphi :]1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \varphi(t) = \dfrac{t^2-1}{2t} - \ln t$ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et, pour tout $t \in]1\,;+\infty[$:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{t} = \frac{1+t^2-2t}{2t^2} > 0,$$

donc φ est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$.

De plus : $\varphi(t) \underset{t \to 1}{\longrightarrow} 0$ et $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

D'après le théorème de la bijection monotone, φ est une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$.

Ainsi, $\mathcal{A}$ est constante (égale à a) si et seulement si t est constant (égal à $\varphi^{-1}(a)$).

Une équation cartésienne de D est :

$$x+uvy-(u+v)=0 \iff x+tu^2y-(t+1)u=0.$$

Le point courant de l'enveloppe C de la droite D (lorsque u décrit $]0\,;+\infty[$) est la solution du système :

$$\begin{cases} x+tu^2y-(t+1)u=0 \\ 2tuy-(t+1)=0. \end{cases}$$

Conseils

Commencer par faire un schéma.

On se donne deux points P, Q de H, distincts.

Mise en facteur de $v-u$ dans la deuxième colonne du déterminant.

On calcule l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre D et H.

Dans la zone considérée, D est située au-dessus de H.

$\mathcal{A} = a \iff t = \varphi^{-1}(a)$.

t est fixé et on choisit par exemple u comme paramètre ; on remplace donc v par tu.

Ce système est formé de l'équation cartésienne de D et de l'équation cartésienne de la droite dérivée de D (par rapport au paramètre u).

Solution

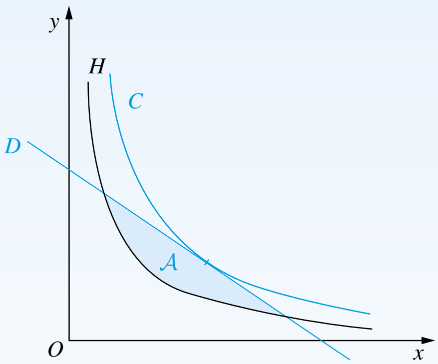
On obtient une équation cartésienne de C en éliminant le paramètre u dans le système précédent :

$$\exists u \in]0\,;+\infty[\quad \begin{cases} x + tu^2y - (t+1)u = 0 \\ 2tuy - (t+1) = 0. \end{cases}$$

$$\iff \exists u \in]0\,;+\infty[, \quad \begin{cases} u = \dfrac{t+1}{2ty} \\ x + t\left(\dfrac{t+1}{2ty}\right)^2 y - \dfrac{(t+1)^2}{2ty} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y > 0 \\ x - \dfrac{(t+1)^2}{4ty} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y > 0 \\ xy = \dfrac{(t+1)^2}{4t}. \end{cases}$$

L'enveloppe C est donc une demi-hyperbole, ayant les mêmes asymptotes que H, située dans le premier quadrant, et au-dessus de H.



Conseils

On a nécessairement $y \neq 0$, car sinon, $t+1=0$, contradiction avec $t \in]1 \; +\infty[$.

On peut remarquer que $\dfrac{(t+1)^2}{4t} > 1$, car :

$$\frac{(t+1)^2}{4t} - 1 = \frac{(t-1)^2}{4t} > 0.$$

Les méthodes à retenir

Enveloppe d'une famille de droites du plan

- **Pour déterminer l'enveloppe d'une famille de droites $D_t \mid a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ du plan** (ex. 6.1.1), appliquer le théorème du § 6.1.1 p. 205 : on obtient une représentation paramétrique de l'enveloppe en résolvant le système :

$$\begin{cases} a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0 \end{cases}.$$

- **Pour déterminer l'enveloppe d'une famille de droites définies géométriquement** (ex. 6.1.2 à 6.1.13), choisir un bon paramètre t, former une équation cartésienne des droites en question, et se ramener au point précédent.

Exercices

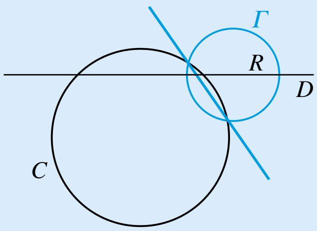
6.1.1 Déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$, dont on donne l'équation cartésienne :

a) $(1-t^2)x + 2ty - (1+t^2) = 0$

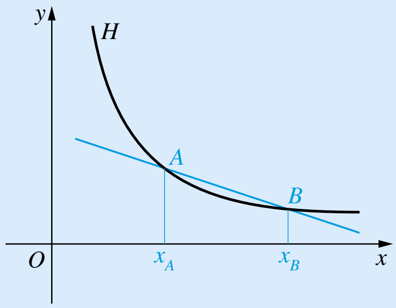
b) $x\ \mathrm{ch}^2 t + y\ \mathrm{sh}^2 t - \mathrm{ch}^2 2t = 0$

c) $(t-2)x + (3t-2t^2)y + t^3 = 0$.

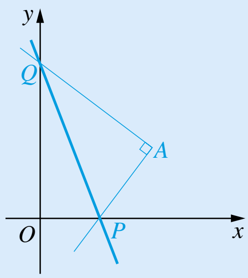
6.1.2 On donne un cercle C et une droite D. Un cercle Γ de rayon constant R se déplace parallèlement à D. Déterminer l'enveloppe de la corde commune à C et Γ.



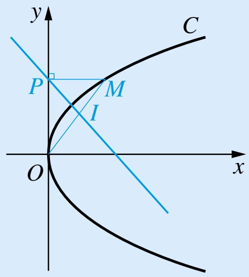
6.1.3 Soient H l'hyperbole d'équation $xy = 1$, et A,B deux points de H d'abscisses double l'une de l'autre. Déterminer l'enveloppe de (AB).



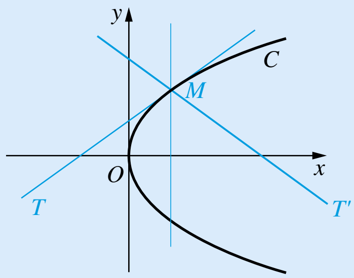
6.1.4 Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $A(a,b)$, $P \in x'x$, $Q \in y'y$ tels que $(AP) \perp (AQ)$. Déterminer l'enveloppe de la droite (PQ).



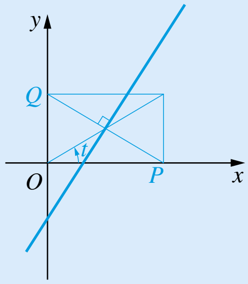
6.1.5 Un point M décrit la parabole C d'équation $y^2 = 2px$ ($p > 0$ fixé) ; soient P la projection orthogonale de M sur $y'y$, I le milieu de OM. Déterminer l'enveloppe de la droite (IP).



6.1.6 Un point M décrit la parabole C d'équation $y^2 = 2px$ ($p > 0$ fixé) ; soient T la tangente en M à C et T' la droite symétrique de T par rapport à la parallèle à $y'y$ menée par M, parallèlement à $x'x$. Déterminer l'enveloppe de T'.

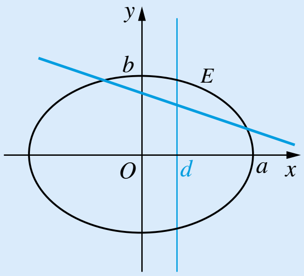


6.1.7 Soient $t \in \mathbb{R}$, $P(\cos t, 0)$, $Q(0, \sin t)$. Déterminer l'enveloppe de la médiatrice de (PQ).

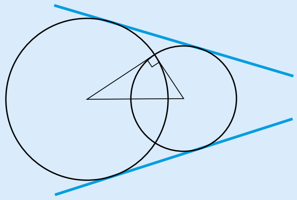


6.1.8 Soient $(a,b,d) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et E l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Déterminer l'enveloppe des cordes de E dont le milieu est sur la droite d'équation $x = d$.



6.1.9 Déterminer l'enveloppe des tangentes communes à deux cercles qui varient en passant par deux mêmes points fixes et en restant orthogonaux.



6.1.10 On note, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, C_λ : $x = \dfrac{3t - t^3}{t - \lambda}$, $y = \dfrac{1 - 3t^2}{t - \lambda}$.

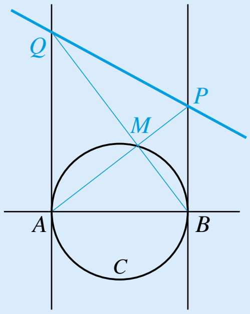
a) α) Montrer que C_λ admet un point d'inflexion et un seul ; on note D_λ la tangente à C_λ en ce point d'inflexion.

β) Déterminer l'enveloppe de $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

b) α) Montrer que C_λ admet une asymptote et une seule, notée Δ_λ, en supposant $\lambda \notin \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$.

β) Déterminer l'enveloppe de $(\Delta_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}}$.

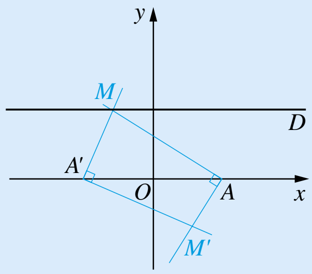
6.1.11 Un point M décrit un cercle C de diamètre AB. La droite (AM) (resp. (BM)) coupe la tangente à C en B (resp. A) en un point noté P (resp. Q). Déterminer l'enveloppe de la droite (PQ).



6.1.12 Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, D la droite d'équation $y = a$. À tout point M de D, on associe le point M', intersection de la perpendiculaire en A à (MA) et de la perpendiculaire en A' à (MA').

a) Quel est le lieu C de M' ?

b) Déterminer l'enveloppe E de la droite (MM').



6.1.13 Soit C la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{\cos 3\theta}$.

a) Tracer C.

b) Déterminer l'enveloppe des cordes de C vues de O sous un angle droit.

6.1.2 Rappels sur l'abscisse curviligne et le rayon de courbure

1) Abscisse curviligne

L'étude se situe dans le plan affine orienté, noté $\mathcal{E}_2$, éventuellement muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$; le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$ ou $\cdot$, la norme associée est notée $||\cdot||$, et la distance de deux points A, B est notée $d(A,B)$, ou $||\overrightarrow{AB}||$, ou AB.

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide ni réduit à un point (l'étude peut s'adapter au cas d'une réunion de tels intervalles), et k désigne un entier $\geqslant 1$ ou $= +\infty$.

Classiquement, on identifie $\mathcal{E}_2$ à $\mathbb{R}^2$.

$f : I \longrightarrow \mathcal{E}_2$ désigne un arc paramétré de classe C^1 (dans 4.1) ou de classe C^2 (dans 4.2), $\Gamma = f(I)$ sa trajectoire. Pour $t \in I$, on pourra noter $M(t)$ au lieu de $f(t)$. Pour $t \in I$, on note $\big(x(t),y(t)\big)$ les coordonnées de $M(t)$ dans $\mathcal{R}$; ainsi, pour tout t de I :

$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\,\overrightarrow{i} + y(t)\,\overrightarrow{j}.$$

Rappelons que Γ est la trajectoire de la représentation paramétrique $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f(t)}, t \in I$.

Définition 1

On appelle **abscisse curviligne sur Γ** toute application $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I telle que :

$$\forall t \in I, \quad s'(t) = ||f'(t)|| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}.$$

Définition 2

Soient s une abscisse curviligne sur Γ, $a,b \in I$, $A = f(a)$, $B = f(b)$. On appelle :

Le contexte indiquera si les longueurs d'arcs envisagées sont « algébriques » (orientées), ou « arithmétiques » (positives ou nulles).

- **longueur (algébrique)** de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ sur Γ, et on note ici $l(\overset{\frown}{AB})$, le réel $s(b) - s(a)$, c'est-à-dire :

$$l(\overset{\frown}{AB}) = \int_a^b ||f'(t)||\mathrm{d}t$$

- **longueur** de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de Γ, la valeur absolue de la longueur (algébrique) de $\overset{\frown}{AB}$ sur Γ.

Proposition 1 **Additivité de la longueur d'arc**

Soient Γ_1, Γ_2 deux courbes de classe C^1 telles que l'extrémité de Γ_1 soit l'origine de Γ_2. Alors la longueur de la courbe Γ obtenue par la succession de Γ_1 et Γ_2 est la somme des longueurs de Γ_1 et Γ_2.

Proposition 2 **Calcul de l'abscisse curviligne en polaires**

Soit Γ une courbe d'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$, où $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1. Alors, en notant s une abscisse curviligne sur Γ, on a :

$$\forall \theta \in I, \quad s'(\theta) = \big(\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)\big)^{\frac{1}{2}}.$$

2) Représentation paramétrique en fonction de l'abscisse curviligne

Rappelons que $f : I \longrightarrow \mathcal{E}_2$, de classe C^1, est une représentation paramétrique de la courbe Γ.

Définition 1

On appelle **paramétrage normal de** f tout paramétrage admissible $g : J \longrightarrow \mathcal{E}_2$ de classe C^1 de f tel que : $\quad \forall u \in J, \quad ||g'(u)|| = 1$.

Rappelons que le paramétrage f est dit régulier si et seulement si : $\forall t \in I, \overrightarrow{f'(t)} \neq \overrightarrow{0}$.

Proposition 1

Si f est régulier, alors :

- pour toute abscisse curviligne s sur Γ, $f \circ s^{-1}$ est un paramétrage normal de f
- pour tout paramétrage normal g de f, il existe une abscisse curviligne s sur Γ telle que :

$$g = f \circ s^{-1} \quad \text{ou} \quad g = f \circ (-s)^{-1}.$$

On dit plus simplement que s et $-s$ sont des paramétrages normaux de Γ.

L'avantage de paramétrer une courbe Γ à l'aide de l'abscisse curviligne réside dans le fait que, pour tout M de Γ, le vecteur tangent $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds}$ est unitaire.

L'usage a consacré la confusion entre $\overrightarrow{T}(t)$, $\overrightarrow{T}(s)$, $\overrightarrow{T}$, et entre $\overrightarrow{N}(t)$, $\overrightarrow{N}(s)$, $\overrightarrow{N}$. Le contexte permet de rétablir, si nécessaire, les notations correctes.

Rappelons qu'une courbe Γ est dite *régulière* si et seulement si Γ admet au moins un paramétrage régulier f. On peut alors paramétrer Γ par l'abscisse curviligne (en choisissant une origine des abscisses curvilignes sur Γ) et on obtient ainsi un paramétrage normal $s \longmapsto M(s)$ de Γ. Nous supposons, pour la fin de ce § 2), que Γ est paramétrée par une abscisse curviligne s.

Définition-Notation 2

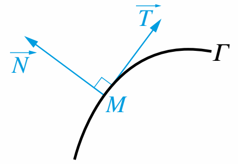
- On appelle **vecteur tangent unitaire (orientant)** de Γ en $M(s)$ le vecteur :

$$\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds}$$

- On note : $\overrightarrow{N} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{T})$

- $(M; \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ est un r.o.n.d., appelé **repère de Frenet en M à Γ.**

Remarque :
Par un changement de paramètre admissible direct (resp. indirect), s, $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$ sont conservés (resp. changés en leurs opposés).



Proposition 2

Soit $f : J \longrightarrow \mathcal{E}_2$ un paramétrage normal de classe C^k $(k \geqslant 2)$ de Γ. Il existe une application $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{k-1} telle que :

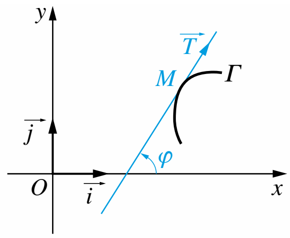
$$\forall s \in J, \quad \overrightarrow{T}(s) = \cos\varphi(s)\,\overrightarrow{i} + \sin\varphi(s)\,\overrightarrow{j}.$$

Remarques :

1) Avec les hypothèses et notations de la Prop. précédente, et avec des notations habituelles abusives, on a :

Formules utiles en pratique.

- $\varphi \equiv (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T}})\ [2\pi]$
- $\cos\varphi = \dfrac{dx}{ds}$ et $\sin\varphi = \dfrac{dy}{ds}$
- $\tan\varphi = \dfrac{dy}{dx}$ en tout point en lequel x' ne s'annule pas.



2) Par un changement de paramètre admissible direct (resp. indirect), φ est conservé (resp. changé en son opposé).

Cas des coordonnées polaires

Soit Γ une courbe admettant une équation polaire $\rho = \rho(\theta)$, où $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2.

On a noté :

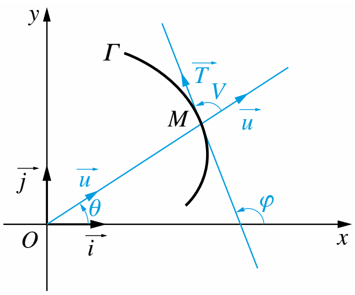
$\overrightarrow{T} = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds}$, $\quad \varphi$ tel que $\varphi \equiv (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T}})\quad [2\pi]$,

$\overrightarrow{u} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$.

On note $V = \varphi - \theta$.

On a alors :

$V \equiv (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{T}})\ [2\pi]$ et $\varphi \equiv \theta + V\ [2\pi]$.



De plus, en tout point en lequel ρ' ne s'annule pas, on a : $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$.

3) Rayon de courbure

$f : I \longrightarrow \mathcal{E}_2$ désigne un arc paramétré régulier de classe C^2, $\Gamma = f(I)$ sa trajectoire, s une abscisse curviligne sur Γ. On a vu (cf. 6.1.2 2) Prop. 1 p. 212) que Γ admet s (ou : $f \circ s^{-1}$) pour paramétrage normal.

On note $\overrightarrow{T} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s}$, $\overrightarrow{N} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{T})$, $\varphi \equiv (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T}})$ $[2\pi]$.

Définition

On appelle :

- **rayon de courbure** en un point $M(s)$ de Γ le réel R défini par : $\boxed{R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}}$
- **courbure** en $M(s)$ à Γ le réel γ défini par : $\gamma = \dfrac{1}{R}$.

On confond R et $R(s)$, γ et $\gamma(s)$.

On admet que R ou γ puissent prendre les valeurs $0, +\infty, -\infty$.

Remarque :

Par un changement de paramètre admissible direct (resp. indirect), R et γ sont conservés (resp. changés en leurs opposés).

Calcul théorique du rayon de courbure

Supposons Γ définie par un paramétrage régulier de classe C^2 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. On a alors :

- $s' = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$
- $\left|\begin{array}{l} x' = s' \cos\varphi \\ y' = s' \sin\varphi \end{array}\right.$, d'où $\left|\begin{array}{l} x'' = s'' \cos\varphi - s' \sin\varphi\ \varphi' \\ y'' = s'' \sin\varphi + s' \cos\varphi\ \varphi' \end{array}\right.$, puis $x'y'' - x''y' = s'^2\varphi'$, donc $\varphi' = \dfrac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}$
- $R = \dfrac{s'}{\varphi'} = \dfrac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}$.

Examinons deux cas particuliers fréquents.

1) Courbe représentative d'une fonction

Supposons que Γ soit donnée par $y = f(x)$ où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2. Alors, Γ est paramétrée par le paramètre x, et, en tout point où f'' ne s'annule pas :

$$R = \frac{\left(1 + f'^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)},$$

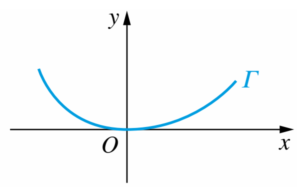
ce qu'on peut écrire abusivement : $R = \dfrac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, les accents indiquant ici la dérivation par rapport à x.

On peut admettre que $R = \pm\infty$ en un point où f'' s'annule.

2) Courbe tangente en O à $x'x$

Supposons que Γ soit tangente en O à $x'x$, et notons R_O le rayon de courbure de Γ en O.

La courbe Γ admet une représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right|$, et le point O de Γ correspond à une (plusieurs?) valeur(s) t_0 du paramètre t.



Supposons que O soit un point régulier de Γ, c'est-à-dire : $\left(x'(t_0), y'(t_0)\right) \neq (0,0)$. Comme Γ est tangente en O à $x'x$, on a alors : $y'(t_0) = 0$ et $x'(t_0) \neq 0$.

Au voisinage de t_0, x est donc un C^2-difféomorphisme, et on peut paramétrer localement Γ par $y = f(x)$, où f est de classe C^2 au voisinage de 0, et $f(0) = f'(0) = 0$.

Supposons $f''(0) \neq 0$; on a alors :

$$R_O = \frac{\left(1 + f'^2(0)\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(0)} = \frac{1}{f''(0)}.$$

D'autre part, d'après le théorème de Taylor-Young, on a, au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2) = \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2),$$

d'où : $\dfrac{x^2}{2f(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{1}{f''(0)} = R_O$.

Ainsi : $R_O = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{x^2}{2y}$.

Calcul du rayon de courbure en polaires

C'est la méthode pratique pour calculer le rayon de courbure en tout point d'une courbe donnée par une équation polaire.

Soit Γ une courbe admettant une équation polaire $\rho = \rho(\theta)$, où ρ est de classe C^2. On calculera successivement :

- s' par $s' = (\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}}$
- $\tan V$ par $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$
- $\mathrm{d}V$ en différentiant $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$:

$$(1 + \tan^2 V)\mathrm{d}V = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2}\,\mathrm{d}\theta, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{d}V = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}\,\mathrm{d}\theta$$

- $\mathrm{d}\varphi$ par $\varphi = \theta + V$, donc $d\varphi = \mathrm{d}\theta + \mathrm{d}V$
- R par $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}$.

Calcul théorique du rayon de courbure en polaires

En reprenant et complétant l'étude précédente, on a :

- $s' = (\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}}$
- $\mathrm{d}V = \dfrac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}\,\mathrm{d}\theta$
- $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\theta + \mathrm{d}V = \dfrac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}\,\mathrm{d}\theta$
- $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \dfrac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$.

Formule hors programme, mais souvent commode.

En particulier, si Γ passe par O pour une valeur θ_0 de θ, alors :

$$R_O = \frac{\left(\rho'^2(\theta_0)\right)^{\frac{3}{2}}}{2\rho'^2(\theta_0)} = \frac{|\rho'(\theta_0)|}{2}.$$

Proposition **Formules de Frenet**

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\overrightarrow{N}}{R}, \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\overrightarrow{T}}{R}.$$

Remarque :

On peut retenir les formules de Frenet sous la forme abusive :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} \\ \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{R} \\ -\dfrac{1}{R} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{N} \end{pmatrix}.$$

Remarquer l'intervention d'une matrice antisymétrique d'ordre 2.

6.1.3 Centre de courbure

On garde ici les hypothèses et notations du § 6.1.2.

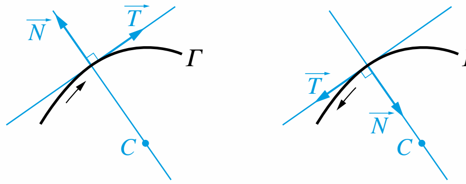
1) Définition

Définition 1

On appelle **centre de courbure en M de Γ** le point C de $\mathcal{E}_2$ défini par : $\overrightarrow{MC} = R\,\overrightarrow{N}$.

Remarque :

Puisque, lors d'un changement de paramètre admissible, R et $\overrightarrow{N}$ sont simultanément conservés ou changés de signe, le centre de courbure est conservé :



Proposition 2

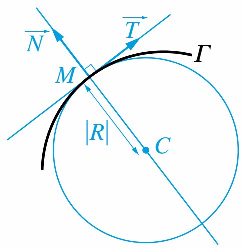
Le centre de courbure C en M à Γ est situé dans la concavité locale en M de Γ.

Preuve

La courbe Γ admet un paramétrage normal $f : \begin{array}{l} J \longrightarrow \mathcal{E}_2 \\ s \longmapsto f(s) \end{array}$ par l'abscisse curviligne. D'après Géométrie PCSI-PTSI, § 3.1.2 2), la concavité locale en M de Γ est le demi-plan limité par la tangente en M à Γ et « contenant » $\overrightarrow{f''(s)}$. Mais ici, $\overrightarrow{f'(s)} = \overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{f''(s)} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{R}\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{MC} = R\,\overrightarrow{N}$, donc $\overrightarrow{f''(s)}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont colinéaires et de même sens. On conclut que C est dans ce demi-plan. ■

Définition 2

On appelle **cercle de courbure en M à Γ** le cercle de centre C (centre de courbure en M à Γ) et de rayon $|R|$ (où R est le rayon de courbure en M à Γ).



Le cercle de courbure en M à Γ est tangent en M à Γ, puisqu'il est centré sur la normale en M à Γ.

Exemple :

Déterminer le cercle de courbure (par son centre et son rayon) en M, correspondant à $t = \frac{1}{3}$, à la courbe Γ de RP $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4} \\ y = \frac{2}{3}t^3 \end{cases}$.

On a, en tout point $M(t)$ de Γ :

- $x' = t - t^3, \quad y' = 2t^2$
- $s'^2 = x'^2 + y'^2 = t^2\Big((1-t^2)^2 + 4t^2\Big) = t^2(1+t^2)^2$, d'où (pour $t > 0$) $s' = t(1+t^2)$
- $\overrightarrow{T} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s} = \frac{x'}{s'}\overrightarrow{i} + \frac{y'}{s'}\overrightarrow{j} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{i} + \frac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{j}$,

  $\overrightarrow{N} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{T}) = -\frac{2t}{1+t^2}\overrightarrow{i} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\overrightarrow{j}$
- $x'' = 1 - 3t^2, \quad y'' = 4t, \; x'y'' - x''y' = 2t^2\Big(2(1-t^2) - (1-3t^2)\Big) = 2t^2(1+t^2)$
- $R = \frac{s'^3}{x'y'' - x''y'} = \frac{t}{2}(1+t^2)^2$
- $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N} = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j}$, où :

On a déterminé le centre de courbure C en tout point $M(t)$ de Γ.

$$\begin{cases} X = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4} + \frac{t}{2}(1+t^2)^2\frac{-2t}{1+t^2} = -\frac{t^2}{2} - \frac{5t^4}{4} \\ Y = \frac{2}{3}t^3 + \frac{t}{2}(1+t^2)^2\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{t}{2} + \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^5}{2}. \end{cases}$$

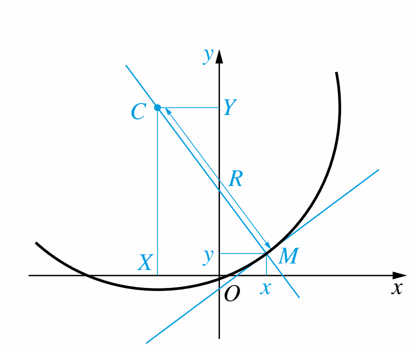
En particulier, pour $t = \frac{1}{3}$, on obtient :

$x = \frac{17}{324} \simeq 0{,}0525, \quad y = \frac{2}{81} \simeq 0{,}0247,$

$x' = \frac{8}{27} \simeq 0{,}296, \quad y' = \frac{2}{9} \simeq 0{,}222,$

$R = \frac{50}{243} \simeq 0{,}206,$

$C \begin{cases} X = -\frac{23}{324} \simeq -0{,}071 \\ Y = \frac{46}{243} \simeq 0{,}190. \end{cases}$

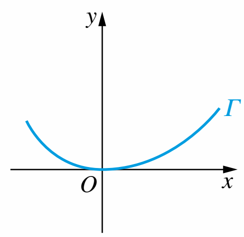


L'étude suivante, qui est hors-programme, permet d'appréhender la singularité du cercle de courbure en M à Γ parmi les cercles tangents en M à Γ.

2) Notion de cercle osculateur

En se plaçant dans le repère de Frenet en M à Γ, on se ramène au cas où Γ est tangente en O à $x'x$, ce que nous supposons maintenant.

Alors, Γ est, au voisinage de O, la courbe représentative d'une fonction f de classe C^2 au voisinage de 0.



Supposons $f''(0) \neq 0$, et même $f''(0) > 0$, le cas $f''(0) < 0$ s'y ramenant par une symétrie.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\Omega(0,\lambda)$, C_λ le cercle de centre Ω et passant par O. Une équation cartésienne de C_λ est :

Équation cartésienne générale d'un cercle tangent en O à Ox.

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0.$$

Le demi-cercle de C_λ passant par O est la courbe représentative de la fonction $g_\lambda :]-\lambda;\lambda[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g_\lambda(x) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - x^2}$.

Étudions la position relative et le contact de C_λ et Γ en O, c'est-à-dire le signe et le degré de la partie principale, lorsque x tend vers 0, de $f(x) - g_\lambda(x)$.

On a, par un calcul de développement limité, lorsque x tend vers 0 :

$$g_\lambda(x) = \lambda - \lambda\sqrt{1 - \frac{x^2}{\lambda^2}}$$
$$= \lambda - \lambda\left(1 - \frac{x^2}{2\lambda^2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \frac{x^2}{2\lambda} + o(x^2).$$

D'autre part, d'après le théorème de Taylor-Young :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2) = \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2)$$
$$= \frac{x^2}{2R} + o(x^2),$$

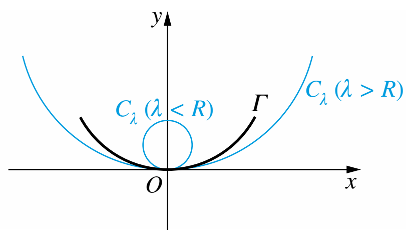
où R est le rayon de courbure de Γ en O.

On obtient ainsi : $f(x) - g_\lambda(x) = \left(\dfrac{1}{2R} - \dfrac{1}{2\lambda}\right)x^2 + o(x^2)$.

« Au voisinage pointé de O » signifie : lorque M est voisin de O mais distinct de O.

Si $\lambda > R$, alors Γ est, au voisinage pointé de O, strictement au-dessus de C_λ.

Si $\lambda < R$, alors Γ est, au voisinage pointé de O, strictement au-dessous de C_λ.



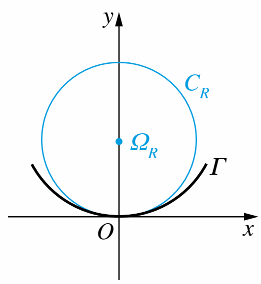
Supposons maintenant $\lambda = R$ et que f soit de classe C^3 au voisinage de 0.

On a alors : $\begin{cases} g_R(x) = \dfrac{x^2}{2R} + o(x^3) \\ f(x) = \dfrac{x^2}{2R} + \dfrac{x^3}{6}\, f'''(0) + o(x^3), \end{cases}$

d'où : $$f(x) - g_R(x) = \frac{f'''(0)}{6}\, x^3 + o(x^3).$$

En général, c'est-à-dire si $f''(0) \neq 0$, on a :

$$f(x) - g_R(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{f'''(0)}{6}\, x^3,$$



Le schéma est peu convaincant, car Γ et C_R sont très proches l'un de l'autre, près de O : le contact est d'ordre $\geqslant 3$.

ce qui montre que, au voisinage de O, C_R traverse Γ.

On dit que C_R et Γ est un contact d'ordre 3 en O, et C_R est appelé le **cercle osculateur en O à Γ**. Ce cercle C_R est, parmi les cercles C_λ ($\lambda \in]0;+\infty[$) celui qui approche « le plus » Γ au voisinage de O.

En pratique, il est fréquent que Γ admette $y'y$ comme axe de symétrie, c'est-à-dire que f soit paire. Supposons donc f paire et de classe C^4 au voisinage de 0. On a alors $f'''(0) = 0$ et :

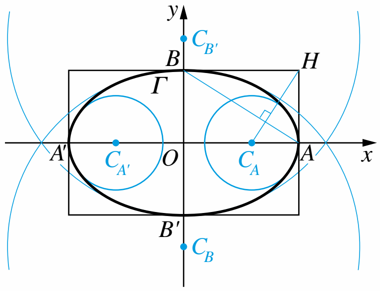
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{2R} + O(x^4) \\ g_R(x) = \dfrac{x^2}{2R} + O(x^4), \end{cases}$$

d'où : $$f(x) - g_R(x) = O(x^4).$$

Dans ce cas, C_R et Γ ont un contact d'ordre $\geqslant 4$, et on dit que C_R est le **cercle surosculateur en O à Γ**.

Exemple : cercles surosculateurs aux sommets d'une ellipse

Soit Γ l'ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$, A,B,A',B' ses sommets.



On a déjà calculé les rayons de courbure en ces points (cf. 4.2.1 Exemple p. 242) :

$$R_{B'}=R_B=\frac{a^2}{b},\quad R_{A'}=R_A=\frac{b^2}{a}.$$

On en déduit les centres de courbure correspondants $C_{B'}$, C_B, C_A, $C_{A'}$, et le tracé des quatre cercles surosculateurs aux sommets de Γ.

Le tracé de Γ est graphiquement très proche d'un raccord d'arcs de ces quatre cercles.

On peut remarquer que, par exemple, C_A est le point d'intersection de (AA') avec la perpendiculaire menée de $H(a,b)$ à (AB).

Exercices 6.1.14 à 6.1.18.

Les méthodes à retenir

Centre de courbure

- **Pour déterminer le centre de courbure C en un point M d'une courbe Γ** (ex. 6.1.14 à 6.1.18), calculer d'abord le rayon de courbure R de Γ en M et le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$ en M, puis appliquer la formule : $\overrightarrow{MC}=R\overrightarrow{N}$.

Exercices

6.1.14 Déterminer le centre de courbure C en $A(1,0)$ à la courbe Γ d'équation polaire $\rho=\dfrac{2}{1+\cos\dfrac{\theta}{2}}$.

6.1.15 Déterminer les centres de courbure en O à la courbe Γ d'équation polaire $\rho=\dfrac{\sin 2\theta}{2\cos\theta-1}$.

6.1.16 Un point M décrit l'ellipse Γ d'EC $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$; soient C le centre de courbure en M à Γ, P le symétrique de C par rapport à M. Déterminer le lieu de P.

6.1.17 On considère, pour $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, la parabole Γ_λ d'EC : $(y-\lambda x)^2-(y+\lambda x)=0$.
Déterminer le lieu du centre de courbure en O à Γ_λ, lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+^*$.

6.1.18 Un point M décrit une hyperbole équilatère H ; la normale en M à H recoupe H en un point N. Soit C le centre de courbure en M à H. Montrer : $\overrightarrow{MN}=-2\overrightarrow{MC}$.

6.1.4 Développée d'une courbe du plan

Définition

On appelle **développée** d'une courbe Γ du plan l'ensemble des centres de courbure C en M à Γ lorsque M décrit Γ.

Exemple :

Développée de l'ellipse

Soit Γ l'ellipse de RP $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ $(a > 0, b > 0)$.

On a successivement :

C'est la **méthode pratique** pour déterminer la développée d'une courbe du plan.

- $x' = -a\sin t, \quad y' = b\cos t$
- $s' = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}$
- $\tan\varphi = \dfrac{y'}{x'} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{cotan} t, \; (1+\tan^2\varphi)\mathrm{d}\varphi = \dfrac{b}{a\sin^2 t}\,\mathrm{d}t, \; \mathrm{d}\varphi = \dfrac{ab}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$
- $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \dfrac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}$
- $\overrightarrow{T} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{x'}{s'}\overrightarrow{i} + \dfrac{y'}{s'}\overrightarrow{j} = (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{1}{2}}(-a\sin t\,\overrightarrow{i} + b\cos t\,\overrightarrow{j})$,

  $\overrightarrow{N} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{T}) = (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{1}{2}}(-b\cos t\,\overrightarrow{i} - a\sin t\,\overrightarrow{j})$
- $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N} = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j}$, où :

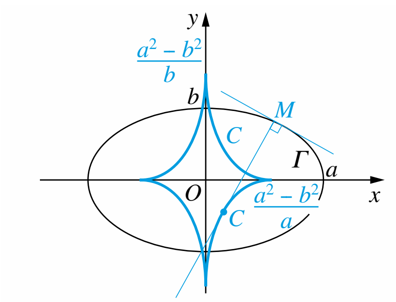
$$X = a\cos t + \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}\,\frac{-b\cos t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= a\cos t - \cos t\left(a\sin^2 t + \frac{b^2}{a}\cos^2 t\right) = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$$
$$Y = b\sin t + \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}\,\frac{-a\sin t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= b\sin t - \sin t\left(\frac{a^2}{b}\sin^2 t + b\cos^2 t\right) = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t.$$

La développée C de Γ admet donc comme RP :

On arrive à une représentation paramétrique de la développée de Γ.

$$\begin{cases} X = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t \\ Y = -\dfrac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t \end{cases}$$

et est donc affine d'une astroïde.



Théorème

La développée de Γ est aussi l'enveloppe des normales à Γ.

Preuve :

Paramétrons Γ par l'abscisse curviligne :

$$M : s \in J \longmapsto M(s) = O + x(s)\overrightarrow{i} + y(s)\overrightarrow{j},$$

et notons $N(s)$ la normale à Γ en $M(s)$.

Une équation cartésienne de $N(s)$ est (avec des coordonnées notées X, Y pour ne pas confondre avec les coordonnées x, y du point courant $M(s)$ de Γ) :

$$x'(s)\Big(X - x(s)\Big) + y'(s)\Big(Y - y(s)\Big) = 0.$$

D'après 6.1.1 Th. p. 205, on obtient une RP de l'enveloppe de la famille de droite $\Big(N(s)\Big)_s$ en résolvant le système d'équations (d'inconnues X, Y) :

$$\begin{cases} N(s) \mid \ x'(s)X + y'(s)Y = x'(s)x(s) + y'(s)y(s) \\ N'(s) \mid \ x''(s)X + y''(s)Y = x''(s)x(s) + y''(s)y(s) + x'^2(s) + y'^2(s). \end{cases}$$

On suppose : $\quad \forall s \in J, \quad x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) \neq 0\,.$

On déduit : $\quad X = x - \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\, y', \quad Y = y + \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\, x'.$

Comme $R = \dfrac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}$ et $\overrightarrow{N} = (x'^2 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}(-y'\overrightarrow{i} + x'\overrightarrow{j})$, on obtient, pour le point courant P de l'enveloppe :

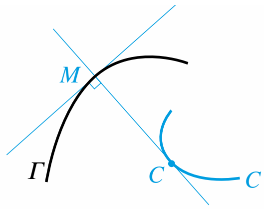
$$\overrightarrow{OP} = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N} = \overrightarrow{OC},$$

et donc $\quad P = C\,.$

Finalement, l'enveloppe des normales à Γ est la développée de Γ.

Remarque :

Le point caractéristique de la normale en M à Γ est le centre de courbure C en M à Γ.



Exemple :

Déterminons, en utilisant le théorème précédent, la développée d'une parabole.

On peut bien sûr aussi déterminer la développée d'une parabole en revenant à la Définition p. 251.

La parabole Γ, d'EC $y^2 = 2px$ ($p > 0$ fixé) admet la RP : $\ x = \dfrac{t^2}{2p},\ y = t \quad (t \in \mathbb{R})$.

Un vecteur tangent en $M(t)$ à Γ est : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{t}{p}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\,.$

On en déduit une EC de la normale $N(t)$ en $M(t)$ à Γ :

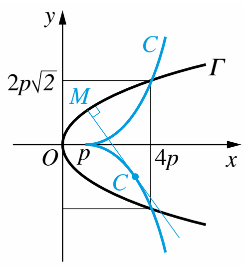
$$\frac{t}{p}\left(x - \frac{t^2}{2p}\right) + (y - t) = 0,$$

ou encore :
$$\frac{t}{p}\,x + y = \frac{t^3}{2p^2} + t.$$

On obtient une RP de l'enveloppe C de $\Big(N(t)\Big)_{t\in\mathbb{R}}$ en résolvant le système (d'inconnues x, y) :

$$\begin{cases} N(t) \mid \ \dfrac{t}{p}\,x + y = \dfrac{t^3}{2p^2} + t \\[2mm] N'(t) \mid \ \dfrac{1}{p}\,x = \dfrac{3t^2}{2p^2} + 1. \end{cases}$$

On obtient : $\quad x = \dfrac{3t^2}{2p} + p, \quad y = -\dfrac{t^3}{p^2}.$



On peut préciser le tracé de C par rapport à Γ, en déterminant $\Gamma \cap C$.

Un point $C\left(x = \dfrac{3t^2}{2p} + p,\ y = -\dfrac{t^3}{p^2}\right)$ est sur Γ si et seulement si $y^2 = 2px$, c'est-à-dire :

$$\left(-\frac{t^3}{p^2}\right)^2 = 2p\left(\frac{3t^2}{2p} + p\right).$$

Et on a : $\quad t^6 - 3p^4t^2 - 2p^6 = 0 \iff (t^2 + p^2)^2(t^2 - 2p^2) = 0\,.$

Donc $\Gamma \cap C$ est formée de deux points symétriques par rapport à $x'x$; l'un d'eux, correspondant à la valeur $t = p\sqrt{2}$ du paramètre t sur C, a pour coordonnées :

$$x = 4p, \quad y = -2p\sqrt{2}.$$

Exercice-type résolu

Exemple de développée

Déterminer la développée C de la courbe Γ définie par : $y = -\ln\ \cos x,\ \ x \in]0\,;\pi/2[$.

Solution

On a, successivement :

- $x' = 1,\ \ y' = \tan x,\ \ s' = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{1 + \tan^2 x} = \dfrac{1}{\cos x}$
- $\tan\varphi = \dfrac{y'}{x'} = \tan x,\ \ \varphi \equiv x\ \ [\pi],\ \ \varphi' = 1$
- $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \dfrac{1}{\cos x}$
- $\overrightarrow{T} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{x'}{s'}\overrightarrow{i} + \dfrac{y'}{s'}\overrightarrow{j} = \cos x\,\overrightarrow{i} + \sin x\,\overrightarrow{j}\,,$

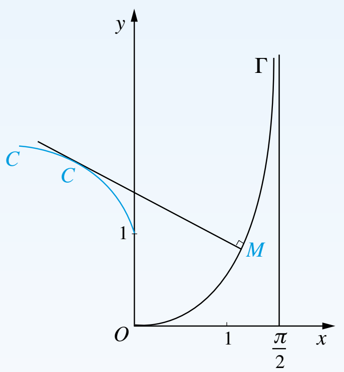
$$\overrightarrow{N} = \mathrm{Rot}_{\pi/2}(\overrightarrow{T}) = -\sin x\,\overrightarrow{i} + \cos x\,\overrightarrow{j}$$

- $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N} = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j}$, où :

$$\begin{cases} X = x + \dfrac{1}{\cos x}(-\sin x) = x - \tan x \\[2ex] Y = -\ln\ \cos x + \dfrac{1}{\cos x}\cos x = 1 - \ln\ \cos x. \end{cases}$$

On conclut que la développée C de Γ est la courbe de représentation paramétrique :

$$X = x - \tan x, \quad Y = 1 - \ln\ \cos x, \qquad x \in]0\,;\pi/2[.$$



Conseils

On calcule avec les notations classiques :

$$x',\ y',\ s',\ \tan\varphi,\ \varphi',\ R,\ \overrightarrow{T},\ \overrightarrow{N},\ C.$$

(X,Y) sont les coordonnées du point courant de la développée C et x est le paramètre.

On contrôle graphiquement que C semble bien être la développée de Γ.

Les méthodes à retenir

Développée d'une courbe plane

- **Pour déterminer la développée C d'une courbe Γ définie par une représentation paramétrique** (ex. 6.1.19 *a)* à *e)*, 6.1.20), on calcule successivement x', y', $s'^2 = x'^2 + y'^2$, $s'\ (\geqslant 0)$, $\overrightarrow{T} = \frac{x'}{s'}\overrightarrow{i} + \frac{y'}{s'}\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{N} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{T})$, C tel que $\overrightarrow{MC} = R\overrightarrow{N}$, et on obtient ainsi une représentation paramétrique de C, qui est le lieu des centres de courbure à Γ.

  La développée est aussi l'enveloppe des normales (cf. th. p. 220).
- **Pour déterminer la développée C d'une courbe Γ donnée par une équation polaire $\rho = \rho(\theta)$** (ex. 6.1.19 *f)* à *i)*), on calcule successivement ρ', $s'^2 = \rho^2 + \rho'^2$, $s'\ (\geqslant 0)$, $\overrightarrow{T} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s}$, φ ou φ', $\overrightarrow{N}$, C tel que $\overrightarrow{MC} = R\overrightarrow{N}$, et on obtient ainsi une représentation paramétrique de C en fonction de l'angle polaire θ de M (attention : θ n'est pas l'angle polaire de C).

  Dans certains cas (ex. 6.1.19 *g)*), il peut être commode de passer par les nombres complexes.

Exercices

6.1.19 Déterminer les développées C des courbes Γ suivantes :

a) $y = \mathrm{e}^x$

b) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $a > 0$ (cycloïde)

c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0, b > 0$ (hyperbole)

d) $\begin{cases} x = (1 + \cos^2 t)\sin t \\ y = \sin^2 t \cos t \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $a > 0$ (astroïde)

f) $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$, (lemniscate)

g) $\begin{cases} x = p\cos\frac{t}{p} - q\cos\frac{t}{q} \\ y = p\sin\frac{t}{p} - q\sin\frac{t}{q} \end{cases}$, $(p,q) \in \mathbb{R}^2, 2 \leqslant p < q$

h) $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $(a > 0)$ (cardioïde)

i) $\rho = a\mathrm{e}^{\lambda\theta}$, $(a,\lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (spirale logarithmique).

6.1.20 Déterminer les développées successives de C_0 :

$$\begin{cases} x = \sin t\ \mathrm{ch}\, t + \cos t\ \mathrm{sh}\, t \\ y = \sin t\ \mathrm{sh}\, t - \cos t\ \mathrm{ch}\, t. \end{cases}$$

6.1.21 Soient Γ une courbe, enveloppe d'une famille de droites (D_θ) d'équations normales $x\cos\theta + y\sin\theta = p(\theta)$, où $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe suffisante, C sa développée, $M \in \Gamma$, C_1 le centre de courbure en M à Γ, C_2 le centre de courbure en C_1 à C. Déterminer Γ pour que la droite (MC_2) admette une direction fixe.

6.1.5 Développantes d'une courbe du plan

Définition

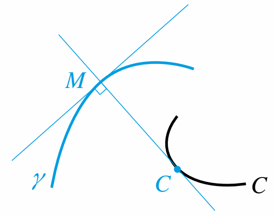
Soient γ, C deux courbes de classe C^2 du plan.

On dit que γ est **une développante de** C si et seulement si C est la développée de γ.

Soit C une courbe de classe C^2 du plan.

Notons s une abscisse curviligne sur C, $C(s)$ le point courant de C, $\overrightarrow{T}(s) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{C}}{\mathrm{d}s}$ le vecteur tangent unitaire orientant en $C(s)$ à C.

1) Soit γ une développante de C (s'il en existe) ; γ admet une RP $\quad s \in J \longmapsto M(s)$ de classe C^2, et, pour tout s de J, il existe $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ tel que :



$$\overrightarrow{OM(s)} = \overrightarrow{OC(s)} + \lambda(s)\overrightarrow{T}(s).$$

Comme $M, C, \overrightarrow{T}$ sont de classe C^1 et que $\overrightarrow{T}$ est unitaire, λ est de classe C^1 sur J. On a, pour tout s de J :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{C}}{\mathrm{d}s} + \lambda'(s)\overrightarrow{T}(s) + \lambda(s)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \Big(1+\lambda'(s)\Big)\overrightarrow{T}(s) + \frac{\lambda(s)}{R(s)}\overrightarrow{N}(s),$$

où $R(s)$ désigne le rayon de courbure en $C(s)$ à C, et $\overrightarrow{N}(s) = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}\Big(\overrightarrow{T}(s)\Big)$.

Comme : $\qquad \forall s \in J, \quad \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s} \perp \overrightarrow{T}(s),$

on a : $\qquad \forall s \in J, \quad 1+\lambda'(s) = 0,$

et il existe donc $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $\quad \forall s \in J, \quad \lambda(s) = -s + s_0.$

On obtient : $\qquad \forall s \in J, \quad \overrightarrow{OM(s)} = \overrightarrow{OC(s)} + (s_0 - s)\overrightarrow{T}(s).$

2) Réciproquement, soient $s_0 \in \mathbb{R}$ et γ la courbe de RP :

$$\overrightarrow{OM(s)} = \overrightarrow{OC(s)} + (s_0 - s)\overrightarrow{T}(s).$$

Il est clair que γ est de classe C^1 et que, si C est de classe C^3, alors γ est de classe C^2.
On a, pour tout s de J :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{C}}{\mathrm{d}s} - \overrightarrow{T}(s) + (s_0 - s)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{s_0 - s}{R(s)}\overrightarrow{N}(s),$$

ce qui montre que la normale en $M(s)$ à γ est dirigée par $\overrightarrow{T}(s)$.
Ainsi, la normale en $M(s)$ à γ est la tangente en $C(s)$ à C, et C est l'enveloppe des normales à γ.
Finalement, γ est une développante de C.

Résumons l'étude :

Théorème

Soit C une courbe de classe C^3 du plan. On note s une abscisse curviligne sur C, $C(s)$ le point courant de C, $\overrightarrow{T}(s) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{C}}{\mathrm{d}s}$ le vecteur tangent unitaire orientant en $C(s)$ à C. Alors, les développantes de C sont les courbes définies par les paramétrages :

$$\overrightarrow{OM(s)} = \overrightarrow{OC(s)} + (s_0 - s)\overrightarrow{T}(s),$$

pour $s_0 \in \mathbb{R}$ quelconque.

Une courbe donnée admet une développée et une seule (voir § 4.2.3), et admet une infinité de développantes.

Exemple : Développantes de la chaînette

La **chaînette** est la courbe C d'EC $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ ($a > 0$ fixé).

Déterminons ses développantes.

On a : $$s' = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

puis : $$\overrightarrow{T} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{C}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{C}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}\left(\overrightarrow{i} + \operatorname{sh}\frac{x}{a}\,\overrightarrow{j}\right).$$

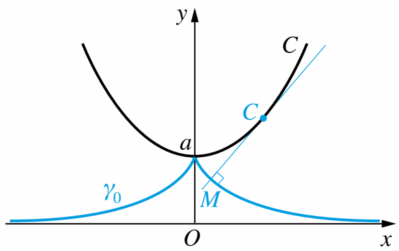
En choisissant pour origine des abscisses curvilignes sur C le point $A(0,a)$, correspondant à $x = 0$, on a : $s = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}$.

Les développantes de C sont les courbes γ_λ $(\lambda \in \mathbb{R})$ définies par les représentations paramétriques :

$$\begin{cases} X = x + (\lambda - s)\,\dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}} = x + \left(\lambda - a \operatorname{sh}\dfrac{x}{a}\right)\dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}} \\[2ex] Y = y + (\lambda - s)\operatorname{th}\dfrac{x}{a} = a \operatorname{ch}\dfrac{x}{a} + \left(\lambda - a \operatorname{sh}\dfrac{x}{a}\right)\operatorname{th}\dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

En particulier, γ_0, appelée **tractrice de chaînette**, admet pour RP :

$$\begin{cases} X = x - a \operatorname{th}\dfrac{x}{a} \\[2ex] Y = \dfrac{a}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}. \end{cases}$$



Exercice-type résolu

Exemple de développantes

Déterminer les développantes de la courbe C de représentation paramétrique :

$$x = \frac{t^2}{2} - t \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \qquad y = 2t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Solution

On a :

- $x' = t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t(\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t) = -2t \operatorname{sh}^2 t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$

  $y' = 2 \operatorname{ch} t + 2t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t = 2t \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t$

- $x'^2 + y'^2 = (2t \operatorname{sh}^2 t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t)^2 + (2t \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)^2$

  $\qquad = (\operatorname{sh}^2 t + 1)(2t \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)^2 = \operatorname{ch}^2 t(2t \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)^2$

  $s' = (x'^2 + y'^2)^{1/2} = \operatorname{ch} t(2t \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t) = 2t \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + \operatorname{ch}^2 t.$

On remarque : $s' = 2t \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + \operatorname{ch}^2 t = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t \operatorname{ch}^2 t)$, donc une abscisse curviligne s sur C est donnée par : $s = t \operatorname{ch}^2 t$.

Conseils

On calcule successivement

$x', y', s', s, \overrightarrow{T}$,

puis on applique la formule du Cours donnant le point courant d'une développante.

Le calcul de s à partir de s' est ici particulièrement simple.

Solution

Conseils

- $\vec{T} = \dfrac{d\vec{C}}{ds} = \dfrac{dt}{ds}\dfrac{d\vec{C}}{dt}$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch} t\,(2t \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)}\left((-2t \operatorname{sh}^2 t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t)\,\vec{i} + (2t \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)\,\vec{j}\right)$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch} t}(-\operatorname{sh} t\,\vec{i} + \vec{j})$$

- On en déduit les coordonnées (X,Y) du point courant M d'une développante de C :

Formule du Cours : $\overrightarrow{OM(s)} = \overrightarrow{OC(s)} + (s_0 - s)\,\vec{T}$, cf. § 6.1.5 Théorème.

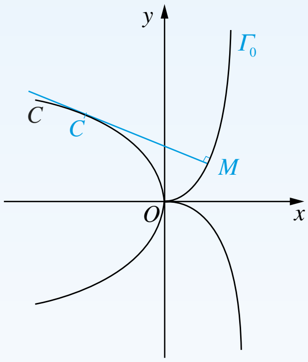
$$X = \left(\frac{t^2}{2} - t \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t\right) + (s_0 - t \operatorname{ch}^2 t)\left(\frac{-\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right) = \frac{t^2}{2} - s_0 \operatorname{th} t$$

$$Y = (2t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) + (s_0 - t \operatorname{ch}^2 t)\frac{1}{\operatorname{ch} t} = t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t + s_0 \frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

On conclut que les développantes de C sont les courbes Γ de représentations paramétriques, pour $s_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} X = \dfrac{t^2}{2} - s_0 \operatorname{th} t \\ Y = t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t + s_0 \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

La donnée de s_0 détermine une développante de C.



Représentation graphiqueme de la développante Γ_0 de C, correspondant à $s_0 = 0$, par exemple.

Les méthodes à retenir

Développantes d'une courbe plane

- **Pour déterminer les développantes d'une courbe du plan C** (ex. 6.1.22, 6.1.23), calculer, sur la courbe C, l'abscisse curviligne s et le vecteur tangent unitaire $\overrightarrow{T(s)}$; les développantes sont les courbes définies par les représentations paramétriques : $\overrightarrow{OM(s)} = \overrightarrow{OC(s)} + (s_0 - s)\overrightarrow{T(s)}$ où $s_0 \in \mathbb{R}$ est quelconque fixé, et $M(s)$ décrit la développante correspondant à s_0.

  Il sera nécessaire, en pratique, de procéder à un calcul d'intégrale pour obtenir s à partir de s'.

Exercices

6.1.22 Déterminer les développantes du cercle C d'EC $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$ fixé. Tracer celle passant par le point $A(R,0)$.

6.1.23 *a)* Déterminer les développantes de la courbe C $\begin{cases} x = 3 \operatorname{sh}^2 t \\ y = 2 \operatorname{sh}^3 t. \end{cases}$

b) Reconnaître celle qui passe par le point $A(-2,0)$.

6.2 Courbes de l'espace

L'étude se situe dans l'espace affine euclidien de dimension 3, noté $\mathcal{E}_3$, éventuellement muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$ ou $\cdot$, la norme associée est notée $||\cdot||$, et la distance de deux points A, B est notée $d(A,B)$ ou $||\overrightarrow{AB}||$ ou AB. Classiquement, on identifie $\mathcal{E}_3$ à $\mathbb{R}^3$.

On peut généraliser, avec peu de modifications, l'étude des §§ 6.2.1 et 6.2.2 au cas d'un espace vectoriel normé de dimension finie, et celle du § 6.2.3 au cas d'un espace euclidien.

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide ni réduit à un point (l'étude peut s'adapter au cas d'une réunion de tels intervalles), et k désigne un entier $\geqslant 1$ ou $= +\infty$.

6.2.1 Généralités

L'étude est analogue à celle du § 3.1.1 de Géométrie PCSI-PTSI.

1) Arc paramétré

Selon que $f(t)$ est considéré comme un point ou un vecteur, on peut noter $f(t)$ ou $\overrightarrow{f(t)}$.

Définition 1

On appelle **arc paramétré (de classe C^k)** toute application $f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ t \longmapsto f(t) \end{array}$ de classe C^k.

Au lieu de courbe de l'espace, on dit aussi : **courbe gauche**.

Définition 2

Soit $f : I \longrightarrow \mathcal{E}_3$ un arc paramétré. On appelle **trajectoire de f** la partie $f(I) = \{f(t);\, t \in I\}$ de $\mathcal{E}_3$.

On dit aussi que $f(I)$ est une **courbe (de l'espace)** admettant f pour **représentation paramétrique** (en abrégé : RP).

Définition 3

Soit $f : I \longrightarrow \mathcal{E}_3$ un arc paramétré (de classe C^k).

1) On appelle **changement de paramétrage (de classe C^k) de f** toute application $\varphi : J \longrightarrow I$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle que :

$$\begin{cases} \varphi \text{ est de classe } C^k \text{ sur } J \\ \varphi \text{ est bijective} \\ \varphi^{-1} \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I. \end{cases}$$

2) On appelle **paramétrage admissible (de classe C^k) de f** toute application $g : J \longrightarrow \mathcal{E}_3$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle qu'il existe un changement de paramétrage (de classe C^k) φ de f tel que $g = f \circ \varphi$.

En particulier, f est un paramétrage admissible (de classe C^k) de f, en prenant $J = I$ et $\varphi = \mathrm{Id}_I$.

Les remarques de Géométrie PCSI-PTSI, 3.1.1 4), sont ici aussi valables, en repc-psilaçant $\mathcal{E}_2$ par $\mathcal{E}_3$.

Une courbe de l'espace peut aussi être définie par un **système d'équations cartésiennes** (en abrégé : SEC) : $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$

En pratique, on passe d'une RP d'une courbe Γ de l'espace à un SEC de Γ en éliminant le paramètre.

$$\left(\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}\right) \iff \begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}.$$

Exemple :

Un SEC de la courbe Γ de RP $(x = t,\ y = t^2,\ z = t^3)$ est : $\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$.

On admet le théorème suivant, appelé théorème des fonctions implicites.

Théorème

Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $A = (a,b,c) \in V$, $F,G : V \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications.

On suppose : $\begin{cases} \bullet\ F(A) = G(A) = 0 \\ \bullet\ F,G \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } V \\ \bullet\ \begin{vmatrix} F'_y(A) & F'_z(A) \\ G'_y(A) & G'_z(A) \end{vmatrix} \neq 0. \end{cases}$

Alors, il existe un intervalle ouvert v de $\mathbb{R}$ centré en a et des intervalles ouverts w_1, w_2 de $\mathbb{R}$ centrés en b,c respectivement tels que :

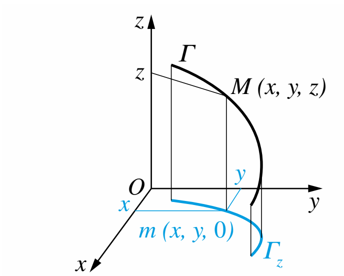
$$\begin{cases} \bullet\ v \times w_1 \times w_2 \subset V \\ \bullet\ \text{il existe un couple unique d'applications } \varphi : v \longrightarrow w_1,\ \psi : v \longrightarrow w_2 \\ \qquad \text{tel que :} \quad \forall x \in v, \quad \begin{cases} F\big(x,\varphi(x),\psi(x)\big) = 0 \\ G\big(x,\varphi(x),\psi(x)\big) = 0 \end{cases} \\ \bullet\ \varphi \text{ et } \psi \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } v. \end{cases}$$

De plus, si F,G sont de classe C^k $(k \geqslant 1)$ sur V, alors φ,ψ sont de classe C^k sur v.

Exercices 6.2.1 à 6.2.4.

2) Projections d'une courbe de l'espace sur les plans de coordonnées

Soit Γ une courbe de l'espace, de RP : $\left|\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right.$, $t \in I$.



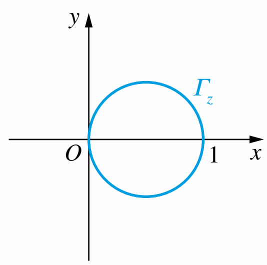
Il est clair que la projection Γ_z de Γ sur le plan xOy (parallèlement à $z'z$) admet pour RP : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = 0. \end{cases}$

Résultats analogues pour les deux autres projections de Γ.

Exemple :

Déterminer et tracer les projections orthogonales sur les trois plans de coordonnées de la courbe Γ de RP : $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \cos t \ \sin t,\ t \in \mathbb{R}, \\ z = \sin t \end{cases}$ appelée fenêtre de Viviani.

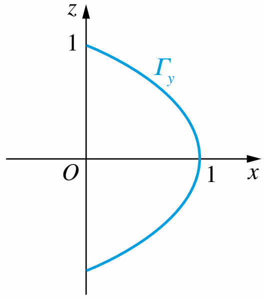
Projection Γ_z de Γ sur xOy.



• La projection Γ_z de Γ sur xOy, parallèlement à $z'z$, admet pour RP : $\left|\begin{array}{l} x = \cos^2 t \\ y = \cos t \ \sin t \\ z = 0 \end{array}\right.$, ou encore :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2t \\ y = \dfrac{1}{2}\sin 2t \\ z = 0 \end{cases}.$$

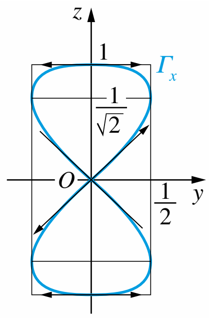
Donc Γ_z est le cercle (dans le plan $z = 0$) de centre $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.



Projection Γ_y de Γ sur xOz.

• La projection Γ_y de Γ sur xOz, parallèlement à $y'y$, admet pour RP : $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = 0 \\ z = \sin t \end{cases}$. Par élimination de t, on obtient un SEC : $\begin{cases} x = 1 - z^2 \\ y = 0 \\ -1 \leqslant z \leqslant 1 \end{cases}$.

Ainsi, Γ_y est un arc de parabole.



Projection Γ_x de Γ sur yOz.

• La projection Γ_x de Γ sur yOz, parallèlement à $x'x$, admet pour RP : $\begin{cases} x = 0 \\ y = \cos t \sin t \\ z = \sin t \end{cases}$, et pour SEC : $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = z^2(1 - z^2). \end{cases}$.

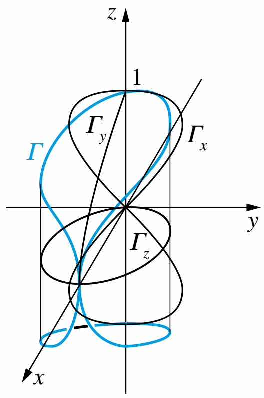


Schéma représentant Γ et ses trois projections $\Gamma_z, \Gamma_y, \Gamma_x$ sur les plans de coordonnées.

6.2.2 Tangente en un point

L'étude est analogue à celle de Géométrie PCSI-PTSI 3.1.2 1).

Définition 1

Soient $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{E}_3 \\ t & \longmapsto & M(t) = f(t) \end{array}$ un arc paramétré de classe C^1, $\Gamma = f(I)$ sa trajectoire, $M(t)$ un point de Γ.

On dit que $M(t)$ est un point **régulier de** Γ si et seulement si $\overrightarrow{f'(t)} \neq \overrightarrow{0}$.

Si f est de classe C^2, on dit que $M(t)$ est un point **birégulier de** Γ si et seulement si la famille $\left(\overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)}\right)$ est libre.

Tout point birégulier de Γ est régulier.

Un point non régulier de Γ est aussi dit **stationnaire**.

Remarque : Les notions de point régulier et de point birégulier sont invariantes par changement de paramétrage (de classe C^1 ou C^2 respectivement).

Tout arc paramétré birégulier est régulier.

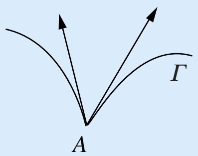
Définition 2

On dit qu'un arc paramétré $f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ t \longmapsto M(t) = f(t) \end{array}$ de classe C^1 (resp. C^2) est **régulier** (resp. **birégulier**) si et seulement si, pour tout t de I, $M(t)$ est un point régulier (resp. birégulier) pour f.

Les remarques de Géométrie PCSI-PTSI, 3.1.2 1) sont ici aussi valables, en remplaçant $\mathcal{E}_2$ par $\mathcal{E}_3$.

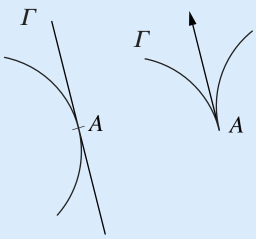
Définition 3

Soient $f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ t \longmapsto M(t) = f(t) \end{array}$ un arc paramétré de classe C^1, Γ la trajectoire de f, $t_0 \in I$, $A = M(t_0)$, aussi noté $A(t_0)$.



1) On dit que Γ **admet une demi-tangente en** $A(t_0^+)$ (resp. $A(t_0^-)$) si et seulement si le vecteur unitaire $\dfrac{\overrightarrow{AM(t)}}{||\overrightarrow{AM(t)}||}$ (s'il existe) admet une limite lorsque t tend vers t_0^+ (resp. t_0^-).

Dans ce cas, on appelle **demi-tangente en** $A(t_0^+)$ (resp. $A(t_0^-)$) à Γ la demi-droite d'origine A et dirigée et orientée par cette limite.



2) On dit que Γ **admet une tangente en** $A(t_0)$ si et seulement si Γ admet deux demi-tangentes égales ou opposées en $A(t_0^+)$ et $A(t_0^-)$. Dans ce cas, on appelle **tangente en $A(t_0)$ à Γ** la droite passant par A et portant les deux demi-tangentes.

Remarque : L'existence d'une demi-tangente ou d'une tangente en un point de Γ est invariante par changement de paramétrage.

Le vecteur dérivée-première dirige la tangente.

Théorème

Soient $f : I \longrightarrow \mathcal{E}_3$ un arc paramétré de classe C^1, Γ sa trajectoire. En tout point régulier $A(t)$ de Γ, Γ admet une tangente, et celle-ci est dirigée par $\overrightarrow{f'(t)}$.

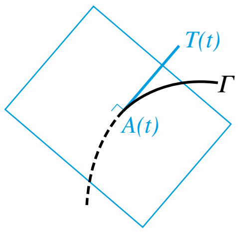
Définition 4

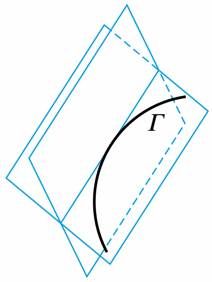
Soient $f : I \longrightarrow \mathcal{E}_3$ un arc paramétré de classe C^1, Γ sa trajectoire, $A(t)$ un point régulier de Γ, $T(t)$ la tangente en $A(t)$ à Γ.

On appelle :

- **plan normal en $A(t)$ à Γ** le plan passant par $A(t)$ et perpendiculaire à $T(t)$
- **plan tangent en $A(t)$ à Γ** tout plan contenant $T(t)$.

Ainsi, Γ admet en $A(t)$ un plan normal et un seul, et une infinité de plans tangents.





Définition 5

Soient $f : I \longrightarrow \mathcal{E}_3$ un arc paramétré de classe C^1, Γ sa trajectoire, $A(t)$ un point régulier de Γ. On appelle **vecteur tangent unitaire (orientant)** de Γ en $A(t)$ le vecteur, noté $\overrightarrow{T(t)}$ (ou : $\overrightarrow{T}$) défini par :

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{\overrightarrow{f'(t)}}{||\overrightarrow{f'(t)}||}.$$

Il est clair que :

$$||\overrightarrow{T(t)}|| = 1.$$

Nous terminons ce § en examinant un type particulier de courbes de l'espace, les hélices.

Définition 6

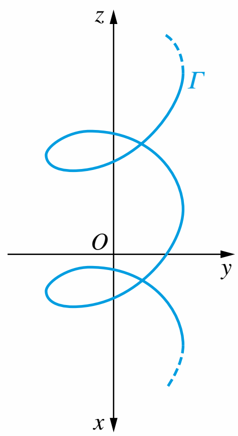
On appelle **hélice** toute courbe Γ de l'espace, de classe C^1, régulière, telle qu'il existe un vecteur unitaire fixe $\overrightarrow{K}$ tel que l'angle $\left(\overrightarrow{K}, \overrightarrow{T(t)}\right)$ soit de mesure constante (modulo 2π).

Exemples :

1) **Hélice circulaire à pas constant**

Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, $h \in \mathbb{R}^*$, Γ la courbe de RP :

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t\,, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = ht \end{cases}$$



On a, pour tout t de $\mathbb{R}$: $\left\{\begin{array}{l} x' = -r\sin t \\ y' = r\cos t \\ z = h \end{array}\right|$, d'où :

$$\frac{\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{T}(t)}{||\overrightarrow{k}|| \cdot ||\overrightarrow{T(t)}||} = \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}.$$

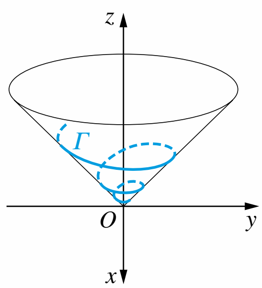
$\cos\left(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{T(t)}\right)$ est constant.

Ainsi, l'angle $\left(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{T(t)}\right)$ est constant, Γ est une hélice, appelée **hélice circulaire à pas constant**.

2) De même, la courbe Γ de RP : $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t\,, \\ z = e^{-t} \end{cases}$

$t \in \mathbb{R}$, est une hélice, tracée sur le cône d'EC :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$



Exercice 6.2.5.

6.2.3 Abscisse curviligne

$\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère orthonormé fixé de $\mathcal{E}_3$.

$f : I \longrightarrow \mathcal{E}_3$ désigne un arc paramétré de classe C^1, $\Gamma = f(I)$ sa trajectoire. Pour $t \in I$, on pourra noter $M(t)$ au lieu de $f(t)$. Pour $t \in I$, on note $(x(t), y(t), z(t))$ les coordonnées de $M(t)$ dans $\mathcal{R}$; ainsi, pour tout t de I :

$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\,\overrightarrow{i} + y(t)\,\overrightarrow{j} + z(t)\,\overrightarrow{k}.$$

En général, le contexte précise s'il s'agit de longueur algébrique ($\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$) ou de longueur ($\geqslant 0$).

Rappelons que le paramétrage f est dit régulier si et seulement si :

$$\forall t \in I, \overrightarrow{f'(t)} \neq 0.$$

Définition 1

On appelle **abscisse curviligne sur Γ** toute application $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I telle que :

$$\forall t \in I, \quad s'(t) = ||\overrightarrow{f'(t)}||.$$

Les remarques de Géométrie PCSI-PTSI, 4.1.1 sont ici aussi valables, en remplaçant $\mathcal{E}_2$ par $\mathcal{E}_3$. Avec les notations de la Définition 1, on a :

$$\forall t \in I, \quad s'^2(t) = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t),$$

ce qu'on écrit quelquefois abusivement :

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2.$$

Définition 2

Soient s une abscisse curviligne sur Γ, $a,b \in I$, $A = f(a)$, $B = f(b)$. On appelle :

• **longueur (algébrique)** de l'arc $\widehat{AB}$ de Γ, et on note ici $l(\widehat{AB})$, le réel $s(b) - s(a)$, c'est-à-dire :

$$l(\widehat{AB}) = \int_a^b ||\overrightarrow{f'(t)}||\,\mathrm{d}t$$

• **longueur de** l'arc $\widehat{AB}$ de Γ, la valeur absolue de la longueur (algébrique) de $\widehat{AB}$ sur Γ.

Remarque :
Il y a « additivité » de la longueur d'arc, comme dans la Prop. 1 du § 4.1.1 de Géométrie PCSI-PTSI.

Exemple :

Calculer la longueur L de la courbe Γ de l'espace de RP :

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = -\ln \cos t, \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

On a : $\quad x' = -\sin t, \quad y' = \cos t, \quad z' = \tan t,$

d'où : $\quad s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t},$

donc : $\quad s' = \dfrac{1}{\cos t},$

puis : $\quad L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} s'(t)\,\mathrm{d}t \underset{[u=\sin t]}{=} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \ln(\sqrt{2}+1) \simeq 0{,}881\,.$

Définition 3

On appelle **paramétrage normal** de f tout paramétrage admissible $g : J \longrightarrow \mathcal{E}_3$ de classe C^1 de f tel que :

$$\forall u \in J, \quad ||\overrightarrow{g'(u)}|| = 1.$$

Proposition

Si f est régulier, alors :

• pour toute abscisse curviligne s sur Γ, $f \circ s^{-1}$ est un paramétrage normal de f

• pour tout paramétrage normal g de f, il existe une abscisse curviligne s sur Γ telle que :

$$g = f \circ s^{-1} \quad \text{ou} \quad g = f \circ (-s)^{-1}.$$

Exercices 6.2.6, 6.2.7.

On dit plus simplement que s et $-s$ sont des paramétrages normaux de f.

Remarque : Supposons f régulier, et soit s une abscisse curviligne sur Γ. Alors, en tout point $M(s)$ de Γ, le vecteur tangent unitaire (orientant) $\overrightarrow{T(s)}$ est : $\overrightarrow{T(s)} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s}$.

Exercice-type résolu

Exemple de courbe conditionnée

On munit $\mathcal{E}_3$ d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Pour $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, on note C_f l'arc paramétré :

$$x = \frac{t^3}{6} + \frac{1}{2t}, \qquad y = f(t), \qquad z = t, \qquad t \in]0\,;+\infty[.$$

Déterminer les applications f telles que la tangente en tout point de C_f fait un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ avec la droite $(y'y)$.

Solution

En notant $M(t)$ le point courant de C_f, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2t^2}\right)\overrightarrow{i} + f'(t)\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}.$$

Comme, pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} \neq \overrightarrow{0}$, la tangente $T(t)$ en $M(t)$ à C_f existe et est dirigée par $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\angle\big((y'y), T(t)\big) \equiv \pm\frac{\pi}{4}\ [\pi] &\iff \angle\left(\overrightarrow{j}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{4}\ [\pi] \\
&\iff \cos\angle\left(\overrightarrow{j}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\iff \overrightarrow{j}\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,||\overrightarrow{j}||\left|\left|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\right|\right| \\
&\iff \left(\overrightarrow{j}\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{2}||\overrightarrow{j}||^2\left|\left|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\right|\right|^2 \\
&\iff \big(f'(t)\big)^2 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2t^2}\right)^2 + \big(f'(t)\big)^2 + 1\right) \\
&\iff \big(f'(t)\big)^2 = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2t^2}\right)^2 + 1 \\
&\qquad\qquad = \frac{t^4}{4} + \frac{1}{4t^4} + \frac{1}{2} = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2t^2}\right)^2 \quad (1).
\end{aligned}$$

Conseils

La 3ème coordonnée de $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}$ est égale à 1, donc $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} \neq \overrightarrow{0}$.

Angles de droites, défini modulo π.

Utilisation de l'expression du produit scalaire de deux vecteurs non nuls de $\mathcal{E}_3$:

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\cos\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Dans l'énoncé, les coefficients ont été choisis pour obtenir ici un carré parfait. Sinon, on n'aurait pas pu exprimer $f(t)$ à l'aide des fonctions usuelles, sans symbole de primitivation.

Solution

Conseils

Comme l'application $t \in]0\,;+\infty[\longmapsto \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{2t^2}$ ne s'annule pas, il en résulte que f' ne s'annule pas. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque f' est continue sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et ne s'annule en aucun point, f' est de signe strict fixe sur $]0\,;+\infty[$. Ainsi :

$$(1) \iff \exists \varepsilon \in \{-1,1\},\ \forall t \in]0\,;+\infty[,\ \ f'(t) = \varepsilon\left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2t^2}\right).$$

puis, en primitivant, on conclut que l'ensemble des applications f convenant est :

$$\left\{ f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \varepsilon\left(\frac{t^3}{6} - \frac{1}{2t}\right) + C;\ \ (\varepsilon, C) \in \{-1,1\} \times \mathbb{R} \right\}.$$

Les méthodes à retenir

Courbes de l'espace

- **Pour montrer qu'une courbe de l'espace, donnée par une représentation paramétrique $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in I$, est plane** (ex. 6.2.1), déterminer $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et que :

$$\forall t \in I, \quad ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0.$$

  On peut aussi, dans certains exemples (ex. 6.2.2), trouver un point A et une famille libre formée de deux vecteurs fixes $\vec{u}$, $\vec{v}$ tels que, pour tout $t \in I$, $\overrightarrow{AM(t)}$ se décompose sur $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{AM(t)} = X(t)\vec{u} + Y(t)\vec{v},$$

  ce qui montre que la courbe est incluse dans le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$, $\vec{v}$, et permet éventuellement de reconnaître la courbe.
- **Pour résoudre des questions portant sur la coplanéité de points d'une courbe *unicursale*, c'est-à-dire admettant une représentation paramétrique rationnelle** (ex. 6.2.5), on fera intervenir les fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique.
- **Pour calculer une abscisse curviligne sur Γ ou la longueur de Γ** (ex. 6.2.6, 6.2.7), utiliser la formule : $s' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}$.

Exercices

6.2.1 Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que la courbe Γ de RP :

$$x = \frac{P(t)}{1+t^2},\ y = \frac{Q(t)}{1+t^2},\ z = \frac{R(t)}{1+t^2},\ t \in \mathbb{R},$$

est plane.

6.2.2 Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$. Montrer que la courbe Γ de RP : $x = \mathrm{ch}(t+a)$, $y = \mathrm{ch}(t+b)$, $z = \mathrm{ch}(t+c)$, $t \in \mathbb{R}$, est plane et reconnaître Γ.

6.2.3 Reconnaître la courbe Γ :

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - \dfrac{z}{4} = 0 \\ x^2 + xy + z^2 - \dfrac{y}{4} = 0 \end{cases}.$$

6.2.4 Soient D la droite $x = y = z$, Γ la courbe représentée paramétriquement par $(x = t,\ \ y = t^2,\ \ z = t^3)$. Former une équation cartésienne de la surface réunion des droites Δ ne passant pas par O, rencontrant D, et rencontrant Γ en deux points distincts (de Γ).

6.2.5 Soit Γ : $\quad x = t^4, \quad y = t^3 + t, \quad z = t^2$.

a) CNS sur les fonctions symétriques élémentaires de t_1, t_2, t_3, t_4 pour que les quatre points de Γ de paramètres t_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ soient coplanaires.

b) α) En déduire les plans bitangents à Γ.

β) Montrer que ces plans bitangents passant par un point fixe ou sont parallèles à $y'y$.

γ) Former une équation cartésienne de la surface réunion des cordes joignant les deux points de contact des plans bitangents à Γ.

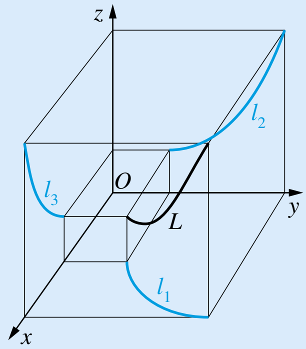
6.2.6 Calculer la longueur L de l'arc paramétré :

$$x = \frac{\cos at}{\operatorname{ch} t}, \; y = \frac{\sin at}{\operatorname{ch} t}, \; z = \operatorname{th} t, \; t \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{R}_+^* \text{ fixé.}$$

(On fera intervenir une intégrale de fonction intégrable sur $\mathbb{R}$).

6.2.7 Soient Γ un arc paramétré de classe C^1, L sa longueur, l_1, l_2, l_3 les longueurs des projections orthogonales de Γ sur les trois plans de coordonnées.

Montrer : $\quad 2L \leqslant l_1 + l_2 + l_3 \leqslant L\sqrt{6}$.



6.3 Surfaces

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et k désigne un entier $\geqslant 1$ ou $= +\infty$.

6.3.1 Généralités

Définition

On appelle **nappe paramétrée (de classe C^k)** toute application $\phi : U \longrightarrow \mathcal{E}_3$ de classe C^k sur U.

Si $\phi : U \longrightarrow \mathcal{E}_3$ est une nappe paramétrée, on appelle **image** de ϕ la partie $\phi(U)$ de $\mathcal{E}_3$. On dit aussi que $\phi(U)$ est une **surface** admettant ϕ pour **représentation paramétrique** (en abrégé : RP).

Une surface peut donc être définie par une RP (avec deux paramètres) ou par une EC.

Soit S une surface admettant $\phi : U \longrightarrow \mathcal{E}_3$ comme représentation paramétrique (de classe C^k), $\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ les coordonnées de $\phi(u,v)$ dans $\mathcal{R}$. On obtient une **équation cartésienne** (en abrégé : EC) de S en éliminant (u,v) dans le système d'égalités

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}.$$

Exemples :

1) **Former une EC de la surface de RP** $\left\{\begin{array}{l} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u^4 \end{array}\right|, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$

En éliminant (u,v), on obtient une EC : $(x^2 + y^2)^2 - z = 0$.

2) **Former une EC de la surface de RP :** $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2, \ (u,v) \in \mathbb{R}^2. \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$

On a :

$$\left\{\begin{array}{l} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv \\ z = u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3(u+v)uv \end{array}\right| \iff \left\{\begin{array}{l} x = u + v \\ y = x^2 - 2uv \\ z = x^3 - 3xuv \end{array}\right|$$

$$\iff \begin{cases} u + v = x \\ uv = \dfrac{x^2 - y}{2} \\ z = x^3 - \dfrac{3x(x^2-y)}{2} \end{cases}.$$

Étude de la réalité de u,v ; a priori, u,v, solutions d'une équation du second degré, pourraient être complexes non réels.

Puisque u,v sont ici déterminés par leur somme σ et leur produit π, donc sont les zéros du polynôme $\mathrm{X}^2 - \sigma \mathrm{X} + \pi$, on a :

$$\exists (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \left(\begin{cases} u + v = x \\ uv = \dfrac{x^2 - y}{2} \end{cases} \right) \iff x^2 - 4\,\frac{x^2 - y}{2} \geqslant 0 \iff 2y - x^2 \geqslant 0.$$

Ainsi, une EC de S est : $\begin{cases} x^3 - 3xy + 2z = 0 \\ y \geqslant \dfrac{x^2}{2} \end{cases}.$

Autrement dit, S est la surface d'EC $x^3 - 3xy + 2z = 0$, « limitée » par la condition $y \geqslant \dfrac{x^2}{2}$.

Réciproquement, la recherche d'une RP d'une surface d'EC $F(x,y,z) = 0$ est souvent délicate. On admet le théorème suivant, appelé théorème des fonctions implicites.

Théorème

Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $A = (a,b,c) \in V$, $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

On suppose : $\begin{cases} \bullet\ F(A) = 0 \\ \bullet\ F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } V \\ \bullet\ F'_z(A) \neq 0. \end{cases}$

Alors il existe des intervalles ouverts v_1, v_2 de $\mathbb{R}$ centrés respectivement en a,b et un intervalle ouvert w de $\mathbb{R}$ centré en c tels que :

$$\begin{cases} \bullet\ v_1 \times v_2 \times w \subset V \\ \bullet\ \text{il existe une application unique } \varphi : v_1 \times v_2 \longrightarrow w \text{ telle que :} \\ \qquad \forall (x,y) \in v_1 \times v_2, \quad F\big(x,y,\varphi(x,y)\big) = 0 \\ \bullet\ \varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } v_1 \times v_2. \end{cases}$$

De plus, si F est de classe C^k $(k \geqslant 1)$ sur V, alors φ est de classe C^k sur $v_1 \times v_2$.

Remarques :

1) L'intersection de deux surfaces est « en général » une courbe. Par exemple, l'intersection d'une sphère de centre O et de rayon R (> 0) et d'un plan (situé à une distance $< R$ de O) est un cercle.

Un SEC d'une courbe Γ revient à la donnée de deux surfaces dont l'intersection est Γ.

2) Toute courbe peut être considérée (d'une infinité de façons) comme intersection de deux surfaces. Par exemple, la courbe Γ de RP $(x = t^3, y = t^4, z = t^5, t \in \mathbb{R})$ est l'intersection des deux surfaces d'EC : $y^3 = x^4, y^5 = z^4$.

Exercices 6.3.1 à 6.3.9.

Exercice-type résolu

Exemple de détermination d'une équation cartésienne de surface définie géométriquement

On munit $\mathcal{E}_3$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $m \in \mathbb{R} - \{-1,0,1\}$, $h \in \mathbb{R}^*$, D, D' les droites :

$$D \begin{cases} y = mx \\ z = h \end{cases} \qquad D' \begin{cases} y = -mx \\ z = -h. \end{cases}$$

Former une équation cartésienne de la surface S réunion des droites d'intersection de deux plans P, P' contenant respectivement D, D' et orthogonaux entre eux.

Solution

Soit $M(x,y,z) \in \mathcal{E}_3$.

Le point M est sur S si et seulement s'il existe deux plans P, P' tels que :

$$M \in P \cap P', \qquad D \subset P, \qquad D' \subset P', \qquad P \perp P'.$$

Formons l'équation générale d'un plan P contenant D.

Soit $P \mid ax + by + cz + d = 0$ un plan quelconque de $\mathcal{E}_3$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. On a :

$$\begin{aligned} D \subset P &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ ax + bmx + ch + d = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (a + bm)x + (ch + d) = 0 \\ &\iff \begin{cases} a + bm = 0 \\ ch + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -bm \\ d = -ch. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation générale d'un plan P contenant D est :

$$P \mid -bmx + by + cz - ch = 0, \quad (b,c) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

De même, l'équation générale d'un plan P' contenant D' est :

$$P' \mid b'mx + b'y + c'z + c'h = 0, \quad (b',c') \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

Ensuite :

$$P \perp P' \iff \begin{pmatrix} -bm \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b'm \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = 0 \iff -bb'm^2 + bb' + cc' = 0.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & M(x,y,z) \in S \\ \iff & \exists\,(b,b'),(c,c') \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, \begin{cases} -bmx + by + cz - ch = 0 \\ b'mx + b'y + c'z + c'h = 0 \\ (1 - m^2)bb' + cc' = 0 \end{cases} \\ \iff & \exists\,(b,b'),(c,c') \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, \begin{cases} (y - mx)b + (z - h)c = 0 & (1) \\ (y + mx)b' + (z + h)c' = 0 & (2) \\ (1 - m^2)bb' + cc' = 0 & (3). \end{cases} \end{aligned}$$

Si $z - h \neq 0$ et $z + h \neq 0$, on exprime c et c' des équations (1) et (2), on reporte dans (3), et on simplifie par bb' car, si, par exemple, $b = 0$, alors, d'après (1), $c = 0$, exclu.

On, obtient l'équation :

$$(1 - m^2) + \left(-\frac{y - mx}{z - h}\right)\left(-\frac{y + mx}{z + h}\right) = 0.$$

Si $z - h = 0$ et $b = 0$, alors $c \neq 0$, donc, d'après (3), $c' = 0$, puis $b' \neq 0$, donc, d'après (2), $y + mx = 0$.

Conseils

Partir des coordonnées (x,y,z) d'un point M de l'espace et traduire $M \in S$.

Ici, (x,y,z) désignent les coordonnées d'un point quelconque de $\mathcal{E}_3$.

On remplace (m,h) par $(-m,-h)$ dans le résultat précédent.

Deux plans sont orthogonaux si et seulement si un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre.

Pour obtenir une équation cartésienne de S, on va éliminer b, b', c, c'.

Solution

Si $z-h=0$ et $b \neq 0$, alors $y-mx=0$, $z+h \neq 0$, on exprime c' de (2) et on reporte dans (3).

Finalement, une équation cartésienne de S est :

$$S \mid (1-m^2)(z-h)(z+h)+(y-mx)(y+mx)=0$$

ou encore :

$$S \mid -m^2x^2+y^2+(1-m^2)z^2=(1-m^2)h^2.$$

Comme $m^2 \neq 1$, on peut écrire cette équation sous la forme :

$$S \mid -\frac{x^2}{\dfrac{h^2}{m^2(1-m^2)}}+\frac{y^2}{\dfrac{h^2}{1-m^2}}+\frac{z^2}{h^2}=1.$$

Conseils

On verra plus loin, cf. § 6.3.3 3), que, d'après son équation, S est un hyperboloïde.

6.3.2 Plan tangent en un point

1) Plan tangent en un point d'une surface définie par une représentation paramétrique

Définition 1

Soient $\phi : \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathcal{E}_3 \\ (u,v) & \longmapsto & M(u,v)=\phi(u,v) \end{array}$ une nappe paramétrée de classe C^1, $S=\phi(U)$, $M(u,v)$ un point de S.

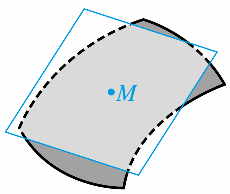
On dit que $M(u,v)$ est un point **régulier** de ϕ (ou : de S) si et seulement si la famille $\left(\dfrac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial u}(u,v),\ \dfrac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial v}(u,v)\right)$ est libre.

On dit que ϕ est une nappe paramétrée **régulière** (ou que S est une surface **régulière**) si et seulement si, pour tout (u,v) de U, $M(u,v)$ est un point régulier de S.

Remarque : En définissant une notion de changement de paramétrage admissible (utilisant la notion de C^k-difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$), on peut montrer que la notion de point régulier est invariante par changement de paramétrage admissible, ce qui justifie la définition de point régulier de S, au lieu de ϕ.

Définition 2

Soient $\phi : \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathcal{E}_3 \\ (u,v) & \longmapsto & M(u,v)=\phi(u,v) \end{array}$ une nappe paramétrée de classe C^1, $S=\phi(U)$, $M(u,v)$ un point régulier de S. On appelle **plan tangent en $M(u,v)$ à S** le plan passant par $M(u,v)$ et dirigé par $\left(\dfrac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial u}(u,v), \dfrac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial v}(u,v)\right)$.



Remarque : On peut montrer que le plan tangent en un point régulier de S est inchangé lors d'un changement de paramétrage admissible.

Exemple :

Montrer que le point A de paramètres $(u=1, v=1)$ de la surface S de RP $\left\{\begin{array}{l} x = u + v^2 \\ y = u^2 + v \\ z = uv \end{array}\right.$ **est un point régulier de S, et former une EC du plan tangent Π en A à S.**

Méthode pratique pour déterminer le plan tangent en un point régulier d'une surface donnée par une RP.

L'application $\phi : \begin{array}[t]{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{E}_2 \\ (u,v) & \longmapsto & (u+v^2, u^2+v, uv) \end{array}$ est de classe C^1, et, pour tout (u,v) de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial \overrightarrow{\phi}}{\partial u}(u,v) = (1,2u,v), \qquad \frac{\partial \overrightarrow{\phi}}{\partial v}(u,v) = (2v,1,u).$$

Les vecteurs $(1,2,1)$ et $(2,1,1)$ ne sont pas colinéaires.

En particulier : $\dfrac{\partial \overrightarrow{\phi}}{\partial u}(1,1) = (1,2,1)$, $\dfrac{\partial \overrightarrow{\phi}}{\partial v}(1,1) = (2,1,1)$, $\left(\dfrac{\partial \overrightarrow{\phi}}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial \overrightarrow{\phi}}{\partial v}(u,v)\right)$ est libre, et donc A est un point régulier de S.

Une EC de Π est :

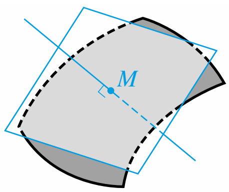
$$M(X,Y,Z) \in \Pi \iff \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 2 \\ Y-2 & 2 & 1 \\ Z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff X + Y - 3Z - 1 = 0.$$

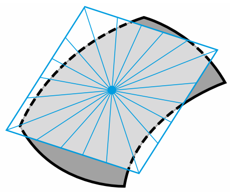
Définition 3

Avec les notations et hypothèses de la Proposition précédente, on appelle :

- **(droite) normale en M à S**, la droite orthogonale en M au plan tangent en M à S
- **(droite) tangente en M à S**, toute droite passant par M et incluse dans le plan tangent en M à S.

Ainsi, S admet en M :
• une normale et une seule
• une infinité de tangentes (dont la réunion est le plan tangent en M à S).





2) Plan tangent en un point d'une surface définie par une équation cartésienne

Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur V, S la surface d'EC $F(x,y,z) = 0$, $A(a,b,c) \in S$.

Supposons d'abord : $\quad F'_z(A) \neq 0$.

D'après le théorème des fonctions implicites (cf. 6.3.1 p. 236), il existe deux intervalles ouverts v_1, v_2 de $\mathbb{R}$ centrés en a, b respectivement, et un intervalle ouvert w de $\mathbb{R}$ centré en c tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ v_1 \times v_2 \times w \subset V \\ \bullet \text{ il existe une application unique } \varphi : v_1 \times v_2 \longrightarrow w \text{ telle que :} \\ \qquad \forall (x,y) \in v_1 \times v_2, \quad F\big(x,y,\varphi(x,y)\big) = 0 \\ \bullet\ \varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } v_1 \times v_2. \end{array}\right.$$

Le théorème des fonctions implicites permet de passer d'une EC de S à une RP de S, de paramètre x, y.

La surface S admet donc, au voisinage de A, la RP $\begin{array}{rccl}\phi: & v_1 \times v_2 & \longrightarrow & \mathcal{E}_3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x,y,\varphi(x,y))\end{array}$.

Comme : $\phi'_x(x,y) = (1,0,\varphi'_x(x,y))$ et $\phi'_y(x,y) = (0,1,\varphi'_y(x,y))$, il est clair que $(\phi'_x(a,b),\phi'_y(a,b))$ est libre, et donc S admet en A un plan tangent Π, et Π a pour EC :

$$P(X,Y,Z) \in \Pi \iff \begin{vmatrix} X-a & 1 & 0 \\ Y-b & 0 & 1 \\ Z-c & \varphi'_x(a,b) & \varphi'_y(a,b) \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -\varphi'_x(a,b)(X-a) - \varphi'_y(a,b)(Y-b) + (Z-c) = 0.$$

Comme : $\forall (x,y) \in v_1 \times v_2, \quad F(x,y,\varphi(x,y)) = 0,$

on obtient, en dérivant par rapport à x et par rapport à y :

$$\forall (x,y) \in v_1 \times v_2, \quad \begin{cases} F'_x(x,y,\varphi(x,y)) + F'_z(x,y,\varphi(x,y))\varphi'_x(x,y) = 0 \\ F'_y(x,y,\varphi(x,y)) + F'_z(x,y,\varphi(x,y))\varphi'_y(x,y) = 0 \end{cases}.$$

Puisque $F'_z(A) \neq 0$ et que $(x,y) \longmapsto F'_z(x,y,\varphi(x,y))$ est continue en A, on a, au voisinage de (a,b) : $\quad F'_z(x,y,\varphi(x,y)) \neq 0.$

Quitte à modifier v_1 et v_2, on peut donc supposer :

$$\forall (x,y) \in v_1 \times v_2, \quad F'_z(x,y,\varphi(x,y)) \neq 0.$$

On obtient :

Obtention des dérivées partielles de φ en fonction des dérivées partielles de F.

$$\forall (x,y) \in v_1 \times v_2, \quad \varphi'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,\varphi'(x,y))}{F'_z(x,y,\varphi(x,y))} \quad \text{et} \quad \varphi'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,\varphi(x,y))}{F'_z(x,y,\varphi(x,y))}.$$

En particulier : $\quad \varphi'_x(a,b) = -\dfrac{F'_x(A)}{F'_z(A)}$ et $\varphi'_y(a,b) = -\dfrac{F'_y(A)}{F'_z(A)}$, et donc, en reprenant l'EC de Π obtenue plus haut :

$$P(X,Y,Z) \in \Pi \iff F'_x(A)(X-a) + F'_y(A)(Y-b) + F'_z(Z-c) = 0.$$

En permutant les rôles des variables, ce dernier résultat est encore valable dès que $F'_x(A) \neq 0$ ou $F'_y(A) \neq 0$.

Rappelons qu'on appelle *gradient* de F l'application $\begin{array}{rccl}\overrightarrow{\text{grad}}F: & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & M & \longmapsto & (F'_x(M),F'_y(M),F'_z(M))\end{array}$, et résumons l'étude.

Théorème 1 **Détermination du plan tangent en un point d'une surface définie par une équation cartésienne**

Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $F: V \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur V, S la surface d'EC $F(x,y,z) = 0$, $A(a,b,c) \in S$.

Si $\overrightarrow{\text{grad}}F(A) \neq \overrightarrow{0}$, alors A est un point régulier de S, le plan tangent en A à S est normal à $\overrightarrow{\text{grad}}F(A)$ et admet pour EC :

EC du plan tangent en un point d'une surface elle-même donnée par une EC.

$$(X-a)F'_x(A) + (Y-b)F'_y(A) + (Z-c)F'_z(A) = 0.$$

Exemple :

Former une EC du plan tangent en $A(1,1,-1)$ à la surface S d'EC :

$$x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 - 1 = 0.$$

Méthode pratique pour déterminer le plan tangent en un point régulier d'une surface donnée par une EC.

Notons $\begin{array}{rccl}F: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x^2y^3+y^2z^3+z^2x^3-1\end{array}$. Il est clair que $F(1,1,-1) = 0$, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$:

$$F'_x(x,y,z) = 2xy^3 + 3z^2x^2, \quad F'_y(x,y,z) = 3x^2y^2 + 2yz^3, \quad F'_z(x,y,z) = 3y^2z^2 + 2zx^3,$$

$\overrightarrow{\text{grad}}\,F(A) = (5,1,1)$.

d'où : $F'_x(A) = 5, \quad F'_y(A) = 1, \quad F'_z(A) = 1,$

et donc : $\overrightarrow{\text{grad}}\,F(A) \neq \vec{0}$.

Ainsi, S admet en A un plan tangent Π, et une EC de Π est :

$$5(X-1) + (Y-1) + (Z+1) = 0,$$

ou encore : $5X + Y + Z - 5 = 0$.

3) Position d'une surface par rapport à un plan tangent

Considérons une surface S d'EC $z = \varphi(x,y)$, où $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Nous avons vu en *2)* que le théorème des fonctions implicites permet, sous certaines hypothèses, de se ramener à ce cas.

Soient $(a,b) \in U$, $c = \varphi(a,b)$, $A(a,b,c)$, Π le plan tangent en A à S ; Π est dirigé par $\vec{i} + p\vec{k}$ et $\vec{j} + q\vec{k}$, où on a noté $p = \varphi'_x(a,b)$, $q = \varphi'_y(a,b)$ (**notations de Monge**).

Nous allons étudier la position de S par rapport à Π au voisinage de A.

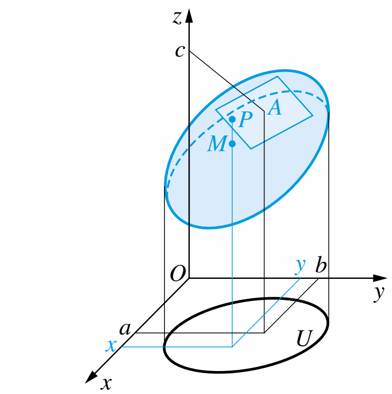
Les points M et P ont la même abscisse x et ont la même ordonnée y.

À cet effet, pour $(x,y) \in U$, notons $h = x - a$, $k = y - b$, et considérons le point $M(x,y,z_M)$ de S et le point $P(x,y,z_P)$ de Π.

On a donc : $z_M = \varphi(x,y) = \varphi(a+h,b+k)$,

et, d'autre part : $\begin{vmatrix} h & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \\ z_P - c & p & q \end{vmatrix} = 0,$

d'où : $z_P = c + ph + qk$.



$\overrightarrow{PM} = (z_M - z_P)\vec{k}$.

La position relative de S et Π est donnée par le signe de $z_M - z_P$.

Supposons que φ soit de classe C^2 sur U, et notons (**notations de Monge**) :

$$r = \varphi''_{x^2}(a,b), \quad s = \varphi''_{xy}(a,b), \quad t = \varphi''_{y^2}(a,b).$$

On sait (cf. Analyse PC-PSI-PT, 8.3.3 1)) que φ admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de (a,b), de la forme :

$$\varphi(a+h,b+k) = \varphi(a,b) + ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}(h^2+k^2).$$

On déduit : $z_M - z_P = \dfrac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + o(h^2+k^2)$.

Comme dans l'étude des extremums des fonctions de deux variables réelles, Analyse PC-PSI-PT, 8.3.3 2) *b)*, on conclut :

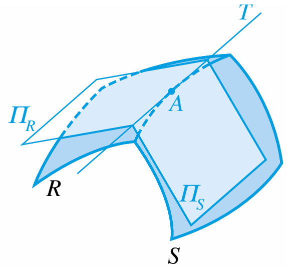
- si $\begin{cases} s^2 - rt < 0 \\ r > 0 \end{cases}$, alors S est située, au voisinage de A, au-dessus du plan tangent Π à S en A
- si $\begin{cases} s^2 - rt < 0 \\ r < 0 \end{cases}$, alors S est située, au voisinage de A, au-dessous du plan tangent Π à S en A
- si $s^2 - rt > 0$, alors S traverse son plan tangent Π en A.

4) Intersection de deux surfaces

Soit Γ une courbe de l'espace, définie comme intersection de deux surfaces R, S. Supposons que R et S admettent des EC :

$$R : F(x,y,z) = 0, \qquad S : G(x,y,z) = 0,$$

où $F,G : V \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des applications de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{R}^3$.
Soit $A(a,b,c) \in \Gamma$. Supposons que la famille $\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,F(A), \overrightarrow{\text{grad}}\,G(A)\right)$ soit libre. Alors, R et S admettent en A des plans tangents notés respectivement Π_R, Π_S, et on a : $\quad \Pi_R \neq \Pi_S$.



Nous allons montrer que Γ admet en A une tangente T, et que :

$$T = \Pi_R \cap \Pi_S.$$

Par hypothèse : $\quad \text{rg}\begin{pmatrix} F'_x(A) & F'_y(A) & F'_z(A) \\ G'_x(A) & G'_y(A) & G'_z(A) \end{pmatrix} = 2.$

Quitte à permuter les rôles de x,y,z, on peut donc supposer $\begin{vmatrix} F'_y(A) & F'_z(A) \\ G'_y(A) & G'_z(A) \end{vmatrix} \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites (cf. § 6.2.1 p. 228), il existe un intervalle ouvert de v de $\mathbb{R}$ centré en a et des intervalles ouverts w_1,w_2 de $\mathbb{R}$ centrés en b,c respectivement, tels que :

- $v_1 \times v_2 \times w \subset V$
- il existe un couple unique d'applications $\varphi : v \longrightarrow w_1$, $\psi : v \longrightarrow w_2$ tel que :
$$\forall x \in v, \quad \begin{cases} F(x,\varphi(x),\psi(x)) = 0 \\ G(x,\varphi(x),\psi(x)) = 0 \end{cases}$$
- φ,ψ sont de classe C^1 sur v.

La courbe Γ admet une RP dont le paramètre est x.

Autrement dit, Γ admet, au voisinage de A, la RP :

$$x = x, \qquad y = \varphi(x), \qquad z = \psi(x).$$

Un vecteur tangent $\overrightarrow{V}$ en A à Γ a donc pour coordonnées $(1,\varphi'(a),\psi'(a))$, et est non nul.
Enfin :

$$\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}F(A) = F'_x(A)+\varphi'(a)F'_y(A)+\psi'(a)F'_z(A) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,\varphi(x),\psi(x))\right)(a) = 0,$$

donc $\overrightarrow{V} \in \overrightarrow{\Pi_R}$, et de même $\overrightarrow{V} \in \overrightarrow{\Pi_S}$.
Résumons l'étude.

La tangente en A à une courbe Γ intersection de deux surfaces R, S est la droite intersection des deux plans tangents en A à R et à S.

Théorème 2

Soient R,S deux surfaces, $\Gamma = R \cap S$, $A \in \Gamma$.

On suppose que A est un point régulier de R et de S, et que les plans tangents Π_R, Π_S en A à R,S sont distincts. Alors A est un point régulier de Γ et la tangente en A à Γ est $\Pi_R \cap \Pi_S$.

Exemple :

Déterminer un vecteur tangent en $A(-2,-1,3)$ à la courbe Γ : $\begin{cases} x^3+y^3+z^3 = 18 \\ xy+yz+zx = -7 \end{cases}$.

Remarquer d'abord : $\quad A \in \Gamma$.
Avec les notations de l'étude précédente :

- $F(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-18$, $\overrightarrow{\text{grad}}F(x,y,z) = (3x^2,\ 3y^2,\ 3z^2)$, $\overrightarrow{\text{grad}}F(A) = (12,3,27)$
- $G(x,y,z) = xy+yz+zx+7$, $\overrightarrow{\text{grad}}G(x,y,z) = (y+z,\ z+x,\ x+y)$,
$\overrightarrow{\text{grad}}G(A) = (2,1,-3)$
- $\overrightarrow{\text{grad}}F(A) \wedge \overrightarrow{\text{grad}}G(A) = (-36,90,6) \neq \overrightarrow{0}$.

D'après le théorème précédent, Γ admet une tangente en A, et celle-ci est dirigée par $\overrightarrow{\text{grad}}\,F(A) \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\,G(A)$, donc par : $\quad -6\,\overrightarrow{i} + 15\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Exercices 6.3.10 à 6.3.16.

Exercice-type résolu

Étude de plan tangent

On munit $\mathcal{E}_3$ d'un repère $\mathcal{R} = (O\,;\, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soient $a \in \mathbb{R}^*$, S_1, S_2 les surfaces d'équations :

$$S_1 \mid x^2 + y^2 - z^2 = a^2, \qquad S_2 \mid (x-2a)^2 - y^2 + z^2 = a^2.$$

Déterminer $S_1 \cap S_2$ et montrer qu'en tout point de $S_1 \cap S_2$, les surfaces S_1 et S_2 sont tangentes (c'est-à-dire : ont le même plan tangent).

Solution

1) **Détermination de $S_1 \cap S_2$**

Soit $M(x,y,z) \in \mathcal{E}_3$. On a :

$$M \in S_1 \cap S_2 \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = a^2 \\ (x-2a)^2 - y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = a^2 \\ x^2 + (x-2a)^2 = 2a^2. \end{cases}$$

$L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$.

Et :

$$x^2 + (x-2a)^2 = 2a^2 \iff 2x^2 - 4ax + 2a^2 = 0$$

$$\iff 2(x-a)^2 = 0 \iff x = a.$$

Donc :

$$M \in S_1 \cap S_2 \iff \begin{cases} x = a \\ y^2 - z^2 = 0 \end{cases} \iff \left(\begin{cases} x = a \\ y = z \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = a \\ y = -z \end{cases} \right).$$

Ainsi, $S_1 \cap S_2$ est la réunion de deux droites.

2) **Étude des plans tangents en un point de $S_1 \cap S_2$**

Soit $M \in S_1 \cap S_2$. Il existe alors $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que : $M(a, t, \varepsilon t)$.

• En notant $F : (x,y,z) \longmapsto x^2 + y^2 - z^2 - a^2$, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(x,y,z) = (2x, 2y, -2z), \text{ donc } \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(a, t, \varepsilon t) = (2a, 2t, -2\varepsilon t).$$

On en déduit une équation cartésienne du plan tangent P_1 en M à S_1 :

$$2a(x-a) + 2t(y-t) - 2\varepsilon t(z - \varepsilon t) = 0,$$

Cf. § 6.3.2 2), Théorème.

ou encore : $ax + ty - \varepsilon tz = a^2$.

• De même, une équation cartésienne du plan tangent P_2 en M à S_2 est :

$$2(a-2a)(x-a) - 2t(y-t) + 2\varepsilon t(z - \varepsilon t) = 0,$$

On pouvait aussi remarquer que les deux vecteurs gradients sont colinéaires, donc les plans tangents sont confondus.

ou encore : $-ax - ty + \varepsilon tz + a^2 = 0$.

On constate, d'après leurs équations : $P_1 = P_2$.

Conseils

6.3.3 Surfaces usuelles

1) Cylindres

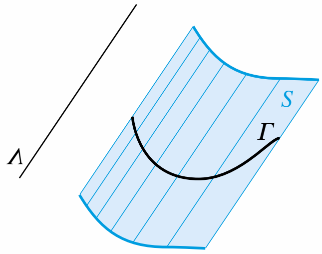
Se donner une direction de droites Λ revient à se donner un vecteur (non nul) dirigeant Λ.

Définition

Soient Λ une direction de droites et Γ une courbe.
On appelle **cylindre** (ou : **surface cylindrique**) **de directrice Γ et de direction des génératrices Λ** la réunion S des droites de $\mathcal{E}_3$ de direction Λ et rencontrant Γ.

Pour tout point M du cylindre S, on appelle **génératrice** de M (sur S) la droite passant par M et de direction Λ.

On appelle **section droite** du cylindre S l'intersection de S avec un plan orthogonal à Λ.

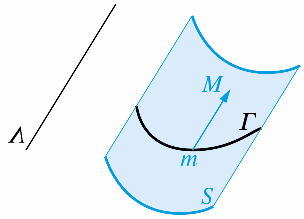


Sauf cas particuliers que le lecteur décèlera facilement, un point d'un cylindre admet une génératrice et une seule, et le cylindre admet une infinité de directrices.

Rappelons que Γ admet la RP $t \longmapsto m(t)$ et que $\overrightarrow{u}$ dirige Λ.

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur dirigeant Λ et $m : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ t \longmapsto m(t) \end{array}$ une RP de Γ.
Alors, une RP du cylindre S de directrice Γ et de direction des génératrices Λ est :

$$\begin{array}{l} I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ (t,\lambda) \longmapsto m(t) + \lambda \overrightarrow{u} \end{array}.$$



Exemple :

Une RP du cylindre de directrice $\Gamma\,(x = t, y = t^2, z = t^3, t \in \mathbb{R})$ et à génératrices parallèles à $\overrightarrow{u}\,(2,1,-3)$ est : $\begin{cases} x = t + 2\lambda \\ y = t^2 + \lambda \\ z = t^3 - 3\lambda \end{cases}, (t,\lambda) \in \mathbb{R}^2.$

Soit S un cylindre, de directrice Γ, de direction des génératrices Λ. Considérons un repère $\mathcal{R}' = (O; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ tel que $\overrightarrow{K}$ dirige Λ. Le cylindre S admet, dans $\mathcal{R}'$, une EC de la forme : $f(X,Y) = 0$. Dans le repère initial $\mathcal{R}$, S admet donc une EC de la forme $f(P,Q) = 0$, où P, Q sont des « (premiers membres d'EC de) plans ». D'où la règle pratique :

Comment reconnaître un cylindre sur son EC.

On reconnaît qu'une surface S est un cylindre lorsqu'elle admet une EC de la forme $f(P,Q) = 0$, où P, Q sont des plans sécants. De plus, dans ces conditions, les génératrices de S sont parallèles à la droite d'EC $\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$.

Exemple :

La surface S d'EC : $e^{x^2+y^2+z^2} - (x+z)e^{-2xz} = 0$ est un cylindre puisque, en notant $P = x + z$ et $Q = y$, S admet pour EC : $e^{P^2+Q^2} - P = 0$.

Les génératrices de S sont parallèles à $\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$.

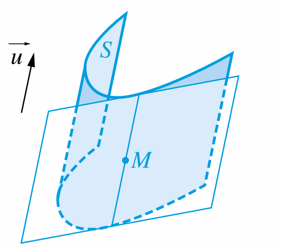
Proposition

Le plan tangent en un point régulier d'un cylindre contient la génératrice de ce point.

Preuve :

Le cylindre S admet une RP $\phi\ :\ \begin{array}{l} I\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{E}_3 \\ (t,\lambda)\longmapsto m(t)+\lambda\overrightarrow{u}\end{array}$, où $m\ :\ I\longrightarrow\mathbb{R}$ est une RP de Γ, de classe C^1, et $\overrightarrow{u}$ dirige les génératrices.

Comme $\dfrac{\partial\overrightarrow{\phi}}{\partial\lambda}(t,\lambda)=\overrightarrow{u}$, le plan tangent en $M(t,\lambda)$ à S contient la droite passant par M et dirigée par $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire la génératrice de M.



Remarque :
Soit S un cylindre, de directrice Γ, de direction des génératrices Λ. Supposons que Γ soit plane et régulière, et que Λ ne soit pas parallèle au plan P de Γ.

En notant $m\ :\ I\longrightarrow\mathcal{E}_3$ une RP de Γ, une RP de S est : $\phi : \begin{array}{l} I\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{E}_3 \\ (t,\lambda)\longmapsto m(t)+\lambda\overrightarrow{u}\end{array}$.

Alors ϕ est de classe C^1, et, pour tout (t,λ) de $I\times\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial\overrightarrow{\phi}}{\partial t}(t,\lambda)=\overrightarrow{m'(t)},\qquad \frac{\partial\overrightarrow{\phi}}{\partial\lambda}(t,\lambda)=\overrightarrow{u}.$$

Par hypothèse : $\overrightarrow{m'(t)}\neq\overrightarrow{0}\,,\quad \overrightarrow{m'(t)}\in\overrightarrow{P}\,,\quad \overrightarrow{u}\notin\overrightarrow{P}\,.$

Il en résulte que $\left(\dfrac{\partial\overrightarrow{\phi}}{\partial t}(t,\lambda),\dfrac{\partial\overrightarrow{\phi}}{\partial\lambda}(t,\lambda)\right)$ est libre, et ainsi, tout point de S est régulier.

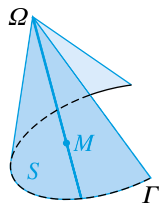
De plus, le plan tangent en M à S est le plan passant par M et contenant la génératrice de M et la tangente en m à Γ.

2) Cônes

Définition

Soient Ω un point de $\mathcal{E}_3$, Γ une courbe. On appelle **cône S de sommet Ω et de directrice Γ** la réunion des droites passant par Ω et rencontrant Γ.

Pour tout point M du cône S, sauf Ω, on appelle **génératrice** de M (sur S) la droite (ΩM).



Remarques :
1) On impose souvent la condition $\Omega\notin\Gamma$, ou, si Γ est plane dans un plan P, $\Omega\notin P$.

2) Le sommet Ω du cône S n'a pas de génératrice.

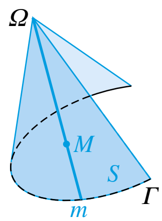
3) Sauf cas particuliers que le lecteur décèlera facilement, un cône admet un sommet et un seul, et une infinité de directrices.

Rappelons que Γ admet la RP $t\longmapsto m(t)$.

Soit $m\ :\ \begin{array}{l} I\longrightarrow\mathcal{E}_3 \\ t\longmapsto m(t)\end{array}$ une RP de Γ.

Alors, une RP du cône S de sommet Ω et de directrice Γ est :

$\phi\ :\ \begin{array}{l} I\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{E}_3 \\ (t,\lambda)\longmapsto\Omega+\lambda\overrightarrow{\Omega m(t)}\end{array}$, c'est-à-dire, en notant $M(t,\lambda)$ le point courant de S :



$$\overrightarrow{\Omega M(t,\lambda)}=\lambda\overrightarrow{\Omega m(t)}.$$

Le sommet Ω est obtenu pour $\lambda=0$ (et t quelconque).

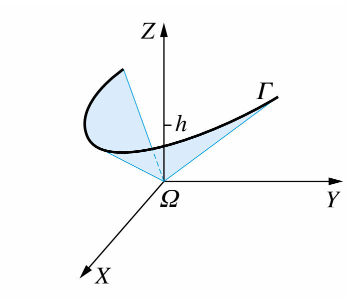
Exemple :

Le cône de sommet $\Omega(1,-1,1)$ et de directrice $\Gamma\,(x=t, y=t^2, z=t^3, t\in\mathbb{R})$ admet pour RP :

$$\begin{cases} x = 1+\lambda(t-1) \\ y = -1+\lambda(t^2+1)\,, \quad (t,\lambda)\in\mathbb{R}^2. \\ z = 1+\lambda(t^3+1) \end{cases}$$

Soit S un cône, de sommet Ω, de directrice Γ. On suppose que Γ est plane et que Ω n'est pas dans le (un) plan P de Γ. Il existe un repère (orthonormé direct) $\mathcal{R}' = (\Omega;\, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ tel que le plan P admette pour EC dans $\mathcal{R}'$:

$$Z = h \quad (h\in\mathbb{R}_+^*).$$



La courbe Γ admet un SEC :

$$\begin{cases} f(X,Y) = 0 \\ Z = h. \end{cases}$$

On a, pour tout point $M(X,Y,Z)$ de $\mathcal{E}_3$ tel que $Z\neq 0$:

$$\begin{aligned} M\in S &\iff (\exists m\in\Gamma,\ \exists\lambda\in\mathbb{R}^*,\quad \overrightarrow{\Omega M} = \lambda\overrightarrow{\Omega m}) \\ &\iff \Big(\exists(X_1,Y_1,\lambda)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\quad X=\lambda X_1,\ Y=\lambda Y_1,\ Z=\lambda h,\ f(X_1,Y_1)=0\Big) \\ &\iff f\left(\frac{hX}{Z},\frac{hY}{Z}\right) = 0. \end{aligned}$$

D'où la règle pratique :

Comment reconnaître un cône sur son EC.

On reconnaît qu'une surface est un cône lorsqu'elle admet une EC de la forme $f\left(\dfrac{P}{R},\dfrac{Q}{R}\right) = 0$, où P,Q,R sont des plans (sécants en un seul point). De plus, dans ces conditions, le sommet Ω de S est défini par : $\quad P=0,\ Q=0,\ R=0.$

Exemple :

Reconnaître la surface S d'EC : $\quad z^2 - xy - 2z + 1 = 0$.

Il est clair que cette équation peut s'écrire :

$$-xy + (z-1)^2 = 0.$$

Pour diviser par $(z-1)^2$ (par exemple), considérons la surface S' obtenue en enlevant à S les deux droites de SEC $\begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=0 \\ z=1 \end{cases}$. Ainsi, S' admet pour EC : $-\dfrac{x}{z-1}\dfrac{y}{z-1} + 1 = 0$, qui est de la forme $f\left(\dfrac{P}{R},\dfrac{Q}{R}\right) = 0$, avec :

$$P = x,\quad Q = y,\quad R = z-1,\quad f : (u,v)\longmapsto -uv+1.$$

Donc S' est un cône, de sommet $\Omega(0,0,1)$.

On obtient une directrice de S' en coupant S' par un plan ne contenant pas Ω, par exemple le plan xOy ; d'où une EC d'une directrice Γ de S' : $\begin{cases} xy = 1 \\ z = 0. \end{cases}$

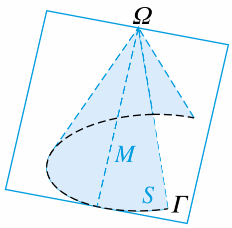
Proposition

Le plan tangent en un point régulier d'un cône contient la génératrice de ce point.

Preuve

Le cône S admet une RP $\begin{array}{rl}\phi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ (t,\lambda) \longmapsto \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega m(t)}\end{array}$ où $m : I \longrightarrow \mathcal{E}_3$ est une RP de Γ, de classe C^1, et Ω le sommet de S.

Comme $\dfrac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial \lambda}(t,\lambda) = \overrightarrow{\Omega m(t)}$ et que $\overrightarrow{\Omega m(t)}$ dirige la génératrice de M (on supposera $\Omega \notin \Gamma$), le plan tangent en M à S contient la génératrice de M.



Remarques :

1) Soit S un cône, de sommet Ω, de directrice Γ.

Supposons que Γ soit plane et régulière et que Ω ne soit pas dans le plan P de Γ.

En notant $m : I \longrightarrow \mathcal{E}_3$ une RP de Γ, une RP de S est :

$$\begin{array}{rl}\phi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ (t,\lambda) \longmapsto \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega m(t)}\end{array}.$$

Alors, ϕ est de classe C^1 et, pour tout (t,λ) de $I \times \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial t}(t,\lambda) = \lambda \overrightarrow{m'(t)}, \qquad \frac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial \lambda}(t,\lambda) = \overrightarrow{\Omega m(t)}.$$

Par hypothèse : $\lambda \neq 0$, $\overrightarrow{m'(t)} \neq 0$, $\overrightarrow{m'(t)} \in \overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{\Omega m(t)} \notin \overrightarrow{P}$.

Il en résulte que $\left(\dfrac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial t}(t,\lambda), \dfrac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial \lambda}(t,\lambda)\right)$ est libre, et ainsi, tout point de S, sauf Ω, est régulier.

De plus, le plan tangent en M $(\neq \Omega)$ à S est le plan passant par M et contenant la génératrice de M et la tangente en m à Γ.

2) Le sommet Ω du cône S est un point non régulier de S.

En pratique, le sommet d'un cône est souvent le seul point non régulier de S. Ceci permet, sur des exemples, de trouver l'éventuel sommet d'un éventuel cône à partir d'une équation cartésienne.

Exemple :

Montrer que S : $x^2 + xy - xz + y^2 + z^2 + x + 3y - z + 3 = 0$ est un cône, et trouver son sommet Ω.

En notant $F(x,y,z)$ le premier membre de l'équation donnée, on cherche un point $\Omega(x,y,z)$ de S non régulier, donc (cf. 6.3.2 2) Th. p. 240) en lequel $\overrightarrow{\mathrm{grad}} F$ s'annule :

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z) = 0 \\ F'_y(x,y,z) = 0 \\ F'_z(x,y,z) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \\ -x + 2z - 1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}.$$

On vérifie que le point $\Omega(1,-2,1)$ est sur S.

Prenons comme nouveau repère $\mathcal{R}' = (\Omega;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les formules de changement de repère sont : $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 2 \\ z = Z + 1 \end{cases}$, et, en reportant, on déduit une EC de S dans $\mathcal{R}'$:

$$(X+1)^2 + (X+1)(Y-2) - (X+1)(Z+1) + (Y-2)^2$$
$$+ (Z+1)^2 + (X+1) + 3(Y-2) - (Z+1) + 3 = 0,$$

c'est-à-dire : $X^2 + XY - XZ + Y^2 + Z^2 = 0$.

Sur cette dernière équation, on voit que, si un point $m(X,Y,Z)$, distinct de Ω, est sur S, alors la droite (Ωm) est incluse dans S.

Finalement, S est un cône, de sommet $\Omega(1,-2,1)$.

3) Surfaces de révolution

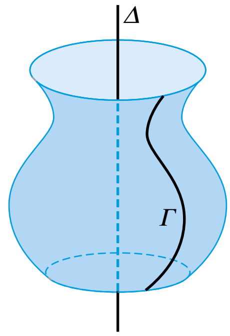
Définition

On appelle **surface de révolution** la surface S obtenue en faisant tourner une courbe Γ autour d'une droite Δ.

On dit que Δ est l'**axe** de S.

On appelle **méridienne** (ou : **demi-méridienne**) de S l'intersection de S avec un demi-plan limité par Δ.

On appelle **parallèles** de S les cercles d'axe Δ et rencontrant Γ.



Remarque :

1) Le lecteur montrera que, « sauf exceptions », une surface de révolution a un axe unique.

2) Avec les notations de la Définition, S est la réunion de ses parallèles.

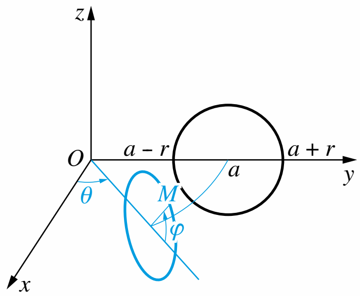
Exemple :

Former une représentation paramétrique et une équation cartésienne du tore, qui est la surface S obtenue en faisant tourner un cercle autour d'une droite du plan de ce cercle.

Dans $\mathcal{R}$, considérons le cercle Γ d'équations

$$\begin{cases} x = 0 \\ (y-a)^2 + z^2 = r^2, \end{cases}$$

pour $(a,r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ fixé, et faisons tourner Γ autour de $z'z$.



On obtient une RP du tore S :

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos\theta + r\cos\theta\cos\alpha \\ y = a\sin\theta + r\sin\theta\cos\alpha \\ z = r\sin\alpha \end{array}\right|, \quad (\theta,\alpha) \in [-\pi\,;\pi]^2 \quad (\text{ou } \mathbb{R}^2).$$

À partir de cette RP, on peut obtenir une EC de S en éliminant (θ,α) :

$$\left(\exists(\theta,\alpha) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = (a + r\cos\alpha)\cos\theta \\ y = (a + r\cos\alpha)\sin\theta \\ z = r\sin\alpha \end{cases}\right) \iff \left(\exists\alpha \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x^2 + y^2 = (a + r\cos\alpha)^2 \\ z = r\sin\alpha \end{cases}\right)$$

$$\iff \left(\exists\alpha \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 - (r^2 - z^2) = 2ar\cos\alpha \\ z = r\sin\alpha \end{cases}\right)$$

$$\iff \Big((x^2+y^2+z^2) - (a^2+r^2)\Big)^2 + 4a^2z^2 = 4a^2r^2$$

$$\iff (x^2+y^2+z^2)^2 - 2(a^2+r^2)(x^2+y^2) + 2(a^2-r^2)z^2 + (a^2-r^2)^2 = 0.$$

Le tore est donc une *surface du quatrième degré*.

Soient Δ une droite, Γ une courbe, S la surface de révolution obtenue en faisant tourner Γ autour de Δ, P un plan orthogonal à Δ, ω un point de Δ, Σ une sphère de centre ω.
Un cercle d'axe Δ, étant intersection d'un plan parallèle à P et d'une sphère de centre ω, admet un SEC $\left\{\begin{array}{l} P = \lambda \\ \Sigma = \mu \end{array}\right|$, où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Ce cercle rencontre Γ si et seulement si (λ,μ) satisfait une

Comment reconnaître une surface de révolution sur son EC.

relation du genre $f(\lambda,\mu)=0$. On en déduit que S admet une équation de la forme $f(P,\Sigma)=0$, où P et Σ sont (les premiers membres des équations d') un plan et (d') une sphère.
D'où la règle pratique :

On reconnaît qu'une surface S est de révolution lorqu'elle admet une EC de la forme $f(P,\Sigma)=0$, où P est un plan et Σ une sphère. De plus, dans ces conditions, l'axe de S est la droite passant par le centre de Σ et orthogonale à P.

Exemple :

La surface S d'EC $xy+yz+zx+x+y+z+1=0$ est de révolution puisque, en notant $P=x+y+z$ et $\Sigma=x^2+y^2+z^2$, S admet pour équation :

$$P^2-\Sigma+2P+2=0.$$

L'axe de S est la droite passant par O et dirigée par $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$.

Exercice-type résolu

Représentations paramétriques et équations cartésiennes de cylindres, cônes, surfaces de révolution

a) 1) Former une équation cartésienne du cylindre S de directrice $\Gamma \begin{cases} x^3+y^3-3xy-1=0 \\ z=0 \end{cases}$ et à génératrices parallèles au vecteur $\overrightarrow{u}(2,3,1)$.

2) Reconnaître la surface S d'équation cartésienne : $\ln\left(1+(y-z)^2\right)+2x+y+z=0$.

b) 1) Former une représentation paramétrique du cône S de sommet $\Omega(1,\ 1,\ 1)$ et de directrice $\Gamma \begin{cases} (x^2+y^2)^2-x^2+y^2=0 \\ z=0. \end{cases}$

2) Reconnaître la surface S d'équation cartésienne : $z=\begin{cases} x\left(\ln(x^2+y^2)-2\ln|x|\right) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0. \end{cases}$

c) 1) Former une représentation paramétrique de la surface de révolution S obtenue en faisant tourner la droite $\Gamma \begin{cases} x=1 \\ z=0 \end{cases}$ autour de la droite $D \begin{cases} y=x \\ z=x. \end{cases}$

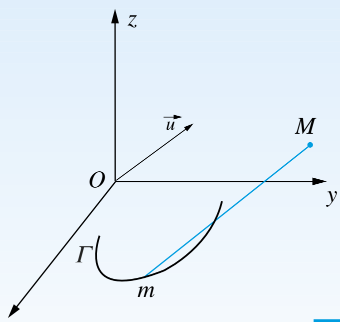
2) Reconnaître la surface S d'équation cartésienne :

$$(xy+xz+yz)(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)-1=0.$$

Solution

a) 1) Un point $M(X,Y,Z)$ est sur S si et seulement s'il existe $m(x,y,z)\in\Gamma$ tel que $\overrightarrow{mM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{u}(2,3,1)$.

Conseils



Solution

Ainsi :

$M \in S \iff \exists\,(\lambda,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$

$$\Big(X - x = 2\lambda,\ Y - y = 3\lambda,\ Z - z = \lambda,\ x^3 + y^3 + 3xy - 1 = 0,\ z = 0\Big)$$

$$\iff (X - 2Z)^3 + (Y - 3Z)^3 + 3(X - 2Z)(Y - 3Z) - 1 = 0,$$

ce qui donne une équation cartésienne de S.

Conseils : On a :

$$z = 0,\ \ \lambda = Z,$$

$$x = X - 2Z,\ \ y = Y - 3Z.$$

2) 1^re^ méthode :

En notant $P = x + y,\ Q = x + z,$ l'équation cartésienne de S donnée dans l'énoncé devient :

$$\ln\big(1 + (P - Q)^2\big) + P + Q = 0,$$

donc est du type $f(P,Q) = 0$.

Conseils : On remarque que l'on peut grouper convenablement les termes de l'équation cartésienne de S. Les deux plans choisis peuvent être aussi naturellement : $y - z = 0,\ 2x + y + z = 0.$

Il en résulte que S est un cylindre, de génératrices parallèles à la droite $D \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire parallèles au vecteur $\overrightarrow{u}\,(-1,1,1)$, et de directrice $\Gamma \begin{cases} \ln(1 + y^2) + 2x + y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$

Conseils : Cf. § 6.3.3 1) p. 244.

Conseils : Une directrice Γ de S est obtenue en coupant S par un plan non parallèle à D, par exemple le plan d'équation cartésienne $z = 0$.

2^è^ méthode :

En notant

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ \ (x,y,z) \longmapsto F(x,y,z) = \ln\big(1 + (y - z)^2\big) + 2x + y + z,$$

on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 \\ \dfrac{2(y - z)}{1 + (y - z)^2} + 1 \\ -\dfrac{2(y - z)}{1 + (y - z)^2} + 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Conseils : On recherche l'éventuelle direction des génératrices de S (si S est bien un cylindre) de manière indirecte, à l'aide de plans tangents à S.

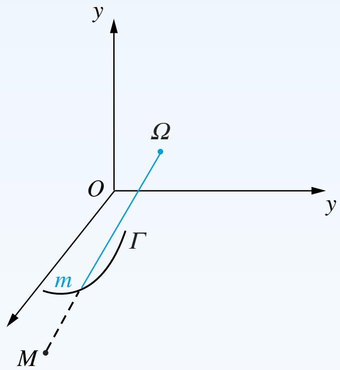
Il en résulte que le plan tangent en tout point de S est parallèle au vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire est parallèle à la droite $D \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$

Ceci justifie alors le groupement de termes de la première méthode, et on termine comme dans la première méthode.

b) 1) Un point $M(X,Y,Z)$ est sur S si et seulement s'il existe un point $m \in \Gamma$ tel que $\overrightarrow{mM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{\Omega M}$. Ainsi :

$M \in S \iff \exists\,(\lambda,x,y,z) \in \mathbb{R}^4,$

$$\begin{cases} \Big(X - 1 = \lambda(x - 1),\ Y - 1 = \lambda(y - 1),\ Z - 1 = \lambda(z - 1) \\ (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0,\ z = 0 \end{cases}$$



Solution

$$\iff \left(\left(1-\frac{X-1}{Z-1}\right)^2+\left(1-\frac{Y-1}{Z-1}\right)^2\right)^2-\left(1-\frac{X-1}{Z-1}\right)^2+\left(1-\frac{Y-1}{Z-1}\right)^2=0$$

$$\iff \left((Z-X)^2+(Z-Y)^2\right)^2+(Z-1)^2\left((Z-Y)^2-(Z-X)^2\right)=0,$$

ce qui donne une équation cartésienne de S.

2) On a $S=S'\cup E$, où $S'=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ z=x\left(\ln(x^2+y^2)-2\ln|x|\right) \text{ et } x\neq 0\right\}$ et $E=\{0\}\times\mathbb{R}\times\{0\}$.

Pour $x\neq 0$:

$$z=x\left(\ln(x^2+y^2)-2\ln|x|\right) \iff \frac{z}{x}=\ln\frac{x^2+y^2}{x^2}=\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right).$$

Une équation cartésienne de S est donc de la forme $f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$, donc S est un cône de sommet $O(0,0,0)$ et de directrice $\Gamma\ \begin{cases} x\ln(x^2+y^2)-2\ln x=1 \\ z=1. \end{cases}$

c) 1) Un point $M(X,Y,Z)$ est sur S si et seulement si le cercle C_M d'axe D et passant par M rencontre Γ.

Une équation cartésienne du plan P passant par M et orthogonal à D est :

$$(x-X)+(y-Y)+(z-Z)=0.$$

Ce plan coupe D en un point $m(x,y,z)$ défini par :

$$\begin{cases} (x-X)+(y-Y)+(z-Z)=0 \\ y=x \\ z=x \end{cases} \iff x=y=z=\frac{X+Y+Z}{3}.$$

Ce point m est sur C_M si et seulement si $d(m,D)=d(M,D)$:

$$d(m,D)=d(M,D) \iff \left(d(m,D)\right)^2=\left(d(M,D)\right)^2$$

$$\iff ||\overrightarrow{Am}\wedge\overrightarrow{u}||^2=||\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}||^2$$

$$\iff \left|\left|\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|\right|^2=\left|\left|\begin{pmatrix}X-1\\Y\\Z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|\right|^2$$

$$\iff (-z)^2+(x-1)^2=(-Z)^2+(X-1)^2$$

$$\iff \left(\frac{X+Y+Z}{3}\right)^2+\left(\frac{X+Y+Z}{3}-1\right)^2=Z^2+(X-1)^2$$

$$\iff (X+Y+Z)^2+(X+Y+Z-3)^2-9Z^2-9(X-1)^2=0$$

$$\iff 2(X+Y+Z)^2-6(X+Y+Z)+9-9Z^2-9(X^2-2X+1)=0$$

$$\iff -7X^2+2Y^2-7Z^2+4XY+4XZ+4YZ+12X-6Y-6Z=0,$$

ce qui donne une équation cartésienne de S.

Conseils

On calcule :

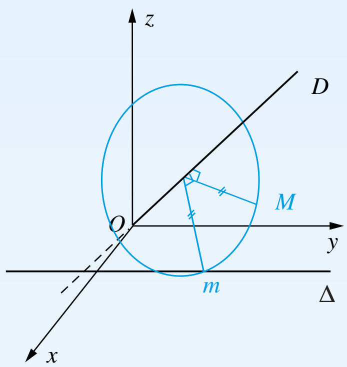
$$z=0,\quad \lambda=-(Z-1),$$
$$x=1-\frac{X-1}{Z-1},\quad y=1-\frac{Y-1}{Z-1}.$$

On peut laisser l'équation cartésienne sous cette forme, la forme développée étant plus lourde à écrire.

Comme on se propose de diviser par x, on écarte le cas $x=0$.

Cf. § 6.3.3 2) p. 246.

On obtient une directrice Γ du cône S en coupant S par un plan ne contenant pas le sommet Ω de S, par exemple le plan $z=1$.



Rappel :

$$d(m,D)=\frac{||\overrightarrow{Am}\wedge\overrightarrow{u}||}{||\overrightarrow{u}||},$$

où $A\in D$ et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de D.

Ici : $A=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

On remarque : $O\in S$.

Solution

2) En notant $\sigma_1 = x + y + z$ et $\sigma_2 = xy + xz + yz$, on a :

$$M(x,y,z) \in S \iff \sigma_2(\sigma_1^2 - \sigma_2) - 1 = 0.$$

En notant $\Sigma = x^2 + y^2 + z^2$ et $P = x + y + z$, on a : $\sigma_1 = P$ et $P^2 = \Sigma + 2\sigma_2$, donc $\sigma_2 = \dfrac{P^2 - \Sigma}{2}$, d'où :

$$M \in S \iff \frac{P^2 - \Sigma}{2}\left(P^2 - \frac{P^2 - \Sigma}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\iff (P^2 - \Sigma)(P^2 + \Sigma) - 4 = 0 \iff P^4 - \Sigma^2 - 4 = 0.$$

Cette équation cartésienne est de la forme $f(P,\Sigma) = 0$, où P est (le premier membre de l'équation cartésienne d') un plan et Σ est (le premier membre de l'équation cartésienne d') une sphère, donc S est une surface de révolution.

L'axe de S est la droite D passant par le centre de Σ et orthogonale à P, donc D passe par O et est dirigée par le vecteur $(1,1,1)$, c'est-à-dire que D a pour système d'équations cartésiennes $x = y = z$.

Une méridienne Γ de S est obtenue en coupant S par un (demi-)plan contenant D, par exemple le plan d'équation cartésienne $y = z$:

$$\Gamma \begin{cases} (xy + xz + yz)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz) - 1 = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (2xy + y^2)(x^2 + 3y^2 + 2xy) - 1 = 0 \\ y = z. \end{cases}$$

Conseils

Remarquer que x,y,z jouent des rôles symétriques dans l'équation cartésienne de S.

Cf. § 6.3.3 3) p. 249.

6.3.4 Quadriques

1) Généralités

Définition

On appelle **quadrique** toute surface d'équation cartésienne $F(x,y,z) = 0$, où F est un polynôme de degré total 2.

La présence des coefficients 2 sera justifiée plus loin, lors de l'utilisation d'une forme quadratique ou d'une matrice symétrique.

Remarques :

1) Une quadrique admet une EC de la forme :

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0,$$

où $A,\ldots,J \in \mathbb{R}$.

2) On suppose $(A,B,C,D,E,F) \neq (0,\ldots,0)$; le cas d'égalité correspond à un plan, ou $\varnothing$, ou $\mathcal{E}_3$.

3) Toute sphère (cf. Géométrie PCSI-PTSI, § 2.3.3) est une quadrique.

4) La réunion de deux plans est une quadrique.

5) On peut montrer que l'intersection d'une quadrique et d'un plan est $\varnothing$, un plan, ou une conique.

2) Recherche d'un éventuel centre de symétrie

Soit S une quadrique, d'EC :

(1) $$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0.$$

Cherchons un éventuel centre de symétrie de S.

Soit $\Omega \in \mathcal{E}_3$, (x_0, y_0, z_0) ses coordonnées dans $\mathcal{R}$.

$\mathcal{R}'$ est déduit de $\mathcal{R}$ par changement d'origine.

Considérons le repère $\mathcal{R}' = (\Omega;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les formules de changement de repère sont :

$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \\ z = z_0 + Z \end{cases}$$

pour un point quelconque M de $\mathcal{E}_3$, de coordonnées (x,y,z) dans $\mathcal{R}$, (X,Y,Z) dans $\mathcal{R}'$.

En reportant dans (1) et en développant, on obtient une EC de S dans $\mathcal{R}'$:

$J_1 = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + 2Cx_0z_0 + Dy_0^2 + 2Ey_0z_0 + Fz_0^2 + 2Gy_0z_0 + 2Hy_0 + 2Iz_0 + J.$

$$(AX^2 + 2BXY + 2CXZ + DY^2 + 2EYZ + FZ^2) + 2(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + G)X$$
$$+2(Bx_0 + Dy_0 + Ez_0 + H)Y + 2(Cx_0 + Ey_0 + Fz_0 + I) + J_1 = 0.$$

Pour la pratique, on remarquera que ce système revient à :
(2) $\iff \overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0,y_0,z_0) = \vec{0}$.

Le point Ω est centre de symétrie de S si :

$$(2) \qquad \begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + G = 0 \\ Bx_0 + Dy_0 + Ez_0 + H = 0 \\ Cx_0 + Ey_0 + Fz_0 + I = 0. \end{cases}$$

La matrice Q est la matrice du système linéaire (2) précédent.

Considérons la matrice $Q = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, qui est symétrique.

1) Si Q est inversible, alors le système d'équations (2) admet une solution unique (x_0,y_0,z_0), et donc S admet un centre de symétrie, le point $\Omega(x_0,y_0,z_0)$. On dit, dans ce cas, que S est une **quadrique à centre**. Nous allons approfondir cette étude dans le § *3)*.

2) Si Q n'est pas inversible, le système d'équations (2) n'admet pas de solution, ou bien en admet une infinité.

Par exemple :
- la quadrique d'EC $x^2 - 2y = 0$ (cylindre parabolique) n'admet pas de centre de symétrie
- la quadrique d'EC $x^2 + y^2 = 1$ (cylindre de révolution) admet une infinité de centres de symétrie.

3) Quadriques à centre

Nous poursuivons l'étude commencée dans le § *2)*, dans le cas où Q est inversible.

Dans $\mathcal{R}' = (\Omega;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, S admet comme EC :

$$AX^2 + 2BXY + 2CXZ + DY^2 + 2EYZ + FZ^2 + J_1 = 0,$$

où $J_1 \in \mathbb{R}$.

Utilisation du théorème fondamental sur les matrices symétriques réelles.

La matrice $Q = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix}$ est symétrique réelle, donc diagonalisable à l'aide d'un changement de b.o.n. (cf. 4.5.1 Th.) ; il existe $P \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_3(\mathbb{R})$ telles que : $Q = PDP^{-1}$.

Notons q la forme quadratique de matrice Q dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pour $M \in \mathcal{E}_3$, de coordonnées (X,Y,Z) dans $\mathcal{R}$, notons $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, $V = P^{-1}U$. On a :

$$\begin{aligned} M \in S &\iff {}^tUQU + J_1 = 0 \\ &\iff {}^tU\,{}^tP^{-1}DPU + J_1 = 0 \\ &\iff {}^tUDU + J_1 = 0. \end{aligned}$$

On peut se ramener au cas d'une b.o.n.d. (directe), par exemple, en changeant éventuellement $\vec{K}$ en $-\vec{K}$.

Notons $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ la b.o.n déduite de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par la matrice de passage P ; autrement dit, par exemple, les composantes de $\vec{I}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forment la 1ère colonne de P.

Notons $\mathcal{R}'' = (\Omega;\ \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.

La quadrique S admet pour EC dans $\mathcal{R}''$:

$$(3) \qquad \lambda\xi^2 + \mu\zeta^2 + \nu\eta^2 + J_1 = 0,$$

en notant (ξ,ζ,η) les coordonnées du point courant.

Puisque Q est inversible : $\lambda\mu\nu \neq 0$.

En multipliant éventuellement dans (3) par -1 et en permutant éventuellement les rôles de x,y,z, on se ramène au cas : $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

Ainsi, S admet une EC de la forme :

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} + \varepsilon\,\frac{\eta^2}{c^2} = \varepsilon',$$

où $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\varepsilon \in \{-1,1\}$, $\varepsilon' \in \{-1,0,1\}$, appelée **équation réduite** de S.

Selon l'usage courant, utilisons (x,y,z) au lieu de (ξ,ζ,η).

Voir tableau des quadriques à centre p. 256.

4) Autres quadriques

Nous poursuivons l'étude commencée dans le 2), dans le cas, maintenant, où Q n'est pas inversible.

Ainsi : $\operatorname{rg}(Q) \leqslant 2$.

D'autre part, puisque $(A,\ldots,F) \neq (0,\ldots,0)$: $\operatorname{rg}(Q) \geqslant 1$.

Utilisation du théorème fondamental sur les matrices symétriques réelles.

Puisque $Q \in \mathbf{S}_3(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q = PDP^{-1}$. Et, comme $\operatorname{rg}(M) \in \{1,2\}$, on peut, quitte à permuter les rôles de x,y,z, se ramener au cas où :

Une des valeurs propres de Q est nulle.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*, \mu \in \mathbb{R}.$$

On peut se ramener au cas d'une b.o.n.d. (directe), par exemple, en changeant éventuellement $\overrightarrow{K}$ en $-\overrightarrow{K}$.

En notant $(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K})$ la b.o.n déduite de $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ par la matrice de passage P, et $\mathcal{R}_1 = (O;\ \overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K})$, une EC de S dans $\mathcal{R}_1$ est de la forme :

$$(4) \qquad \lambda X^2 + \mu Y^2 + 2G_1X + 2H_1Y + 2I_1Z + J = 0,$$

où $(G_1,H_1,I_1) \in \mathbb{R}^3$.

a) Cas $\operatorname{rg}(Q) = 2$

Ici, $\mu \neq 0$, et S a pour EC dans $\mathcal{R}_1$:

$$\lambda\left(X + \frac{G_1}{\lambda}\right)^2 + \mu\left(Y + \frac{H_1}{\mu}\right)^2 + 2I_1Z - \frac{G_1^2}{\lambda} - \frac{H_1^2}{\mu} + J = 0.$$

On ne retiendra pas par cœur les résultats obtenus dans ce paragraphe sur les autres quadiques, mais on adoptera, dans chaque exemple, le plan de calcul ici développé : groupement de termes, comme pour une mise sous forme canonique de trinôme.

α) *Cas* $I_1 \neq 0$

Considérons le point A de coordonnées $\left(-\dfrac{G_1}{\lambda}, -\dfrac{H_1}{\lambda}, -\dfrac{G_1^2}{2\lambda I_1} - \dfrac{H_1^2}{2\mu I_1} + \dfrac{J}{2I_1}\right)$ dans $\mathcal{R}_1$, et le r.o.n. $\mathcal{R}_2 = (A;\ \overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K})$. Une EC de S dans $\mathcal{R}_2$ est :

$$\lambda\xi^2 + \mu\zeta^2 + 2I_1\eta = 0.$$

En multipliant éventuellement par -1 et en échangeant éventuellement les rôles de ξ,ζ, on peut se ramener au cas où $\lambda > 0$.

Ainsi, S admet une EC de la forme :

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \varepsilon\,\frac{\zeta^2}{b^2} = \varepsilon'\,\frac{2z}{c},$$

où $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\varepsilon \in \{-1,1\}$, $\varepsilon' \in \{-1,1\}$.

Par symétrie par rapport (par exemple) au premier axe de coordonnées, on peut se ramener aux cas où $\varepsilon' = 1$.

Selon l'usage courant, utilisons (x,y,z) au lieu de (ξ,ζ,η). On obtient ainsi deux quadriques :

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2z}{c}, & \textbf{paraboloïde elliptique} \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2z}{c}, & \textbf{paraboloïde hyperbolique.} \end{array} \right.$$

β) *Cas* $I_1 = 0$

Considérons le point A de coordonnées $\left(-\dfrac{G_1}{\lambda},-\dfrac{H_1}{\mu},0\right)$ dans $\mathcal{R}_1$, et le r.o.n. $\mathcal{R}_2 = (A;\ \overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K})$. Une EC de S dans $\mathcal{R}_2$ est :

$$\lambda\xi^2 + \mu\zeta^2 - \frac{G_1^2}{\lambda} - \frac{H_1^2}{\mu} + J = 0.$$

Comme plus haut, on peut se ramener au cas où $\lambda > 0$.

Ainsi, S admet une EC de la forme :

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \varepsilon\,\frac{\zeta^2}{b^2} = \alpha,$$

où $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \varepsilon \in \{-1,1\}, \quad \alpha \in \{-1,0,1\}$.

Selon l'usage courant, utilisons (x,y,z) au lieu de (ξ,ζ,η). On obtient ainsi deux quadriques :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \textbf{cylindre elliptique}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \textbf{cylindre hyperbolique}$$

les autres cas étant triviaux : ϕ, droite, réunion de deux plans.

b) Cas $\mathrm{rg}(Q) = 1$

Dans $\mathcal{R}_1$, S admet pour EC :

$$\lambda\left(X + \frac{G_1}{\lambda}\right)^2 + 2H_1Y + 2I_1Z - \frac{G_1^2}{\lambda} + J = 0.$$

Si $(H_1,I_1) = (0,0)$, alors S est vide, ou est un plan, ou la réunion de deux plans parallèles.

Supposons donc $(H_1,I_1) \neq (0,0)$.

Par changement de repère par translation (nouvelle origine de coordonnées $\left(-\dfrac{G_1}{\lambda},0,0\right)$ dans $\mathcal{R}_1$), puis par rotation convenable autour du nouveau premier axe de coordonnées, et enfin par translation, on se ramène à une EC de la forme :

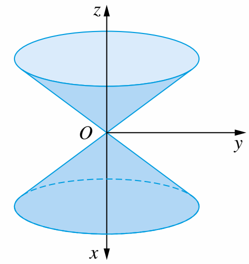
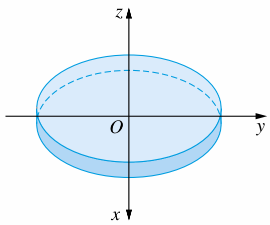
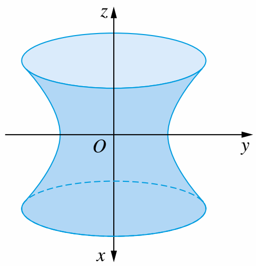
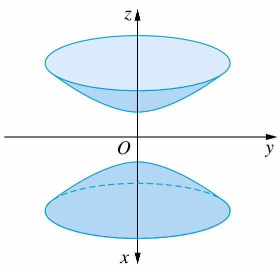
$$\lambda\xi^2 + 2H_2\zeta = 0, \quad \text{où } H_2 \in \mathbb{R}^*.$$

Selon l'usage, courant, utilisons (x,y,z) au lieu de (ξ,ζ,η). On obtient l'équation :

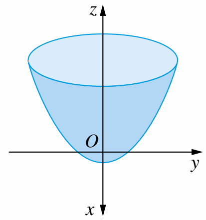
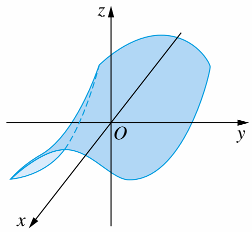
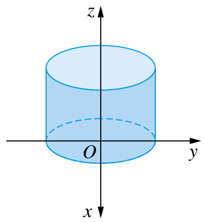
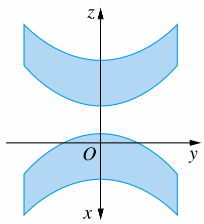
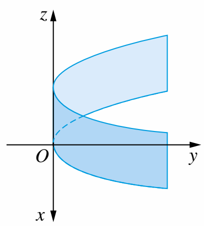
$$x^2 - 2py = 0,\ \textbf{cylindre parabolique}$$

Le tableau p. 257 donne les quadriques non à centre, les cas triviaux où S est un plan ou une réunion de deux plans étant omis.

Quadriques à centre

Equation réduite	allure	nature, nom
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	Ω •	singleton $\{\Omega\}$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$		cône (du second degré), de sommet Ω
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$		$\varnothing$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		ellipsoïde
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		hyperboloïde à une nappe H_1
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$		hyperboloïde à deux nappes H_2

Autres quadriques

Equation réduite	allure	nature, nom
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$		paraboloïde elliptique
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$		paraboloïde hyperbolique
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$		$\varnothing$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		cylindre elliptique
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		cylindre hyperbolique
$x^2=2py$		cylindre parabolique

5) Exemples de recherche de droites tracées sur une quadrique

Nous allons envisager les cas de l'hyperboloïde de révolution à une nappe et du paraboloïde hyperbolique.

a) Droites tracées sur un hyperboloïde de révolution à une nappe

H_1 = hyperboloïde à une nappe.

Considérons un H_1 de révolution S, d'équation réduite :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Soit D une droite de l'espace.

Un cercle ne contient aucune droite.

Si D est horizontale, dans un plan $z = h$ $(h \in \mathbb{R})$, alors, comme l'intersection de S avec le plan $z = h$ est le cercle $\left\{\begin{array}{c} x^2 + y^2 = 1 + h^2 \\ z = h \end{array}\right|$, il est clair que D n'est pas incluse dans S.

Supposons donc D non horizontale ; D admet un SEC $\left\{\begin{array}{l} x = az + p \\ y = bz + q \end{array}\right|$, $(a,b,p,q) \in \mathbb{R}^4$.

On a : $$D \subset S \iff \left(\forall z \in \mathbb{R},\ (az+p)^2 + (bz+q)^2 - z^2 - 1 = 0\right)$$
$$\iff \left(a^2 + b^2 = 1, \quad ap + bq = 0, \quad p^2 + q^2 = 1\right).$$

Considérons les inconnues a, b, p, q comme formant une matrice carrée d'ordre 2.

Considérons la matrice $\Omega = \begin{pmatrix} a & p \\ b & q \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$; on a donc :

$$D \subset S \iff \Omega \in \mathbf{O}_2(\mathbb{R}).$$

D'après l'étude du groupe orthogonal en dimension 2 (cf. Algèbre PCSI-PTSI, 10.4 Prop. 1) :

Description du groupe $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$.

$$\mathbf{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix};\ \theta \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix};\ \varphi \in \mathbb{R}\right\}.$$

En notant, pour $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$$D_\theta \left\{\begin{array}{l} x = z\cos\theta - \sin\theta \\ y = z\sin\theta + \cos\theta \end{array}\right., \qquad \Delta_\varphi \left\{\begin{array}{l} x = z\cos\varphi + \sin\varphi \\ y = z\sin\varphi - \cos\varphi \end{array}\right.,$$

on conclut que les droites tracées sur S sont les D_θ $(\theta \in \mathbb{R})$ et les Δ_φ $(\varphi \in \mathbb{R})$.

Soit $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. Il existe une droite D_θ et une droite Δ_φ uniques passant par S. En effet, on a :

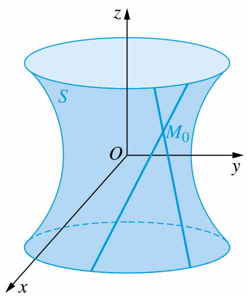
- $\left\{\begin{array}{l} x_0 = z_0\cos\theta - \sin\theta \\ y_0 = z_0\sin\theta + \cos\theta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_0 z_0 + y_0 = (1+z_0^2)\cos\theta \\ x_0 - y_0 z_0 = (1+z_0^2)\sin\theta \end{array}\right.,$

et ce dernier système d'équations admet une solution θ unique (modulo 2π), puisque :

$$(x_0 z_0 + y_0)^2 + (x_0 - y_0 z_0)^2 = (x_0^2 + y_0^2)(1 + z_0^2) = (1 + z_0^2)^4$$

- $\left\{\begin{array}{l} x_0 = z_0\cos\varphi + \sin\varphi \\ y_0 = z_0\sin\varphi - \cos\varphi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_0 z_0 - y_0 = (1+z_0^2)\cos\varphi \\ x_0 + y_0 z_0 = (1+z_0^2)\sin\varphi \end{array}\right.,$

et, de même, ce dernier système d'équations admet une solution φ unique (modulo 2π).



On dit que S est une surface **doublement réglée** : S est, de deux façons, une réunion de droites.

Remarques :

1) Puisque S est de révolution autour de $z'z$, les deux droites D_θ, Δ_φ tracées sur S et passant par M_0 sont symétriques l'une de l'autre par rapport au plan contenant $z'z$ et M_0.

2) En notant Π le plan tangent en M_0 à S, et D_θ, Δ_φ les deux droites tracées sur S et passant par M_0, on a : $\Pi \cap S = D_\theta \cup \Delta_\varphi$.

3) Pour tout (θ_1,θ_2) de $\mathbb{R}^2$ tel que $\theta_1 \not\equiv \theta_2\ [2\pi]$, D_{θ_1} et D_{θ_2} ne sont pas coplanaires. De même, pour tout (φ_1,φ_2) de $\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi_1 \not\equiv \varphi_2\ [2\pi]$, Δ_{φ_1} et Δ_{φ_2} ne sont pas coplanaires.

4) On peut retrouver les deux familles de droites précédentes par le calcul classique et élégant suivant :

Astuce permettant de retrouver les droites tracées sur S.

$$\begin{aligned} x^2+y^2-z^2=1 &\iff (x+z)(x-z)=(1+y)(1-y) \\ &\iff \left(\exists \lambda \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} x+z=\lambda(1+y) \\ \lambda(x-z)=1-y \end{cases}\right) \\ &\iff \left(\exists \mu \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} x+z=\mu(1-y) \\ \mu(x-z)=1+y \end{cases}\right). \end{aligned}$$

b) Droites tracées sur un paraboloïde hyperbolique

PH = paraboloïde hyperbolique.

Considérons un PH S, d'équation réduite :

$$x^2-y^2-2hz=0, \quad h>0 \text{ fixé.}$$

Ce changement de repère par rotation permet de remplacer x^2-y^2 par $2xy$.

Dans le r.o.n.d. $\mathcal{R}' = \left(O;\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j}),\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j}),\vec{k}\right)$, obtenu à partir de $\mathcal{R}$ par la rotation d'axe passant par O, dirigé et orienté par $\vec{k}$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$, S admet l'EC suivante, plus commode ici :

$$xy-hz=0.$$

En raisonnant comme dans *a)* (le calcul est ici plus simple), les droites tracées sur S sont celles d'équations : $\begin{cases} x=p \\ py=hz \end{cases}, p\in\mathbb{R}$, $\quad \begin{cases} qx=hz \\ y=q \end{cases}, q\in\mathbb{R}$.

Exercices 6.2.17 à 6.2.30.

Exercice-type résolu

Détermination de la nature et d'une équation réduite pour une quadrique donnée par son équation cartésienne

On considère la quadrique S, d'équation cartésienne, dans un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$5x^2+2y^2+11z^2+20xy+16xz-4yz-42x+24y-24z=0.$$

Déterminer un repère orthonormé dans lequel S admet une équation réduite, former cette équation réduite, et préciser la nature de S.

Solution

Notons Q la matrice symétrique associée : $Q=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 8 \\ 10 & 2 & -2 \\ 8 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

1) Détermination des valeurs propres de Q

On forme le polynôme caractéristique de Q :

$$\begin{aligned} \chi_Q(\lambda) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 10 & 8 \\ 10 & 2-\lambda & -2 \\ 8 & -2 & 11-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(2-\lambda)(11-\lambda)-320-64(2-\lambda)-4(5-\lambda)-100(11-\lambda) \\ &= (10-7\lambda+\lambda^2)(11-\lambda)+168\lambda-1568 \end{aligned}$$

Conseils

Cf. § 6.3.4 2). La matrice Q est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la forme quadratique qui, au triplet (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, associe :

$$5x^2+2y^2+11z^2+20xy+16xz-4yz.$$

Développement d'un déterminant d'ordre 3 par la règle de Sarrus, par exemple.

Solution

$$= -\lambda^3 + 18\lambda^2 + 81\lambda - 1458 = (-\lambda^3 + 81\lambda) + 18(\lambda^2 - 81)$$
$$= -(\lambda^2 - 81)(\lambda - 18) = -(\lambda + 9)(\lambda - 9)(\lambda - 18).$$

On obtient : $\mathrm{Sp}\,(Q) = \{-9, 9, 18\}$.

En particulier, 0 n'est pas valeur propre de Q, donc Q est inversible. D'après le Cours (cf. § 6.3.4 2)), S est une quadrique à centre.

2) Recherche du centre de S

Soit $\Omega \in \mathcal{E}_3, (x_0, y_0, z_0)$ ses coordonnées dans $\mathcal{R}$. Considérons le repère $\mathcal{R}' = (\Omega; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Les formules de changement de repère sont :

$$x = x_0 + X, \qquad y = y_0 + Y, \qquad z = z_0 + Z,$$

pour un point quelconque M de $\mathcal{E}_3$, de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$, (X, Y, Z) dans $\mathcal{R}'$.

En reportant dans l'équation de S dans $\mathcal{R}$, on obtient l'équation de S dans $\mathcal{R}'$:

$$5(X+x_0)^2+2(Y+y_0)^2+11(Z+z_0)^2+20(X+x_0)(Y+y_0)+16(X+x_0)(Z+z_0)$$
$$-4(Y+y_0)(Z+z_0) - 42(X+x_0) + 24(Y+y_0) - 24(Z+z_0) = 0.$$

L'annulation des coefficients des termes du premier degré en X, Y, Z équivaut au système :

$$\begin{cases} 10x_0 + 20y_0 + 16z_0 - 42 = 0 \\ 20x_0 + 4y_0 - 4z_0 + 24 = 0 \\ 16x_0 - 4y_0 + 22z_0 - 24 = 0. \end{cases}$$

Par résolution de ce système linéaire, on obtient les coordonnées (x_0, y_0, z_0), dans $\mathcal{R}$, du centre Ω de S :

$$x_0 = -1, \qquad y_0 = 1, \qquad z_0 = 2.$$

En remplaçant x_0, y_0, z_0 par leurs valeurs dans l'équation vue plus haut, on obtient une équation de S dans $\mathcal{R}'$:

$$5X^2 + 2Y^2 + 11Z^2 + 20XY + 16XZ - 4YZ + 9 = 0.$$

3) Obtention de l'équation réduite de S

On cherche une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de Q.

• $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}\,(Q, -9) \iff QU = -9U$

$$\iff \begin{cases} 5x + 10y + 8z = -9x \\ 10x + 2y - 2z = -9y \\ 8x - 2y + 11z = -9z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = 2z \end{cases}.$$

Donc $\mathrm{SEP}\,(Q, -9)$ est de dimension 1 et admet pour base $(\overrightarrow{I})$, où $\overrightarrow{I} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Conseils

$1458 = 81 \cdot 18.$

Pour montrer que Q est inversible, on pouvait aussi passer par le déterminant :

$\det\,(Q) = -1458 \neq 0.$

Méthode : cf. § 6.3.4 2) p. 252.

$5x_0^2 + 2y_0^2 + 11z_0^2 + 20x_0y_0 + 16x_0z_0$
$-4y_0z_0 - 42x_0 + 24y_0 - 24z_0 = 9.$

Résolution facile, par exemple, par combinaison d'équations.

$\overrightarrow{I}$ est normé.

Solution | **Conseils**

• $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}\,(Q,9) \iff QU = 9U$

$$\iff \begin{cases} 5x + 10y + 8z = 9x \\ 10x + 2y - 2z = 9y \\ 8x - 2y + 11z = 9z \end{cases} \iff \begin{cases} z = -2x \\ y = 2x \end{cases}.$$

Résolution facile, par exemple, par combinaison d'équations.

Donc SEP $(Q,9)$ est de dimension 1 et admet pour base $(\overrightarrow{J})$, où $\overrightarrow{J} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{J}$ est normé.

• $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}\,(Q,18) \iff QU = 18U$

$$\iff \begin{cases} 5x + 10y + 8z = 18x \\ 10x + 2y - 2z = 18y \\ 8x - 2y + 11z = 18z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \end{cases}.$$

Résolution facile, par exemple, par combinaison d'équations.

Donc SEP $(Q,18)$ est de dimension 1 et admet pour base $(\overrightarrow{K})$, où $\overrightarrow{K} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{K}$ est normé.

Remarquons que l'on pouvait calculer K autrement. Puisque Q est symétrique réelle, les sous-espaces propres de Q sont deux à deux orthogonaux, et on peut donc prendre pour troisième vecteur :

$$\overrightarrow{K} = \overrightarrow{I} \wedge \overrightarrow{J} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

D'après le Cours, une équation cartésienne de S dans le repère orthonormé (direct) $\mathcal{R}'' = (\Omega;\ \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ est :

Cf. § 6.3.4 3) p. 253.

$$-9\xi^2 + 9\zeta^2 + 18\eta^2 + 9 = 0,$$

et on obtient l'équation réduite de S, dans $\mathcal{R}''$, avec les notations usuelles :

$$x^2 - y^2 - \frac{z^2}{1/2} = 1.$$

On conclut : S est un hyperboloïde à deux nappes.

6.3.5 Surfaces réglées, surfaces développables

Ce § 6.3.5 est destiné aux étudiants de seconde année PT, PT*.

1) Surfaces réglées

Définition

Une surface de classe C^k $(k \geqslant 1)$ est dite **réglée** si et seulement si elle admet une représentation paramétrique de la forme

$$\phi :\ \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{E}_3 \\ (u,v) & \longmapsto & m(u) + v\overrightarrow{G(u)} \end{array},$$

où $m : I \longrightarrow \mathcal{E}_3$ et $\overrightarrow{G} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ sont des applications de classe C^k sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Les cylindres et les cônes sont des surfaces réglées.

Comme, pour $u \in I$ fixé, $\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{E}_3 \\ v & \longmapsto & m(u)+v\overrightarrow{G(u)}\end{array}$ est une RP d'une droite D_u, on voit que, plus simplement, une surface S est réglée si et seulement si elle est réunion d'une « famille » de droites, $S = \bigcup_{u \in I} D_u$. On dit alors que $(D_u)_{u \in I}$ est une famille de **génératrices** de la surface réglée S, et que, pour $(u,v) \in I \times \mathbb{R}$, D_u est la **génératrice** (dans la famille précédente) du point $\phi(u,v)$ de S, pour tout v de $\mathbb{R}$.

Proposition

Le plan tangent en un point régulier d'une surface réglée contient la génératrice de ce point.

Preuve

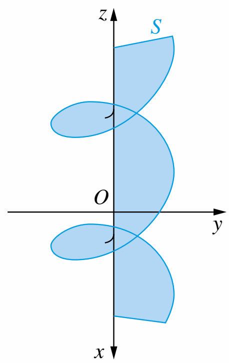
Notons $\phi : \begin{array}{rcl} I \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{E}_3 \\ (u,v) & \longmapsto & m(u)+v\overrightarrow{G(u)}\end{array}$ une RP de la surface réglée S, où $m : I \longrightarrow \mathcal{E}_3$ et $\overrightarrow{G} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ sont de classe C^1 sur I. Soit $(u,v) \in I \times \mathbb{R}$ un point régulier de S, c'est-à-dire tel que $\left(\dfrac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial u}(u,v), \dfrac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial v}(u,v)\right)$ soit libre. Comme $\dfrac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial v}(u,v) = \overrightarrow{G(u)}$, le plan tangent en $\phi(u,v)$ à S contient la droite passant par $\phi(u,v)$ et dirigée par $\overrightarrow{G(u)}$, c'est-à-dire la génératrice de $\phi(u,v)$ (ou : de (u,v)) sur S. ■

Exemple : Hélicoïde droit

La surface S de RP :

$$\begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = hu \end{cases} \qquad (h \in \mathbb{R}^* \text{ fixé}),$$

appelée **hélicoïde droit**, est réglée.



En effet, en notant $m : \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{E}_3 \\ u & \longmapsto & (0,0,hu)\end{array}$ et $\overrightarrow{G} : \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & (\cos u, \sin u, 0)\end{array}$, S admet la RP

$\phi : \begin{array}{rcl}\mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{E}_3 \\ (u,v) & \longmapsto & m(u)+v\overrightarrow{G(u)}\end{array}$ et on a bien : $\forall u \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{G(u)} \neq \overrightarrow{0}$.

Puisque, pour tout (u,v) de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial u}(u,v) = (-v\sin u, v \cos u, h), \quad \frac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial v}(u,v) = (\cos u, \sin u, 0),$$

$\left(\dfrac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial u}(u,v), \dfrac{\overrightarrow{\partial \phi}}{\partial v}(u,v)\right)$ est libre.

Ainsi, tout point $M(u,v)$ de S est régulier.

Graphiquement, on voit que l'hélicoïde droit est une réunion de droites s'appuyant d'une part sur $z'z$, d'autre part sur une hélice.

Pour tout v de $\mathbb{R}_+^*$, la courbe Γ_v de RP $\phi(\cdot, v)$, c'est-à-dire $u \in \mathbb{R} \longmapsto (v \cos u, v \sin u, hu)$ est une hélice circulaire à pas constant (cf. 6.2.2 Exemple 1) p. 231), et le plan tangent en $M(u,v)$ peut être défini par la génératrice de M et la tangente en M à Γ_v.

2) Surfaces développables

Les surfaces développables sont des surfaces réglées particulières.

Définition

Une surface réglée S est dite **développable** si et seulement si, pour toute génératrice G de S, le plan tangent à S en tout point régulier de G est le même.

Notons $\begin{array}{rcl}\phi : I\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{E}_3 \\ (u,v) & \longmapsto & m(u)+v\overrightarrow{G(u)}\end{array}$ une RP de S, où $m : I \longrightarrow \mathcal{E}_3$ et $\overrightarrow{G} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ sont de classe C^k $(k \geqslant 1)$.

Une génératrice de S est formée des points $\phi(u,v)$ où $u \in I$ est fixé et v décrit $\mathbb{R}$. Soit donc $u \in I$ fixé.

Supposons que $\left(\overrightarrow{m'(u)},\overrightarrow{G(u)}\right)$ soit libre.

Pour que le plan tangent en tout point régulier de la génératrice $m(u)+\mathbb{R}\overrightarrow{G(u)}$ soit le même, il faut et il suffit que, pour tout v de $\mathbb{R}$ (tel que (u,v) soit régulier) :

$$\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{m'(u)}+v\,\overrightarrow{G'(u)},\overrightarrow{G(u)}\right)=\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{m'(u)},\overrightarrow{G(u)}\right).$$

On voit alors que, si la génératrice admet au moins un point régulier :

$$\overrightarrow{G'(u)} \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{m'(u)},\overrightarrow{G(u)}\right).$$

La réciproque est évidente.

Résumons l'étude.

C'est la méthode pratique pour savoir si une surface réglée est développable.

Théorème 1

Soit $\begin{array}{rcl}\phi : I\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{E}_3 \\ (u,v) & \longmapsto & m(u)+v\,\overrightarrow{G(u)}\end{array}$ une RP d'une surface réglée S, où $m : I \longrightarrow \mathcal{E}_3$ et $\overrightarrow{G} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ sont de classe C^1. On suppose que, pour tout u de I, $\left(\overrightarrow{m'(u)},\overrightarrow{G(u)}\right)$ est libre.

Alors, S est développable si et seulement si, pour tout u de I, $\left(\overrightarrow{m'(u)},\overrightarrow{G(u)},\overrightarrow{G'(u)}\right)$ est liée.

Exemples :

1) Les cylindres et les cônes (de classe C^1) sont des surfaces développables.

2) **La surface S de RP** $\begin{cases} x = u + v\ \cos\ u \\ y = v\ \sin\ u \\ z = \sin\ u + v \end{cases}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$**, est développable.**

En effet, avec les notations précédentes :

• $m(u)=(u,0,\sin u)$, $\overrightarrow{G(u)}=(\cos u,\sin u,1)$, donc S est réglée

• $\overrightarrow{m'(u)}=(1,0,\cos u)$, donc $\left(\overrightarrow{m'(u)},\overrightarrow{G(u)}\right)$ est libre pour tout u de $\mathbb{R}$. Tout point de S est régulier.

• $\det_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}\left(\overrightarrow{m'(u)},\overrightarrow{G(u)},\overrightarrow{G'(u)}\right)=\begin{vmatrix} 1 & \cos u & -\sin u \\ 0 & \sin u & \cos u \\ \cos u & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$=\cos^3 u+\cos u\ \sin^2 u-\cos u=0,$$

donc $\left(\overrightarrow{m'(u)},\overrightarrow{G(u)},\overrightarrow{G'(u)}\right)$ est liée, pour tout u de $\mathbb{R}$.

Remarque :
Toute surface développable est (par définition) réglée.

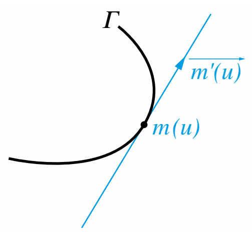
La réciproque est fausse ; par exemple, l'hélicoïde droit (cf. *1)* Exemple p. 262) est une surface réglée non développable, puisque, avec les notations précédentes, pour tout u de I :

$$\det_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}\left(\overrightarrow{m'(u)},\overrightarrow{G(u)},\overrightarrow{G'(u)}\right) = \begin{vmatrix} 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & \sin u & \cos u \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix} = h \neq 0.$$

3) Surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche

Soit Γ une courbe gauche, de RP $m : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ u \longmapsto m(u) \end{array}$ de classe C^2, birégulière.

Considérons, pour tout u de I, la tangente en $m(u)$ à Γ, qui est la droite passant par $m(u)$ et dirigée par $\overrightarrow{m'(u)}$.



Considérons la surface réglée S de RP $\phi : \begin{array}{l} I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ (u,v) \longmapsto m(u)+v\overrightarrow{m'(u)} \end{array}$, c'est-à-dire la réunion des tangentes à Γ ; on dit que S est engendrée par les tangentes à la courbe gauche Γ.

On a, pour tout (u,v) de $I \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}(u,v) = \overrightarrow{m'(u)} + v\,\overrightarrow{m''(u)}, \qquad \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}(u,v) = \overrightarrow{m'(u)}.$$

Comme, pour tout u de I, $\left(\overrightarrow{m'(u)},\overrightarrow{m''(u)}\right)$ est libre, le point $M(u,v)$ de S est régulier si et seulement si $v \neq 0$. Autrement dit, l'ensemble des points non réguliers (i.e. stationnaires) de S est Γ.

Pour tout (u,v) de $I \times \mathbb{R}^*$, la famille $\left(\overrightarrow{m'(u)},\overrightarrow{m'(u)},\overrightarrow{m''(u)}\right)$ est liée, donc, d'après le théorème précédent, S est développable.

De plus, pour tout (u,v) de $I \times \mathbb{R}^*$, le plan tangent en $\phi(u,v)$ à Γ est le plan passant par $\phi(u,v)$ et dirigé par $\left(\overrightarrow{m'(u)},\overrightarrow{m''(u)}\right)$; c'est le plan osculateur à Γ en $m(u)$ (cf. 5.1.3 p. 267).

Résumons l'étude.

Théorème 2

Soit Γ une courbe gauche de classe C^2, birégulière. La surface engendrée par les tangentes à Γ est une surface développable.

Exemple :

La courbe Γ de RP $\begin{cases} x = u \\ y = u^2 \\ z = u^3 \end{cases}$ $(u \in \mathbb{R})$ est birégulière, et la surface développable engendrée par les tangentes à Γ admet pour RP $\left\{\begin{array}{l} x = u + v \\ y = u^2 + v \cdot 2u \\ z = u^3 + v \cdot 3u^2 \end{array}\right|$, ou encore :

$$\left\{\begin{array}{l} x = u + v \\ y = u(u+2v) \\ z = u^2(u+3v) \end{array}\right|, \ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette réciproque n'est pas au programme.

Nous allons étudier une réciproque du théorème précédent.

Soit S une surface développable, de RP $\phi : \begin{array}{l} I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ (u,v) \longmapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)} \end{array}$, où $m : I \longrightarrow \mathcal{E}_3$ et $\overrightarrow{G} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ sont supposées de classe C^2.

Supposons que, pour tout u de I, $\left(\overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)}\right)$ et $\left(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}\right)$ soient libres.

Puisque S est développable, pour tout u de I, $\left(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)}\right)$ est liée. Il existe donc des applications $\lambda, \mu : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall u \in I, \quad \overrightarrow{m'(u)} = \lambda(u)\ \overrightarrow{G(u)} + \mu(u)\ \overrightarrow{G'(u)}.$$

En passant aux coordonnées dans $\mathcal{R}$, par exemple, on voit que, puisque m', G, G' sont de classe C^1 sur I, λ et μ sont de classe C^1 sur I.

Soit $u \in I$. Nous allons montrer que la génératrice de $m(u)$ sur S admet un point non régulier et un seul. On a, pour tout v de $\mathbb{R}$, en notant $\mathcal{S}(u) = \left(\overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)}\right)$:

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{S}(u)}\left(\frac{\overrightarrow{\partial\phi}}{\partial u}(u,v), \frac{\overrightarrow{\partial\phi}}{\partial v}(u,v)\right) &= \det_{\mathcal{S}(u)}\left(\overrightarrow{m'(u)} + v\ \overrightarrow{G'(u)}, \overrightarrow{G(u)}\right) \\
&= \det_{\mathcal{S}(u)}\left(\lambda(u)\overrightarrow{G(u)} + \left(\mu(u) + v\right)\overrightarrow{G'(u)}, \overrightarrow{G(u)}\right) \\
&= -\left(\mu(u) + v\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, le point (u,v) de la génératrice de $m(u)$ sur S n'est pas régulier sur S si et seulement si $v = -\mu(u)$.

La courbe Γ de RP $u \in I \longmapsto \phi\left(u, -\mu(u)\right)$, qui est tracée sur S, est appelée l'**arête de rebroussement** de la surface développable S.

Notons $n : I \longrightarrow \mathcal{E}_3$ l'application définie par :

$$\forall u \in I, \quad n(u) = \phi\left(u, -\mu(u)\right) = m(u) - \mu(u)\ \overrightarrow{G(u)}.$$

On a, pour tout u de I :

$$\overrightarrow{n'(u)} = \overrightarrow{m'(u)} - \mu'(u)\ \overrightarrow{G(u)} - \mu(u)\ \overrightarrow{G'(u)} = \left(\lambda(u) - \mu'(u)\right)\overrightarrow{G(u)}.$$

Supposons que tout point de Γ soit régulier sur Γ, c'est-à-dire :

$$\forall u \in I, \quad \lambda(u) - \mu'(u) \neq 0.$$

Une RP de la surface développable Σ engendrée par les tangentes à Γ est :

$$(u, v_1) \in I \times \mathbb{R} \longmapsto n(u) + v_1\ \overrightarrow{n'(u)} = m(u) + \left(-\mu(u) + v_1\left(\lambda(u) - \mu'(u)\right)\right)\overrightarrow{G(u)}.$$

Comme l'application $v_1 \longmapsto -\mu(u) + v_1\left(\lambda(u) - \mu'(u)\right)$ est (pour u fixé) un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même, une autre RP de Σ est :

$$\begin{array}{l} I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ (u,w) \longmapsto m(u) + w\overrightarrow{G(u)} \end{array},$$

et donc : $\Sigma = S$.

En résumé :

Proposition

Si S est une surface développable de classe C^2, il existe une courbe Γ tracée sur S, appelée **arête de rebroussement** de S, telle que S soit la réunion des tangentes à Γ (aux hypothèses près signalées dans l'étude précédente).

Exemple :

On a vu p. 263 que la surface S de RP $\left\{\begin{array}{l} x = u + v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = \sin u + v \end{array}\right|$, $(u,v) \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}$, est développable.

Avec les notations de l'étude précédente, $m(u) = (u,0,\sin u)$, $\overrightarrow{G(u)} = (\cos u,\sin u,1)$, d'où $\overrightarrow{m'(u)} = (1,0,\cos u)$, $\overrightarrow{G'(u)} = (-\sin u,\cos u,0)$.

On obtient alors : $\lambda(u) = \cos u$, $\mu(u) = -\sin u$, d'où : $\lambda(u) - \mu'(u) = 2\cos u \neq 0$.

L'arête de rebroussement de la surface développable S admet pour RP

$u \in I \longmapsto \phi\big(u,-\mu(u)\big)$, c'est-à-dire : $\left\{\begin{array}{l} x = u + \sin u\cos u \\ y = \sin^2 u \\ z = 2\sin u. \end{array}\right.$

Exercice-type résolu

Reconnaître, sur une représentation paramétrique, si une surface est réglée, développable

Les surfaces S suivantes, dont on donne une représentation paramétrique, sont-elles réglées, développables ?

a) $x = 6 + uv,\ \ y = 2u^3 + u^2 v,\ \ z = 3u^4 + u^3 v,\quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$

b) $x = \operatorname{sh} u + v\operatorname{ch} u,\ \ y = \operatorname{ch} u + v\operatorname{sh} u,\ \ z = u^2 + v,\quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Solution

a) • S admet la représentation paramétrique : $\phi : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)}$,

où $m(u) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2u^3 \\ 3u^4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{G(u)} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$, donc S est réglée.

• Pour voir si S est développable, on calcule, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\left[\overrightarrow{m'(u)},\ \overrightarrow{G(u)},\ \overrightarrow{G'(u)}\right] = \begin{vmatrix} 0 & u & 1 \\ 6u^2 & u^2 & 2u \\ 12u^3 & u^3 & 3u^2 \end{vmatrix}$$

$$= u^5 + 24u^5 - 12u^5 - 18u^5 = 0.$$

On conclut que S est développable.

b) • S admet la représentation paramétrique : $\phi : (u,v) \longmapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)}$, où

$m(u) = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} u \\ \operatorname{ch} u \\ u^2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{G(u)} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u \\ \operatorname{sh} u \\ 1 \end{pmatrix}$, donc S est réglée.

• Pour voir si S est développable, on calcule, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\left[\overrightarrow{m'(u)},\ \overrightarrow{G(u)},\ \overrightarrow{G'(u)}\right] = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} u & \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \\ \operatorname{sh} u & \operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u \\ 2u & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2u\operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u - 2u\operatorname{sh}^2 u - \operatorname{ch}^2 u = (2u-1)(\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u) = 2u - 1,$$

qui n'est nul que pour $u = 1/2$.

On conclut que S n'est pas développable.

Conseils

Cf. Cours § 6.3.5 1) p. 261.

Cf. Cours § 6.3.5 2) p. 263.

Développement par la règle de Sarrus, par exemple.

Cf. Cours § 6.3.5 1) p. 261.

Cf. Cours § 6.3.5 2) p. 263.

6.3.6 Exemples de recherche de courbes tracées sur une surface et satisfaisant une condition différentielle

Ce § 6.3.6 est destiné aux étudiants de seconde année PT, PT*.

1) Trajectoires orthogonales

Définiton

Soient S une surface, $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de courbes tracées sur S. On appelle **trajectoire orthogonale** de $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ (sur S) toute courbe C, tracée sur S, et coupant orthogonalement chacune des Γ_λ $(\lambda \in \Lambda)$.

Examinons le cas particulier où S est un plan ; on peut, par un changement de r.o.n.d., se ramener au cas où S est le plan xOy.

Soit $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de courbes du plan, indexée par un intervalle Λ de $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^3$ et une application $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur Vtelle que, pour tout λ de Λ, Γ_λ admette pour EC $F(x,y,\lambda) = 0$.

Supposons qu'en tout point de Γ_λ le théorème des fonctions implicites s'applique, et que Γ_λ soit la courbe représentative d'une fonction d'une variable réelle, de classe C^1.

La menée rigoureuse de l'étude précédente serait délicate.

L'élimination de λ dans $\left\{\begin{array}{l} F(x,y,\lambda) = 0 \\ F'_x(x,y,\lambda) + F'_y(x,y,\lambda)y' = 0 \end{array}\right|$ donne une relation de la forme $f(x,y,y') = 0$, appelée **équation différentielle (du 1^er ordre) de la famille de courbes** $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Soit C une trajectoire orthogonale de $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Supposons que C soit la courbe représentative d'une fonction y_C d'une variable réelle, de classe C^1. Puisque C coupe orthogonalement chaque Γ_λ, on a, en tout point (x,y) d'une Γ_λ : $\quad y'_C(x) = -\dfrac{1}{y'_{\Gamma_\lambda}(x)}$, et donc C satisfait l'équation différentielle : $\quad f\left(x,y,-\dfrac{1}{y'}\right) = 0$.

On en déduit la règle pratique suivante :

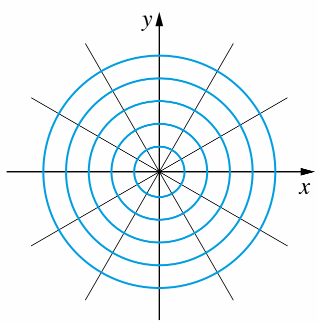
Méthode pratique pour déterminer les trajectoires orthogonales d'une famille de courbes du plan.

Soit $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de courbes du plan, admettant une équation différentielle $f(x,y,y') = 0$. Une équation différentielle de la famille des trajectoires orthogonales de $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est : $\quad f\left(x,y,-\dfrac{1}{y'}\right) = 0$.

Autrement dit, on remplace y' par $-\dfrac{1}{y'}$ dans l'ED de $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Exemples :

1) **Déterminer les trajectoires orthogonales de la famille des droites du plan passant par l'origine.**



L'EC générale des droites D_λ passant par O (sauf $y'y$) est : $\quad y = \lambda x$.

Une ED de la famille $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est obtenue est éliminant λ dans $\left\{\begin{array}{l} y = \lambda x \\ y' = \lambda \end{array}\right.$.

C'est donc : $\quad y - xy' = 0$.

On remplace y' par $-\dfrac{1}{y'}$ dans l'équation différentielle précédente

Une ED de la famille des trajectoires orthogonales de $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est alors :

$$y + \frac{x}{y'} = 0, \quad \text{ou encore :} \quad yy' + x = 0.$$

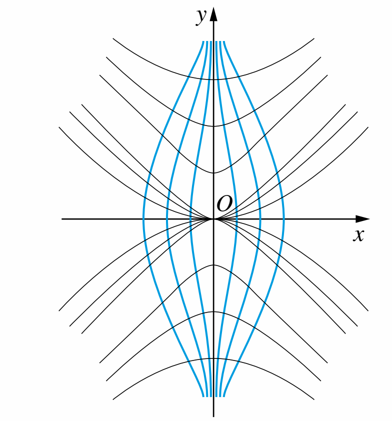
Les trajectoires orthogonales ont donc pour EC :

$$x^2 + y^2 = \mu \quad (\mu \in \mathbb{R}_+);$$

ce sont les cercles de centre O.

2) **Déterminer les trajectoires orthogonales de la famille $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^*}$ d'hyperboles équilatères d'EC :**

$$x^2 - y^2 + \lambda y = 0.$$



On obtient une ED de $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^*}$ en éliminant λ dans $\left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 + \lambda y = 0 \\ 2x - 2yy' + \lambda y' = 0 \end{array}\right|$, ce qui donne :

$$2xy - (x^2 + y^2)y' = 0.$$

Une ED des trajectoires orthogonales de $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^*}$ est obtenue en remplaçant y' par $-\dfrac{1}{y'}$:

$$2xyy' + (x^2 + y^2) = 0.$$

Le changement de fonction inconnue $z = y^2$ ramène à l'ED $xz' + z + x^2 = 0$, dont la solution générale est :

$$z : x \longmapsto -\frac{x^2}{3} + \frac{\mu}{x}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

On en déduit une équation cartésienne des trajectoires orthogonales $(C_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}$:

$$x(x^2 + 3y^2) - 3\mu = 0.$$

2) Lignes de plus grande pente

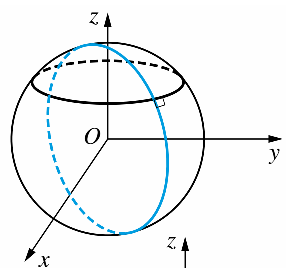
Définition

Soit S une surface.

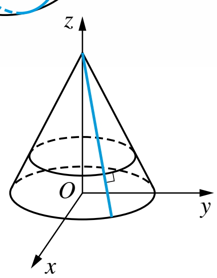
On appelle **lignes de niveau de** S les sections de S par les plans horizontaux. On appelle **lignes de plus grande pente de** S les trajectoires orthogonales de la famille des lignes de niveau de S.

Exemples :

1) Il est évident, graphiquement, que les lignes de plus grande pente de la sphère S de centre O et de rayon R (> 0) sont les cercles diamétraux passant par les deux « pôles » de S.



2) De même, les lignes de plus grande pente d'un cône de révolution de sommet O et d'axe $z'z$ sont ses génératrices.



3) **Déterminer les lignes de plus grande pente du paraboloïde hyperbolique S d'EC $x^2 - y^2 = 2z$.**

Les lignes de niveau Γ_λ de S ont pour EC $\left\{\begin{array}{r} x^2 - y^2 = 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right|, \lambda \in \mathbb{R}$.

Un vecteur tangent non nul en un point (x,y,z) de Γ_λ a pour coordonnées $(y,x,0)$.

Une ligne de plus grande pente C admet une RP : $x = x(\lambda),\ y = y(\lambda),\ z = z(\lambda)$, et un vecteur tangent en un point $\big(x(\lambda),y(\lambda),z(\lambda)\big)$ de C a pour coordonnées $\big(x'(\lambda),y'(\lambda),z'(\lambda)\big)$. L'orthogonalité des vecteurs tangents à Γ_λ et C se traduit par : $x'y + xy' = 0$, d'où : $xy = \mu \quad (\mu \in \mathbb{R})$.

Les lignes de plus grande pente de S ont donc pour EC :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2z \\ xy = \mu \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

et pour RP :

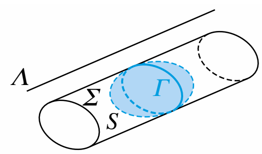
$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{\mu}{t} \\ z = \dfrac{1}{2}\left(t^2 - \dfrac{\mu^2}{t^2}\right) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

3) Contour apparent cylindrique dans une direction donnée

Imaginer que l'on regarde S, l'œil étant à l'infini dans la direction Λ.

Définition

Soient S une surface, Λ une direction de droites. On appelle **contour apparent cylindrique de S dans la direction Λ** la courbe Γ formée des points M de S en lesquels la droite passant par M et de direction Λ est tangente à S.



Le cylindre Σ, réunion des droites de direction Λ et tangentes à S est appelé le **cylindre circonscrit à S dans la direction Λ**.

On dit aussi que Γ est la **courbe de contact** de S et Σ.

On a : $\quad \Gamma \subset S \cap \Sigma$, et souvent en pratique, $\Gamma = S \cap \Sigma$.

Exemple :

Former une EC du cylindre Σ circonscrit à la surface S d'EC $x^4 + y^4 + z^4 = 1$, dans la direction d'équations $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Une droite $D_{\lambda,\mu}$, dirigée par $\vec{i} - \vec{j}$, de SEC $\left\{\begin{array}{l} y = -x + \lambda \\ z = \mu \end{array}\right|$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, est tangente à S si et seulement si l'équation

$$x^4 + (-x + \lambda)^4 + \mu^4 - 1 = 0,$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet (au moins) une solution double.

À cet effet, on élimine x dans : $\begin{cases} x^4 + (x - \lambda)^4 + \mu^4 - 1 = 0 & (1) \\ 4x^3 + 4(x - \lambda)^3 = 0 & (2). \end{cases}$

Comme : $\quad (2) \iff x^3 = (\lambda - x)^3 \iff x = \lambda - x \iff x = \dfrac{\lambda}{2}$, $D_{\lambda,\mu}$ est tangente à S si et seulement si :

$$\frac{\lambda^4}{8} + \mu^4 - 1 = 0.$$

On obtient une EC du cylindre Σ en éliminant (λ,μ) dans : $\begin{cases} y = -x + \lambda \\ z = \mu \\ \dfrac{\lambda^4}{8} + \mu^4 - 1 = 0, \end{cases}$

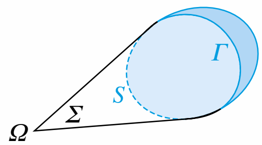
ce qui donne : $\quad \Sigma \mid \ (x+y)^4 + 8z^4 - 8 = 0$.

4) Contour apparent conique issu d'un point donné

Imaginer que l'on regarde S, l'œil étant en Ω.

Définition

Soient S une surface, Ω un point (souvent, on supposera : $\Omega \notin S$). On appelle **contour apparent conique de S issu du point Ω** la courbe Γ formée des points M de S en lesquels la droite (ΩM) est tangente à S.



Le cône Σ, réunion des droites issues de Ω et tangentes à S est appelé le **cône de sommet Ω circonscrit à S.**

On dit aussi que Γ est la **courbe de contact** de S et Σ.

On a : $\Gamma \subset S \cap \Sigma$, et souvent en pratique : $\Gamma = S \cap \Sigma$.

Exemple :

Former une EC du cône Σ de sommet $\Omega(0,2,0)$ et circonscrit à la surface S d'EC $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Un point $M(x,y,z)$ est sur Σ si et seulement si la droite (ΩM) est tangente à S. Une RP de (ΩM) est $\left\{\begin{array}{l} X = \lambda x \\ Y = 2 + \lambda(y-2) \\ Z = \lambda z \end{array}\right|$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Cette droite (ΩM) est tangente à S si et seulement si l'équation :

$$(\lambda x)^2 + \Big(2 + \lambda(y-2)\Big)^2 - (\lambda z)^2 - 1 = 0$$

admet (au moins) une solution double en λ, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\Big(2(y-2)\Big)^2 - 3\Big(x^2 + (y-2)^2 - z^2\Big) = 0.$$

Ainsi, Σ a pour EC : $\quad -3x^2 + (y-2)^2 + 3z^2 = 0$.

Les méthodes à rétenir

Surfaces

- **Pour déterminer une représentation paramétrique d'une surface donnée par une équation cartésienne** (ex. 6.3.1), il n'y a pas de méthode générale. Si une somme de carrés intervient, on pourra essayer de faire apparaître des fonctions trigonométriques.

Une représentation paramétrique locale pourra provenir du théorème des fonctions implicites.

- **Pour former une équation cartésienne d'une surface donnée par une représentation paramétrique** (ex. 6.3.2), éliminer les paramètres.
- **Pour former une équation cartésienne de la réunion des droites de l'espace satisfaisant des conditions imposées** (ex. 6.3.3, 6.3.4, 6.3.7), déterminer les droites en question par un système d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{l} x = az + p \\ y = bz + q \end{array}\right|$ par exemple, puis éliminer (a,b,p,q) (cf. également la rubrique « Les méthodes à retenir » de Géométrie PCSI-PTSI, § 1.2.3). On peut aussi essayer de faire intervenir une représentation paramétrique d'une droite de la famille (ex. 6.3.5, 6.3.6).
- **Pour déterminer toutes les droites tracées sur une surface S d'équation cartésienne donnée** (ex. 6.3.9), chercher ces droites par un système d'équations cartésiennes du type $\left\{\begin{array}{l} x = az + p \\ y = bz + q \end{array}\right|$, par exemple, si elles ne sont pas parallèles à xOy.
- Le plan tangent en un point régulier $M(u,v)$ d'une surface S de représentation paramétrique $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ (ex. 6.3.10, 6.3.11), est le plan passant par $M(u,v)$ et dirigé par $\left(\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u,v),\ \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u,v)\right)$, cf. § 6.3.2 1) p. 238.
- Le plan tangent en un point régulier $A(a,b,c)$ d'une surface S d'équation cartésienne $F(x,y,z) = 0$ (ex. 6.3.12, 6.3.13), est le plan d'équation cartésienne :

$$(X-a)F'_x(A) + (Y-b)F'_y(A) + (Z-c)F'_z(A) = 0$$

cf. § 6.2.3 2) p. 240.

- Étant donné un vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul et une courbe Γ de représentation paramétrique $t \longmapsto m(t)$, **une représentation paramétrique du cylindre S de génératrices parallèles à $\overrightarrow{v}$ et de directrice Γ est :**

$$(t,\lambda) \longmapsto M(t) = m(t) + \lambda \overrightarrow{v}$$

cf. § 6.3.3 1) p. 244.

On obtient une équation cartésienne de S (ex. 6.3.17 *a)*) en éliminant (t,λ).

Si Γ est donnée par un système d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{l} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{array}\right|$ (ex. 6.3.17 *b)*), on obtient une équation cartésienne de S en éliminant λ,x,y,z dans :

$$X - x = \lambda\alpha, \quad Y - y = \lambda\beta, \quad Z - z = \lambda\gamma, \quad F(x,y,z) = 0, \quad G(x,y,z) = 0,$$

où on a noté $m(x,y,z)$, $M(X,Y,Z)$, $\overrightarrow{v} = (\alpha,\beta,\gamma)$.

- **Pour reconnaître qu'une surface S est un cylindre** (ex. 6.3.19), mettre son équation cartésienne sous la forme $f(P,Q) = 0$, où P,Q sont des plans sécants (cf. § 6.3.3 1) p. 244).

Si l'énoncé demande de plus une section droite du cylindre, on sera amené à effectuer un changement de repère orthonormé.

- Étant donné un point Ω et une courbe Γ de représentation paramétrique $t \longmapsto m(t)$, **une représentation paramétrique du cône S de sommet Ω et de directrice Γ est :**

$$(t,\lambda) \longmapsto M(t) = \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega m(t)}$$

cf. § 6.3.3 2) p. 245. On obtient une représentation cartésienne de S (ex. 6.3.21 *a)*) en éliminant (t,λ).

Si Γ est donnée par un système d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{l} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{array}\right|$ (ex. 6.3.21 *b)*, 6.3.23), on obtient une équation cartésienne de S en éliminant λ,x,y,z dans :

$$X - a = \lambda(x-a), \quad Y - b = \lambda(y-b), \quad Z - c = \lambda(z-c), \quad F(x,y,z) = 0, \quad G(x,y,z) = 0$$

où on a noté $m(x,y,z)$, $M(X,Y,Z)$, $\Omega(a,b,c)$. Il peut être commode de considérer $\dfrac{1}{\lambda}$ plutôt que λ.

- **Pour déterminer le sommet Ω d'un cône S**, remarquer que Ω est un point non régulier de S (ex. 6.3.22).
- Étant donné une droite D et une courbe Γ de représentation paramétrique $t \longmapsto m(t)$, **une équation cartésienne de la surface de révolution S obtenue en faisant tourner Γ autour de D** (ex. 6.3.26) est obtenue en éliminant m dans :

$$\begin{cases} d(m,D) = d(M,D) \\ M \in P_m \end{cases}$$

  où P_m est le plan passant par m et orthogonal à D.
- **Pour reconnaître qu'une surface S est de révolution** (ex. 6.3.29), mettre son équation cartésienne sous la forme $f(P,\Sigma) = 0$ où P est un plan et Σ une sphère (cf. § 6.3.3 3) p. 249).

  Une méridienne, souvent souhaitée, est alors l'intersection de la surface avec un plan contenant l'axe. L'obtention en est aisée si l'un des plans des coordonnées contient l'axe ; sinon, un changement de r.o.n.d. s'impose.
- **Pour obtenir une équation réduite et déterminer la nature d'une quadrique S dont on donne une équation cartésienne $F(x,y,z) = 0$** (ex. 6.3.32, 6.3.33), former la matrice Q de la forme quadratique dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et calculer les valeurs propres de Q ou le polynôme caractéristique χ_Q.

  – Si 0 n'est pas valeur propre de Q, alors S est une quadrique à centre. Le centre Ω de S est obtenu en résolvant le système d'équations :

$$F'_x(x,y,z) = 0, \quad F'_y(x,y,z) = 0, \quad F'_z(x,y,z) = 0.$$

  Appliquer ensuite la méthode développée dans le § 6.3.4 3) p. 253 et la liste des quadriques à centre, tableau p. 256.

  – Si 0 est valeur propre de Q, appliquer la méthode développée dans le § 6.3.3 4) p. 254, consistant essentiellement en des groupements de termes dans des trinômes, et le tableau des « autres » quadriques p. 257.
- **Pour trouver toutes les quadriques contenant une (ou des) courbe(s) donnée(s)** (ex. 6.3.42 à 6.3.44), partir de l'équation cartésienne générale d'une quadrique.
- Certaines quadriques peuvent aussi être des cylindres (ex. 6.3.31, 6.3.32) ou des cônes, ou des surfaces de révolution (ex. 6.3.34 à 6.3.37), ce qui peut faciliter leur étude.
- **Pour montrer qu'une surface donnée par une représentation paramétrique est réglée** (ex. 6.3.50 à 6.3.52), mettre cette représentation paramétrique sous la forme :

$$\phi : (u,v) \longmapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)}$$

  cf. § 6.3.5 1) Déf. p. 261.
- Une surface réglée S de représentation paramétrique $\phi : (u,v) \longmapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)}$ est développable (ex. 6.3.50 à 6.3.52) si et seulement si, pour tout u, la famille $\left(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)}\right)$ est liée, cf. 6.3.5 2) Th. 1 p. 263.

Exercices

Généralités sur les surfaces, exercices 6.3.1 *à* 6.3.9

6.3.1 Trouver une représentation paramétrique de la surface S d'équation :

$$(\sqrt[3]{x})^2 + (\sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{z})^2 = 4.$$

6.3.2 Former une équation cartésienne d'une surface S contenant la surface admettant la représentation paramétrique :

$$x = u + v + w, \qquad y = u^2 + v^2 + w^2,$$
$$z = u^3 + v^3 + w^3, \qquad uvw = 1, \quad (u,v,w) \in \mathbb{R}^3.$$

6.3.3 Former une équation cartésienne de la surface S réunion des droites Δ de $\mathcal{E}_3$ rencontrant les trois droites :

$$D_1 \ \begin{cases} y = -1 \\ z = 1 \end{cases}, \quad D_2 \ \begin{cases} x = 1 \\ z = -1 \end{cases}, \quad D_3 \ \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

6.3.4 Soient $(a,h) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, H l'hyperbole d'équations $\begin{cases} xy = a^2 \\ z = 0 \end{cases}$, $D \begin{cases} y = 0 \\ z = h \end{cases}$, $D' \begin{cases} x = 0 \\ z = -h \end{cases}$.

Former une équation cartésienne de la surface S réunion des droites Δ de $\mathcal{E}_3$ rencontrant H, D, D'.

6.3.5 Soient π le plan d'équation $y = z$, et les deux paraboles $P \begin{cases} y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$, $P' \begin{cases} z^2 = 3x \\ y = 0 \end{cases}$.

Former une équation cartésienne de la surface S réunion des droites Δ de $\mathcal{E}_3$ parallèles à π et rencontrant P et P'.

6.3.6 Soient $(a,b,c) \in (\mathbb{R}^*)^3$ et Γ la courbe représentée paramétriquement par :

$$x = at, \quad y = bt^3, \quad z = c(t^2 + 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Former une équation cartésienne de la surface S réunion des cordes de Γ parallèles au plan xOy.

6.3.7 Former une équation cartésienne de la surface S réunion des droites de $\mathcal{E}_3$ qui coupent la courbe Γ de RP :

$$x = t^2, \quad y = t^3 - t, \quad z = t^4 - t, \quad t \in \mathbb{R},$$

en trois points.

6.3.8 Montrer que la courbe $\Gamma \begin{cases} z^2 - xy - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ est un cercle.

6.3.9 Déterminer les droites tracées sur la surface S d'équation :

a) $xy + yz + zx + xyz = 0$

b) $x(x^2 + y^2 + z^2) - yz = 0$

c) $2x^3 - 3x^2y + z^2 = 0$

d) $y^2(y^2 + z^2) - (x^2 - 1)^2 = 0$.

Plan tangent à une surface, exercices 6.3.10 *à* 6.3.16

6.3.10 Pour les surfaces S suivantes, déterminer les points réguliers et former une équation cartésienne du plan tangent en tout point régulier :

a) $\begin{cases} x = u + v \\ y = uv \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}, (u,v) \in \mathbb{R}^2$

b) $\begin{cases} x = u + \dfrac{1}{u} \\ y = v + \dfrac{1}{v} \\ z = \dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u} \end{cases}, (u,v) \in (\mathbb{R}^*)^2.$

6.3.11 Soit S la surface de RP :

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad z = \frac{1}{u^2 + v^2},$$

$(u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Déterminer l'ensemble des points de S en lesquels le plan tangent est parallèle à $\overrightarrow{u}\,(1,1,1)$.

6.3.12 Former une équation cartésienne du (des) plan(s) tangent(s) à la surface S d'équation $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ et perpendiculaire(s) à la droite D d'équations $x = \dfrac{y}{3} = -\dfrac{z}{2}$.

6.3.13 Déterminer les plans tangents à la surface S d'équation $z^3 - xy = 0$ et contenant la droite D d'équations $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z + 3 \end{cases}$.

6.3.14 Soient Γ la courbe représentée paramétriquement par $(x = t,\ y = t^3,\ z = t^2 + 1)$ et S la surface réunion des droites parallèles au plan xOy et rencontrant Γ en deux points.

a) Former une représentation paramétrique et une équation cartésienne de S.

b) Quel est l'ensemble des points de S en lesquels le plan tangent contient O ?

6.3.15 Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $0 < a < c < b$, et les deux surfaces :

$$S_1 : \quad y^2(x^2 + z^2) = b^2x^2 + a^2z^2,$$

$$S_2 : \quad \frac{x^2}{c^2 - a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1.$$

Montrer que S_1 et S_2 se coupent orthogonalement suivant quatre droites.

6.3.16 Etudier la position locale de la surface $S: \quad z\cos x - y\sin x = 0$ par rapport à son plan tangent en $O(0,0,0)$.

Cylindres, exercices 6.3.17 *à* 6.3.20

6.3.17 Former une équation cartésienne du cylindre S de génératrices parallèles à $\overrightarrow{v}$ et de directrice Γ dans les exemples suivants :

a) $\overrightarrow{v}(1,0,1)$, $\quad \Gamma: \quad x = a\cos t, \quad y = a\sin t,$

$$z = a\sin t\cos t, \quad t\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}_+^* \text{ fixé}$$

b) $\overrightarrow{v}(0,1,1)$, $\quad \Gamma: \quad y+z=1,\ x^2+y^2=z.$

6.3.18 Former une équation cartésienne du cylindre S de section droite $\Gamma: \begin{cases} xyz = a^3 \\ x+y+z = a \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}_+^*$ fixé.

6.3.19 Reconnaître la surface S, dont on donne une équation cartésienne :

a) $\dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{y-z} + \dfrac{1}{z-x} = 0$

b) $\dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{y-z} + \dfrac{1}{z-x} = 1,$

et déterminer une section droite

c) $2^{x-y} + 2^{y-z} - 2^{z-x} - 1 = 0.$

6.3.20 Soient $a,b,c \in]0;+\infty[$,

$$S_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad S_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

a) Reconnaître S_1 et S_2.

b) Montrer que $S_1 \cap S_2$ est la réunion de deux courbes planes, dont on précisera la nature.

c) CNS sur (a,b,c) pour que $S_1 \cap S_2$ soit la réunion de deux cercles.

Cônes, exercices 6.3.21 *à* 6.3.25

6.3.21 Former une équation cartésienne du cône S de sommet Ω et de directrice Γ dans les exemples suivants :

a) $\Omega(0,0,0)$, $\quad \Gamma: \quad x=t,\ y=t^2,\ z=t^3,\ t\in\mathbb{R}^*$

b) $\Omega(1,-1,0)$, $\quad \Gamma: \quad y+z=1,\ x^2+y^2=z.$

6.3.22 Pour quelles valeurs de $\lambda\in\mathbb{R}$ la surface S_λ d'équation

$$x(\lambda-y) + y(\lambda-z) + z(\lambda-x) - \lambda = 0$$

est-elle un cône? Dans ces cas, préciser le sommet et une directrice.

6.3.23 Déterminer le lieu des sommets des cônes du second degré qui passent par une parabole donnée et par un point donné.

6.3.24 Montrer que le plan P d'équation $2x+3y-z=0$ coupe le cône S d'équation $x^2+y^2-z^2=0$ suivant deux droites D, D', et calculer $\measuredangle(D,D')$.

6.3.25 Etablir qu'il n'existe aucune droite de $\mathcal{E}_3$, ne passant pas par O, et tangente aux trois cônes :

$$S_1: x^2+y^2=z^2, \quad S_2: y^2+z^2=x^2, \quad S_3: z^2+x^2=y^2.$$

Surfaces de révolution, exercices 6.3.26 *à* 6.3.31

6.3.26 Former une équation cartésienne de la surface de révolution S obtenue en faisant tourner la courbe Γ $(x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ z=\cos 2t,\ t\in\mathbb{R})$ autour de $z'z$.

6.3.27 Soit $R\in\mathbb{R}_+^*$.

a) Former une équation cartésienne du cylindre de révolution S de rayon R et d'axe D d'équations

$$\begin{cases} x = z+2 \\ y = z+1 \end{cases}.$$

b) CNS sur R pour que $z'z$ soit tangente à S.

6.3.28 Former une équation cartésienne du cône de révolution S d'axe $O+\mathbb{R}(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})$ qui contient les axes de coordonnées.

6.3.29 Montrer que la surface

$$S: \quad x^4+y^4+z^4-4xyz(x+y+z)-1=0$$

est de révolution et préciser son axe.

6.3.30 Soit Γ la courbe d'équations $\begin{cases} x = z^2+2z \\ y = 2z^2 - z \end{cases}.$

a) Montrer que Γ est une parabole. Trouver son plan, son sommet, son axe.

b) Former une équation cartésienne de la surface de révolution obtenue en faisant tourner Γ autour de son axe.

6.3.31 On considère trois cylindres de révolution, de même rayon R $(R>0)$ et d'axes respectifs $x'x$, $y'y$, $z'z$. Calculer le volume intérieur à ces trois cylindres.

Quadriques, exercices 6.3.32 *à* 6.3.49

6.3.32 Pour chacune des quadriques S suivantes, préciser :

• un repère orthonormé direct dans lequel S admet une équation réduite

• une équation réduite de S

• la nature de S

a) $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz+3x-y+z+1=0$

b) $7x^2-2y^2+4z^2+4xy+20xz$

$$+16yz-36x+72y-108z+36=0$$

c) $x^2+y^2+z^2+2xy-1=0$

d) $x^2-4x-3y+4z-2=0.$

6.3.33 Soient $a,b,c,h \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de la surface S d'équation cartésienne :

$$(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2 \\ -2abxy-2bcyz-2cazx-h=0.$$

6.3.34 Soit S une quadrique (non réduite à des plans), de matrice, dans la base canonique, notée Q. Montrer que S est de révolution si et seulement si Q admet une valeur propre (au moins) double et non nulle.

6.3.35 Trouver une CNS sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour que la quadrique S d'équation :

$$a(x^2+2yz)+b(y^2+2zx)+c(z^2+2xy)=1$$

soit de révolution. (Utiliser l'exercice 6.3.34).

6.3.36 Soient $(a,h) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$D \begin{cases} y=0 \\ z=h \end{cases}, \quad D' \begin{cases} x=0 \\ z=-h \end{cases}, \quad H \begin{cases} z=0 \\ xy=a^2 \end{cases}.$$

a) Former une équation cartésienne de la surface S engendrée par les droites de l'espace rencontrant D,D',H.

b) CNS sur (a,h) pour que S soit de révolution. (Utiliser l'exercice 6.3.34).

6.3.37 Démontrer que toute équation du second degré symétrique en x,y,z représente une quadrique de révolution.

6.3.38 Quelle est la nature de la quadrique S d'équation :

$$(x-2y)^2+(2y-3z)^2+(3z-x)^2=1?$$

6.3.39 Soit S la surface d'équation

$$(x+y+z)^2-2x+2y+4z-1=0.$$

a) Reconnaître S.

b) Quel est le plan de symétrie P de S ?

c) Déterminer le plan tangent T à S le long de $P \cap S$.

6.3.40 Soient D une droite et P un plan tels que $D \not\parallel P$. Montrer que l'ensemble S des points de $\mathcal{E}_3$ équidistants de D et P est une quadrique dont on précisera la nature.

6.3.41 Soient D,D' deux droites non coplanaires.

Montrer que l'ensemble S des points de $\mathcal{E}_3$ équidistants de D et D' est une quadrique dont on précisera la nature.

6.3.42 Trouver toutes les quadriques contenant la courbe Γ :

$$x=t^3, \quad y=\frac{t^3-1}{t}, \quad z=\frac{t^3+1}{t}, \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

6.3.43 Soient $p \in \mathbb{R}_+^*$,

$$P \begin{cases} z=0 \\ y^2=2px \end{cases}, \quad D \begin{cases} x=\dfrac{p}{2}+z \\ y=p. \end{cases}.$$

Déterminer les quadriques contenant P,D, et tangentes en O au plan yOz.

6.3.44 Soient $h \in \mathbb{R}_+^*$, $P \begin{cases} y=x^2 \\ z=0 \end{cases}$, $D \begin{cases} z=h \\ x=0 \end{cases}$.

Déterminer les quadriques contenant P et D.

6.3.45 Former une équation cartésienne de la surface S engendrée par la rotation de la droite $D \begin{cases} z=0 \\ y=x+1 \end{cases}$ autour de la droite $\Delta \begin{cases} y=0 \\ x=z \end{cases}$.

6.3.46 Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. Trouver les plans tangents à $S : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ qui coupent les axes de coordonnées en trois points P,Q,R respectivement, tels que : $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{i}=\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{j}=\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{k}$.

6.3.47 Soient $(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $S_1 : x^2+y^2=2pz$, $S_2 : x^2+y^2=-2qz$.

a) Reconnaître S_1 et S_2.

b) Déterminer les courbes Γ de classe C^1 tracées sur S_1, telles que la tangente en tout point de Γ soit aussi tangente à S_2 (et ne passant pas par O).

6.3.48 Soient $(A,B,C,D,E,F) \in \mathbb{R}^6 - \{(0,\ldots,0)\}$, S le cône d'équation :

$$Ax^2+2Bxy+2Cxz+Dy^2+2Eyz+Fz^2=0.$$

Montrer qu'une CNS pour qu'il existe trois génératrices de S deux à deux orthogonales est :

$$A+D+F=0.$$

(Utiliser l'ex. 4.5.59).

6.3.49 Soient $a,b,c,a',b',c',a'',b'',c'' \in \mathbb{R}$, Q_1 et Q_2 les deux quadriques :

$$Q_1 : \quad (ax+by+cz)^2+(a'x+b'y+c'z)^2 \\ +(a''x+b''y+c''z)^2=1$$

$$Q_2 : \quad (ax+a'y+a''z)^2+(bx+b'y+b''z)^2 \\ +(cx+c'y+c''z)^2=1.$$

Montrer que Q_1 et Q_2 sont isométriques.

Surfaces réglées, surfaces développables, exercices 6.3.50 *à* 6.3.52

6.3.50 Montrer que la surface S de RP :

$x=\cos u - v\sin u, \quad y=\sin u + v\cos u,$

$z=u(u+2v), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$

est développable.

6.3.51 Montrer que la surface S de RP :

$$x = 3u + v, \quad y = 2u^2 + 2uv, \quad z = u^3 v, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

est développable et préciser l'arête de rebroussement.

6.3.52 Montrer que les surfaces suivantes sont réglées et non développables :

a) $x = \dfrac{uv}{u+v}, \quad y = u^3 + v^3, \quad z = u^2 + v^2,$

$$(u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } u + v \neq 0$$

b) $x^2 z^2 - (x^2 + y^2) = 0.$

6.3.53 Former une équation cartésienne du cylindre circonscrit à $S : x^2 + y^2 = z$ dans la direction de la droite

$$D : \quad x = y = z.$$

6.3.54 Former une équation cartésienne du cône de sommet $A(-2,-2,0)$ et circonscrit à

$$S : \quad xy + yz + zx = 1.$$

6.3.55 Soient $(a,k) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $S_1 : \ x^2 + y^2 = a^2$, $S_2 : \ x^2 + y^2 + z^2 = (1 + k^2)a^2$. Trouver les courbes Γ tracées sur S_1 et telles que la tangente en tout point de Γ soit aussi tangente à S_2.

6.3.56 Soient $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

et $S = \Big\{ M(x,y,z) \in \mathcal{E}_3 ; \ f(x,y,z) = 1 \Big\}$.

1) Montrer que S est une surface de révolution ; en déterminer l'axe et une méridienne en vraie grandeur.

2) Pour tous $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$ de $\mathcal{E}_3$, on définit un point $P(X,Y,Z)$ de $\mathcal{E}_3$ par :

$$X = xx' + yz' + zy', \quad Y = xy' + yx' + zz', \quad Z = xz' + yy' + zx'.$$

a) Montrer que, si $(M,M') \in S^2$, alors $P \in S$. Ceci permet de définir une loi de composition interne $*$ dans S.

b) Montrer que $(S,*)$ est un groupe abélien.

3) On note $\mathbb{U} = \{u \in \mathbb{C} ; \ |u| = 1\}$.

a) Montrer que, pour tout $(t,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{U}$, le point de $\mathcal{E}_3$ défini par

$$x = \frac{1}{3}\Big(\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^t (u + \overline{u})\Big), \quad y = \frac{1}{3}\Big(\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^t (\mathrm{j}\overline{u} + \mathrm{j}^2 u)\Big),$$

$z = \dfrac{1}{3}\Big(\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^t (\mathrm{j}u + \mathrm{j}^2 \overline{u})\Big)$ est sur S.

b) Etablir que l'application $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{U} \longrightarrow S$ ainsi définie est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R} \times \mathbb{U}$ sur S, et un isomorphisme de $\mathbb{R} \times \mathbb{U}$ (où $\mathbb{R}$ est muni de $+$ et $\mathbb{U}$ est muni de $\cdot$) sur $(S,*)$.

c) Vérifier que le point M_1 de coordonnées $\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^3}{3\mathrm{e}^2}, \dfrac{1+\mathrm{e}^3}{3\mathrm{e}^2}, \dfrac{1-2\mathrm{e}^3}{3\mathrm{e}^2}\right)$ est sur S et calculer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les coordonnées du point M_n de S défini par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad M_{n+1} = M_n * M_1.$$

Solutions des exercices

Solutions des exercices

Chapitre 1

1.1.1

1) Soit $x \in (A+B) \cap C$.

Il existe $a \in A, b \in B$ tels que $x = a + b$, et $x \in C$.

On a : $a = x - b$, $x \in C$, $b \in B \subset C$, donc $a \in C$. Ainsi, $x = a + b$, $a \in A \cap C$, $b \in B$, donc $x \in (A \cap C) + B$.

Ceci montre : $(A+B) \cap C \subset (A \cap C) + B$.

2) Réciproquement, soit $x \in (A \cap C) + B$. Il existe $y \in A \cap C$ et $b \in B$ tels que $x = y + b$.

On a : $y \in A \cap C \subset A$ et $b \in B$, donc $x \in A + B$.

D'autre part : $y \in A \cap C \subset C$ et $b \in B \subset C$,

donc $x = y + b \in C$.

D'où : $x \in (A+B) \cap C$.

Ceci montre : $(A \cap C) + B \subset (A+B) \cap C$.

On conclut : $(A+B) \cap C = (A \cap C) + B$.

1.2.1

Considérons l'application

$$u : \mathrm{Ker}\,(f+g) \longrightarrow F,\ x \longmapsto u(x) = f(x),$$

restriction de f à $\mathrm{Ker}\,(f+g)$ au départ.

Il est clair que u est linéaire.

• Déterminons $\mathrm{Ker}\,(u)$.

On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}\,(u) &\iff \begin{cases} x \in \mathrm{Ker}\,(f+g) \\ f(x) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \\ &\iff x \in \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g), \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g).$$

• Étudions $\mathrm{Im}\,(u)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}\,(u)$. Il existe $x \in \mathrm{Ker}\,(f+g)$ tel que $y = u(x) = f(x)$. On a alors : $y = f(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$.

D'autre part, $(f+g)(x) = 0$, donc :

$$y = f(x) = -g(x) = g(-x) \in \mathrm{Im}\,(g).$$

Ceci montre :

$$\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g).$$

• En appliquant le théorème du rang à u, on obtient :

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Ker}\,(f+g)) &= \dim(\mathrm{Ker}\,(u)) + \dim(\mathrm{Im}\,(u)) \\ &\leqslant \dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)). \end{aligned}$$

1.2.2

a) 1) Supposons $\mathrm{Id}_F - f \circ g$ injective.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - g \circ f)$.

On a donc $(\mathrm{Id}_E - g \circ f)(x) = 0$ c'est-à-dire $g \circ f(x) = x$. D'où :

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id}_F - f \circ g)(f(x)) &= f(x) - f((g \circ f)(x)) \\ &= f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Id}_F - f \circ g$ est injective, il s'ensuit $f(x) = 0$, puis $x = g \circ f(x) = g(0) = 0$.

Ceci montre : $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E - g \circ f) = \{0\}$,

et donc $\mathrm{Id}_E - g \circ f$ est injective.

2) La réciproque s'obtient en appliquant *1)* au couple (g, f) à la place de (f, g).

b) Supposons $\mathrm{Id}_F - f \circ g$ surjective.

• Montrons :

$$\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - g \circ f).$$

Soit $y \in \mathrm{Im}\,(g)$. Il existe $x \in F$ tel que $y = g(x)$. Puisque $\mathrm{Id}_F - f \circ g$ est surjective, il existe $t \in E$ tel que :

$$x = (\mathrm{Id}_F - f \circ g)(t) = t - f \circ g(t).$$

D'où :

$$\begin{aligned} y = g(x) &= g(t - (f \circ g)(t)) = g(t) - g \circ f \circ g(t) \\ &= (\mathrm{Id}_E - g \circ f)(g(t)) \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - g \circ f). \end{aligned}$$

• Soit $z \in E$.

On a :

$$z = (\mathrm{Id}_E - g \circ f)(z) + g(f(z)).$$

Et :

$$\begin{cases} (\mathrm{Id}_E - g \circ f)(z) \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - g \circ f) \\ g(f(z)) \in \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - g \circ f), \end{cases}$$

d'où :

$$z \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - g \circ f).$$

On conclut que $\mathrm{Id}_E - g \circ f$ est surjective.

2) La réciproque s'obtient en appliquant *1)* au couple (g, f) à la place du couple (f, g).

c) En utilisant *a)* et *b)* :

$$\mathrm{Id}_F - f \circ g \ \text{ bijective} \iff \begin{cases} \mathrm{Id}_F - f \circ g \ \text{ injective} \\ \mathrm{Id}_F - f \circ g \ \text{ surjective} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{Id}_E - g \circ f \ \text{injective} \\ \mathrm{Id}_E - g \circ f \ \text{surjective} \end{cases} \iff \mathrm{Id}_E - g \circ f \ \text{ bijective.}$$

1.2.3

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

On suppose $f \in \mathcal{GL}(E)$.

Soient A, B deux sev de E supplémentaires dans E.

Alors :

$$f(A) + f(B) = f(A + B) = f(E) = E,$$

et, puisque f est injective :

$$f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}.$$

Donc $f(A)$ et $f(B)$ sont des sev supplémentaires dans E.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :

On suppose que, pour tous sev A, B supplémentaires dans E, les sev $f(A), f(B)$ sont supplémentaires dans E.

• Puisque $\{0\}$ et E sont supplémentaires dans E, $f(\{0\})$ et $f(E)$ sont supplémentaires dans E, d'où :

$$E = f(\{0\}) + f(E) = \{0\} + f(E) = \mathrm{Im}\,(f),$$

et donc f est surjective.

• Puisque $f \in \mathcal{L}(E)$ est surjective et que E est de dimension finie, on conclut $f \in \mathcal{GL}(E)$.

1.2.4

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

Supposons qu'il existe deux projecteurs p, q de E tels que :

$$f = p - q \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Im}\,(q).$$

On a, pour tout $x \in E$, $q(x) \in \mathrm{Im}\,(q) = \mathrm{Im}\,(p)$, donc $p(q(x)) = q(x)$, ce qui montre $p \circ q = p$.

De même, $q \circ p = p$.

On déduit :

$$f^2 = (p - q)^2 = p^2 - p \circ q - q \circ p + q^2 = 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :

Supposons $f^2 = 0$.

Puisque E est de dimension finie, le sev $\mathrm{Ker}\,(f)$ de E admet au moins un supplémentaire dans E ; il existe donc un projecteur p de E tel que $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}\,(f)$.

Notons $q = p - f$, de sorte que $f = p - q$.

• On a $\mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$, donc $f \circ p = 0$.

• Comme $f^2 = 0$, on a, en notant $e = \mathrm{Id}_E$,

$$\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}\,(e - p),$$

donc $(e - p) \circ f = 0$, d'où $p \circ f = f$.

• On a alors :

$$\begin{aligned} q^2 &= (p - f)^2 \\ &= p^2 - p \circ f - f \circ p + f^2 = p - f = q, \end{aligned}$$

donc q est un projecteur de E.

• Soit $x \in \mathrm{Im}\,(p)$.

On a :

$$x = p(x) \in \mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}\,(f),$$

donc $f(x) = 0$, puis :

$$q(x) = (p - f)(x) = p(x) - f(x) = x,$$

d'où $x \in \mathrm{Im}\,(q)$.

Ceci montre : $\mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Im}\,(q)$.

• Soit $x \in \mathrm{Im}\,(q)$. On a :

$$x = q(x) = p(x) - f(x),$$

d'où :

$$p(x) = p^2(x) - p \circ f(x) = p(x) - f(x),$$

donc $f(x) = 0$, puis :

$$x = q(x) = p(x) - f(x) = p(x) \in \mathrm{Im}\,(p),$$

ce qui montre : $\mathrm{Im}\,(q) \subset \mathrm{Im}\,(p)$.

Finalement, p et q sont des projecteurs de E, $f = p - q$ et $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Im}\,(q)$.

1.3.1

a) Puisque $\mathrm{Im}(f) = Ku$ et $u \neq 0$, pour tout x de$E$, il existe $\lambda_x \in K$ unique tel que $f(x) = \lambda_x u$, ce qui permet de définir une application $\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow K. \\ x \longmapsto \lambda_x \end{array}$

Si $\lambda \in K$, $(x, y) \in E^2$, alors :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + y)u = f(\lambda x + y) &= \lambda f(x) + f(y) \\ &= \lambda\varphi(x)u + \varphi(y)u \\ &= \Big(\lambda\varphi(x) + \varphi(y)\Big)u, \end{aligned}$$

donc $\quad \varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$.

Ainsi : $\quad \varphi \in E^*$.

b) • $\forall x \in E$,

$$f^2(x) = \varphi(\varphi(x)u)u = \varphi(u)\varphi(x)u = \varphi(u)f(x).$$

En notant $\alpha = \varphi(u)$, on a donc : $f^2 = \alpha f$.

• Si $(\alpha, \beta) \in K^2$ vérifie $f^2 = \alpha f = \beta f$, alors $\alpha = \beta$, puisque $f \neq 0$.

• Chercher un éventuel inverse de $f - e$ sous la forme

$$\lambda f + \mu e, \quad (\lambda, \mu) \in K^2 \ (e = \mathrm{Id}_E).$$

Réponse :

$$\forall \alpha \in K - \{1\}, (f - \mathrm{Id}_E)^{-1} = \frac{1}{\alpha - 1} f - \mathrm{Id}_E.$$

1.3.2

1) Vérifier que l'application $u : \begin{array}{l}(K[X])^* \longrightarrow K^{\mathbb{N}} \\ \varphi \longmapsto (\varphi(X^n))_{n\in\mathbb{N}}\end{array}$ est linéaire.

2) Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, considérons l'application linéaire $\varphi : K[X] \longrightarrow K$ définie sur la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(X^n) = x_n$. Il est clair que l'application $v : \begin{array}{l}K^{\mathbb{N}} \longrightarrow (K[X])^* \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \varphi\end{array}$ ainsi définie est linéaire.

3) Vérifier : $\quad v \circ u = \mathrm{Id}_{(K[X])^*}$ et $u \circ v = \mathrm{Id}_{K^{\mathbb{N}}}$.

1.3.3

D'abord, $F \cap H$ est bien un sev de F.

Puisque $F \not\subset H$, il existe $a \in F$ tel que $a \notin H$.

Comme $a \notin H$ et que H est un hyperplan de E, d'après la Remarque du § 1.3.2, on a : $E = H \oplus (Ka)$.

Montrons : $F = (F \cap H) \oplus (Ka)$.

• $F \cap H \subset F$ et $Ka \subset F$, donc $(F \cap H) + (Ka) \subset F$.

• $(F \cap H) \cap (Ka) = F \cap \big(H \cap (Ka)\big) = F \cap \{0\} = \{0\}$.

• Soit $x \in F$.

Comme $x \in F \subset E = H \oplus (Ka)$, il existe $y \in H,\ \lambda \in K$ tels que : $x = y + \lambda a$.

On a : $y = x - \lambda a$, $x \in F$, $a \in F$ et F est un sev de E, donc $y \in F$.

Alors : $x = y + \lambda a$, $y \in F \cap H$, $\lambda a \in Ka$,

donc : $x \in (F \cap H) + (Ka)$.

Ceci montre : $(F \cap H) + (Ka) \subset F$.

On obtient : $(F \cap H) \oplus (Ka) = F$,

donc $F \cap H$ est un hyperplan de F.

1.3.4

Réponse : La base préduale de $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est (V_1,V_2,V_3), où :

$$V_1 = \frac{1}{8}(-3,3,2),\ V_2 = \frac{1}{8}(1,-1,2),\ V_3 = \frac{1}{4}(5,-1,-6)$$

1.3.5

a) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \beta & 1 & \alpha^2 \end{vmatrix} = -(1-\alpha\beta)^2.$

Réponse : $1 - \alpha\beta \neq 0$.

b) **Réponse :**

La base préduale de $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est (V_1,V_2,V_3), où :

$$V_1 = \frac{1}{(1-\alpha\beta)^2}\Big(1-\alpha^4,\ \alpha^3-\beta,\ -\alpha(1-\alpha\beta)\Big),$$

$$V_2 = \frac{1}{(1-\alpha\beta)^2}(\alpha^3-\beta,\ \beta^2-\alpha^2,\ 1-\alpha\beta),$$

$$V_3 = \frac{1}{1-\alpha\beta}(-\alpha,1,0).$$

1.3.6

1) Puisque $(\forall j \in \{0,\dots,n\}, \deg(e_j) = j)$, $(e_0,\dots,e_n)$ est une famille de polynômes à degrés consécutifs, donc est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ (cf. Algèbre PCSI-PTSI, 5.1.4 Rem).

2) Soit $(i,j) \in \{0,\dots,n\}^2$. On a :

$$\begin{cases} i < j \Longrightarrow e_j^{(i)} = \dfrac{j!}{(j-i)!}(X-a)^{j-i} \Longrightarrow \varphi_i(e_j) = \dfrac{1}{i!}e_j^{(i)}(a) = 0 \\ i = j \Longrightarrow e_j^{(j)} = i! \Longrightarrow \varphi_i(e_j) = \dfrac{1}{i!}e_j^{(i)}(a) = 1 \\ i > j \Longrightarrow e_j^{(i)} = 0 \Longrightarrow \varphi_i(e_j) = \dfrac{1}{i!}e_j^{(i)}(a) = 0. \end{cases}$$

Ainsi : $\quad \forall (i,j) \in \{0,\dots,n\}^2,\quad \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}.$

Soit $(\alpha_0,\dots,\alpha_n) \in K^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\varphi_i = 0$.

Alors, pour tout j de $\{0,\dots,n\}$:

$$0 = \left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\varphi_i\right)(e_j) = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\delta_{ij} = \alpha_j,$$

ce qui montre que $(\varphi_0,\dots,\varphi_n)$ est libre.

Comme $\dim(E^*) = \dim(E) = n+1$, on conclut que $(\varphi_0,\dots,\varphi_n)$ est une base de E^*.

3) Puisque : $\forall (i,j) \in \{0,\dots,n\}^2, \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$, $(\varphi_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est la base duale de $(e_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$.

4) Pour tout P de E:

$$P = \sum_{i=0}^{n} e_i^*(P)e_i = \sum_{i=0}^{n}\varphi_i(P)e_i = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}P^{(i)}(a)(X-a)^i,$$

ce qui redonne la formule de Taylor pour les polynômes (cf. Algèbre PCSI-PTSI, 5.1.7 Th.).

1.3.7

1) Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$. On a : $\forall \lambda \in K,\ \forall X,Y \in \mathbf{M}_n(K)$, $\mathrm{tr}\,(A(\lambda X + Y)) = \mathrm{tr}(\lambda AX + AY) = \lambda\mathrm{tr}(AX) + \mathrm{tr}(AY)$.

Ainsi, l'application $\begin{array}{l}\mathbf{M}_n(K) \longrightarrow K \\ X \longmapsto \mathrm{tr}(AX)\end{array}$ est linéaire, c'est-à-dire appartient à $\big(\mathbf{M}_n(K)\big)^*$.

Ceci permet de définir une application

$$\theta : \begin{array}{l}\mathbf{M}_n(K) \longrightarrow (\mathbf{M}_n(K))^*. \\ A \longmapsto (X \longmapsto \mathrm{tr}(AX))\end{array}$$

2) Soient $\alpha \in K$, $A,B \in \mathbf{M}_n(K)$. On a : $\forall X \in \mathbf{M}_n(K)$,

$$\begin{aligned}(\theta(\alpha A + B))\,(X) &= \mathrm{tr}\,((\alpha A + B)X) \\ &= \alpha\mathrm{tr}(AX) + \mathrm{tr}(BX) = \alpha(\theta(A))(X) + (\theta(B))(X) \\ &= (\alpha\theta(A) + \theta(B))(X),\end{aligned}$$

donc : $\quad \theta(\alpha A + B) = \alpha\theta(A) + \theta(B)$,

et ainsi θ est linéaire.

3) Soit $A \in \mathbf{M}_n(K)$ telle que $\theta(A) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall X \in \mathbf{M}_n(K),\quad \mathrm{tr}(AX) = 0.$$

Soit $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$; on a donc $\mathrm{tr}(AE_{ij}) = 0$. Mais, en notant $A = (a_{kl})_{kl}$:

$$AE_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & a_{1i} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & a_{ni} & \end{pmatrix} \\ j^{\text{ème}} \text{ colonne} \end{array}, \quad \text{d'où } \mathrm{tr}(AE_{ij}) = a_{ji}.$$

Ceci montre $A = 0$, et donc θ est injective.

4) Puisque $\theta : \mathbf{M}_n(K) \longrightarrow (\mathbf{M}_n(K))^*$ est linéaire injective, et que $\mathbf{M}_n(K)$ et $(\mathbf{M}_n(K))^*$ sont de dimension finie et de même dimension n^2, on conclut que θ est un isomorphisme de K-ev.

1.3.8

a) Il existe $(\alpha_1,\dots,\alpha_p) \in K^p$ tel que $\varphi_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i$.

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$.

On a alors : $\forall i \in \{1,\dots,p\}, \quad \varphi_i(x) = 0$, d'où :

$$\varphi_{p+1}(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i(x) = 0, \quad \text{et donc } x \in \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1}).$$

Ceci montre $\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1})$, et donc

$$\bigcap_{i=1}^{p+1} \mathrm{Ker}(\varphi_i) = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_i).$$

b) Quitte à permuter $\varphi_1,\dots,\varphi_q$, on peut supposer que $(\varphi_1,\dots,\varphi_r)$ est libre et que $\varphi_{r+1},\dots,\varphi_q$ se décomposent linéairement sur $\varphi_1,\dots,\varphi_r$.

D'après *a)*, on a : $\bigcap_{i=1}^{q} \mathrm{Ker}(\varphi_i) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$.

Puisque $(\varphi_1,\dots,\varphi_r)$ est libre, le théorème de la base incomplète montre qu'il existe $\psi_{r+1},\dots,\psi_n \in E^*$ tels que $(\varphi_1,\dots,\varphi_r,\psi_{r+1},\dots,\psi_n)$ soit une base de E^*.

Considérons sa base préduale $(e_1,\dots,e_n)$.

Soient $x \in E$, $(x_1,\dots,x_n) \in K^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

On a :

$$x \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \iff \Big(\forall i \in \{1,\dots,r\},\ e_i^*(x) = 0\Big)$$
$$\iff \Big(\forall i \in \{1,\dots,r\},\ x_i = 0\Big).$$

Ainsi, $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i) = \mathrm{Vect}(e_{r+1},\dots,e_n)$, et donc :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i)\right) = n - r.$$

c) $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ libre $\iff \mathrm{rg}(\varphi_1,\dots,\varphi_n) = n$

$$\iff \dim\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_i)\right) = 0$$
$$\iff \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_i) = \{0\}.$$

1.4.1

1) Soit X convenant. On a :

$$3X + 2\,{}^{\mathrm{t}}X = \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{I}_5,$$

d'où, en transposant :

$$3\,{}^{\mathrm{t}}X + 2X = \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{I}_5,$$

puis, en combinant pour éliminer ${}^{\mathrm{t}}X$:

$$5X = \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{I}_5.$$

Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\quad X = \alpha\,\mathrm{I}_5$.

2) Réciproquement, soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $X = \alpha\,\mathrm{I}_5$. On a alors :

$$3X + 2\,{}^{\mathrm{t}}X = 5\alpha\,\mathrm{I}_5$$

et

$$\mathrm{tr}(X)\,\mathrm{I}_5 = 5\alpha\,\mathrm{I}_5.$$

Réponse : $\mathcal{S} = \left\{\alpha\,\mathrm{I}_5\,;\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

1.4.2

On a :

$$0 = \mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\,\mathrm{tr}(p_i) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\,\mathrm{rg}(p_i).$$

Comme les α_i sont tous > 0, et les $\mathrm{rg}(p_i)$ sont tous $\geqslant 0$, il en résulte :

$$\forall i \in \{1,\dots,N\},\ \mathrm{rg}(p_i) = 0,$$

et donc :

$$\forall i \in \{1,\dots,N\},\ p_i = 0.$$

1.4.3

On a :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ f_i \circ f_i = f_i,$$

donc $f_1,\dots,f_n$ sont des projecteurs de E.

Notons $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$. On a :

$$f \circ f = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} f_j\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} f_i \circ f_j$$
$$= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \delta_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{n} f_i = f,$$

donc f est un projecteur.

On a alors :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(f_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rg}(f_i).$$

Mais les f_i sont tous $\neq 0$, donc :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \mathrm{rg}(f_i) \geqslant 1,$$

et, d'autre part :

$$\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E) = n.$$

Il en résulte que, dans la chaîne d'inégalités vue plus haut, il y a égalité partout, donc :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \mathrm{rg}(f_i) = 1.$$

1.4.4

Un calcul direct sur une matrice carrée A d'ordre 2 quelconque montre que :

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)\,\mathrm{I}_2 = 0.$$

(On peut aussi utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, voir plus loin § 3.5.3).

Comme $\mathrm{tr}(A) \neq 0,$ on déduit A en fonction de I_2 et A^2 :

$$A = \frac{1}{\mathrm{tr}(A)}\Big(A^2 + \det(A)\,\mathrm{I}_2\Big).$$

Puisque A^2 et I_2 commutent avec B, il en résulte que A commute avec B :

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{\mathrm{tr}(A)}\Big(A^2 + \det(A)\,\mathrm{I}_2\Big)B \\ &= \frac{1}{\mathrm{tr}(A)}\Big(A^2B + \det(A)B\Big) \\ &= \frac{1}{\mathrm{tr}(A)}\Big(BA^2 + \det(A)B\Big) \\ &= B\frac{1}{\mathrm{tr}(A)}\Big(A^2 + \det(A)\,\mathrm{I}_2\Big) = BA. \end{aligned}$$

1.4.5

Notons plus simplement I pour I_n.

Si (X,Y) convient, alors il existe $(a,b) \in K^2$ tel que :

$$\begin{cases} X = I + aA \\ Y = I + bB. \end{cases}$$

En reportant dans le système de l'énoncé, on a :

$$\begin{cases} X = I + \mathrm{tr}(Y)A \\ Y = I + \mathrm{tr}(X)B \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} I + aA = I + \mathrm{tr}(I+bB)A \\ I + bB = I + \mathrm{tr}(I+aA)B \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} aA = \Big(n + b\,\mathrm{tr}(B)\Big)A \\ bB = \Big(n + a\,\mathrm{tr}(A)\Big)B \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = n + b\,\mathrm{tr}(B) \\ b = n + a\,\mathrm{tr}(A) \end{cases}$$

et on résout ce système de deux équations à deux inconnues scalaires, qui est un système de Cramer, puisque l'énoncé suppose $1 - \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B) \neq 0.$

Réponse : Il y a une solution et une seule :

$$\begin{cases} X = I + \dfrac{n\Big(1+\mathrm{tr}(B)\Big)}{1 - \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)}A \\[2ex] Y = I + \dfrac{n\Big(1+\mathrm{tr}(A)\Big)}{1 - \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)}B. \end{cases}$$

1.4.6

Notons $H = AB - BA$. Par hypothèse, $\mathrm{rg}(H) \leqslant 1$. D'après l'exercice 8.1.30 *b)* du volume Algèbre PCSI-PTSI, on a alors : $H^2 = \mathrm{tr}(H)H$. Mais :

$$\mathrm{tr}(H) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0.$$

D'où $H^2 = 0$ et donc $\mathrm{Im}(H) \subset \mathrm{Ker}(H)$.

1.4.7

a) Soit $N \in G$. Puisque G est un groupe, l'application $M \longmapsto MN$ est une bijection de G dans lui-même, donc :

$$PN = \Big(\frac{1}{\nu}\sum_{M\in G} M\Big)N = \frac{1}{\nu}\sum_{M\in G} MN = \frac{1}{\nu}\sum_{M'\in G} M' = P.$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} P^2 &= P\Big(\frac{1}{\nu}\sum_{M\in G} M\Big) = \frac{1}{\nu}\sum_{M\in G} PM \\ &= \frac{1}{\nu}\sum_{M\in G} P = \frac{1}{\nu}\nu P = P. \end{aligned}$$

b) D'après *a)*, P est une matrice de projecteur, donc :

$$\mathrm{rg}(P) = \mathrm{tr}(P) = \mathrm{tr}\Big(\frac{1}{\nu}\sum_{M\in G} M\Big) = \frac{1}{\nu}\sum_{M\in G}\mathrm{tr}(M) = 0,$$

d'où $P = 0$, puis $\displaystyle\sum_{M\in G} M = \nu P = 0.$

1.4.8

D'après 2.7.5 Prop. 1 :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C) \neq 0,$$

donc $M \in \mathbf{GL}_{n+p}(K)$.

D'après 1.4.2 3) p. 31, M^{-1} est de la forme $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & X \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$, où $X \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$. On a :

$$MM^{-1} = \mathrm{I}_{n+p} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & X \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow AX + BC^{-1} = 0 \Longleftrightarrow X = -A^{-1}BC^{-1}.$$

Réponse : $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$

1.4.9

1) Montrons que G est un sev de $\mathcal{L}(F,E)$.

- $0 \in G$.
- Si $\lambda \in K$ et $g_1,g_2 \in G$, alors

$$\begin{cases} (\lambda g_1 + g_2)\circ f = \lambda g_1 \circ f + g_2 \circ f = 0 \\ f \circ (\lambda g_1 + g_2) = \lambda f \circ g_1 + f \circ g_2 = 0 \end{cases},$$

donc $\lambda g_1 + g_2 \in G$.

2) D'après le théorème du rang :

$$\dim\Big(\mathrm{Ker}(f)\Big) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = p - r.$$

Le sev $\mathrm{Ker}(f)$ de E admet au moins une base $(e_{r+1},\ldots,e_p)$ et, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_1,\ldots,e_r \in E$ tels que $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_p)$ soit une base de E.

Le sev $\mathrm{Im}(f)$ de F admet au moins une base $(f_1,\ldots,f_r)$ et, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $f_{r+1},\ldots,f_n \in F$ tels que $\mathcal{C} = (f_1,\ldots,f_n)$ soit une base de F.

On a, pour tout g de $\mathcal{L}(F,E)$:

$$g \in G \iff \begin{cases} g \circ f = 0 \\ f \circ g = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g) \\ \operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Ker}(f) \end{cases}$$

$$\iff \left(\exists M \in \mathbf{M}_{p-r,n-r}(K), \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \right),$$

et donc : $\dim(G) = \dim\left(\mathbf{M}_{p-r,n-r}(K)\right)$.

Réponse : $\dim(G) = (p-r)(n-r)$.

1.4.10

D'après Algèbre PCSI-PTSI, 8.2.3 2) Prop. 2, il existe $P,Q \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que $C = Q^{-1}\mathrm{J}_r P$, où $r = \operatorname{rg}(C)$ et $\mathrm{J}_r = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En notant $P' = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_{n+p}(K)$

et $Q' = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_{n+p}(K)$, on a :

$$Q'\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} P'^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & BP^{-1} \\ 0 & \mathrm{J}_r \end{pmatrix},$$

donc (cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.1.6 Prop. 4) :

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & BP^{-1} \\ 0 & \mathrm{J}_r \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \cdots \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$= \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \cdots \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right) = n + r.$$

$$\underset{\longleftrightarrow}{n} \qquad \underset{\longleftrightarrow}{r}$$

1.4.11

a) Remarquer :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & A \\ B & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n - AB & 0 \\ B & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$$

et $$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & A \\ B & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ B & \mathrm{I}_p - BA \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_{n+p}(K)$, on en déduit (cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.1.6 Prop. 4) :

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n - AB & 0 \\ B & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & A \\ B & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ B & \mathrm{I}_p - BA \end{pmatrix}.$$

D'autre part (exercice 1.4.10) :

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n - AB & 0 \\ B & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = p + \operatorname{rg}(\mathrm{I}_n - AB)$$

et $$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ B & \mathrm{I}_p - BA \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg}(\mathrm{I}_p - BA).$$

b) $\operatorname{rg}(\mathrm{I}_n - AB) = n - p \iff \operatorname{rg}(\mathrm{I}_p - BA) = 0$
$\iff \mathrm{I}_p - BA = 0.$

1.4.12

D'après Algèbre PCSI-PTSI, 8.2.3 2) Prop.2, il existe $P,Q \in \mathbf{GL}_n(K)$, $R,S \in \mathbf{GL}_p(K)$ telles que

$$A = Q^{-1}\mathrm{J}_{n,r}P \quad \text{et} \quad B = S^{-1}\mathrm{J}_{p,s}R,$$

où $r = \operatorname{rg}(A)$, $s = \operatorname{rg}(B)$, $\mathrm{J}_{n,r} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$,

$$\mathrm{J}_{p,s} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_p(K).$$

On a alors $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_{n+p}(K)$,

$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_{n+p}(K)$ et :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{J}_{n,r} & 0 \\ 0 & \mathrm{J}_{p,s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ O & R \end{pmatrix},$$

d'où : $$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r + s.$$

1.4.13

On a :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & X \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puis :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ Y & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & AX \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX \\ YA & YAX \end{pmatrix},$$

donc :

$$\begin{pmatrix} A & AX \\ YA & YAX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ Y & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & X \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}.$$

Les matrices $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ Y & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & X \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$ sont triangulaires à termes diagonaux tous non nuls (car égaux à 1), donc sont inversibles.

D'après § 1.2.3 prop. p. 11, on conclut :

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & AX \\ YA & YAX \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(A).$$

1.4.14

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

On suppose $\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.

Il est clair que (sans hypothèse sur f et g) :

$$\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g).$$

On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(f+g) &= \dim(\operatorname{Im}(f+g)) \leqslant \dim(\operatorname{Im}(f)+\operatorname{Im}(g))\\ &= \operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g)-\dim(\operatorname{Im}(f)\cap\operatorname{Im}(g))\\ &\leqslant \operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g)=\operatorname{rg}(f+g).\end{aligned}$$

Les inégalités précédentes sont donc toutes des égalités.

Il en résulte :

$$\operatorname{Im}(f)\cap\operatorname{Im}(g)=\{0\} \text{ et } \operatorname{Im}(f)+\operatorname{Im}(g)=\operatorname{Im}(f+g).$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

On suppose :

$$\operatorname{Im}(f)+\operatorname{Im}(g)=\operatorname{Im}(f+g) \text{ et } \operatorname{Im}(f)\cap\operatorname{Im}(g)=\{0\}.$$

Il est clair que (sans hypothèse sur f et g) :

$$\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Ker}(g)\subset\operatorname{Ker}(f+g).$$

On a :

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Ker}(f+g)) &= \dim(E)-\dim(\operatorname{Im}(f+g))\\ &= \dim(E)-\dim(\operatorname{Im}(f)\oplus\operatorname{Im}(g))\\ &= \dim(E)-\dim(\operatorname{Im}(f))-\dim(\operatorname{Im}(g))\\ &= \dim(\operatorname{Ker}(f))+\dim(\operatorname{Ker}(g))-\dim(E)\\ &= \dim(\operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Ker}(g))\\ &\qquad +\dim(\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Ker}(g))-\dim(E),\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \dim(\operatorname{Ker}(f+g))-\dim(\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Ker}(g))\\ &= \dim(\operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Ker}(g))-\dim(E)\leqslant 0.\end{aligned}$$

Les inégalités précédentes sont donc toutes des égalités.

Il en résulte :

$$\operatorname{Ker}(f+g)=\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Ker}(g) \quad\text{et}\quad \operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Ker}(g)=E.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

On suppose : $\operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Ker}(g)=E$

et $\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Ker}(g)=\operatorname{Ker}(f+g)$.

On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(f+g) &= \dim(E)-\dim(\operatorname{Ker}(f+g))\\ &= \dim(E)-\dim(\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Ker}(g))\\ &= \dim(E)-\dim(\operatorname{Ker}(f))-\dim(\operatorname{Ker}(g))\\ &\qquad +\dim(\operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Ker}(g))\\ &= (\dim(E)-\dim(\operatorname{Ker}(f)))\\ &\qquad +(\dim(E)-\dim(\operatorname{Ker}(g)))\\ &= \operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g).\end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iv)

On suppose :

$$\operatorname{Im}(f)+\operatorname{Im}(g)=\operatorname{Im}(f+g)$$

et $\operatorname{Im}(f)\cap\operatorname{Im}(g)=\{0\}$; on a donc (cf. ci-dessus) :

$$\operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Ker}(g)=E \quad\text{et}\quad \operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Ker}(g)=\operatorname{Ker}(f+g).$$

Notons $n=\dim(F)$, $p=\dim(E)$, $r=\operatorname{rg}(f)$, $s=\operatorname{rg}(g)$.

Le sev $\operatorname{Im}(f)$ de F admet au moins une base $\mathcal{C}_1=(f_1,\dots,f_r)$ et le sev $\operatorname{Im}(g)$ de F admet au moins une base $\mathcal{C}_2=(f_{r+1},\dots,f_{r+s})$.

Comme $\operatorname{Im}(f)\cap\operatorname{Im}(g)=\{0\}$, $\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2$ est libre.

D'après le théorème de la base incomplète, il existe

$$\mathcal{C}_3=(f_{r+s+1},\dots,f_n)\in F^{n-r-s}$$

tel que $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2\cup\mathcal{C}_3$ soit une base de F.

• Soit $i\in\{1,\dots,r\}$. Il existe $x_i\in E$ tel que $f_i=f(x_i)$, puis, comme $E=\operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Ker}(g)$, il existe $u_i\in\operatorname{Ker}(f)$ et $e_i\in\operatorname{Ker}(g)$ tels que $x_i=u_i+e_i$. On a alors :

$$e_i\in\operatorname{Ker}(g) \quad\text{et}\quad f(e_i)=f(x_i)=f_i.$$

Notons $\mathcal{B}_1=(e_1,\dots,e_r)$.

• Soit $i\in\{r+1,\dots,r+s\}$. Il existe $x_i\in E$ tel que $f_i=g(x_i)$, puis il existe $e_i\in\operatorname{Ker}(f)$, $v_i\in\operatorname{Ker}(g)$ tels que $x_i=e_i+v_i$. On a alors :

$$e_i\in\operatorname{Ker}(f) \quad\text{et}\quad g(e_i)=g(x_i)=f_i.$$

Notons $\mathcal{B}_2=(e_{r+1},\dots,e_{r+s})$.

Comme $\dim(\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Ker}(g))=\dim(\operatorname{Ker}(f+g))$ $=p-\operatorname{rg}(f+g)=p-r-s$, le sev $\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Ker}(g)$ de E admet au moins une base $\mathcal{B}_3=(e_{r+s+1},\dots,e_p)$.

Montrons que $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup\mathcal{B}_3$ est une base de E.

Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in K^p$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i=0$.

En appliquant f et g, on obtient :

$$0=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i f_i \quad\text{et}\quad 0=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i g(e_i)=\sum_{i=r+1}^{r+s}\lambda_i f_i,$$

d'où $\lambda_i=0$ pour tout i de $\{1,\dots,r+s\}$.

Alors $\displaystyle\sum_{i=r+s+1}^{p}\lambda_i e_i=0$ et donc (puisque $\mathcal{C}_3$ est libre) $\lambda_i=0$ pour tout i de $\{r+s+1,\dots,p\}$.

Ainsi, $\mathcal{B}$ est libre dans E et a p éléments, donc $\mathcal{B}$ est une base de E.

Il est clair que, par construction :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)=\begin{pmatrix}\mathrm{I}_r & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\text{et}\quad \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{I}_s & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i) : Immédiat.

Chapitre 2

2.1.1

$\tau_{13}\circ\tau_{12}(2)=3$ et $\tau_{12}\circ\tau_{13}(2)=1$,

donc $\tau_{13}\circ\tau_{12}\neq\tau_{12}\circ\tau_{13}$.

2.1.2

1re méthode

Le nombre d'inversions de

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est :

$(n-1)+(n-2)+\ldots+1$, d'où $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$.

2ème méthode

On décompose σ en transpositions :

• n pair, $n = 2p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$,

$$\sigma = \tau_{1,2p} \circ \tau_{2,2p-1} \circ \ldots \circ \tau_{p,p+1}, \text{ d'où } \varepsilon(\sigma) = (-1)^p$$

• n impair, $n = 2p+1$ $(p \in \mathbb{N})$,

$$\sigma = \tau_{1,2p+1} \circ \tau_{2,2p} \circ \ldots \circ \tau_{p,p+2},$$

d'où $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.

Réponse : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{\mathrm{E}(\frac{n}{2})}$, ou encore : $\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \text{ ou } 1 \quad [4] \\ -1 & \text{si } n \equiv 2 \text{ ou } 3 \quad [4]. \end{cases}$

2.1.3

On compte les inversions de σ ; ce sont les couples : $(2,\ 1)$, $(4,\ 1)$, $(4,\ 3)$, $(6,\ 1)$, $(6,\ 3)$, $(6,\ 5)$, $\ldots$, $(2n,\ 1)$, $(2n,\ 3)$, $\ldots$, $(2n,\ 2n-1)$. Il y en a donc $1+2+3+\ldots+n$.

Réponse : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

2.1.4

a) **Réponse :** $\mathrm{I}(\sigma) = 27$, σ est impaire.

b) **Réponse :** $\sigma = \tau_{10,12} \circ \tau_{8,11} \circ \tau_{8,10} \circ \tau_{2,9} \circ \tau_{4,8}$

$\circ \tau_{2,7} \circ \tau_{3,6} \circ \tau_{3,5} \circ \tau_{1,2}$.

c) **Réponse :** $\sigma = (1,7,9,2) \circ (3,5,6) \circ (4,12,10,11,8)$, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{4-1}(-1)^{3-1}(-1)^{5-1} = -1$.

2.1.5

a)

$$\begin{array}{cccl} 1 & i & j & \\ & & & \tau_{1i} \\ i & 1 & j & \\ & & & \tau_{1j} \\ i & j & 1 & \\ & & & \tau_{1i} \\ 1 & j & i & \end{array}$$

Comme les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$ et que toute transposition se décompose sur les τ_{1i} $(2 \leqslant i \leqslant n)$, on en déduit que $\{\tau_{1i}; 2 \leqslant i \leqslant n\}$ engendre $\mathfrak{S}_n$.

b)

$$\begin{array}{cccl} 1 & i & j & \\ & & & \tau_{1i} \\ i & 1 & j & \\ & & & \tau_{1j} \\ i & j & 1 & \end{array}$$

d'où $\tau_{1j} \circ \tau_{1i} = (1,i,j)$.

Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$. D'après a), il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $i_1,\ldots,i_N \in \{2,\ldots,n\}$ tels que $\sigma = \tau_{1i_1} \circ \ldots \circ \tau_{1i_N}$. Puisque σ est paire et que toute transposition est impaire, N est pair. En groupant les τ_{1i_k} $(1 \leqslant k \leqslant N)$ deux par deux, on conclut que σ se décompose sur les 3-cycles $(1,i,j)$, $(i,j) \in \{2,\ldots,n\}^2$, $i \neq j$.

c) D'après *b)*, $\tau_{1k} \circ \tau_{12} = (1,2,k)$

et $\tau_{12} \circ \tau_{1k} = (1,k,2) = (1,2,k)^2$.

D'où : $\gamma_i \circ \gamma_j^2 = (\tau_{1i} \circ \tau_{12}) \circ (\tau_{12} \circ \tau_{1j}) = \tau_{1i} \circ \tau_{1j}$.

On déduit alors de *b)* que toute σ de $\mathcal{A}_n$ se décompose sur les γ_i $(3 \leqslant i \leqslant n)$.

2.5.1

$$|\det(A)| = \left| \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n} \right|$$
$$\leqslant \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |a_{\sigma(1)1}| \ldots |a_{\sigma(n)n}|$$
$$\leqslant \sum_{(i_1,\ldots,i_n) \in \{1,\ldots,n\}^n} |a_{i_1 1}| \ldots |a_{i_n n}| = \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right),$$

en reconnaissant le développement du produit de n sommes de n termes.

2.5.2

a) $AB = -BA \Longrightarrow \det(AB) = (-1)^n \det(BA)$

$\Longleftrightarrow \det(A)\det(B) = (-1)^n \det(B)\det(A)$

$\Longleftrightarrow 1 = (-1)^n \Longleftrightarrow n$ pair.

b) **Réponse :** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.5.3

a) • $\mathbf{SL}_n(K) \subset \mathbf{GL}_n(K)$,

car $\det(A) = 1 \Longrightarrow \det(A) \neq 0$.

• Si $A, B \in \mathbf{SL}_n(K)$,

alors $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \cdot 1 = 1$,

donc $AB \in \mathbf{SL}_n(K)$.

• $\mathrm{I}_n \in \mathbf{SL}_n(K)$ car $\det(\mathrm{I}_n) = 1$.

• Si $A \in \mathbf{SL}_n(K)$,

alors $\det(A^{-1}) = \big(\det(A)\big)^{-1} = 1^{-1} = 1$,

donc $A^{-1} \in \mathbf{SL}_n(K)$.

b) Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $\alpha^n = \det(A)$; en notant $B = \dfrac{1}{\alpha} A$, on a alors :

$\det(B) = \dfrac{1}{\alpha^n} \det(A) = 1$, donc $B \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$.

2.5.4

Soit A convenant.

• En prenant $M = A$, on obtient $2^n \det(A) = 2\det(A)$, d'où, puisque $n \geqslant 2$, $\det(A) = 0$.

On a donc : $\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A+M) = \det(M)$.

• Notons $C_1,\ldots,C_n$ les colonnes de A.

Supposons $A \neq 0$; il existe $j \in \{1,\dots,n\}$ tel que $C_j \neq 0$.

D'après le théorème de la base incomplète, il existe des colonnes $V_1,\dots,V_{j-1},V_{j+1},\dots,V_n$ de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telles que $(V_1,\dots,V_{j-1},C_j,V_{j+1},\dots,V_n)$ soit une base de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

En notant M la matrice dont les colonnes sont $V_1,\dots,V_{j-1},-C_j,V_{j+1},\dots,V_n$, on a alors :

$$\left\{\begin{array}{l}\det(A+M)=0 \quad (\text{car la } j^{\text{ème}} \text{ colonne est nulle})\\ \det(M)\neq 0\end{array}\right|,$$

contradiction.

Donc $A=0$.

Réciproque évidente.

Réponse : $\{0\}$.

2.5.5

a) Puisque $AB=BA$, on a :

$A^2+B^2=(A+\mathrm{i}B)(A-\mathrm{i}B)$, d'où :

$$\begin{aligned}\det(A^2+B^2)&=\det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B)\\ &=\det(A+\mathrm{i}B)\overline{\det(A+\mathrm{i}B)}=|\det(A+\mathrm{i}B)|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

b) **Réponse :** • oui, si $n=1$ • non, si $n\geqslant 2$;

exemple : $A=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$.

2.5.6

L'application $P:\begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto\det(A+xB)\end{array}$ est polynomiale, donc continue.

Puisque $P(x)\xrightarrow[x\to 0]{}P(0)=\det(A)\neq 0$, il existe $\varepsilon>0$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$(|x|<\varepsilon \Longrightarrow P(x)\neq 0 \Longrightarrow A+xB\in\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})).$$

2.5.7

a) Récurrence sur k.

• Evident pour $k=0$.

• Si $AB^k=B^k(A+k\mathrm{I}_n)$, alors :

$$\begin{aligned}AB^{k+1}&=AB^kB=B^k(A+k\mathrm{I}_n)B\\ &=B^k(AB+kB)=B^k(BA+B+kB)\\ &=B^{k+1}(A+(k+1)\mathrm{I}_n).\end{aligned}$$

b) Raisonnons par l'absurde : supposons $\det(B)\neq 0$.

On déduit alors de *a)* :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \det(A)=\det(A+k\mathrm{I}_n).$$

Mais $\begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto\det(A+x\mathrm{I}_n)\end{array}$ est, par développement, un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1 (le seul terme en x^n provient du développement du déterminant faisant intervenir la permutation identité).

Donc $\det(A+k\mathrm{I}_n)\xrightarrow[k\infty]{}+\infty$, contradiction.

2.6.1

Réponse : $\mathrm{com}(A)=\begin{pmatrix}\det(M)&0&\cdots&0\\0&&&\\ \vdots&&0&\\0&&&\end{pmatrix}$.

2.6.2

Puisque $A^p=\mathrm{I}_n$ et $p\in\mathbb{N}^*$, A est inversible, d'où :

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{com}(A)\big)^p&=\big(\det(A)\,{}^{\mathrm{t}}\!A^{-1}\big)^p=(\det(A))^p\,{}^{\mathrm{t}}(A^{-1})^p\\ &=\det(A^p)\,{}^{\mathrm{t}}(A^p)^{-1}=\mathrm{I}_n.\end{aligned}$$

2.6.3

Puisque A est inversible :

$$\begin{aligned}\mathrm{com}(A^{-1})&=\det(A^{-1})\,{}^{\mathrm{t}}(A^{-1})^{-1}=(\det(A)\,{}^{\mathrm{t}}\!A^{-1})^{-1}\\ &=\big(\mathrm{com}(A)\big)^{-1}.\end{aligned}$$

2.7.1

a) $$\begin{vmatrix}1^2&2^2&3^2&\dots&n^2\\2^2&3^2&4^2&\dots&(n+1)^2\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ n^2&(n+1)^2&(n+2)^2&\dots&(2n-1)^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1^2&3&5&\dots&2n-1\\2^2&5&7&\dots&2n+1\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ n^2&2n+1&2n+3&\dots&4n-3\end{vmatrix}$$

par $C_j\longleftarrow C_j-C_{j-1}$ pour $j\geqslant 2$

$$=\begin{vmatrix}1^2&3&2&\cdots&2\\2^2&5&2&\cdots&2\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ n^2&2n+1&2&\cdots&2\end{vmatrix}$$

par $C_j\longleftarrow C_j-C_{j-1}$ pour $j\geqslant 3$.

Réponse : $\left\{\begin{array}{ll}0&\text{si } n>3\\-8&\text{si } n=3\\-7&\text{si } n=2\\1&\text{si } n=1.\end{array}\right.$

b) Opérer simultanément : $C_2\longleftarrow C_2-C_1$, $C_3\longleftarrow C_3-C_2,\dots,C_n\longleftarrow C_n-C_{n-1}$

(ce qui revient à opérer *successivement* : $C_n\longleftarrow C_n-C_{n-1},\dots,C_3\longleftarrow C_3-C_2$, $C_2\longleftarrow C_2-C_1$) :

$$\begin{vmatrix}S_1&S_1&S_1&\cdots&S_1\\S_1&S_2&S_2&\cdots&S_2\\S_1&S_2&S_3&\cdots&S_3\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\S_1&S_2&S_3&\dots&S_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}S_1&0&\cdots&0\\ \vdots&S_2-S_1&&\\ &\vdots&\ddots&0\\S_1&S_2-S_1&\dots&S_n-S_{n-1}\end{vmatrix}$$

Réponse : $n!$.

c) Opérer simultanément $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \longleftarrow C_3 - C_2, \ldots, C_n \longleftarrow C_n - C_{n-1}$, puis développer par rapport à la dernière ligne.

Réponse : $a_1(a_1 - a_2)^{n-1}$.

d) En développant par multilinéarité et alternance :

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ a_2 & a_2 + b_2 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \ldots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & & \\ a_2 & b_2 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n & 0 & & b_n \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & 0 & & \\ 0 & a_2 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & b_3 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & a_n & 0 & & b_n \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} b_1 & & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & b_{n-1} & \vdots \\ & & & a_n \end{vmatrix}.$$

Réponse : $b_1 \ldots b_n + a_1 b_2 \ldots b_n + b_1 a_2 b_3 \ldots b_n + \ldots + b_1 \ldots b_{n-1} a_n$.

Si $b_1 \ldots b_n \neq 0$, on peut écrire le résultat sous la forme :

$$b_1 \ldots b_n \left(1 + \frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

e) En notant Δ_n le déterminant proposé, et en remplaçant C_n par $C_1 + \ldots + C_n$, on obtient :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & & & 0 \\ -a_1 & a_1 + a_2 & \ddots & 0 & \vdots \\ & \ddots & \ddots & -a_{n+2} & \vdots \\ 0 & & -a_{n-2} & a_{n-2} + a_{n-1} & 0 \\ & & 0 & -a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = a_n \Delta_{n-1}.$$

Réponse : $\prod_{k=1}^{n} a_k$.

f) Notons $$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Pour $n \geqslant 3$, on obtient en développant d'abord par rapport à la 1ère ligne :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Utiliser l'étude des suites récurrences linéaires du 2nd ordre à coefficients constants (Analyse PCSI-PTSI, 3.4.2).

L'équation caractéristique est $r^2 - ar + bc = 0$, de discriminant $\delta = a^2 - 4bc$.

1er cas : $\delta \neq 0$

L'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1, r_2, et il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n.$$

Remarquons qu'on peut poser $\Delta_0 = 1$ pour que la relation $\Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}$ soit aussi vraie pour $n = 2$.

Alors :

$$\begin{cases} \Delta_0 = 1 \\ \Delta_1 = a \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{r_1}{r_1 - r_2} \\ \lambda_2 = \dfrac{r_2}{r_2 - r_1} \end{cases}.$$

D'où : $\quad \Delta_n = \dfrac{1}{r_1 - r_2}(r_1^{n+1} - r_2^{n+1})$.

2ème cas : $\delta = 0$

L'équation caractéristique admet une solution « double » valant $\dfrac{a}{2}$, et il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta_n = (\lambda n + \mu)\left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

Alors :

$$\begin{cases} \Delta_0 = 1 \\ \Delta_1 = a \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1 \\ (\lambda + \mu)\dfrac{a}{2} = a \end{cases} \Longleftarrow \lambda = \mu = 1.$$

Réponse : • Si $a^2 - 4bc \neq 0$, en notant r_1, r_2 les deux zéros de $X^2 - aX + bc$ dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \Delta_n = \frac{1}{r_1 - r_2}(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}).$$

• Si $a^2 - 4bc = 0$, alors : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \Delta_n = (n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$.

On peut réunir les réponses de ces deux cas sous la forme :

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{n} r_1^k r_2^{n-k}.$$

g) En notant Δ_n le déterminant proposé :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} C_0^0 & 0 & \text{—} & 0 \\ C_1^0 & C_1^1 & \ldots & C_n^n \\ C_2^0 & C_2^1 & \ldots & C_{n+1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & C_n^1 & \ldots & C_{2n-1}^n \end{vmatrix}$$

par $C_j \longleftarrow C_j - C_{j-1}$ pour $j \geqslant 2$

$$= \begin{vmatrix} C_0^0 & 0 & \text{—} & 0 \\ 0 & C_1^1 & \ldots & C_n^n \\ \vert & C_1^0 & \ldots & C_n^{n-1} \\ \vert & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_{n-1}^0 & \ldots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$$

par $L_i \longleftarrow L_i - L_{i-1}$ pour $i \geqslant 2$

$= \Delta_{n-1}$.

Réponse : 1.

h) Notons Δ_n le déterminant proposé. En développant par rapport à la dernière ligne :

$$\Delta_n = \alpha\,\Delta_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & & 0 \\ \alpha & \ddots & \\ 0 & \ddots\ \alpha & -1 \end{vmatrix} = \alpha\Delta_{n-1} + a_n.$$

Réponse : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha^k a_{n-k}$ (en notant $a_0 = 1$).

i) Notons Δ_n le déterminant proposé. On a, en développant par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{aligned}\Delta_n &= b_n\Delta_{n-1} + (-1)^{n+2}a_n \begin{vmatrix} -a_1 & \cdots\cdots & & -a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= b_n\Delta_{n-1} + (-1)^{n+2}a_n(-1)^{n+1}(-a_n)b_1\ldots b_{n-1} \\ &= b_n\Delta_{n-1} + b_1\ldots b_{n-1}a_n^2.\end{aligned}$$

Sommer, après multiplication par les coefficients :

$$\begin{array}{l|c} \Delta_n = b_n\Delta_{n-1} + b_1\ldots b_{n-1}a_n^2 & 1 \\ \Delta_{n-1} = b_{n-1}\Delta_{n-2} + b_1\ldots b_{n-2}a_{n-2}^2 & b_n \\ \Delta_{n-2} = b_{n-2}\Delta_{n-3} + b_1\ldots b_{n-3}a_{n-2}^2 & b_{n-1}b_n \\ \vdots & \vdots \\ \Delta_1 = b_1 + a_1^2 & b_2\ldots b_n \end{array}$$

Réponse : $b_1\ldots b_{n-1}a_n^2 + b_1\ldots b_{n-2}a_{n-1}^2 b_n +$

$$\ldots + a_1^2 b_2\ldots b_n.$$

Si $b_1\ldots b_n \neq 0$, on peut écrire le résultat sous la forme :

$$b_1\ldots b_n\left(1 + \frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n}\right).$$

j) Montrer la relation $\quad \Delta_n = z\Delta_{n-1} - xyz^{n-2}$.

Réponse : $az^{n-1} - (n-1)xyz^{n-2}$.

k) En notant Δ_n le déterminant proposé, on a :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -(a+1) & 1 & & 0 & -a \\ a & \ddots & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & n-2 & \vdots \\ 0 & & a & -(a+n-1) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a & -n \end{vmatrix}$$

par $C_n \longleftarrow C_1 + \ldots + C_n$

$$= (-1)^{n+1}(-a)a^{n-1} - n\Delta_{n-1}$$

par développement par rapport à la dernière colonne.

En notant $D_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}\Delta_n$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}, \quad D_n = \frac{a^n}{n!} + D_{n-1}$$

(et $D_1 = -(a+1)$).

Réponse : $(-1)^n n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$.

2.7.2

Notons $I = \mathrm{I}_3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$E = \{xI + yA + zA^2;\ (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3\}.$$

Il est clair alors que E est le sev de $\mathbf{M}_3(\mathbb{Q})$ engendré par (I, A, A^2).

D'autre part, comme $A^3 = 2I$, le produit de deux éléments de E se décompose $\mathbb{Q}$-linéairement sur I, A, A^2. On en déduit que E est un sous-anneau de $\mathbf{M}_3(\mathbb{Q})$.

Il reste à montrer que tout élément de E autre que 0 admet un inverse dans E.

Nous allons d'abord établir :

$$\forall M \in E,\ (\det(M) = 0 \Longrightarrow M = 0).$$

Soient $(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3$, $M = xI + yA + zA^2$, et supposons $\det(M) = 0$,

c'est-à-dire après développement :

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0.$$

Il existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{Z}^3$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \dfrac{\alpha}{q}$, $y = \dfrac{\beta}{q}$, $z = \dfrac{\gamma}{q}$, d'où :

$$\alpha^3 + 2\beta^3 + 4\gamma^3 - 6\alpha\beta\gamma = 0.$$

Nous allons montrer, par la méthode de descente infinie, que cette équation d'inconnue $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{Z}^3$, n'admet que $(0,0,0)$ pour solution.

Soit (α,β,γ) une solution.

Alors $2|\alpha^3$, donc $2|\alpha$, et il existe donc $\alpha' \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = 2\alpha'$, d'où :

$$4\alpha'^3 + \beta^3 + 2\gamma^3 - 6\alpha'\beta\gamma = 0.$$

De même, $2|\beta$ et il existe donc $\beta' \in \mathbb{Z}$ tel que $\beta = 2\beta'$, d'où :

$$2\alpha'^3 + 4\beta'^3 + \gamma^3 - 6\alpha'\beta'\gamma = 0.$$

Encore, $2|\gamma$ et il existe donc $\gamma' \in \mathbb{Z}$ tel que

$\gamma = 2\gamma'$, d'où :

$$\alpha'^3 + 2\beta'^3 + 4\gamma'^3 - 6\alpha'\beta'\gamma' = 0,$$

c'est-à-dire que (α',β',γ') est solution.

Ainsi, pour tout solution (α,β,γ), les trois entiers α,β,γ sont divisibles par 2. En réitérant, on en déduit que α,β,γ sont divisibles par toute puissance 2^n $(n \in \mathbb{N}^*)$, et donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Soit $M \in E - \{0\}$. D'après l'étude précédente, $\det(M) \neq 0$, et donc $M \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{Q})$.

L'application $f : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ N \longmapsto MN \end{array}$ est linéaire, injective (puisque M est inversible dans $\mathbf{GL}_3(\mathbb{Q})$), et E est de dimension finie, donc f est bijective.

Comme $\mathrm{I}_3 \in E$, il existe donc $N \in E$ telle que $MN = \mathrm{I}_3$, c'est-à-dire : $\quad M^{-1} \in E$.

2.7.3

$a)\ \begin{cases} abc < 0 \\ def < 0 \\ ghk < 0 \end{cases} \Longrightarrow abcdefghk < 0,$

et $\begin{cases} adg > 0 \\ beh > 0 \\ cfk > 0 \end{cases} \Longrightarrow abcdefghk > 0.$

$b)\ \begin{cases} aeh > 0 \\ bfg > 0 \\ cdh > 0 \end{cases} \Longrightarrow abcdefghk > 0,$

et $\begin{cases} -ceg > 0 \\ -afh > 0 \\ -bdk > 0 \end{cases} \Longrightarrow abcdefghk < 0.$

2.7.4

Remarquer d'abord que f est linéaire.

Rappelons que $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n) et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices antisymétriques réelles d'ordre n) sont deux sev supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ (cf. Algèbre PCSI-PTSI 8.3.1 2) Prop. 2).

Dans une base de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ formée d'une base de $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ suivie d'une base de $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix},$$

d'où : $\quad \det(f) = (-1)^{\dim(\mathbf{A}_n(\mathbb{R}))} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

On pouvait remarquer au départ que, puisque f est une involution : $\quad (\det(f))^2 = \det(f^2) = 1$.

Réponse : $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

2.7.5

$a)\ \ \varphi_p(x+1) - \varphi_p(x)$:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & (1+x)-x \\ | & 2 & 0 & \dots & \dots & (1+x)^2 - x^2 \\ | & 3 & 3 & \ddots & & \vdots \\ | & \vdots & \vdots & \ddots & \mathrm{C}_p^{p-1} & (1+x)^p - x^p \\ 1 & \mathrm{C}_{p+1}^1 & \mathrm{C}_{p+1}^2 & \dots & \mathrm{C}_{p+1}^{p-1} & (1+x)^{p+1} - x^{p+1} \end{vmatrix}.$$

La dernière colonne se décompose :

$$\begin{pmatrix} (1+x)-x \\ (1+x)^2 - x^2 \\ \vdots \\ (1+x)^p - x^p \\ (1+x)^{p+1} - x^{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2x \\ 1+3x+3x^2 \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{p+1}^k x^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ | \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ \mathrm{C}_{p+1}^1 \end{pmatrix} + \dots$$

$$+x^{p-1} \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ \mathrm{C}_p^{p-1} \\ \mathrm{C}_{p+1}^{p-1} \end{pmatrix} + x^p \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ \mathrm{C}_{p+1}^p \end{pmatrix},$$

d'où, par multilinéarité et alternance :

$\varphi_p(x+1) - \varphi_p(x)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & & & 0 \\ | & 2 & 0 & & \mathbf{0} & | \\ | & 3 & 3 & \ddots & & | \\ | & \vdots & \vdots & & \mathrm{C}_p^{p-1} & 0 \\ 1 & \mathrm{C}_{p+1}^1 & \mathrm{C}_{p+1}^2 & \dots & \mathrm{C}_{p+1}^{p-1} & \mathrm{C}_{p+1}^p x^p \end{vmatrix}$$

Réponse : $(p+1)!x^p$.

$$b)\quad \begin{array}{rcl} \varphi_p(n+1) - \varphi_p(n) & = & (p+1)!n^p \\ \varphi_p(n) - \varphi_p(n-1) & = & (p+1)!(n-1)^p \\ & \vdots & \\ \varphi_p(2) - \varphi_p(1) & = & (p+1)!1^p \\ \varphi_p(1) & = & 0 \\ \hline \varphi_p(n+1) & = & (p+1)!\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p. \end{array}$$

$$c)\ 1)\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2!}\varphi_1(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & n+1 \\ 1 & (n+1)^2 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2)\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3!}\varphi_2(n+1) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & n+1 \\ 1 & 2 & (n+1)^2 \\ 1 & 3 & (n+1)^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n+1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & n \\ 1 & 3 & n^2+2n \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$3) \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4!}\varphi_3(n+1) = \frac{1}{24}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & n+1 \\ 1 & 2 & 0 & (n+1)^2 \\ 1 & 3 & 3 & (n+1)^3 \\ 1 & 4 & 6 & (n+1)^4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n+1}{24}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & n \\ 1 & 3 & 3 & n^2+2n \\ 1 & 4 & 6 & n^3+3n^2+3n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{24}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & n+2 \\ 4 & 6 & n^2+3n+3 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Réponse : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2.7.6

En développant par multilinéarité et alternance (comme dans la solution de l'exercice 2.7.1 *d)*, on obtient :

$$\det(A) = x_1 \ldots x_n + x_2 \ldots x_n + x_1 x_3 \ldots x_n + \ldots + x_1 \ldots x_{n-1} = \sigma_n + \sigma_{n-1},$$

où $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, \ldots, x_n$ (cf. Algèbre PCSI-PTSI, 5.3.2 Déf. 2).

Comme $x_1, \ldots, x_n$ sont les zéros de $\mathrm{X}^n - \mathrm{X} + 1$, on a (cf. Algèbre PCSI-PTSI, 5.3.2 Prop.) : $\sigma_{n-1} = (-1)^n$ et $\sigma_n = (-1)^n$.

Réponse : $2(-1)^n$.

2.7.7

L'application $\varphi : E^n \longrightarrow K$ définie par :

$\forall (V_1, \ldots, V_n) \in E^n$,

$$\varphi(V_1, \ldots, V_n) = \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(V_1, \ldots, f(V_j), \ldots, V_n)$$

est clairement une forme n-linéaire alternée.

D'après 2.3.2 Prop. 1 p. 44, on a :

$\forall (V_1, \ldots, V_n) \in E^n$,

$$\varphi(V_1, \ldots, V_n) = \det_{\mathcal{B}}(V_1, \ldots, V_n)\varphi(\mathcal{B}).$$

D'autre part, en notant $A = (a_{ij})_{ij}$ la matrice de f dans $\mathcal{B}$, on a :

$$\varphi(\mathcal{B}) = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} 1 & & 0 & a_{1j} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a_{jj} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & \vdots & & \ddots & \\ & & & a_{nj} & 0 & & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(f).$$

2.7.8

Puisque $\det(A)$ s'exprime comme somme de produits d'éléments de A, on obtient, en passant modulo 2 :

$$\det(A) \equiv \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \text{et donc } \det(A) \neq 0.$$

2.7.9

De même que dans la solution de l'exercice 2.7.8, on obtient, modulo 2 :

$$\det(A) \equiv \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Et : $$\begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{[n]} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & & 1 \\ & & \ddots & \\ 1 & 1 & & 0 \end{vmatrix}$$

par $C_1 \longleftarrow C_1 + \ldots + C_n$

Comme n est pair : $(n-1)(-1)^{n-1} \equiv 1\ [2]$.

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & & 1 \\ 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & -1 \end{vmatrix}$$

par $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \geqslant 2$

$$= (n-1)(-1)^{n-1}.$$

Autre méthode : montrer qu'on peut appliquer l'exercice 2.7.8 à A^2, d'où $\det(A^2) \neq 0$, puis $\det(A) \neq 0$.

2.7.10

Par manipulation de colonnes, puis de lignes :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A + \mathrm{i}B & B \\ -B + \mathrm{i}A & A \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} A + \mathrm{i}B & B \\ 0 & A - \mathrm{i}B \end{pmatrix} = \det(A + \mathrm{i}B)\det(A - \mathrm{i}B)$$
$$= \det(A + \mathrm{i}B)\,\overline{\det(A + \mathrm{i}B)} = |\det(A + \mathrm{i}B)|^2 \in \mathbb{R}_+.$$

2.7.11

Pour tout Y de $\mathbf{M}_n(K)$, on a :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ Y & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ X & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A + BX & B \\ YA + C + (YB + D)X & YB + D \end{pmatrix}.$$

Choisissons $Y = -(C + DX)(A + BX)^{-1}$, de sorte que : $YA + C + (YB + D)X = Y(A + BX) + (C + DX) = 0$.

Comme

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ Y & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ X & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \big(\det(\mathrm{I}_n)\big)^2 = 1,$$

on obtient alors :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A + BX & B \\ 0 & YB + D \end{pmatrix}$$
$$= \det(A + BX)\det\big(-(C + DX)(A + BX)^{-1}B + D\big).$$

En particulier, si $A \in \mathbf{GL}_n(K)$, on obtient (en choisissant $X = 0$) :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(-CA^{-1}B + D).$$

2.9.1

1) Si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$, alors tous les cofacteurs de A sont nuls, puisque ce sont des déterminants de matrices carrées d'ordre $n-1$ extraites de A, cf. 2.9 Th. p. 66.

2) Si $\mathrm{rg}(A) = n$, alors $\det(A) \neq 0$

et, comme $\left(\dfrac{1}{\det(A)}\,{}^{\mathrm{t}}A\right)\mathrm{com}(A) = \mathrm{I}_n$,

$\mathrm{com}(A)$ est inversible, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = n$.

3) Supposons $\mathrm{rg}(A) = n-1$.

Puisque $A\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A) = \det(A)\mathrm{I}_n = 0$,

on a $\mathrm{Im}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A)) \subset \mathrm{Ker}(A)$ et donc :

$$\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = \mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(A)).$$

Mais, d'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rg}(A) = 1.$$

D'autre part, d'après 2.9 Th. p. 66, il existe une matrice carrée d'ordre $n-1$ extraite de A et inversible, et donc au moins un des cofacteurs de A est $\neq 0$, d'où $\mathrm{com}(A) \neq 0$.

On conclut : $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 1$.

2.9.2

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathrm{com}_p(A) = \mathrm{com}(\ldots(\mathrm{com}(A))\ldots)$, où com est itéré p fois.

a) Commençons par déterminer $\mathrm{com}_2(A)$.

1) Si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$, d'après l'exercice 2.9.1, $\mathrm{com}(A) = 0$, donc $\mathrm{com}_2(A) = 0$.

2) Supposons $\mathrm{rg}(A) = n$.

Alors : $\mathrm{com}(A) = \det(A)\,{}^{\mathrm{t}}A^{-1}$, d'où :

$$\det(\mathrm{com}(A)) = (\det(A))^n(\det(A))^{-1}$$
$$= (\det(A))^{n-1} \neq 0,$$

et donc $\mathrm{com}(A)$ est inversible (cf. aussi exercice 2.6.3 p. 54). Puis :

$$\begin{aligned}\mathrm{com}_2(A) &= \mathrm{com}(\mathrm{com}(A))\\ &= \det(\mathrm{com}(A))\,{}^{\mathrm{t}}(\mathrm{com}(A))^{-1}\\ &= (\det(A))^{n-1}\,{}^{\mathrm{t}}(\det(A)\,{}^{\mathrm{t}}A^{-1})^{-1}\\ &= (\det(A))^{n-2}A\end{aligned}$$

3) Supposons $\mathrm{rg}(A) = n-1$.

D'après l'exercice 2.9.1, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 1$, donc si $n \geqslant 3$, en appliquant l'exercice 2.9.1 à $\mathrm{com}(A)$ au lieu de A : $\mathrm{com}_2(A) = 0$.

Si $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $\det(A) = 0$,

$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$, $\qquad \mathrm{com}_2(A) = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} = A$

$= (\det(A))^{n-2}A$, puisque $0^0 = 1$.

On a ainsi prouvé :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(K), \quad \mathrm{com}_2(A) = (\det(A))^{n-2}A.$$

b) On déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{com}_3(A) &= \mathrm{com}((\det(A))^{n-2}A)\\ &= (\det(A))^{(n-2)(n-1)}\mathrm{com}(A),\end{aligned}$$

grâce à la formule évidente :

$$\forall \lambda \in K, \quad \mathrm{com}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\mathrm{com}(A).$$

Puis $\mathrm{com}_4(A) = (\det(A))^{(n-2)(n-1)^2}\mathrm{com}_2(A)$

$$= (\det(A))^{(n-2)(1+(n-1)^2)}A.$$

Montrer le résultat par récurrence.

Réponse :

$(\det(A))^{(n-2)(n-1)(1+(n-1)^2+\ldots+(n-1)^{2k-2})}\mathrm{com}(A)$

si p est impair $\geqslant 3$, $p = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$

$(\det(A))^{(n-2)(1+(n-1)^2+\ldots+(n-1)^{2k-2})}A$

si p est pair, $p = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

2.9.3

On a : $AB = 0 \Longrightarrow \mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(A)$

$\Longrightarrow \mathrm{rg}(B) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rg}(A) = 1$.

Si $B = 0$, alors $\gamma = 0$ convient.

Supposons $B \neq 0$. Comme $\mathrm{rg}(B) = 1$, d'après l'exercice 8.1.30 *a)* d'Algèbre PCSI-PTSI, il existe $U, V \in \mathbf{M}_{n,1}(K)$ tels que $B = U\,{}^{\mathrm{t}}V$.

Alors : $\begin{cases} AB = 0\\ BA = 0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}(AU)\,{}^{\mathrm{t}}V = 0\\ U({}^{\mathrm{t}}VA) = 0\end{cases}$.

Si l'un des éléments de la colonne AU était $\neq 0$, comme la ligne ${}^{\mathrm{t}}V$ est $\neq 0$ (sinon : $B = 0$), l'un au moins des éléments de la matrice carrée $(AU)\,{}^{\mathrm{t}}V$ serait non nul, contradiction.

Donc $AU = 0$; de même ${}^{\mathrm{t}}VA = 0$, donc ${}^{\mathrm{t}}AV = 0$.

Comme $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}({}^{\mathrm{t}}A)) = n - \mathrm{rg}({}^{\mathrm{t}}A)$ $= n - \mathrm{rg}(A) = 1$, on déduit que U (resp. V) engendre $\mathrm{Ker}(A)$ (resp. $\mathrm{Ker}({}^{\mathrm{t}}A)$).

Le même raisonnement est applicable à ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A)$ au lieu de B.

Il existe donc $U_0, V_0 \in \mathbf{M}_{n,1}(K)$, $\alpha, \beta \in K - \{0\}$

tels que : ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A) = U_0\,{}^{\mathrm{t}}V_0$, $U = \alpha U_0$, $V = \beta V_0$, et donc $B = \alpha\beta U_0\,{}^{\mathrm{t}}V_0 = \alpha\beta\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(A)$.

2.9.4

1) Déterminons $\mathrm{rg}(A)$.

On peut d'abord remarquer que la somme des colonnes de A est nulle, donc $\det(A) = 0$.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_{n,1}(K)$:

$$X \in \mathrm{Ker}(A) \Longleftrightarrow \begin{cases}(1-n)x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\\ \vdots\\ x_1 + \ldots + x_{n-1} + (1-n)x_n = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1+\ldots+x_n = nx_1 \\ \vdots \\ x_1+\ldots+x_n = nx_n \end{cases} \iff x_1 = \ldots = x_n.$$

Donc $\quad \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1, \quad \mathrm{rg}(A) = n-1$.

2) D'après l'exercice 2.9.1, on a donc $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 1$.

En notant $B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$, on a clairement $AB = BA = 0$.

D'après l'exercice 2.9.3, il existe $\delta \in K$ tel que ${}^t\mathrm{com}(A) = \delta B$. Autrement dit, tous les termes de $\mathrm{com}(A)$ sont égaux. Le $(1,1)^{\text{ème}}$ terme de $\mathrm{com}(A)$ est :

$$\begin{vmatrix} 1-n & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1-n \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1-n & & 1 \\ & & \ddots & \\ -1 & 1 & & 1-n \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

par $C_1 \longleftarrow C_1 + \ldots + C_{n-1}$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -n & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & -n \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

par $L_i \longleftarrow L_i - L_1$ pour $i \geqslant 2$

$= (-1)^{n-1}n^{n-2}$

Réponse : $\mathrm{com}(A) = (-1)^{n-1}n^{n-2}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

2.10.1

a) Par exemple, en tirant z de la $1^{\text{ère}}$ équation et en reportant, le système équivaut à : $\begin{cases} z = 2x+3y+1 \\ 7x+11y+1 = 0 \end{cases}$

Réponse : $\left\{\left(x, -\dfrac{7x+1}{11}, \dfrac{x+8}{11}\right); x \in \mathbb{C}\right\}$.

b) En tirant z de la $2^{\text{ème}}$ équation, le système se ramène à :

$$\begin{cases} z = -mx - y + 1 \\ (m-1)((2m+1)x + 2(m-1)y - 2(m-1)) = 0. \\ (1-m)x + (m-1)y - 3m - 2 = 0 \end{cases}$$

Si $m \neq 1$, tirer $y = \dfrac{(-2m-1)x+2}{2}$ et reporter dans la $3^{\text{ème}}$ équation.

Réponse :

$$\begin{cases} \left\{\left(-\dfrac{2}{m-1}, \dfrac{3m}{m-1}, -\dfrac{1}{m-1}\right)\right\} & \text{si } m \neq -\dfrac{3}{2} \text{ et } m \neq 1 \\ \left\{\left(x, x+1, \dfrac{x}{2}\right); x \in \mathbb{C}\right\} & \text{si } m = -\dfrac{3}{2} \\ \varnothing & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

c) Par différence entre les $1^{\text{ère}}$ et $3^{\text{ème}}$ équations, déduire : $m(x+2y+z) = 0$. Si $m \neq 0$, le système se ramène à : $\begin{cases} z = -x-2y \\ (2m+5)x + (m+3)y = m-1 \\ x+y = -m-1. \end{cases}$

Tirer y et reporter.

Réponse :

$$\begin{cases} \left\{\left(\dfrac{m^2+5m+2}{m+2}, -\dfrac{2m^2+8m+4}{m+2}, \dfrac{3m^2+11m+6}{m+2}\right)\right\} \\ \text{si } m \neq 0 \text{ et } m \neq -2 \\ \varnothing \quad \text{si } m = -2 \\ \left\{\left(x, -x-1, \dfrac{7x+8}{5}\right); x \in \mathbb{C}\right\} \quad \text{si } m = 0. \end{cases}$$

d) **Réponse :**

$$\begin{cases} \left\{\left(m, 1, \dfrac{1}{m}\right)\right\} & \text{si } m \notin \{-1,0,1,-i,i\} \\ \{(-1,y,-y);\ y \in \mathbb{C}\} & \text{si } m = -1 \\ \varnothing & \text{si } m = 0 \\ \{(1,y,y);\ y \in \mathbb{C}\} & \text{si } m = 1 \\ \{(x,-\mathrm{i}x,-\mathrm{i});\ x \in \mathbb{C}\} & \text{si } m = i \\ \{(x,\mathrm{i}x,\mathrm{i});\ x \in \mathbb{C}\} & \text{si } m = -i. \end{cases}$$

e) **Réponse :**

$$\begin{cases} \varnothing & \text{si } a+b \neq 3 \\ \{(2-a, y, y+5-3a);\ y \in \mathbb{C}\} & \text{si } a+b = 3. \end{cases}$$

f) Par soustraction d'équations, le système se ramène à :

$$\begin{cases} ax + (b-1)y + 2z = 1 \\ (b-2)y + z = 0 \\ bz = 2b-4 \end{cases}.$$

Réponse :

$$\begin{cases} \left\{\left(-\dfrac{b-6}{ab}, -\dfrac{2}{b}, \dfrac{2b-4}{b}\right)\right\} & \text{si } b \neq 0, b \neq 2, a \neq 0 \\ \{(x, 1-ax, 0);\ x \in \mathbb{C}\} & \text{si } b = 2 \\ \left\{\left(x, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right); x \in \mathbb{C}\right\} & \text{si } a = 0, b = 6 \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

g) Le système formé par les 3 premières équations admet une solution et une seule, $(2, 2a-2, 2a)$. Reporter dans la $4^{\text{ème}}$.

Réponse : $\begin{cases} \varnothing & \text{si } a \neq b \\ \{(2, 2a-2, 2a)\} & \text{si } a = b. \end{cases}$

2.10.2

Les trois plans considérés contiennent une même droite vectorielle si et seulement si le système linéaire

$$\begin{cases} (1-m)x - 2y + z = 0 \\ 3x - (1+m)y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - (1+m)z = 0 \end{cases}$$

admet au moins une solution autre que $(0,0,0)$, ce qui équivaut à :

$$\begin{vmatrix} 1-m & -2 & 1 \\ 3 & -1-m & -2 \\ 3 & -2 & -1-m \end{vmatrix} = 0.$$

Réponse : $m \in \{-2,0,1\}$.

2.10.3

a) $\begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 2(3x+4y+z)+6t=7 \\ 3(3x+4y+z)+10t=0 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x+4y+z=2 \\ 2t=1 \\ 11=0 \end{cases}.$$

Réponse : $\varnothing$.

b) **Réponse :**

$$\left| \begin{array}{l} \left\{\left(x,y,\dfrac{-7x+6y+2}{5},\dfrac{-3x-y+3}{5}\right);\,(x,y)\in\mathbb{C}^2\right\} \\ \text{si } m=5 \\ \varnothing \quad \text{si } m\neq 5 \end{array} \right.$$

c) **Réponse :**

$$\left| \begin{array}{l} \left\{\left(x,x+1,x+\dfrac{m}{m-1},-(m+2)x-\dfrac{m}{m-1}\right);\,x\in\mathbb{C}\right\} \\ \text{si } m\neq 1 \\ \varnothing \quad \text{si } m=1. \end{array} \right.$$

d) Par addition des quatre premières équations :

$$x+y+z+t=2.$$

Ainsi, le système formé par les quatre premières équations admet une solution et une seule : $x=1$, $y=-1$, $z=0$, $t=2$.

Réponse : $\left| \begin{array}{ll} \{1,-1,0,2)\} & \text{si } a=b=-1 \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{array} \right.$

e) Par addition, on déduit :

$$(a+3)(x+y+z+t)=1+b+b^2+b^3.$$

Réponse :

$$\left| \begin{array}{l} \left\{\left(\dfrac{1}{a-1}(1-c),\dfrac{1}{a-1}(b-c),\dfrac{1}{a-1}(b^2-c),\dfrac{1}{a-1}(b^3-c)\right)\right\} \\ \text{si } a\neq 1 \text{ et } a\neq 3, \text{ en notant } c=\dfrac{1+b+b^2+b^3}{a+3} \\ \{(x,y,z,1-x-y-z);\,(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\} \quad \text{si } a=b=1 \\ \left\{\quad x,x+\dfrac{1-b}{4},x+\dfrac{1-b^2}{4},x+\dfrac{1-b^3}{4}\right);\,x\in\mathbb{C}\right\} \\ \text{si } a=-3 \text{ et } 1+b+b^2+b^3=0 \\ \varnothing \quad \text{sinon.} \end{array} \right.$$

2.10.4

Déduire successivement $x_2,x_3,\ldots,x_n$ en fonction de x_1 , et reporter dans la dernière équation ; séparer en cas suivant la parité de n .

Réponse :

1) Si n est pair, $n=2p$ $(p\in\mathbb{N}^*)$:

• $\mathcal{S}=\varnothing$ si $a_{2p}-a_{2p-1}+\ldots+a_2-a_1\neq 0$

• $\mathcal{S}=\{(x_1,\,2a_1-x_1,\,2a_2-2a_1+x_1,\ldots,$
$2a_{2p-1}-2a_{2p-2}+\ldots+2a_1-x_1;\; x_1\in\mathbb{C}\}$
si $a_{2p}-a_{2p-1}+\ldots+a_2-a_1=0$

2) Si n est impair, $n=2p+1$ $(p\in\mathbb{N}^*)$:

$\mathcal{S}x=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_{2p+1})\right\}$ où :

$x_1=a_{2p+1}-a_{2p}+\ldots-a_2+a_1$,

$$x_{2k+1}=a_{2p+1}-a_{2p}+\ldots \\ -a_{2k+2}+a_{2k+1}+a_{2k}-a_{2k-1}+\ldots-a_1,$$

$k\in\{1,\ldots,p\}$

$$x_{2k}=-a_{2p+1}+a_{2p}-\ldots+a_{2k}+a_{2k-1}-a_{2k-2} \\ +\ldots-a_2+a_1,$$

$k\in\{1,\ldots,p\}$.

Par exemple, pour $p=2$ $(n=5)$, on a :

$$\begin{cases} x_1=a_5-a_4+a_3-a_2+a_1 \\ x_2=-a_5+a_4-a_3+a_2+a_1 \\ x_3=a_5-a_4+a_3+a_2-a_1 \\ x_4=-a_5+a_4+a_3-a_2+a_1 \\ x_5=a_5+a_4-a_3+a_2-a_1 \end{cases}$$

Chapitre 3

3.1.1

1) Soient $\lambda\in K$, $x\in\mathrm{Ker}(f-\lambda e)$. On a :

$$(f-\lambda e)(g(x))=(f\circ g)(x)-\lambda g(x) \\ =(g\circ f)(x)-\lambda g(x)=g(\lambda x)-\lambda g(x)=0,$$

donc $g(x)\in\mathrm{Ker}(f-\lambda e)$.

En prenant $\lambda=0$: $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par g.

En prenant $\lambda\in\mathrm{Sp}_K(f)$: $\mathrm{SEP}(f,\lambda)=\mathrm{Ker}(f-\lambda e)$ est stable par g.

2) Soit $y\in\mathrm{Im}(f)$. Il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$, d'où :

$$g(y)=(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))\in\mathrm{Im}(f).$$

3.1.2

En notant $B=\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\omega^k A^k$, on a :

$$B(\mathrm{I}_n-\omega A)=\mathrm{I}_n-\omega^p A^p=0.$$

Comme $\mathrm{I}_n-\omega A=-\omega(A-\omega^{-1}\mathrm{I}_n)$ et que $\omega^{-1}\notin\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\mathrm{I}_n-\omega A$ est inversible, d'où $B=0$.

3.1.3

Considérer, par exemple,

$$n=2,\quad A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

Alors $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'ont aucun vecteur propre commun puisque les vecteurs propres de BA sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et que ni $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ni $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est vecteur propre pour AB.

Réponse : non.

3.1.4

1) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $P \in E - \{0\}$ tels que $f(P) = \lambda P$, c'est-à-dire

$$(X + \alpha)P' + (1 - \lambda)P = 0.$$

• Si $\lambda \neq 1$, on déduit $P(-\alpha) = 0$. Il existe donc $k \in \{0,\ldots,n\}$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$\begin{cases} P = (X + \alpha)^k Q \\ Q(-\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

(k est l'ordre de multiplicité du zéro $-\alpha$ de P).

En reportant : $(X + \alpha)Q' + (k + 1 - \lambda)Q = 0$.

Comme $Q(-\alpha) \neq 0$, on déduit $k + 1 - \lambda = 0$, puis $Q' = 0$, donc $\deg(Q) = 0$.

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $k \in \{0,\ldots,n\}$ tels que

$$\lambda = k + 1 \text{ et } P = C(X + \alpha)^k.$$

2) Réciproquement : $f((X + \alpha)^k) = (k + 1)(X + \alpha)^k$ pour tout k de $\{0,\ldots,n\}$.

Réponse :

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f) = \{1,\ldots,n + 1\}$

• $\forall \lambda \in \{1,\ldots,n + 1\}$, $\mathrm{SEP}(f,\lambda) = \mathbb{C}(X + \alpha)^{\lambda - 1}$.

3.1.5

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X] - \{0\}$ tels que $f(P) = \lambda P$, c'est-à-dire :

$$(X + 1)(X - 3)P' - (X + \lambda)P = 0.$$

En considérant les termes de plus haut degré, déduire :

$$\deg(P) \leqslant 1.$$

En notant $P = aX + b$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(P) = \lambda P \iff \begin{cases} 2a + \lambda a + b = 0 \\ 3a + \lambda b = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b = -(2 + \lambda)a \\ (\lambda^2 + 2\lambda - 3)a = 0. \end{cases}$$

Comme $P \neq 0$, déduire $\lambda = 1$ ou $\lambda = -3$, puis P.

Réponse :

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \{-3,1\}$

• $\mathrm{SEP}(f,-3) = \mathrm{Vect}(X + 1)$, $\mathrm{SEP}(f,1) = \mathrm{Vect}(X - 3)$.

3.1.6

Considérons $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et, pour

$k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $\quad P_k = X(1 - X)(2 - X)\ldots(k - 1 - X)$

(ainsi : $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X(1 - X)$, $P_3 = X(1 - X)(2 - X)$, $\ldots$).

Vérifier :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(P_k) = kP_k.$$

Il est clair que $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ (polynômes à degrés successifs).

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X] - \{0\}$ tels que $f(P) = \lambda P$.

Il existe $n \in \mathbb{N}$, $(\alpha_0,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k.$$

On a :

$$f(P) = \lambda P \iff \sum_{k=0}^{n} \alpha_k k P_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda P_k$$
$$\iff \Big(\forall k \in \{0,\ldots,n\}, \quad \alpha_k(k - \lambda) = 0\Big).$$

Si $\lambda \notin \{0,\ldots,n\}$, alors $(\forall k \in \{0,\ldots,n\}, \alpha_k = 0)$, donc $P = 0$, contradiction.

Donc $\lambda \in \{0,\ldots,n\}$, puis $(\forall k \in \{0,\ldots,n\} - \{\lambda\}, \alpha_k = 0)$, et donc $P = \alpha_\lambda P_\lambda$.

Réponse :

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \mathbb{N}$

• $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{SEP}(f,k) = \mathbb{R}P_k$,

où $\quad P_k = X(1 - X)(2 - X)\ldots(k - 1 - X)$

• $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}1$

• $\mathrm{Im}(f) = X\mathbb{R}[X]$.

3.1.7

Soient $\lambda \in K$, $g \in \mathcal{L}(E) - \{0\}$. On a :

$$\begin{aligned} F(g) = \lambda g & \\ &\iff \forall P \in K[X], \quad Xg(P) - g(XP) = \lambda g(P) \\ &\iff \forall P \in K[X], \quad g(XP) = (X - \lambda)g(P) \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(X^{n+1}) = (X - \lambda)g(X^n) \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(X^n) = (X - \lambda)^n g(1) \\ &\iff \forall P \in K[X], \quad g(P) = P(X - \lambda)g(1). \end{aligned}$$

Réponse :

• $\mathrm{Sp}_K(F) = K$

• Pour tout λ de K,

$$\mathrm{SEP}(F,\lambda) = \left\{ g : \begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & K[X] \\ P & \longmapsto & A \cdot P(X - \lambda) \end{array} ; A \in K[X] \right\}.$$

Par exemple, si $K = \mathbb{R}$, F a une infinité de valeurs propres (tous les réels) et, pour chaque valeur propre, le sous-espace propre associé est de dimension infinie.

3.1.8

a) Il est clair que :

$$\forall P \in E, \quad X^2P'' - (a + b - 1)XP' + abP \in E,$$

et que f est linéaire.

b) Remarquer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(X^k) = \Big(k^2 - (a + b)k + ab\Big)X^k.$$

Montrer (en utilisant $a+b<0$) que les $k^2-(a+b)k+ab$ $(k\in\mathbb{N})$ sont deux à deux distincts, puis terminer comme dans la solution de l'exercice 3.1.6.

Réponse :

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)=\{(k-a)(k-b);\ k\in\mathbb{N}\}$

• $\forall k\in\mathbb{N},\ \mathrm{SEP}(f,(k-a)(k-b))=\mathbb{R}\mathrm{X}^k$.

3.1.9

a) Dans $\mathrm{X}(1-\mathrm{X})P'+n\mathrm{X}P$, le terme de degré $n+1$ disparaît. Et f est linéaire.

b) Soient $\lambda\in\mathbb{R}$, $P\in E-\{0\}$ tels que $f(P)=\lambda P$. Déduire $P'+\dfrac{n\mathrm{X}-\lambda}{\mathrm{X}(1-\mathrm{X})}P=0$. La résolution de l'équation différentielle (sur $]-\infty;0[$ ou $]0;1[$ ou $]1;+\infty[$) $y'+\dfrac{nx-\lambda}{x(1-x)}y=0$ fournit

$$y:x\longmapsto C|x|^{\lambda}|1-x|^{n-\lambda}\ (C\in\mathbb{R}).$$

Et y est polynomiale si et seulement si :

$$(\lambda,n-\lambda)\in\mathbb{N}^2.$$

En déduire $\lambda\in\{0,\dots,n\}$, puis P.

Etudier la réciproque.

Réponse :

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)=\{0,\dots,n\}$

• $\forall\lambda\in\{0,\dots,n\},\ \mathrm{SEP}(f,\lambda)=\mathrm{Vect}(\mathrm{X}^{\lambda}(1-\mathrm{X})^{n-\lambda})$.

3.1.10

Soient $\lambda\in\mathbb{C}$, $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$ tels que $f(x)=\lambda x$.

On a alors : $\lambda x_0=0,\ \lambda x_1=x_0,\dots,\ \lambda x_{n+1}=x_n,\dots$

Si $\lambda=0$, alors $x_0=0,\dots,x_n=0$, donc $x=0$.

Si $\lambda\neq 0$, alors aussi $x_0=0,\dots,x_n=0$, donc $x=0$.

Ceci montre que f n'admet aucune valeur propre.

3.1.11

Soient $\lambda\in\mathbb{R}$, $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E-\{0\}$.

$$\text{On a : } f(x)=\lambda x\iff(\forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+1}=\lambda x_n)$$
$$\iff(\forall n\in\mathbb{N},\ x_n=\lambda^n x_0).$$

Si $x_0=0$, alors $x=0$, exclu.

D'autre part, $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$|\lambda|<1\quad\text{ou}\quad\lambda=1.$$

Réponse :

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)=\{\lambda\in\mathbb{C};\ |\lambda|<1\}\cup\{1\}$

• $\forall\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f),\quad \mathrm{SEP}(f,\lambda)=\mathrm{Vect}\Big((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$.

Chaque SEP est de dimension 1.

3.1.12

D'abord, il est clair que T est linéaire.

Soient $\lambda\in\mathbb{R}$, $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in E-\{0\}$. On a :

$$T(u)=\lambda u\iff\left(\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac1n(u_1+\ldots+u_n)=\lambda u_n\right).$$

Puisque $u\neq 0$, il existe un plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $u_k\neq 0$. On a alors :

$$T(u)=\lambda u\iff\begin{cases}\dfrac1k u_k=\lambda u_k\\ \dfrac1{k+1}(u_k+u_{k+1})=\lambda u_{k+1}\\ \dfrac1{k+2}(u_k+u_{k+1}+u_{k+2})=\lambda u_{k+2}\\ \vdots\\ \dfrac1n(u_k+\ldots+u_n)=\lambda u_n\quad(n>k)\\ \vdots\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\lambda=\dfrac1k\\ k(u_k+u_{k+1})=(k+1)u_{k+1}\\ k(u_k+u_{k+1}+u_{k+2})=(k+2)u_{k+2}\\ \vdots\\ k(u_k+\ldots+u_n)=nu_n\quad(n>k)\\ \vdots\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\lambda=\dfrac1k\\ u_{k+1}=ku_k\\ 2u_{k+2}=(k+1)u_{k+1}\\ \vdots\\ (n-k)u_n=(n-1)u_{n-1}\quad(n>k)\\ \vdots\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\lambda=\dfrac1k\\ u_{k+1}=ku_k\\ u_{k+2}=\dfrac{k(k+1)}{2}u_k\\ \vdots\\ u_n=\dfrac{k(k+1)\ldots(n-1)}{1\cdot 2\ldots(n-k)}\,u_k\quad(n>k)\\ \vdots\end{cases}$$

Réponse :

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T)=\left\{\dfrac1k;\ k\in\mathbb{N}^*\right\}$

• Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{SEP}\left(T,\dfrac1k\right)$ est de dimension 1, engendré par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n=\begin{cases}0 & \text{si}\quad n<k\\ \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} & \text{si}\quad n\geqslant k\end{cases}.$$

3.1.13

a) • Pour tout x de $[-\pi;\pi]$, les applications

$$\begin{array}{rcl}[-\pi;\pi]&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ t&\longmapsto&\cos(x-t)f(t)\end{array}\quad\text{et}\quad\begin{array}{rcl}[-\pi;\pi]&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ t&\longmapsto&\sin(x-t)f(t)\end{array}$$

sont continues, donc $u(f)(x)$ et $v(f)(x)$ existent.

• En développant, on obtient pour tout x de $[-\pi;\pi]$:

$$\begin{cases}u(f)(x)=\cos x\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\ f(t)\mathrm{d}t+\sin x\int_{-\pi}^{\pi}\sin t f(t)\mathrm{d}t\\ v(f)(x)=\sin x\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos t f(t)\mathrm{d}t-\cos x\int_{-\pi}^{\pi}\sin t f(t)\mathrm{d}t,\end{cases}$$

ce qui montre que $u(f)$ et $v(f)$ sont continues (car combinaisons linéaires de cos et sin).

• La linéarité de u et v est évidente.

b) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in E - \{0\}$. On a :

$$u(f) = \lambda f \Longleftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos t\ f(t)\ \mathrm{d}t \right.$$

$$\left. + \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin t\ f(t)\ \mathrm{d}t = \lambda f(x) \right).$$

Si $\lambda = 0$, alors : $u(f) = 0 \Longleftrightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos t\ f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t\ f(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Supposons $\lambda \neq 0$;

alors $u(f) = \lambda f \Longrightarrow f \in \mathrm{Vect}(\cos,\sin)$.

Calculer : $u(\cos) = \pi \cos$, $u(\sin) = \pi \sin$.

De même : $v(\cos) = \pi \sin$, $v(\sin) = -\pi \cos$.

Réponse : *1)*

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \{0,\pi\}$

• $\mathrm{SEP}(u,0) = \left\{ f \in E;\right.$

$$\left. \int_{-\pi}^{\pi} \cos t\ f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t\ f(t)\ \mathrm{d}t = 0 \right\},$$

qui est de dimension infinie (car c'est l'intersection de deux hyperplans de E)

$$\mathrm{SEP}(u,\pi) = \mathrm{Vect}(\cos,\sin)$$

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(v) = \{0\}$

• $\mathrm{SEP}(v,0) = \mathrm{SEP}(u,0)$.

3.1.14

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_K(AB)$; il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(K) - \{0\}$ tel que $ABX = \lambda X$. On déduit :

$$(BA)BX = B(ABX) = \lambda BX.$$

• Si $BX \neq 0$, alors $\lambda \in \mathrm{Sp}_K(BA)$ et BX est un vecteur propre pour BA, associé à λ.

• Supposons $BX = 0$. Alors $\lambda X = ABX = 0$, donc $\lambda = 0$.

Puis : $0 \in \mathrm{Sp}_K(AB) \Longrightarrow \det(AB) = 0 \Longrightarrow \det(BA)$

$= \det(B)\det(A) = \det(A)\det(B) = \det(AB) = 0$

$\Longrightarrow 0 \in \mathrm{Sp}_K(BA)$.

On a ainsi montré : $\mathrm{Sp}_K(AB) \subset \mathrm{Sp}_K(BA)$.

On conclut en échangeant les rôles de A et B.

3.1.15

a) Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{SEP}(A,\lambda) - \{0\}$. Il existe $i_0 \in \{1,\ldots,n\}$ tel que :

$$|x_{i_0}| = ||X||_\infty = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_i|.$$

Comme $AX = \lambda X$, on obtient en prenant la ligne numéro i_0 :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j = \lambda x_{i_0}.$$

D'où : $|(\lambda - a_{i_0 i_0})x_{i_0}| = \left| \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i_0}} a_{i_0 j} x_j \right|$

$$\leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0 j}|\ |x_j| \leqslant \left(\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0 j}| \right) |x_{i_0}|.$$

Comme $X \neq 0$, on a $|x_{i_0}| > 0$, et donc :

$$|\lambda - a_{i_0 i_0}| \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0 j}|.$$

b) Par hypothèse :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ 0 \notin B'\left(a_{ii},\ \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |a_{ij}| \right).$$

D'après *a)*, on déduit : $0 \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, c'est-à-dire :

$$A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}).$$

3.2.1

Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1,\ldots,e_p)$ une base de F.

D'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_{p+1},\ldots,e_n \in E$ tels que $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ soit une base de E.

En notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f')$, il existe

$B \in \mathbf{M}_{p,n-p}(K)$ et $C \in \mathbf{M}_{n-p}(K)$ telles que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout λ de K :

$$\chi_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A - \lambda \mathrm{I}_p & B \\ 0 & C - \lambda \mathrm{I}_{n-p} \end{pmatrix}$$

$$= \det(A - \lambda \mathrm{I}_p)\det(C - \lambda \mathrm{I}_{n-p}) = \chi_{f'}(\lambda)\chi_C(\lambda).$$

Comme $\chi_C \in K[\mathrm{X}]$, on conclut : $\chi_{f'} | \chi_f$.

3.2.2

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1) Puisque n est impair, χ_A, qui est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de limites $-\infty$ en $+\infty$, $+\infty$ en $-\infty$, admet au moins un zéro réel (théorème des valeurs intermédiaires).

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E - \{0\}$ tels que $f(x) = \lambda x$. Alors $\mathbb{R}x$ est une droite vectorielle stable par f.

2) Le raisonnement précédent (appliqué à ${}^{\mathrm{t}}A$ au lieu de A) montre qu'il existe $\lambda' \in \mathbb{R}$ et $X' \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$ tels que ${}^{\mathrm{t}}AX' = \lambda' X'$.

Notons $H = \{Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R});\ {}^{\mathrm{t}}X'Y = 0\}$, qui est un hyperplan de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $Y \in H$. On a :

$${}^{\mathrm{t}}X'(AY) = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}AX')Y = {}^{\mathrm{t}}(\lambda' X')Y = \lambda'\ {}^{\mathrm{t}}X'Y = 0,$$

donc $AY \in H$.

Ceci montre que H est stable par A.

L'hyperplan de E associé à H dans la base $\mathcal{B}$ est donc stable par f.

3.2.3

Le terme de degré 1 en λ dans

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

est : $-\lambda A_{11} - \lambda A_{22} - \ldots - \lambda A_{nn}$, où A_{ii} est à la fois le mineur et le cofacteur de a_{ii} dans A.

3.2.4

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A_1 - \lambda \mathrm{I}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N - \lambda \mathrm{I}_{n_N} \end{pmatrix}$$
$$= \prod_{k=1}^{N} \det(A_k - \lambda \mathrm{I}_{n_k}) = \prod_{k=1}^{N} \chi_{A_k}(\lambda).$$

3.2.5

Dans l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} -\lambda \mathrm{I}_n & B \\ C & -\lambda \mathrm{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0 & \lambda \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \mathrm{I}_n & 0 \\ C & CB - \lambda^2 \mathrm{I}_p \end{pmatrix},$$

prendre les déterminants.

3.2.6

1ère méthode

D'après l'exercice 3.2.5 et puisque A et I_n commutent :

$$\chi_M(\lambda) = (-1)^n \det(A^2 - \lambda^2 \mathrm{I}_n)$$
$$= (-1)^n \det(A - \lambda \mathrm{I}_n) \det(A + \lambda \mathrm{I}_n)$$
$$= (-1)^n \chi_A(\lambda) \chi_A(-\lambda).$$

2ème méthode

Par opérations sur les colonnes puis les lignes :

$$\chi_M(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda \mathrm{I}_n & A \\ A & -\lambda \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda \mathrm{I}_n + A & A \\ A - \lambda \mathrm{I}_n & -\lambda \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$
$$= \det \begin{pmatrix} A - \lambda \mathrm{I}_n & A \\ 0 & -A - \lambda \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$
$$= (-1)^n \det(A - \lambda \mathrm{I}_n) \det(A + \lambda \mathrm{I}_n).$$

3.2.7

$$\forall \lambda \in K,\ \chi_{{}^tA}(\lambda) = \det({}^tA - \lambda \mathrm{I}_n) = \det({}^t(A - \lambda \mathrm{I}_n))$$
$$= \det(A - \lambda \mathrm{I}_n) = \chi_A(\lambda).$$

3.2.8

Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$,

$$A = (a_{ij})_{ij} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f).$$

Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. Comme $e_j \in (\mathbb{R}_+)^n$ et que $f(e_j) = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$, on déduit :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ a_{ij} \geqslant 0.$$

Alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = ||f(e_j)||_1 = ||e_j||_1 = 1$.

Considérons $u = (1, \ldots, 1)$. On a $u \neq 0$ et :

$${}^tA \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi : $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}({}^tA)$.

D'après l'exercice 3.2.7, on déduit $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, c'est-à-dire

$$1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f).$$

3.2.9

On a : $\begin{cases} {}^tYAZ = {}^t({}^tAY)Z = {}^t(\lambda Y)Z = \lambda\, {}^tYZ \\ {}^tYAZ = {}^tY(AZ) = {}^tY(\mu Z) = \mu\, {}^tYZ \end{cases}$

d'où $(\lambda - \mu){}^tYZ = 0$.

• Si $\lambda = \mu$, alors $Z \in \mathrm{SEP}(A, \lambda)$, qui est de dimension 1, donc Z est colinéaire à X.

• Supposons $\lambda \neq \mu$; alors ${}^tYZ = 0$.

En notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ où, pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$, $y_i > 0$ et $z_i \geqslant 0$, on déduit $(\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ z_i = 0)$, donc $Z = 0$, contradiction.

3.2.10

a) Notons

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},\ L = (l_1, \ldots, l_n),\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

donc $A = \begin{pmatrix} \alpha & l_1 & \dots & l_n \\ c_1 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$.

Par hypothèse, il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{cases} \alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i c_i \\ \forall j \in \{1, \ldots, n\},\quad l_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i b_{ij}. \end{cases}$$

En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a alors :

$$\begin{cases} {}^tXC = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i c_i = \alpha \\ {}^tXB = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i b_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i b_{in}\right) = (l_1, \ldots, l_n) = L. \end{cases}$$

b) Notons $P = \begin{pmatrix} 1 & -{}^{t}X \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{C})$; il est clair que P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & {}^{t}X \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$.

On a :

$$\begin{aligned} PAP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -{}^{t}X \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & L \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & {}^{t}X \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha - {}^{t}XC & L - {}^{t}XB \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & {}^{t}X \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & {}^{t}X \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & C\,{}^{t}X + B \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où, pour tout λ de K :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \chi_{PAP^{-1}}(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ C & C\,{}^{t}X + B - \lambda \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \\ &= -\lambda \chi_{C\,{}^{t}X+B}(\lambda). \end{aligned}$$

On conclut : $C\,{}^{t}X + B$ a pour vp $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

Plus précisément :

$$\forall \lambda \in K,\ \ \chi_{C\,{}^{t}X+B}(\lambda) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n}(\lambda - \lambda_k).$$

3.2.11

a) **1ère méthode :** Pour $k \in \{0,\ldots,n-1\}$, notons

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & 0 & 1 \\ a_k & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n-k}(K).$$

En développant par rapport à la 1ère colonne :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \chi_{A_0}(\lambda) \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & -\lambda & 1 \\ a_0 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \chi_{A_1}(\lambda) + (-1)^{n+1} a_0. \end{aligned}$$

On combine les relations :

$$\begin{array}{ll|l} \chi_{A_0}(\lambda) & = -\lambda\chi_{A_1}(\lambda) + (-1)^{n+1}a_0 & 1 \\ \chi_{A_1}(\lambda) & = -\lambda\chi_{A_2}(\lambda) + (-1)^{n}a_1 & -\lambda \\ & \vdots & \vdots \\ \chi_{A_{n-2}}(\lambda) & = -\lambda\chi_{A_{n-1}}(\lambda) + (-1)^{3}a_{n-2} & (-\lambda)^{n-2} \\ \chi_{A_{n-1}}(\lambda) & = -\lambda + (-1)^{2}a_{n-1} & (-\lambda)^{n-1} \\ \hline \end{array}$$

D'où

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= (-1)^{n+1}a_0 + (-1)^{n+1}a_1\lambda + \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n+1}a_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n \\ &= (-1)^n\left(\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k\right). \end{aligned}$$

2è méthode :

On a, par $C_1 \longleftarrow C_1 + \lambda C_2 + \cdots + \lambda^{n-1} C_n$:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -\lambda & 1 \\ a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -\lambda & 1 \\ \alpha & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}_{[n]} = (-1)^{n+1}\alpha,$$

par développement par rapport à la première colonne, où :

$$\alpha = a_0 + a_1\lambda + \cdots + \lambda^{n-2}a_{n-2} + \lambda^{n-1}(a_{n-1} - \lambda),$$

donc : $\chi_A(\lambda) = (-1)^n\left(\lambda^n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k\lambda^k\right)$.

b) Condition nécessaire évidente : $\alpha_n = (-1)^n$.

Réciproquement, pour tout $(\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1})$ de K^n, d'après *a)*, il existe $A \in \mathbf{M}_n(K)$ telle que

$$\chi_A = (-1)^n \mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \mathrm{X}^k.$$

Réponse : $\alpha_n = (-1)^n$.

3.2.12

Remarquer les égalités matricielles, dans $\mathbf{M}_{n+p}(K)$:

$$\begin{pmatrix} \lambda \mathrm{I}_n & A \\ B & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathrm{I}_n & 0 \\ B & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB - \lambda\mathrm{I}_n & A \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \lambda \mathrm{I}_n & A \\ B & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathrm{I}_n & A \\ 0 & -\lambda\mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda\mathrm{I}_n & 0 \\ -B & BA - \lambda\mathrm{I}_p \end{pmatrix},$$

d'où, en passant aux déterminants :

$$\det(AB - \lambda\mathrm{I}_n) = (-1)^n \det\begin{pmatrix} \lambda\mathrm{I}_n & A \\ B & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$$

et

$$(-\lambda)^n \det(BA - \lambda\mathrm{I}_p) = (-1)^n(-\lambda)^p \det\begin{pmatrix} \lambda\mathrm{I}_n & A \\ B & \mathrm{I}_p \end{pmatrix},$$

et donc : $(-\lambda)^n \chi_{BA}(\lambda) = (-\lambda)^p \chi_{AB}(\lambda)$.

3.2.13

a) Remarquer $B\begin{pmatrix} V \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$.

b) Notons $P = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ {}^{t}U & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{C})$; il est clair que P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ -{}^{t}U & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient : $PBP^{-1} = \begin{pmatrix} A + AV\,{}^{t}U & -AV \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On retrouve d'ailleurs le résultat de *a)* : $0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$.

On a, pour tout λ de $\mathbb{C}$:

$$\chi_B(\lambda) = \chi_{PBP^{-1}}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} A + AV\,{}^{t}U - \lambda \mathrm{I}_n & -AV \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -\lambda \chi_{A+AV\,{}^{t}U}(\lambda).$$

Ainsi :

$$\mathrm{X}^2 | \chi_B \iff \mathrm{X} | \chi_{A+AV\,{}^{t}U} \iff \det(A + AV\,{}^{t}U) = 0$$
$$\iff \det(A)\det(\mathrm{I}_n + V\,{}^{t}U) = 0.$$

Etudions l'inversibilité de $\mathrm{I}_n + V\,{}^{t}U$; à cet effet, nous allons déterminer $\mathrm{Ker}(\mathrm{I}_n + V\,{}^{t}U)$.

On a, pour tout W de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

$$(\mathrm{I}_n + V\,{}^{t}U)W = 0 \iff W + ({}^{t}UW)V = 0 \implies W \in \mathbb{C}V.$$

Et : $(\mathrm{I}_n + V\,{}^{t}U)V = V + ({}^{t}UV)V = (1 + {}^{t}UV)V$.

Ainsi : $\mathrm{Ker}(\mathrm{I}_n + V\,{}^{t}U) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } {}^{t}UV \neq -1 \\ \mathbb{C}V & \text{si } {}^{t}UV = -1 \end{cases}$.

Il en résulte : $\det(\mathrm{I}_n + V\,{}^{t}U) \neq 0 \iff {}^{t}UV \neq -1$.

Finalement :

$\alpha)$ $\det(A) = 0 \implies \mathrm{X}^2 | \chi_B$

$$\beta) \begin{cases} \mathrm{X}^2 | \chi_B \\ {}^{t}UV \neq -1 \end{cases} \implies \begin{cases} \det(A)\det(\mathrm{I}_n + V\,{}^{t}U) = 0 \\ \det(\mathrm{I}_n + V\,{}^{t}U) \neq 0 \end{cases}$$
$$\implies \det(A) = 0.$$

3.3.1

Réponses : PDP^{-1} où :

a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$,

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

b) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$,

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.3.2

a) Vérification immédiate.

b) En appliquant *a)* à $a - \lambda$ au lieu de a, on obtient :

$$(A - \lambda \mathrm{I}_4)^{\mathrm{t}}(A - \lambda \mathrm{I}_4) = ((a-\lambda)^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathrm{I}_4,$$

d'où, en prenant les déterminants :

$$\chi_A^2 = ((a - \mathrm{X})^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4,$$

c'est-à-dire :

$$\left(\chi_A - ((a-\mathrm{X})^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2\right)$$
$$\left(\chi_A + ((a-\mathrm{X})^2 + b^2 + c^2 + d^2)\right) = 0.$$

Comme χ_A est un polynôme unitaire de degré 4 et que l'anneau $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est intègre, on déduit :

$$\chi_A = ((a-\mathrm{X})^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

c) D'après *b)*, χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ et admet deux zéros doubles, $a + \mathrm{i}\omega,\ a - \mathrm{i}\omega$, où $\omega = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$ (on peut supposer $\omega > 0$, le cas $b = c = d = 0$ étant d'étude triviale). Montrer que les deux $\mathrm{SEP}(A, a + \mathrm{i}\omega)$, $\mathrm{SEP}(A, a - \mathrm{i}\omega)$ sont de dimension 2, donc A est diagonalisable.

Réponse :

1) • Si $b = c = d = 0$, alors

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{a\},\ \mathrm{SEP}(A,a) = \mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{R})$$

2) • Si $(b,c,d) \neq (0,0,0)$, en notant $\omega = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$, on a :

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{a + \mathrm{i}\omega, a - \mathrm{i}\omega\}$

• $\mathrm{SEP}(A, a + \mathrm{i}\omega) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i}\omega \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ \mathrm{i}\omega \\ d \\ -c \end{pmatrix}\right)$

$$\mathrm{SEP}(A, a - \mathrm{i}\omega) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} c \\ d \\ \mathrm{i}\omega \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ -c \\ b \\ \mathrm{i}\omega \end{pmatrix}\right)$$
$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\omega \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ -\mathrm{i}\omega \\ d \\ -c \end{pmatrix}\right).$$

3.3.3

a) L'étude du cas ($a = 0$ ou $b = 0$) est immédiate.

Supposons $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$.

En notant $S = x_1 + \ldots + x_n$, on a :

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} ax_2 + \ldots + ax_n = \lambda x_1 \\ bx_1 + ax_3 + \ldots + ax_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ bx_1 + \ldots + bx_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} aS = (\lambda + a)x_1 \\ bx_1 - ax_2 = \lambda(x_2 - x_1) \\ \vdots \\ bx_{n-1} - ax_n = \lambda(x_n - x_{n-1}) \\ bS = (\lambda + b)x_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (\lambda + a)x_1 = aS \\ (\lambda + a)x_2 = (\lambda + b)x_1 \\ \vdots \\ (\lambda + a)x_n = (\lambda + b)x_{n-1} \\ bS = (\lambda + b)x_n \end{cases}.$$

Si $\begin{cases} \lambda + a \neq 0 \\ \lambda + b \neq 0 \end{cases}$, alors, en notant $\zeta = \dfrac{\lambda + b}{\lambda + a}$:

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_2 = \zeta x_1 \\ \vdots \\ x_n = \zeta^{n-1} x_1 \\ (\lambda + a)x_1 = aS \\ bS = (\lambda + b)\zeta^{n-1} x_1 \end{cases}.$$

Montrer : $\begin{cases} (\lambda + a)x_1 = aS \\ bS = (\lambda + b)\zeta^{n-1} x_1 \end{cases} \iff \zeta^n = \dfrac{b}{a}$.

En déduire que, si $a \neq b$, A admet pour vp les n complexes $\dfrac{au_k - b}{1 - u_k}$, où les u_k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de $\dfrac{b}{a}$.

Si $a = b$, alors : $AX = \lambda X \iff \left| \begin{array}{l} \begin{cases} \lambda = -a \\ S = 0 \end{cases} \\ \text{ou} \\ \begin{cases} x_1 = \ldots = x_n \\ \lambda = (n-1)a \end{cases} \end{array} \right.$.

Réponse :

1) Si $(a \neq 0,\, b \neq 0,\, a \neq b)$:

- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \left\{ \dfrac{au_k - b}{1 - u_k} ;\, k \in \{0,\ldots,n-1\} \right\}$ où les u_k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de $\dfrac{b}{a}$ dans $\mathbb{C}$
- Pour tout k de $\{0,\ldots,n-1\}$, $\mathrm{SEP}\left(A, \dfrac{au_k - b}{1 - u_k}\right)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ u_k \\ \vdots \\ u_k^{n-1} \end{pmatrix}$

2) Si $a = b \neq 0$:

- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-a, (n-1)a\}$
- $\mathrm{SEP}(A, -a)$ est l'hyperplan d'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$
- $\mathrm{SEP}(A, (n-1)a)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix}$

3) Si $(a \neq 0,\, b = 0)$:

- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$
- $\mathrm{SEP}(A, 0)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}$

4) Si $(a = 0, b \neq 0)$:

- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$
- $\mathrm{SEP}(A, 0)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5) Si $a = b = 0$:

- $\mathrm{Sp}_C(A) = \{0\}$
- $\mathrm{SEP}(A, 0) = \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

b) **Réponse :** $ab \neq 0$ ou $a = b = 0$.

3.3.4

Obtenir le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda^2 - \alpha\lambda - (a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n))\lambda^{n-2}.$$

En particulier, 0 est vp de A.

On a, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

$$AX = 0 \iff \begin{cases} \alpha x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n = 0 \\ a_2 x_1 = \ldots = a_n x_1 = 0 \end{cases}.$$

Discuter la dimension de $\mathrm{SEP}(A, 0)$ (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(A)$).

Réponse :

$$\begin{cases} (a_2,\ldots,a_n) \neq (0,\ldots,0) \\ (b_2,\ldots,b_n) \neq (0,\ldots,0) \\ a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \neq 0 \\ \alpha^2 + 4(a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{ou} \begin{cases} (a_2,\ldots,a_n) = (0,\ldots,0) \\ (b_2,\ldots,b_n) \neq (0,\ldots,0) \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{ou} \begin{cases} (a_2,\ldots,a_n) \neq (0,\ldots,0) \\ (b_2,\ldots,b_n) = (0,\ldots,0) \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{ou} \begin{cases} (a_2,\ldots,a_n) = (0,\ldots,0) \\ (b_2,\ldots,b_n) = (0,\ldots,0) \end{cases}.$$

3.3.5

Réponse : PDP^{-1}, où :

a) $P = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$,

$P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$, où $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 4 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2n \end{pmatrix}$

b) $$P = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & J \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ J & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} (a+b)\mathrm{I}_n & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & 0 \\ 0 \cdots 0 & a+b & 0 \cdots 0 \\ 0 & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & (a-b)\mathrm{I}_n \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & J \\ 0 \cdots 0 & 2 & 0 \cdots 0 \\ J & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix},$$

où $$J = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & ⁄ & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}).$$

3.3.6

Notons $E = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, $\mathcal{B}_0$ la base canonique de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = A$. On a :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{0,\ldots,n-1\},\ & f(\mathrm{X}^i) \\ &= (n-1-i)\mathrm{X}^{i+1} + (\alpha - pi)\mathrm{X}^i - qi\mathrm{X}^{i-1} \\ &= ((n-1)\mathrm{X}+\alpha)\mathrm{X}^i - (\mathrm{X}^2+p\mathrm{X}+q)(\mathrm{X}^i)'. \end{aligned}$$

Il en résulte : $\forall P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$,

$$f(P) = ((n-1)\mathrm{X}+\alpha)P - (\mathrm{X}^2+p\mathrm{X}+q)P'.$$

Notons a,b les zéros réels de $\mathrm{X}^2+p\mathrm{X}+q$, et, pour $k \in \{0,\ldots,n-1\}$, $P_k = (\mathrm{X}-a)^k(\mathrm{X}-b)^{n-1-k}$.

Calculer : $f(P_k) = \Big(\alpha + (n-1)a + k(b-a)\Big)P_k$.

Les n réels $\alpha + (n-1)a + k(b-a)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, sont deux à deux distincts, donc A est diagonalisable.

Réponse :

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \Big\{\alpha + (n-1)\,a + k(b-a)\,;\, k \in \{0,\ldots,n-1\}\Big\}$

• Pour tout k de $\{0,\ldots,n-1\}$, le SEP associé à $\alpha+(n-1)a+k(b-a)$ est de dimension 1, engendré par la colonne des composantes, dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, du polynôme $P_k = (\mathrm{X}-a)^k(\mathrm{X}-b)^{n-1-k}$.

3.3.7

a) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$.

On a : $AX = \lambda X \iff \begin{cases} ax_1 + bx_2 = \lambda x_1 \\ cx_1 + ax_2 + bx_3 = \lambda x_2 \\ \qquad \vdots \\ cx_{n-1} + ax_n = \lambda x_n . \end{cases}$

Notons $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} & AX = \lambda X \\ & \iff \Big(\forall k \in \{1,\ldots,n\},\ bx_{k+1} + (a-\lambda)x_k + cx_{k-1} = 0\Big). \end{aligned}$$

Si $\left|\begin{array}{lll} (b=0 & \text{et} & c \neq 0) \\ \text{ou} & & \\ (b \neq 0 & \text{et} & c = 0) \end{array}\right.$,

montrer que A n'est pas diagonalisable.

Si $b = c = 0$, l'étude est triviale.

Supposons donc $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

Notons $\varDelta = (a-\lambda)^2 - 4bc$ le discriminant de l'équation caractéristique $br^2 + (a-\lambda)r + c = 0$ associée aux suites récurrentes linéaires du 2^{nd} ordre $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad bu_{k+1} + (a-\lambda)u_k + cu_{k-1} = 0.$$

Supposons $\varDelta = 0$. L'équation caractéristique admet un zéro double $r_0 = \dfrac{\lambda - a}{2b}$, et $r_0 \neq 0$ (car $c \neq 0$).

Il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall k \in \{0,\ldots,n+1\},\quad x_k = \alpha r_0^k + \beta k r_0^{k-1}.$$

Comme $x_0 = x_{n+1} = 0$, on déduit $\alpha = \beta = 0$, donc $X = 0$, exclu.

On a donc $\varDelta \neq 0$, et l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes, notées r_1, r_2.

Il existe $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall k \in \{0,\ldots,n+1\},\ x_k = \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k.$$

On a :

$$\begin{aligned} x_0 = x_{n+1} = 0 &\iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 r_1^{n+1} + \alpha_2 r_2^{n+1} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_1 \\ \alpha_1(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) = 0 \quad (1) \end{cases} \end{aligned}$$

Si $\alpha_1 = 0$, alors $\alpha_2 = 0$, $X = 0$ exclu.

Donc $\alpha_1 \neq 0$ et : $(1) \iff r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$.

Il existe donc $p \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $r_2 = r_1 \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}p\pi}{n+1}}$.

De plus, $r_1 r_2 = \dfrac{c}{b}$, donc $r_1^2 = \dfrac{c}{b}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}p\pi}{n+1}}$.

Notons ζ une racine carrée complexe de $\dfrac{c}{b}$. On obtient :

$$r_1 = \zeta \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}p\pi}{n+1}} \quad \text{et} \quad r_2 = \zeta \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n+1}} \quad \text{(à l'ordre près).}$$

D'autre part : $r_1 + r_2 = \dfrac{\lambda - a}{b}$,

d'où $\lambda = a + 2b\zeta \cos\dfrac{p\pi}{n+1}$.

Notons, pour $p \in \{1,\ldots,n\}$, $\lambda_p = a + 2b\zeta\cos\dfrac{p\pi}{n+1}$.

Comme $b\zeta \neq 0$ et que cos est strictement décroissante sur $]0;\pi[$, les n complexes $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont deux à deux distincts. Ceci montre que A admet au moins n vp deux à deux distinctes ;

ce sont alors les seules puisque $A \in \mathbf{M}_n(K)$, et A est diagonalisable.

Enfin, pour chaque p de $\{1,\dots,n\}$, on a :

$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\ x_k = \alpha_1(r_1^k - r_2^k) = -2\mathrm{i}\alpha_1\zeta^k \sin\frac{kp\pi}{n+1}.$$

Réponse :

1) Si $b \neq 0$ et $c \neq 0$:

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ a n éléments, les $\lambda_p = a + 2b\zeta\cos\dfrac{p\pi}{n+1}$, où $p \in \{1,\dots,n\}$ et ζ est une racine carrée complexe de $\dfrac{c}{b}$.

• Pour chaque p de $\{1,\dots,n\}$, $\mathrm{SEP}(A,\lambda_p)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} \zeta\sin\dfrac{p\pi}{n+1} \\ \vdots \\ \zeta^n\sin\dfrac{np\pi}{n+1}\end{pmatrix}$.

2) Si $b \neq 0$ et $c = 0$:

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{a\}$

• $\mathrm{SEP}(A,a)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Si $b = 0$ et $c \neq 0$:

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{a\}$

• $\mathrm{SEP}(A,a)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) Si $b = c = 0$:

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{a\}$

• $\mathrm{SEP}(A,a) = \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

b) **Réponse :** $bc \neq 0$ ou $b = c = 0$.

c) On a, pour tout t de $]-1;1[$:

$$U_n(t) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Arccos} t \equiv 0 \left[\frac{\pi}{n+1}\right]$$
$$\Longleftrightarrow \left(\exists p \in \{1,\dots,n\},\ t = \cos\frac{p\pi}{n+1}\right).$$

Comme U_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^n, et a n zéros deux à deux distincts, on conclut :

$$U_n = 2^n\prod_{p=1}^{n}\left(\mathrm{X} - \cos\frac{p\pi}{n+1}\right).$$

D'autre part, d'après *a)*, dans le cas $bc \neq 0$:

$$\chi_A = (-1)^n\prod_{p=1}^{n}\left(\mathrm{X} - \left(a + 2b\zeta\cos\frac{p\pi}{n+1}\right)\right),$$

d'où, pour tout λ de $\mathbb{C}$:

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n(b\zeta)^n U_n\left(\frac{\lambda - a}{2b\zeta}\right).$$

Réponse : Si $bc \neq 0$, en notant η une racine carrée complexe de bc, on a : $\chi_A = (-\eta)^n U_n\left(\dfrac{\mathrm{X} - a}{2\eta}\right)$.

3.3.8

1) Diagonaliser A. On obtient : $A = PDP^{-1}$, où :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Soient $B \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, $C = P^{-1}BP$. On a :

$$B^2 = A \Longleftrightarrow C^2 = D.$$

Décomposons C en blocs : $C = \begin{pmatrix} M & V \\ {}^{\mathrm{t}}U & \alpha \end{pmatrix}$,

où $M \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}), \dots$

$$\text{Alors : } C^2 = D \Longleftrightarrow \begin{cases} M^2 + V\,{}^{\mathrm{t}}U = \mathrm{I}_2 & (1) \\ MV + \alpha V = 0 & (2) \\ M\,{}^{\mathrm{t}}U + \alpha\,{}^{\mathrm{t}}U = 0 & (3) \\ {}^{\mathrm{t}}UV + \alpha^2 = 0 & (4) \end{cases}.$$

De (1) et (4), on déduit :

$$M^2V = V - V({}^{\mathrm{t}}UV) = (1+\alpha^2)V.$$

Et de (2) : $M^2V = -\alpha MV = \alpha^2 V$.

D'où $V = 0$, puis $\alpha = 0$, $M^2 = \mathrm{I}_2$, $M\,{}^{\mathrm{t}}U = 0$,

$${}^{\mathrm{t}}U = M^2\,{}^{\mathrm{t}}U = 0,\ U = 0.$$

Ainsi : $C^2 = D \Longleftrightarrow (M^2 = \mathrm{I}_2,\ U = V = 0,\ \alpha = 0)$.

D'autre part : $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}(M)$.

En notant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{cases} M^2 = \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{tr}(M) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ a^2 + bc = 1 \end{cases}.$$

Calculer enfin $B = PCP^{-1}$.

Réponse :

$$\left\{\begin{pmatrix} 4a-3b+c & 9a-9b+2c & 5a-6b+c \\ -a+b & -2a+3b & -a+2b \\ -a-c & -3a-2c & -2a-c \end{pmatrix};\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } a^2+bc = 1\right\}.$$

3.3.9

1ère méthode : Calculer les polynômes caractéristiques ; on trouve $\chi_A = \chi_B = -\mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X} + 1$. Montrer que le polynôme $-\mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X} + 1$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ admet trois zéros réels distincts, notés $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. En notant $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, on a donc : $A \sim D$ et $B \sim D$, d'où $A \sim B$.

2ème méthode : Utiliser $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Réponse : oui.

3.3.10

En notant $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$, remarquer $PA = BP$.

Réponse : oui.

3.3.11

D'abord, il est clair que f est bien un endomorphisme de $K_n[\mathrm{X}]$. Remarquer : $f(1) = 0$, $f(\mathrm{X}-a) = -2(\mathrm{X}-a)$, et, pour $k \in \{2,\ldots,n\}$, $f((\mathrm{X}-a)^k) = (k-2)(\mathrm{X}-a)^k$. Ainsi, $\mathcal{B} = \left((\mathrm{X}-a)^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $K_n[\mathrm{X}]$ et la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & -2 & & & \text{0} & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & \text{0} & & & \ddots & \\ & & & & & n-2 \end{pmatrix}.$$

Réponse :

- Les vp sont -2 (simple), 0 (double) et $1,2,\ldots,n-2$ (simples)
- $\mathrm{SEP}(f,-2) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}-a)$

$\mathrm{SEP}(f,0) = \mathrm{Vect}(1,(\mathrm{X}-a)^2)$

$\mathrm{SEP}(f,\lambda) = \mathrm{Vect}((\mathrm{X}-a)^{\lambda+2})$

pour tout λ de $\{1,2,\ldots,n-2\}$

- $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1,(\mathrm{X}-a)^2)$
- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((\mathrm{X}-a),(\mathrm{X}-a)^3,(\mathrm{X}-a)^4,\ldots,(\mathrm{X}-a)^n)$
- f est diagonalisable.

3.3.12

a) D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(H)) = n - \mathrm{rg}(H) = n-1 \ (\geqslant 1)\ ;$$

ainsi, 0 est vp de H d'ordre $\geqslant n-1$

et $\quad \dim(\mathrm{SEP}(H,0)) = \dim(\mathrm{Ker}(H)) = n-1$.

Puisque $\mathrm{X}^{n-1} | \chi_H$ et que $\deg(\chi_H) = n$, χ_H est scindé sur K. Alors $\mathrm{tr}(H)$ est la somme des vp de H, ce qui montre que $\mathrm{Sp}_K(H)$ est formé de 0 et de $\mathrm{tr}(H)$.

1^er^ cas : $\mathrm{tr}(H) \neq 0$

Alors $\mathrm{Sp}_K(H) = \{0,\mathrm{tr}(H)\}$, $\dim(\mathrm{SEP}(H,0)) = n-1$, $\dim(\mathrm{SEP}(H,\mathrm{tr}(H))) = 1$, donc H est diagonalisable et

$$H \sim \begin{pmatrix} 0 & & & \text{0} \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ \text{0} & & & \mathrm{tr}(H) \end{pmatrix}.$$

2^ème^ cas : $\mathrm{tr}(H) = 0$

Alors $\mathrm{Sp}_K(H) = \{0\}$ et $\dim(\mathrm{SEP}(H,0)) = n-1$, donc H n'est pas diagonalisable.

b) α) Cf. *a)*, 1^er^ cas.

β) Supposons H non diagonalisable, c'est-à-dire (cf. *a)*) :

$$\mathrm{tr}(H) = 0.$$

Puisque $\mathrm{rg}(H) = 1$, il existe $V_{n-1} \in \mathbf{M}_{n,1}(K) - \{0\}$ tel que $\mathrm{Im}(H) = KV_{n-1}$, puis il existe $V_n \in \mathbf{M}_{n,1}(K)$ tel que

$$V_{n-1} = HV_n.$$

Comme $HV_{n-1} = H^2V_n = \mathrm{tr}(H)HV_n = 0$, on a :

$$V_{n-1} \in \mathrm{Ker}(H).$$

Puisque $\dim(\mathrm{Ker}(H)) = n-1$, il existe

$$V_1,\ldots,V_{n-2} \in \mathbf{M}_{n,1}(K)$$

tels que

$$(V_1,\ldots,V_{n-2},V_{n-1})$$

soit une base de $\mathrm{Ker}(H)$.

Montrer que $\mathcal{B} = (V_1,\ldots,V_n)$ est une base de $\mathbf{M}_{n,1}(K)$.

En notant f l'endomorphisme de $\mathbf{M}_{n,1}(K)$ de matrice H dans la base canonique, on a donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & \text{0} \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ \text{0} & & & 0 \end{pmatrix},$$

et ainsi $$H \sim \begin{pmatrix} 0 & & & \text{0} \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ \text{0} & & & 0 \end{pmatrix}.$$

c) • $H_1 \sim H_2 \Longrightarrow \mathrm{tr}(H_1) = \mathrm{tr}(H_2)$, cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.2.4 Prop. 3.

• Réciproquement, supposons $\mathrm{tr}(H_1) = \mathrm{tr}(H_2)$.

Si $\mathrm{tr}(H_1) \neq 0$, alors $\mathrm{tr}(H_2) \neq 0$, et, d'après *b) α)*, H_1 et H_2 sont semblables à

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \text{0} \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ \text{0} & & & \mathrm{tr}(H_1) \end{pmatrix}.$$

Si $\mathrm{tr}(H_1) = 0$, alors $\mathrm{tr}(H_2) = 0$, et, d'après *b) β)*, H_1 et H_2 sont semblables à $\begin{pmatrix} 0 & & & \text{0} \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ \text{0} & & & 0 \end{pmatrix}$.

3.3.13

L'étude est immédiate si $A = 0$ ou $B = 0$. Supposons donc $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Comme $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(B)$, on a : $\quad \mathrm{rg}(\varphi) \leqslant 1$.

Montrer qu'il existe $M_1 \in \mathbf{M}_{n,1}(K)$ telle que $\mathrm{tr}(AM_1) \neq 0$, et en déduire $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$.

On a : $\quad \forall X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\varphi \circ \varphi(X) = \mathrm{tr}(AX)\varphi(B) = \mathrm{tr}(AX)\mathrm{tr}(AB)B = \mathrm{tr}(AB)\varphi(X),$$

donc : $\quad \varphi^2 = \mathrm{tr}(AB)\varphi$.

D'autre part, $\varphi^2 = \mathrm{tr}(\varphi)\varphi$ (cf. Algèbre PCSI-PTSI, exercice 8.1.30 *b)*). On déduit : $\quad \mathrm{tr}(\varphi) = \mathrm{tr}(AB)$.

Appliquer enfin le résultat de l'exercice 3.3.12 *a)* à φ (à la place de H).

Réponse : $\quad \mathrm{tr}(AB) \neq 0$ ou $A = 0$ ou $B = 0$.

3.3.14

Soient $\lambda \in K$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(K) - \{0\}$. On a :

$$AX = \lambda X$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ a_0 x_1 + \ldots + a_{n-2}x_{n-1} + a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ (a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} - \lambda^n)x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ P(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Ceci montre que les vp de A sont les zéros de P et que, pour tout zéro λ de P, $\mathrm{SEP}(A,\lambda)$ est de dimension 1, engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$.

Ainsi, A est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur K et à zéros tous simples.

3.3.15

1^er^ cas : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = n$

Alors A et B sont inversibles et, par hypothèse, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ telle que $A = PBP^{-1}$. D'où :

$$\mathrm{com}(A) = \det(A)\,{}^{\mathrm{t}}A^{-1} = \det(A)\,{}^{\mathrm{t}}P^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}B^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}P.$$

Comme $A \sim B$, on a $\det(A) = \det(B)$, et donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{com}(A) &= {}^{\mathrm{t}}P^{-1}(\det(B)\,{}^{\mathrm{t}}B^{-1})\,{}^{\mathrm{t}}P \\ &= {}^{\mathrm{t}}P^{-1}\mathrm{com}(B)\,{}^{\mathrm{t}}P \sim \mathrm{com}(B). \end{aligned}$$

2^ème^ cas : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) \leqslant n-2$

Alors (cf. exercice 2.9.1),

$$\mathrm{com}(A) = \mathrm{com}(B) = 0, \text{ donc } \mathrm{com}(A) \sim \mathrm{com}(B)$$

trivialement.

3^ème^ cas : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = n-1$

D'après l'exercice 2.9.1 :

$$\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = \mathrm{rg}(\mathrm{com}(B)) = 1.$$

D'après l'exercice 3.3.12 *c)*, on a alors :

$$\mathrm{com}(A) \sim \mathrm{com}(B) \iff \mathrm{tr}(\mathrm{com}(A)) = \mathrm{tr}(\mathrm{com}(B)).$$

Mais (cf. exercice 3.2.3 p. 85), $-\mathrm{tr}(\mathrm{com}(A))$ est le coefficient de λ dans $\chi_A(\lambda)$, donc aussi dans $\chi_B(\lambda)$, d'où $\mathrm{tr}(\mathrm{com}(A)) = \mathrm{tr}(\mathrm{com}(B))$, et enfin $\mathrm{com}(A) \sim \mathrm{com}(B)$.

3.3.16

Soient E un K-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent et diagonalisable. Il existe $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in K$ et une base $\mathcal{B}$ de E tels qu'en notant $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on ait

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

et il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $D^k = 0$.

On déduit $\lambda_1^k = \ldots = \lambda_n^k = 0$, puis $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, $D = 0$, $f = 0$.

3.3.17

1) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ convenant.

On a alors :

$$\begin{cases} \mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA) \\ \det(AB) = \det(BA) \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = 1 + b \\ -5 = b + 3a \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2 \\ b = 1. \end{cases}$$

2) Réciproquement, supposons $a = -2$, $b = 1$, et notons :

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrons qu'il existe $(A,B) \in \big(\mathbf{M}_2(\mathbb{R})\big)^2$ tel que : $AB = U$ et $BA = V$.

On a :

$$\chi_U(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 5,$$

de discriminant $\Delta = 24 > 0$, donc χ_U admet deux zéros rels distincts, nots λ_1,λ_2.

Comme U est d'ordre deux et admet deux valeurs propres distinctes, U est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que, en notant $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2)$, on ait : $U = PDP^{-1}$.

De même, il existe $Q \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que : $V = QDQ^{-1}$.

On a alors :

$$V = QDQ^{-1} = Q(P^{-1}UP)Q^{-1} = QP^{-1}UPQ^{-1}.$$

En notant $A = UPQ^{-1}$ et $B = QP^{-1}$, on obtient :

$$AB = U \quad \text{et} \quad BA = V.$$

Réponse : $\mathcal{S} = \{(-2,1)\}$.

3.3.18

a) Supposons, par exemple, A inversible (l'autre cas est analogue).

Il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$, $D \in \mathbf{D}_n(K)$ telles que

$$AB = PDP^{-1}.$$

On a :

$BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}(PDP^{-1})A$
$= (P^{-1}A)^{-1}D(P^{-1}A)$,

donc BA est diagonalisable.

b) Considérer $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable

• $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Réponse : non.

3.3.19

Notons $A = (a_{ij})_{ij}$.

Il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} \lambda_1,\dots,\lambda_n \text{ sont deux à deux distincts} \\ \mu_1,\dots,\mu_n \text{ sont deux à deux distincts} \\ \forall i \in \{1,\dots,n\},\ \lambda_i + \mu_i = a_{ii}. \end{cases}$$

En effet, on prend :

• $\begin{cases} \lambda_1 \text{ quelconque} \\ \mu_1 = a_{11} - \lambda_1 \end{cases}$

• $\begin{cases} \lambda_2 \text{ tel que : } \lambda_2 \neq \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \neq a_{22} - \mu_1 \\ \mu_2 = a_{22} - \lambda_2 \end{cases}$

• $\begin{cases} \lambda_3 \text{ tel que : } \lambda_3 \neq \lambda_1,\ \lambda_3 \neq \lambda_2,\ \lambda_3 \neq a_{33} - \mu_1, \\ \qquad \lambda_3 \neq a_{33} - \mu_2 \\ \mu_3 = a_{33} - \lambda_3 \end{cases}$

$\vdots$

ce qui est possible puisque $\mathbb{R}$ est infini.

En notant $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ a_{21} & \lambda_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,n-1} & \lambda_n \end{pmatrix}$

et $C = \begin{pmatrix} \mu_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & a_{n-1\,n} \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}$,

on a $B + C = A$, et B et C sont diagonalisables (elles ont n vp deux à deux distinctes).

3.3.20

Il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$, $D \in \mathbf{D}_n(K)$ telles que $M = PDP^{-1}$, et on a :

$$M^k A = 0 \iff D^k(P^{-1}A) = 0.$$

Notons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Alors $D^k(P^{-1}A) = \begin{pmatrix} \lambda_1^k\alpha_{11} & \dots & \lambda_1^k\alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n^k\alpha_{n1} & \dots & \lambda_n^k\alpha_{nn} \end{pmatrix}$, d'où :

$$\begin{aligned} D^kP^{-1}A = 0 &\iff \Big(\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ \lambda_i^k\alpha_{ij} = 0\Big) \\ &\iff \Big(\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ \lambda_i\alpha_{ij} = 0\Big) \\ &\iff D(P^{-1}A) = 0 \iff MA = 0. \end{aligned}$$

3.3.21

a) Soient $B \in \mathbf{M}_n(K)$, $E = P^{-1}BP$.

On a : $\quad AB = BA \iff DE = ED$.

Décomposons E en blocs suivant les mêmes formats que la décomposition $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{\omega_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \mathrm{I}_{\omega_p} \end{pmatrix}$:

$$E = \begin{pmatrix} E_{11} & \dots & E_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{p1} & \dots & E_{pp} \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} DE = ED &\iff \Big(\forall (i,j) \in \{1,\dots,p\}^2,\ \lambda_i E_{ij} = \lambda_j E_{ij}\Big) \\ &\iff \Big(\forall (i,j) \in \{1,\dots,p\}^2,\ (i \neq j \Longrightarrow E_{ij} = 0)\Big). \end{aligned}$$

Réponse :

$$C(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix} P^{-1} ;\quad (A_1,\dots,A_p) \in \mathbf{M}_{\omega_1}(K) \times \dots \times \mathbf{M}_{\omega_p}(K) \right\}.$$

b) • $0 \in C(A)$ et, pour tous α de K et B,C de $C(A)$:

$$A(\alpha B + C) = \alpha AB + AC = \alpha BA + CA = (\alpha B + C)A,$$

donc $\alpha B + C \in C(A)$.

Ainsi, $C(A)$ est un sev de $\mathbf{M}_n(K)$.

• D'après *a)*, l'application $\theta : \prod_{k=1}^{p} \mathbf{M}_{\omega_k}(K) \longrightarrow C(A)$ définie par

$$\theta(A_1,\dots,A_p) = P \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix} P^{-1},$$

est un isomorphisme de K-ev. Donc :

$$\dim\big(C(A)\big) = \dim\left(\prod_{k=1}^{p} \mathbf{M}_{\omega_k}(K)\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(\mathbf{M}_{\omega_k}(K)) = \sum_{k=1}^{p} \omega_k^2.$$

• Pour $n=5$, vérifier qu'il n'existe pas $p \in \{1,\ldots,5\}$, $(\omega_1,\ldots,\omega_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{p} \omega_k = 5 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{p} \omega_k^2 = 10.$$

Réponse :

• $\dim(C(A)) = \sum_{k=1}^{p} \omega_k^2$

• $n=5 \Longrightarrow \dim(C(A)) \neq 10$.

c) 1) Il est clair que, si $p=n$, alors $\omega_1 = \ldots = \omega_n = 1$, donc $\dim(C(A)) = \sum_{k=1}^{p} \omega_k^2 = n$.

2) Réciproquement, supposons $\dim(C(A)) = n$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$n^2 = \left(\sum_{k=1}^{p} \omega_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{p} 1^2\right)\left(\sum_{k=1}^{p} \omega_k^2\right) = pn,$$

d'où $n=p$.

3.3.22

a) Il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Notons

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbf{M}_n(K) & \longrightarrow & \mathbf{M}_n(K) \\ M & \longmapsto & P^{-1}MP \end{array}, \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbf{M}_n(K) & \longrightarrow & \mathbf{M}_n(K) \\ X & \longmapsto & PXP^{-1} \end{array}.$$

Soit $M \in C_A$. Il existe $Q \in \mathbf{GL}_n(K)$ telle que $M = Q^{-1}AQ$, et $AM = MA$. D'où :

$$\begin{cases} f(M) = P^{-1}Q^{-1}AQP = (P^{-1}QP)^{-1}B(P^{-1}QP) \sim B \\ f(M)B = P^{-1}MAP = P^{-1}AMP = Bf(M) \end{cases},$$

et donc $f(M) \in C_B$.

Le même raisonnement montre : $\forall X \in C_B,\ g(X) \in C_A$.

Ainsi : $f(C_A) \subset C_B$ et $g(C_B) \subset C_A$.

Considérons

$$f' : \begin{array}{rcl} C_A & \longrightarrow & C_B \\ M & \longmapsto & P^{-1}MP \end{array} \quad \text{et} \quad g' : \begin{array}{rcl} C_B & \longrightarrow & C_A \\ X & \longmapsto & PXP^{-1} \end{array}.$$

Puisque $g' \circ f' = \mathrm{Id}_{C_A}$ et $f' \circ g' = \mathrm{Id}_{C_B}$, f' et g' sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

b) Puisque $A \in \mathbf{M}_n(K)$ et que A admet n vp $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ deux à deux distinctes, A est diagonalisable. Il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Soit $X = (x_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(K)$. On a :

$$\begin{aligned} MD = DM &\Longleftrightarrow \left(\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ m_{ij}\lambda_j = \lambda_i m_{ij}\right) \\ &\Longleftrightarrow \left(\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, (i \neq j \Longrightarrow m_{ij} = 0)\right) \\ &\Longleftrightarrow M \in \mathbf{D}_n(K). \end{aligned}$$

Puis, sachant que D a n vp deux à deux distinctes :

$$M \sim D \Longleftrightarrow \left(\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ M = \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi :

$$C_D = \left\{\begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix};\ \sigma \in \mathfrak{S}_n\right\},$$

qui a exactement $n!$ éléments.

D'après *a)*, C_A est aussi fini et a $n!$ éléments.

3.3.23

Puisque A et B sont diagonalisables, il existe

$$P \in \mathbf{GL}_p(K),\ D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_p(K),$$

$$Q \in \mathbf{GL}_q(K),\ E = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_q \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_q(K)$$

telles que :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{et} \quad B = QEQ^{-1}.$$

Soient $U \in \mathbf{M}_{p,q}(K)$ (à choisir ultérieurement), $R = \begin{pmatrix} P & U \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K)$. Montrer que R est inversible et :

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}UQ^{-1} \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}.$$

En notant $F = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, on a alors :

$$RFR^{-1} = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où $\quad W = -PDP^{-1}UQ^{-1} + UEQ^{-1}$.

Puis :

$$W = C \Longleftrightarrow (P^{-1}U)E - D(P^{-1}U) = P^{-1}CQ.$$

Nous allons montrer qu'il existe U satisfaisant l'équation précédente, en prouvant que $\phi : \begin{array}{rcl} \mathbf{M}_{p,q}(K) & \longrightarrow & \mathbf{M}_{p,q}(K) \\ Y & \longmapsto & YE - DY \end{array}$ est bijective.

Soit $Y = (y_{ij}) \in \mathbf{M}_{p,q}(K)$.

On a :

$$\phi(Y) = 0 \Longleftrightarrow (\forall (i,k) \in \{1,\ldots,p\} \times \{1,\ldots,q\}, y_{ik}\mu_k = \lambda_i y_{ik}).$$

Mais :

$$\{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\} \cap \{\mu_1,\ldots,\mu_q\} = \mathrm{Sp}_K(A) \cap \mathrm{Sp}_K(B) = \varnothing,$$

donc : $\forall (i,k) \in \{1,\ldots,p\} \times \{1,\ldots,q\},\ \lambda_i \neq \mu_k$.

Alors :

$$\begin{aligned} \phi(Y) = 0 &\Longleftrightarrow \left(\forall (i,k) \in \{1,\ldots,p\} \times \{1,\ldots,q\}, y_{ik} = 0\right) \\ &\Longleftrightarrow Y = 0 \end{aligned}.$$

Ceci montre que ϕ est linéaire injective ; comme $\mathbf{M}_{p,q}(K)$ est de dimension finie, il en résulte que ϕ est bijective.

Il existe donc $Y \in \mathbf{M}_{p,q}(K)$ telle que $\phi(Y) = P^{-1}CQ$. En notant $U = PY$, on a alors :

$$(P^{-1}U)E - D(P^{-1}U) = YE - DY = \phi(Y) = P^{-1}CQ,$$

d'où $W = C$.

Ceci prouve :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

donc M est diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

3.3.24

• Former le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 3)(\lambda^2 + 3).$$

• $\mathrm{SEP}(A,3)$ est de dimension 1, engendré par $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Les sev stables de dimensions 0, 1, 3 sont : $\{0\}$, $\mathbb{R}V$, $\mathbb{R}^3$. Il reste à trouver les plans stables. Remarquer que le plan $P_0 = \mathrm{Ker}(f^2 + 3e)$, d'équation $x + y + z = 0$, est stable par f.

Soit P un plan stable par f, autre que P_0 (s'il en existe). Alors $P \cap P_0$ est une droite vectorielle stable, donc $P \cap P_0 = \mathbb{R}V$. Donc $V \in P_0$, ce qui n'est pas. Ainsi, P_0 est le seul plan stable.

Réponse :

$$\{0\}, \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ le plan d'équation } x + y + z = 0, \mathbb{R}^3.$$

3.3.25

a) Récurrence sur n.

• La propriété est vraie pour $n = 1$ par hypothèse.

• Supposons-la vraie pour un n de $\mathbb{N}^*$.

Alors :

$$\begin{aligned} f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} &= f \circ (f^n \circ g) - g \circ f^{n+1} \\ &= f \circ (g \circ f^n + n\alpha f^n) - g \circ f^{n+1} \\ &= n\alpha f^{n+1} + (f \circ g - g \circ f) \circ f^n \\ &= n\alpha f^{n+1} + \alpha f \circ f^n = (n+1)\alpha f^{n+1}. \end{aligned}$$

b) • Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(g)$ et x un $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ associé : $x \neq 0$ et $g(x) = \lambda x$. On a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, d'après *a)* :

$$g(f^n(x)) = f^n(g(x)) - n\alpha f^n(x) = (\lambda - n\alpha) f^n(x).$$

Puisque $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(g)$ est fini et que α n'est pas nul, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda - n\alpha \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(g)$, et on a alors $f^n(x) = 0$.

• Puisque g est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_p)$ de E $(p = \dim(E))$ formée de vecteurs propres pour g. On vient de voir que, pour chaque i de $\{1, \ldots, p\}$, il existe $n_i \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{n_i}(x_i) = 0$. En notant $N = \underset{1 \leqslant i \leqslant p}{\mathrm{Max}}\, n_i$, on a : $\forall i \in \{1, \ldots, p\}, f^N(x_i) = 0$,

et donc $f^N = 0$.

3.3.26

Il est clair que, si A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire : $\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \exists D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R}), A = PDP^{-1}$), alors A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire :

$$\exists P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), \exists D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{C}), A = PDP^{-1}).$$

Supposons donc A diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ (car χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$) telles que $A = PDP^{-1}$.

Notons

$$R = \mathrm{Ré}(P) = \frac{1}{2}(P + \overline{P}) \text{ et } S = \mathrm{Im}(P) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(P - \overline{P}),$$

de sorte que :

$$R, S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } P = R + \mathrm{i}S.$$

On a :

$$\begin{aligned} &A = PDP^{-1} \iff AP = PD \\ &\iff A(R + \mathrm{i}S) = (R + \mathrm{i}S)D \iff \begin{cases} AR = RD \\ AS = SD, \end{cases} \end{aligned}$$

car AR, RD, AS, SD sont réelles.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ (à choisir ultérieurement), $Q = R + \alpha S$.

On a :

$$AQ = AR + \alpha AS = RD + \alpha SD = QD.$$

Il ne reste plus qu'à montrer qu'on peut choisir α pour que Q soit inversible.

L'application polynomiale $f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \alpha \longmapsto \det(R + \alpha S) \end{array}$ n'est pas nulle (car $f(\mathrm{i}) = \det(P) \neq 0$), donc n'admet qu'un nombre fini de zéros. Comme $\mathbb{R}$ est infini, il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) \neq 0$.

Pour cet α, Q est inversible et $A = QDQ^{-1}$, donc A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

3.4.1

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

Supposons A nilpotente.

• Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^N = 0$;

autrement dit, le polynôme X^N est annulateur de A.

Il en résulte : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0\}$.

• Puisque $\chi_A \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $\deg(\chi_A) \geqslant 1$, χ_A admet au moins un zéro dans $\mathbb{C}$, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \neq \varnothing$.

Finalement : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) :

Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$, comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, que $\chi_A^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ et que χ_A est de degré n à coefficient dominant $(-1)^n$, on conclut : $\chi_A = (-1)^n \mathrm{X}^n$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) :

Supposons $\chi_A = (-1)^n \mathrm{X}^n$.

Il existe $T \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ telle que $A \sim T$, et on a donc

$$\chi_T = \chi_A = (-1)^n \mathrm{X}^n.$$

Les termes diagonaux de T sont nuls :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est alors clair que :

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, T^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \bullet \\ & \ddots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^n = 0 \text{ et donc } A^n = 0$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i) : trivial.

3.4.2

Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$, puisque f est trigonalisable.

Il est clair alors que les sev suivants de E sont stables par f et de dimensions respectives $0, 1, 2, \ldots, n$:

$$\{0\},\ \mathrm{Vect}(e_1),\ \mathrm{Vect}(e_1,e_2), \ldots, \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k), \ldots, \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_n).$$

3.4.3

• Puisque A est trigonalisable, il existe

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C}),\ Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

telles que $A = QTQ^{-1}$. Alors

$P(A) = QP(T)Q^{-1}$, d'où, pour tout λ de $\mathbb{C}$:

$$\chi_{P(A)}(\lambda) = \chi_{P(T)}(\lambda) = \begin{vmatrix} P(\lambda_1) - \lambda & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) - \lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \big(P(\lambda_i) - \lambda\big)$$

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(P(A)) = \big\{P(\lambda_i);\ 1 \leqslant i \leqslant n\big\} = P(\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A))$.

3.4.4

Remarque : $\chi_M = \chi_A \chi_B$ (cf. aussi ex. 3.2.4). Puis :

$$\begin{aligned}(M \text{ trigonalisable}) &\Longleftrightarrow (\chi_M \text{ scindé}) \\ &\Longleftrightarrow (\chi_A \text{ et } \chi_B \text{ scindés}) \\ &\Longleftrightarrow (A \text{ et } B \text{ trigonalisables}).\end{aligned}$$

Remarque :

Supposons connues des trigonalisations de A et B :

$$A = PTP^{-1},\ B = QUQ^{-1},\ P \in \mathbf{GL}_n(K),$$
$$Q \in \mathbf{GL}_p(K),\ T \in \mathbf{T}_{n,s}(K),\ U \in \mathbf{T}_{p,s}(K).$$

Notons $R = \begin{pmatrix} P & X \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} T & G \\ 0 & U \end{pmatrix}$, où X,G sont à déterminer.

D'abord, R est inversible et :

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}XQ^{-1} \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}.$$

Puis, par produits par blocs :

$$\begin{aligned} &M = RVR^{-1} \\ \Longleftrightarrow\ & C = -PTP^{-1}XQ^{-1} + (PG + XU)Q^{-1}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir $\begin{cases} X = 0 \\ G = P^{-1}CQ \end{cases}$, ce qui fournit une trigonalisation de M :

$$M = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & P^{-1}CQ \\ 0 & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

Généralisation immédiate par récurrence sur N :

$\begin{pmatrix} A_1 & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N \end{pmatrix}$ est trigonalisable si et seulement si $A_1, \ldots, A_N$ sont trigonalisables.

3.4.5

1) Trigonalisation de A

Former le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda - 5)^2.$$

Calculer les SEP :

• $\mathrm{SEP}(A,-1)$ est de dimension 1, engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$

• $\mathrm{SEP}(A,5)$ est de dimension 1, engendré par $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que A n'est pas diagonalisable. Mais, puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. Chercher $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de façon que

$$AV_3 = 5V_3 + V_2.$$

On peut choisir $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, en remplaçant, pour la commodité, V_2 par $V_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

En notant $P = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 15 & 6 & -1 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

on a alors : $A = PTP^{-1}$.

2) Recherche des sev de $\mathbb{R}^3$ stables par f

Les sev de $\mathbb{R}^3$ stables par f et de dimensions 0, 1, 3 sont aisément déterminés : $\{0\}, \mathbb{R}V_1, \mathbb{R}V_2, \mathbb{R}^3$.

Il reste à trouver les plans stables. Il est clair que les plans $P_1 = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$, $P_2 = \mathrm{Vect}(V_2, V_3)$ sont stables par f.

Soit P un plan stable par f, autre que P_1 et P_2 (s'il en existe). Alors $P \cap P_2$ est une droite vectorielle stable par f, donc dirigée par V_2 (car $V_1 \notin P_2$). Il existe donc $W \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = \mathrm{Vect}(V_2, W)$. En notant $W = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3$, on a :

$$\begin{aligned} AW \in P &\iff \det_{(V_1,V_2,V_3)}(V_2, W, AW) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} 0 & \alpha & -\alpha \\ 1 & \beta & 5\beta+\gamma \\ 0 & \gamma & 5\gamma \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \alpha\gamma = 0 \iff (P = P_1 \text{ ou } P = P_2). \end{aligned}$$

Réponse : Les sev de $\mathbb{R}^3$ stables par f sont :

$$\{0\}, \mathbb{R}V_1, \mathbb{R}V_2, \mathbb{R}V_1 + \mathbb{R}V_2, \mathbb{R}V_2 + \mathbb{R}V_3, \mathbb{R}^3,$$

où $V_1 = (10, 15, 4)$, $V_2 = (1, 1, 1)$, $V_3 = (0, -1, 0)$.

3.4.6

a) Puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$: il existe

$$P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}),\ T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \cdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$$

telles que $A = PTP^{-1}$.

Alors $A^k = PT^kP^{-1}$, d'où : $\chi_{A^k} = \chi_{T^k} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i^k - \mathrm{X})$,

qui est scindé sur $\mathbb{R}$. Cf. aussi ex. 3.4.3 p. 105.

b) Puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, A est trigonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$: il existe

$$P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}),\ T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \cdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$$

telles que $A = PTP^{-1}$.

Alors (cf. *a)* aussi) : $\chi_{A^2} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i^2 - \mathrm{X})$.

Par hypothèse : $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \lambda_i^2 \in \mathbb{R}_+$,

donc : $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \lambda_i \in \mathbb{R}$,

et finalement χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

c) Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

on a $\chi_A = -\mathrm{X}^3 + 1 = -(\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)$,

qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, et $A^3 = \mathrm{I}_3$,

donc $\chi_{A^3} = -(\mathrm{X} - 1)^3$, qui est scindé sur $\mathbb{R}$.

Réponse : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, par exemple.

3.4.7

La matrice A est trigonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$: il existe

$$P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}),\ T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \cdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$$

telles que $A = PTP^{-1}$.

On a : $\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\mathrm{tr}(A^{i+j-2}) = \mathrm{tr}(T^{i+j-2}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{i+j-2}.$$

Considérons : $M = \left(\mathrm{tr}(A^{i+j-2})\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Remarquons que :

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2,\quad \mathrm{tr}(A^{i+j-2}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{i-1}\lambda_k^{j-1}.$$

Ainsi, en notant $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$, on a :

$M = {}^t\!BB$, d'où (déterminant de Vandermonde) :

$$\det(M) = (\det(B))^2 = \left(\prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)\right)^2,$$

et finalement :

$$\det(M) \neq 0 \iff (\lambda_1, \ldots, \lambda_n \text{ deux à deux distincts}).$$

Remarque : On a de plus :

- $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \det(M) \in \mathbb{R}_+$
- $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réels et deux à deux distincts) $\Longrightarrow \det(M) \in \mathbb{R}_+^*$.

3.4.8

- Soit $\lambda \in \mathbb{C} - \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Alors $A - \lambda \mathrm{I}_n$ est inversible et commute avec B (car $AB = BA$), d'où :

$$\begin{aligned} \chi_{A+B}(\lambda) &= \det((A - \lambda\mathrm{I}_n) + B) \\ &= \det(A - \lambda\mathrm{I}_n)\det(\mathrm{I}_n + N), \end{aligned}$$

où $N = B(A - \lambda\mathrm{I}_n)^{-1}$.

Comme B est nilpotente et que B et $(A - \lambda\mathrm{I}_n)^{-1}$ commutent, N est nilpotente. Mais N est trigonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$: il existe

$$P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}),\ T = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \cdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$$

telles que $N = PTP^{-1}$, d'où :

$$\det(\mathrm{I}_n + N) = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \cdots \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

et ainsi $\chi_{A+B}(\lambda) = \chi_A(\lambda)$.

• Comme les applications polynomiales χ_{A+B} et χ_A coïncident sur la partie infinie $\mathbb{C} - \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on conclut :

$$\chi_{A+B} = \chi_A.$$

3.4.9

On a :

$$\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subset \mathrm{Ker}(f) \subset \ldots$$
$$\subset \mathrm{Ker}(f^{\nu-1}) \subset \mathrm{Ker}(f^\nu) = E.$$

Montrer que les inclusions sont strictes.

1) Supposons $\nu = n$. Comme

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\dim(\mathrm{Ker}(f^{i+1})) - \dim(\mathrm{Ker}(f^i))) = n,$$

il en résulte : $\forall i \in \{0,\ldots,n-1\}$,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^{i+1})) = \dim(\mathrm{Ker}(f^i)) + 1.$$

En particulier $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ et donc (théorème du rang) : $\mathrm{rg}(f) = n - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - 1$.

2) Réciproquement, supposons $\mathrm{rg}(f) = n - 1$, c'est-à-dire (théorème du rang) : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

• Soit $i \in \{0,\ldots,\nu-1\}$. Il existe $V_1 \in \mathrm{Ker}(f^{i+1})$ tel que $V_1 \notin \mathrm{Ker}(f^i)$. Soit $V \in \mathrm{Ker}(f^{i+1})$.

Comme $f^{i+1}(V_1) = f^{i+1}(V) = 0$, on a :

$$f^i(V_1) \in \mathrm{Ker}(f) \quad \text{et} \quad f^i(V) \in \mathrm{Ker}(f).$$

Puisque $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ et $f^i(V_1) \neq 0$, il existe $\alpha \in K$ tel que $f^i(V) = \alpha f^i(V_1)$.

Ainsi : $V = (V - \alpha V_1) + \alpha V_1 \in \mathrm{Ker}(f^i) \oplus K V_1$.

Ceci montre : $\dim(\mathrm{Ker}(f^{i+1})) = \dim(\mathrm{Ker}(f^i)) + 1$.

• En sommant la relation obtenue ci-dessus, pour i de 0 à $\nu - 1$, on déduit :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^\nu)) = \dim(\mathrm{Ker}(f^0)) + \nu,$$

c'est-à-dire $n = \nu$.

3.4.10

D'après l'ex. 3.2.1 p. 85 : $\chi_g | \chi_f$. Alors :

$$f \text{ trigonalisable} \Longrightarrow \chi_f \text{ scindé} \Longrightarrow \chi_g \text{ scindé}$$
$$\Longrightarrow g \text{ trigonalisable.}$$

3.4.11

a) Récurrence sur n.

La propriété est triviale pour $n = 1$.

Supposons-la vraie pour tout entier $\leqslant n$, et soient E un K-ev de dimension finie $n+1$, I un ensemble non vide, $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables de E et commutant deux à deux. Le cas où tous les f_i sont des homothéties est d'étude immédiate. Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que f_{i_0} ne soit pas une homothétie ; f_{i_0} admet au moins une vp λ_0 (puisque f_{i_0} est trigonalisable) et un SEP associé E_0 tel que $1 \leqslant \dim(E_0) \leqslant n$.

• Le sev E_0 est stable par chaque f_i car, pour tout x de E_0 :

$$f_{i_0}(f_i(x)) = f_i(f_{i_0}(x)) = f_i(\lambda_0 x) = \lambda_0 f_i(x),$$

donc $f_i(x) \in E_0$.

• Notons, pour $i \in I$, g_i l'endomorphisme induit par f_i sur E_0. D'après l'ex. 3.4.11, g_i est trigonalisable. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à E_0 et à la famille $(g_i)_{i\in I}$: les g_i $(i \in I)$ admettent au moins un $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ commun x_0. Il est clair que x_0 est alors un $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ commun à tous les f_i.

b) Récurrence sur n.

La propriété est triviale pour $n = 1$.

Supposons-la vraie pour n, et soient E un K-ev de dimension finie $n+1$, I un ensemble non vide, $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables de E et commutant deux à deux.

D'après *a)*, il existe un vecteur propre commun x_0 à tous les f_i, $i \in I$. Puisque $x_0 \neq 0$ et que E est de dimension finie, on peut compléter x_0 en une base de E. Il existe donc une base $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_{n+1})$ de E telle que $e_{n+1} = x_0$.

Notons, pour $i \in I$, $A_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i)$.

Il existe $B_i \in \mathbf{M}_n(K)$, $L_i \in \mathbf{M}_{1,n}(K)$, $\lambda_i \in K$ tels que :

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & L_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix}.$$

On a, pour tout $(i,j) \in I^2$:

$$A_i A_j = \begin{pmatrix} \lambda_i\lambda_j & \lambda_i L_j + L_i B_j \\ 0 & B_i B_j \end{pmatrix}.$$

Comme les f_i commutent deux à deux, les A_i aussi, et donc les B_i aussi.

Soit $i \in I$. On a :

$$\chi_{A_i}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \lambda_i)\chi_{B_i}(\mathrm{X}).$$

Comme A_i est trigonalisable, χ_{A_i} est scindé sur K, donc χ_{B_i} aussi, et par conséquent, B_i est trigonalisable. (On peut aussi appliquer l'exercice 3.4.11, matriciellement, à ${}^{\mathrm{t}}A_i$).

D'après l'hypothèse de récurrence, appliquée matriciellement, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(K)$ (ne dépendant pas de i), $T_i \in \mathbf{T}_{n,\mathrm{s}}(K)$ telles que : $B_i = P T_i P^{-1}$.

En notant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ et $U_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & L_i P \\ 0 & T_i \end{pmatrix}$,

on a $Q \in \mathbf{GL}_{n+1}(K)$, $U_i \in \mathbf{T}_{n+1,\mathrm{s}}(K)$, et :

$$Q U_i Q^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_i & L_i \\ 0 & P T_i P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & L_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix} = A_i.$$

Ceci montre qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des f_i sont toutes trigonales.

Remarque : Si $n \geqslant 2$, il se peut que deux endomorphismes de E soient simultanément trigonalisables sans commuter, comme le montre l'exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour lequel on a :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA.$$

3.4.12

D'après l'exercice 3.4.11, comme A et B sont trigonalisables et commutent, il existe

$$P \in \mathbf{GL}_n(K),\ T_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,s}(K),$$

$$T_B = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,s}(K)$$

telles que $A = PT_AP^{-1}$ et $B = PT_BP^{-1}$, où $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ (resp. $\mu_1,\ldots,\mu_n$) sont les vp de A (resp. B).

On a alors :

$$A + B = P \begin{pmatrix} \lambda_1+\mu_1 & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n+\mu_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{et} \quad AB = P \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix} P^{-1},$$

ce qui montre que les vp de $A+B$ (resp. AB) sont $\lambda_1+\mu_1,\ldots,\lambda_n+\mu_n$ (resp. $\lambda_1\mu_1,\ldots,\lambda_n\mu_n$).

3.4.13

Récurrence sur n.

La propriété est triviale pour $n = 1$.

Supposons-la vraie pour un entier n, et soient $A,B,C \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ telles que :

$$AB - BA = C, \quad AC = CA, \quad BC = CB.$$

Notons α,β,γ les endomorphismes de $\mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ associés respectivement à A,B,C dans la base canonique de $\mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$.

L'endomorphisme γ admet au moins une vp λ ; notons $E_\lambda = \mathrm{SEP}(\gamma,\lambda)$. Montrer que E_λ est stable par α,β,γ. Notons α',β',γ' les endomorphismes induits sur E_λ par α,β,γ respectivement. On a :

$$\alpha' \circ \beta' - \beta' \circ \alpha' = \gamma' = \lambda \mathrm{Id}_{E_\lambda},$$

d'où :

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{tr}(\alpha' \circ \beta') - \mathrm{tr}(\beta' \circ \alpha') &= \mathrm{tr}(\alpha' \circ \beta' - \beta' \circ \alpha') \\ &= \lambda\ \dim(E_\lambda), \end{aligned}$$

et donc $\lambda = 0$, $\alpha' \circ \beta' = \beta' \circ \alpha'$.

En appliquant l'exercice 3.4.12 *a)* à E_λ et à la famille (α',β'), il existe $a_1,b_1 \in \mathbb{C}$, $x_1 \in E_\lambda - \{0\}$ tels que :

$$\alpha'(x_1) = a_1x_1 \quad \text{et} \quad \beta'(x_1) = b_1x_1.$$

Complétons x_1 en une base $\mathcal{B} = (x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$ de $\mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$. Les matrices de α,β,γ dans $\mathcal{B}$ sont respectivement de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_1 & X \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & Y \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & Z \\ 0 & C_1 \end{pmatrix},$$

où $X,Y,Z \in \mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{C})$, $A_1,B_1,C_1 \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Par produits par blocs, montrer :

$$A_1B_1 - B_1A_1 = C_1,\ A_1C_1 = C_1A_1,\ B_1C_1 = C_1B_1.$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à (A_1,B_1,C_1) : il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $T_1,\ U_1,\ V_1 \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ telles que :

$$A_1 = PT_1P^{-1},\ B_1 = PU_1P^{-1},\ C_1 = PV_1P^{-1}.$$

En notant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, Q est inversible,

$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ et, par produits par blocs :

$$Q^{-1}AQ,\ \ Q^{-1}BQ,\ \ Q^{-1}CQ \in \mathbf{T}_{n+1,s}(\mathbb{C}).$$

3.4.14

Récurrence sur n.

La propriété est triviale pour $n = 1$.

Supposons-la vraie pour un n de $\mathbb{N}^*$ et soient $A,B \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Si A ou B est inversible, alors $B = 0$ ou $A = 0$ et la propriété est immédiate. Supposons A et B non inversibles.

Notons f,g les endomorphismes de $\mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ de matrices A,B dans la base canonique. Puisque $f \circ g = 0$, il est clair que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par g. Notons g' l'endomorphisme induit par g sur $\mathrm{Ker}(f)$.

Comme $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) \geqslant 1$, g' admet au moins une vp λ et un $\overrightarrow{\text{vp}}$ associé x_1.

Il existe $x_2,\ldots,x_{n+1} \in \mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ tels que $\mathcal{B} = (x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$ soit une base de $\mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$.

Les matrices de f,g dans $\mathcal{B}$ sont respectivement de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & Y \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

où $X,Y \in \mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{C})$, $A_1,B_1 \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Comme $f \circ g = 0$, on déduit $A_1B_1 = 0$.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $T,U \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ telles que :

$$A_1 = PTP^{-1}, \quad B = PUP^{-1}.$$

En notant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, Q est inversible,

$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$, et, par produit par blocs :

$$Q^{-1}AQ \in \mathbf{T}_{n+1,s}(K), \quad Q^{-1}BQ \in \mathbf{T}_{n+1,s}(K).$$

• Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer : $ABC = 0$.

Si A,B,C étaient simultanément trigonalisables, A,B,C admettraient au moins un $\overrightarrow{\text{vp}}$ commun X_1. Mais

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\},\ \mathrm{SEP}(A,0) = \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

et $B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc A et B n'ont pas de $\overrightarrow{\text{vp}}$ commun.

Réponse : La propriété ne s'étend pas au cas de trois matrices (si $n \geqslant 2$).

3.4.15

Considérons les endomorphismes a,b de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ définis par :

$$a : X \longmapsto AX, \quad b : X \longmapsto XB.$$

Il est clair que a et b commutent :

$$\forall X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad (a \circ b)(X) = (b \circ a)(X) = AXB.$$

Comme a et b sont trigonalisables et commutent, d'après l'ex. 3.4.13 : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(a \circ b) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(a)\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(b)$.

Mais $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(a) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. En effet, si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(a)$, il existe $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) - \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$, donc il existe $V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ tel que $AV = \lambda V$ (en prenant pour V une des colonnes non nulles de X), et donc $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. De même pour B.

Comme $\rho(A)\rho(B) < 1$, on déduit :

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B), |\lambda|\,|\mu| < 1,$$

et donc : $\quad \forall \Lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(a \circ b), |\Lambda| < 1$.

Ceci montre que l'endomorphisme

$F = a \circ b - \mathrm{Id}_{\mathbf{M}_n(\mathbb{C})} : X \longmapsto AXB - X$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ n'admet pas 0 pour vp (sinon, $a \circ b$ admettrait 1 pour vp), donc est bijectif, d'où le résultat demandé.

3.4.16

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Evident.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :

L'application $\phi : \begin{array}{l} \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \\ X \longmapsto AX - XB \end{array}$ est linéaire injective et $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, donc ϕ est bijective.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) :

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$. Comme $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}({}^{\mathrm{t}}B)$, il existe $U,V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ tels que $AU = \lambda U$ et ${}^{\mathrm{t}}BV = \lambda V$. Notons $X = U\,{}^{\mathrm{t}}V \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$; montrer $X \neq 0$.

On a :

$$AX = (AU)\,{}^{\mathrm{t}}V = \lambda U\,{}^{\mathrm{t}}V$$

et $$XB = U({}^{\mathrm{t}}VB) = U\,{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}BV) = \lambda U\,{}^{\mathrm{t}}V,$$

donc $AX = XB$.

D'après (ii), on déduit $X = 0$; contradiction.

On conclut : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \varnothing$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) :

Soient $\mathcal{B}$ une base de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, f,g les endomorphismes représentés par A et B dans $\mathcal{B}$.

Supposons qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E) - \{0\}$ tel que

$$f \circ h = h \circ g \text{ (c'est-à-dire : non (ii)).}$$

Montrer que $\mathrm{Im}(h)$ est stable par f

(cf. aussi Algèbre PCSI-PTSI , ex. 7.2.6).

Notons f' l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(h)$;

f' admet au moins une vp λ et un $\overrightarrow{\text{vp}}$ v.

Comme $v \in \mathrm{Im}(h)$, il existe $u \in E$ tel que $v = h(u)$; remarquer $u \neq 0$. On a :

$$(f \circ h)(u) = f(v) = \lambda v = \lambda h(u).$$

Ainsi, $f \circ h - \lambda h$ s'annule en u et sur $\mathrm{Ker}(h)$, donc sur $\mathbb{C}u \oplus \mathrm{Ker}(h)$.

Montrer :

$$\mathbb{C}u \oplus \mathrm{Ker}(h) \subset \mathrm{Ker}(h \circ (g - \lambda e)), \text{ où } e = \mathrm{Id}_{\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})}.$$

Si $g - \lambda e$ est injectif, alors

$$\dim(\mathrm{Ker}(h \circ (g - \lambda e))) = \dim(\mathrm{Ker}(h)),$$

contradiction.

Donc $g - \lambda e$ n'est pas injectif, c'est-à-dire que λ est vp de g.

Finalement, f et g admettent au moins une vp commune λ, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) \neq \varnothing$.

3.4.17

Réponse : $A = PTP^{-1}$ où :

a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5.1

Il existe $x \in E - \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

D'après Prop. p. 110 : $P(f)(x) = P(\lambda)x$,

donc $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}_K(P(f))$ et, pour tout x de $\mathrm{SEP}(f,\lambda)$,

$$x \in \mathrm{SEP}(P(f), P(\lambda)).$$

3.5.2

La linéarité de f est immédiate.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $P(f) = 0$.

Pour tout λ de $\mathbb{R}$, la suite $\Lambda = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie : $f(\Lambda) = \lambda\Lambda$ et $\Lambda \neq 0$. Ainsi : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \mathbb{R}$.

Voir aussi l'exercice 3.1.11 p. 79 pour une variante.

D'après le Cor. p. 110, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset P^{-1}(\{0\})$, d'où $P = 0$.

3.5.3

Puisque $A(A-\mathrm{iI}_3)(A+\mathrm{iI}_3)=0$, A annule un polynôme scindé simple de $\mathbb{C}[X]$, donc A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\subset\{0,\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$.

Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)=\{0\}$, alors, comme A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$, $A=0$, exclu.

Si $\mathrm{i}\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $V\in\mathrm{SEP}(A,\mathrm{i})$, alors $-\mathrm{i}\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\overline{V}\in\mathrm{SEP}(A,-\mathrm{i})$ car : $A\,\overline{V}=\overline{AV}=\overline{\mathrm{i}V}=-\mathrm{i}\overline{V}$ et $\overline{V}\neq 0$.

De même en échangeant i et $-$i.

Donc : $\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}\subset\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Enfin, si $0\notin\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $A^2+\mathrm{I}_3=0$,

d'où
$$(\det(A))^2=\det(A^2)=\det(-\mathrm{I}_3)=-1,$$

contradiction car $\det(A)\in\mathbb{R}$.

Ainsi, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)=\{0,\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$ et chaque SEP est de dimension 1 (sur $\mathbb{C}$).

Notons $U,V,\overline{V}$ des vecteurs propres respectivement associés à $0,\mathrm{i},-\mathrm{i}$, et $W_1=\dfrac{1}{2}(V+\overline{V})$, $W_2=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(V-\overline{V})$. Vérifier que (U,W_1,W_2) est une base de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

De plus :
$$AU=0,\quad AW_1=\frac{1}{2}(\mathrm{i}V-\mathrm{i}\overline{V})=-W_2$$
et
$$AW_2=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{i}V+\mathrm{i}\overline{V})=W_1.$$

En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base (U,W_1,W_2), on a :
$$A=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}P^{-1}.$$

3.5.4

Remarquer $f^2=\mathrm{Id}_{\mathbf{M}_n(\mathbb{R})}$.

Réponse :

- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)=\{-1,1\}$
- $\mathrm{SEP}(f,-1)=\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SEP}(f,1)=\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$
- f est diagonalisable.

3.5.5

Montrer que $P=X^3-X-1$ admet un zéro réel et un seul, noté x_0 (étudier les variations de P) et deux zéros complexes conjugués non réels $z_0,\overline{z_0}$; montrer $x_0>0$.

Notons ω_1 l'ordre de multiplicité de la vp x_0 de A (si x_0 n'est pas vp, on note $\omega_1=0$), ω_2 celui de z_0 ($\omega_2\in\mathbb{N}$), celui de $\overline{z_0}$ étant alors aussi ω_2.

En notant $D=\mathrm{diag}(\underbrace{x_0,\ldots,x_0}_{\omega_1},\underbrace{z_0,\ldots,z_0}_{\omega_2},\underbrace{\overline{z_0},\ldots,\overline{z_0}}_{\omega_2})$,

on a alors :
$$\det(A)=\det(D)=x_0^{\omega_1}z_0^{\omega_2}(\overline{z_0})^{\omega_2}=x_0^{\omega_1}|z_0|^{2\omega_2}>0.$$

3.5.6

Factoriser : $X^4-7X^3+12X^2=X^2(X-3)(X-4)$.

Puisque $A\in\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, donc, en notant $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les zéros de χ_A : $\mathrm{tr}(A)=\displaystyle\sum_{i=1}^n\lambda_i$.

D'autre part : $\forall i\in\{1,\ldots,n\},\ \lambda_i\in\{0,3,4\}$.

On en déduit : $\mathrm{tr}(A)\in\mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}(A)\leqslant 4n$.

3.5.7

Factoriser $X^3-X^2=X^2(X-1)$.

Le polynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ et, en notant $\chi_A=(-1)^n\displaystyle\prod_{i=1}^n(X-\lambda_i)$, on a :
$$\begin{cases}\mathrm{tr}(A)=\displaystyle\sum_{i=1}^n\lambda_i\\ \forall i\in\{1,\ldots,n\},\quad\lambda_i\in\{0,1\}.\end{cases}$$

Comme $\mathrm{tr}(A)=n$, on déduit $(\forall i\in\{1,\ldots,n\},\ \lambda_i=1)$. Ceci montre que A est inversible, et finalement, comme $A^3=A^2$, on conclut $A=\mathrm{I}_n$.

3.5.8

1) Supposons $A_1,\ldots,A_N$ diagonalisables.

Il existe $P_1\in\mathbf{GL}_{n_1}(K),\ldots,P_N\in\mathbf{GL}_{n_N}(K)$, $D_1\in\mathbf{D}_{n_1}(K),\ \ldots,D_N\in\mathbf{D}_{n_N}(K)$ telles que :
$$\forall i\in\{1,\ldots,N\},\ A_i=P_iD_iP_i^{-1}.$$

En notant $P=\begin{pmatrix}P_1&&0\\&\ddots&\\0&&P_N\end{pmatrix}$,

$$D=\begin{pmatrix}D_1&&0\\&\ddots&\\0&&D_N\end{pmatrix},\ n=n_1+\ldots+n_N,$$

il est clair que :
$$P\in\mathbf{GL}_n(K),\quad D\in\mathbf{D}_n(K),\quad A=PDP^{-1},$$

et donc A est diagonalisable.

2) Réciproquement, supposons A diagonalisable.

Il existe $P\in K[X]$, scindé simple, tel que $P(A)=0$.

Comme $P(A)=\begin{pmatrix}P(A_1)&&0\\&\ddots&\\0&&P(A_N)\end{pmatrix}$, on déduit $P(A_1)=\ldots=P(A_N)=0$, où P est scindé simple, et donc $A_1,\ldots,A_N$ sont diagonalisables.

3.5.9

1) Il est clair que, si $(\forall k\in\{1,\ldots,N\},\ T_k=\lambda_k\mathrm{I}_{n_k})$, alors T est diagonale, donc diagonalisable.

2) Réciproquement, supposons T diagonalisable. D'après l'exercice 3.5.8, $T_1,\ldots,T_N$ sont diagonalisables. Comme $\mathrm{Sp}_K(T_k) = \{\lambda_k\}$, on déduit : $\forall k \in \{1,\ldots,N\},\ T_k \sim \lambda_k \mathrm{I}_{n_k}$ et donc : $\forall k \in \{1,\ldots,N\},\ T_k = \lambda_k \mathrm{I}_{n_k}$.

3.5.10

Puisque f est diagonalisable, il existe un polynôme scindé simple P de $K[\mathrm{X}]$ tel que $P(f) = 0$.

Comme : $\forall x \in E,\ P(f)(x) = 0$, il est clair que :

$\forall x \in F,\ P(f')(x) = P(f)(x) = 0$, et donc $P(f') = 0$.

Puisque f' est annulé par un polynôme scindé simple de $K[\mathrm{X}]$, f' est diagonalisable.

3.5.11

a) 1) Soit F un sev de E stable par f.

Notons f' l'endomorphisme induit par f sur F ; d'après l'exercice 3.5.10, f' est diagonalisable, et il est clair que :

$$\mathrm{Sp}_K(f') \subset \mathrm{Sp}_K(f).$$

Pour chaque i de $\{1,\ldots,p\}$,

notons $N'_i = \mathrm{Ker}(f' - \lambda_i \mathrm{Id}_F)$, certains N'_i pouvant être $\{0\}$.

On a : $\forall i \in \{1,\ldots,p\},\ N'_i = N_i \cap F$ car : $\forall x \in E$,

$$\left(x \in N'_i \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in F \\ f'(x) = \lambda_i x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in F \\ x \in N_i \end{cases} \Longleftrightarrow x \in N_i \cap F \right).$$

Puisque f' est diagonalisable :

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_K(f')} \mathrm{SEP}(f',\lambda) = \bigoplus_{i=1}^{p} N'_i.$$

2) Réciproque immédiate.

3) Supposons que les valeurs propres de f soient toutes simples, et notons $(v_1,\ldots,v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres pour f.

On a alors, avec les notations précédentes :

$$p = n \text{ et} : \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ N_i = K v_i,$$

et donc :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ (N'_i = \{0\} \text{ ou } N'_i = K v_i).$$

Il y a alors exactement 2^n sev de E stables par f ; ce sont les $\mathrm{Vect}(v_i ; i \in I)$ où I parcourt $\mathfrak{P}(\{1,\ldots,n\})$.

b) **Réponse :** En notant $v_1 = (1\ \ -1\ 0)$, $v_2 = (-1\ 1\ 1)$, $v_3 = (0\ 1\ 1)$, les sev de $\mathbb{R}^3$ stables par f sont :

- $\{0\}$
- les trois droites vectorielles engendrées respectivement par v_1, v_2, v_3
- les trois plans vectoriels engendrés respectivement par $(v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_2,v_3)$
- $\mathbb{R}^3$.

3.5.12

La propriété est triviale pour $n = 1$.

Supposons-la vraie pour tout p de $\{1,\ldots,n\}$, et soient E un K-ev de dimension finie $n+1$, I un ensemble non vide, $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E et commutant deux à deux.

L'étude du cas où tous les f_i sont des homothéties est immédiate.

Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que f_{i_0} ne soit pas une homothétie.

Notons $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\} = \mathrm{Sp}_K(f_{i_0})$, et $E_k = \mathrm{SEP}(f_{i_0},\lambda_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$. Puisque f_{i_0} n'est pas une homothétie et que f_{i_0} est diagonalisable, on a $r \geqslant 2$ et donc :

$$\forall k \in \{1,\ldots,r\},\ 1 \leqslant \dim(E_k) \leqslant n.$$

Soient $i \in I$, $k \in \{1,\ldots,r\}$; montrons que E_k est stable par f_i. Soit $x \in E_k$; on a :

$$\begin{aligned} f_{i_0}\Big(f_i(x)\Big) &= (f_{i_0} \circ f_i)(x) = (f_i \circ f_{i_0})(x) \\ &= f_i(\lambda_k x) = \lambda_k f_i(x), \end{aligned}$$

donc $f_i(x) \in E_k$.

Notons, pour $i \in I$ et $k \in \{1,\ldots,r\}$, $f_{i,k}$ l'endomorphisme induit par f_i sur E_k.

Soit $k \in \{1,\ldots,r\}$.

- Pour chaque i de I, puisque f_i est diagonalisable, $f_{i,k}$ est diagonalisable (cf. exercice 3.5.10)
- Les $f_{i,k}$ $(i \in I)$ commutent deux à deux puisque les f_i le font.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(f_{i,k})_{i\in I}$. Il existe donc une base $\mathcal{B}_k$ de E_k telle que :

$$\forall i \in I,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_k}(f_{i,k}) \in \mathbf{D}_{\dim(E_k)}(K).$$

Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_r$ est une base de E et : $\forall i \in I$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_{i,1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_r}(f_{i,r}) \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_{n+1}(K).$$

3.5.13

Notons $A = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(\mathrm{X} - \lambda_k)$ et, pour tout k de $\{1,\ldots,p\}$,

$$A_k = \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant p \\ j\neq k}} (\mathrm{X} - \lambda_j).$$

Comme dans la preuve du Théorème p. 111, en notant

$$u_k = \frac{1}{A_k(\lambda_k)}, \text{ on a} : \sum_{k=1}^{p} u_k A_k = 1.$$

Notons, pour tout k de $\{1,\ldots,p\}$, $v_k = u_k A_k(f)$.

Soit $P \in K[\mathrm{X}]$. Par division euclidienne de P par $\mathrm{X} - \lambda_k$, il existe $Q_k \in K[\mathrm{X}]$ tel que :

$$P = (\mathrm{X} - \lambda_k) Q_k + P(\lambda_k).$$

D'où :

$$(Pu_kA_k)(f) = u_kQ_kA(f) + P(\lambda_k)u_kA_k(f) \\ = P(\lambda_k)v_k \quad ,$$

et donc :

$$P(f) = \left(\sum_{k=1}^{p} Pu_kA_k\right)(f) = \sum_{k=1}^{p}(Pu_kA_k)(f) = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k)v_k.$$

3.5.14

• Puisque A est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé simple de $\mathbb{C}[X]$ annulateur de A.

Il existe $\nu \in \{0,1\}$, $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $P = X^\nu Q$ et $Q(0) \neq 0$. Alors $A^\nu Q(A) = 0$ et, par hypothèse,

$A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, donc $Q(A) = 0$.

Ceci montre qu'il existe polynôme Q scindé simple de $\mathbb{C}[X]$ annulateur de A et n'ayant pas 0 pour zéro. Il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $N \in \mathbb{N}^*$, $z_1,\dots,z_N \in \mathbb{C}^*$ deux à deux distincts tels que $Q = \alpha \prod_{k=1}^{N}(X - z_k)$.

Notons $\omega_q = \exp\left(\frac{2iq\pi}{p}\right)$ pour $q \in \{0,\dots,p-1\}$ et ζ_k une racine $p^{\text{ème}}$ de z_k pour $k \in \{1,\dots,N\}$.

On a : $\forall k \in \{1,\dots,N\},\quad X^p - z_k = \prod_{q=0}^{p-1}(X - \omega_q\zeta_k)$,

d'où :

$$0 = \prod_{k=1}^{N}(A - z_k I_n) = \prod_{k=1}^{N}(B^p - z_k I_n)$$

$$= \prod_{k=1}^{N}\prod_{q=0}^{p-1}(B - \omega_q\zeta_k I_n).$$

Comme les $\omega_q\zeta_k$, $(q,k) \in \{0,\dots,p-1\} \times \{1,\dots,N\}$ sont deux à deux distincts, le polynôme

$$\prod_{k=1}^{N}\prod_{q=0}^{p-1}(X - \omega_q\zeta_k)$$

est scindé simple, donc B est diagonalisable.

• Il existe donc $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{C})$ telles que $B = PDP^{-1}$, d'où $A = B^p = PD^pP^{-1}$, et donc A et B sont simultanément diagonalisables.

3.5.15

1) Montrons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall A \in G, \quad A^k = I_n.$$

• Soit $A \in G$. Puisque G est fini, l'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \longrightarrow & G \\ p & \longmapsto & A^p\end{array}$ n'est pas injective ; il existe donc $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$p \neq q \quad \text{et} \quad A^p = A^q.$$

On peut supposer, par exemple, $p < q$. En notant $r = q - p$, on a, puisque A est inversible :

$$r \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad A^r = I_n.$$

• On vient de prouver :

$$\forall A \in G, \exists\, r(A) \in \mathbb{N}^*,\ A^{r(A)} = I_n.$$

Notons $k = \text{ppcm}\{r(A);\ A \in G\} \in \mathbb{N}^*$ (G est fini). Puisque chaque $r(A)$ divise k, on a :

$$\forall A \in G, \quad A^k = I_n.$$

2) Le polynôme $X^k - 1$ est scindé simple sur $\mathbb{C}$ et annulateur de chaque élément de G, donc les éléments de G sont diagonalisables.

Puisque les éléments de G sont diagonalisables et commutent entre eux deux à deux, d'après l'exercice 3.5.12, les éléments de G sont simultanément diagonalisables.

3.5.16

• Une récurrence immédiate montre :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N^k \end{pmatrix}.$$

• Pour $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a alors :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} \begin{pmatrix} a_kA_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_kA_N^k \} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(A_N) \end{pmatrix}.$$

3.5.17

Puisque $\mathbf{M}_n(K)$ est un K-ev de dimension finie n^2,

la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est liée et il existe donc

$$P \in K[X] - \{0\} \text{ tel que } P(A) = 0$$

(cf. aussi § 3.5.2 Rem. p. 109).

1) Si $P(0) \neq 0$, en notant $P = a_0 + a_1X + \dots + a_NX^N$ $(a_0 \neq 0)$, on a $a_0I_n + a_1A + \dots + a_NA^N = 0$,

d'où :

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_1I_n + a_2A + \dots + a_NA^{N-1}).$$

2) Si $P(0) = 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ (l'ordre de multiplicité de 0 dans P) et $Q \in K[X] - \{0\}$ tels que :

$$P = X^\alpha Q \quad \text{et} \quad Q(0) \neq 0.$$

Comme A est inversible et que $A^\alpha Q(A) = 0$, on déduit $Q(A) = 0$, et on applique *1)* à Q au lieu de P.

3.5.18

Les polynômes caractéristiques $\chi_{A_1},\dots,\chi_{A_N}$ sont scindés sur $\mathbb{C}$ et, puisque $A_1,\dots,A_N$ n'ont, deux à deux, aucune vp commune, $\chi_{A_1},\dots,\chi_{A_N}$ sont premiers entre eux deux à deux. Notons, pour $i \in \{1,\dots,N\}$, $Q_i = \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant N\\ j\neq i}} \chi_{A_j}$.

D'après le théorème de Cayley et Hamilton :

$$\forall j \in \{1,\dots,N\},\quad \chi_{A_j}(A_j) = 0,$$

d'où :

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,N\}^2,\ (i \neq j \Longrightarrow Q_i(A_j) = 0).$$

Montrer que $Q_1,\dots,Q_N$ sont premiers entre eux dans leur ensemble (cf. aussi § 3.5.2 preuve du Th. p. 111). D'après le théorème de Bezout, il existe $U_1,\dots,U_N \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$\sum_{i=1}^{N} U_i Q_i = 1.$$

Notons $P = \sum_{i=1}^{N} U_i Q_i P_i$. Soit $j \in \{1,\dots,N\}$. On a :

• $P(A_j) = \sum_{i=1}^{N} U_i(A_j)Q_i(A_j)P_i(A_j)$

$= U_j(A_j)Q_j(A_j)P_j(A_j)$

• $\mathrm{I}_n = \left(\sum_{i=1}^{N} U_i Q_i\right)(A_j)$

$= \sum_{i=1}^{N} U_i(A_j)Q_i(A_j) = U_j(A_j)Q_j(A_j)$.

Finalement : $\quad P(A_j) = P_j(A_j)$.

3.5.19

a) Soit $A \in E$. Il existe

$$P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}),D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{C})$$

telles que $A = PDP^{-1}$. On a :

$$\chi_A(A) = P\chi_A(D)P^{-1},$$

et :

$$\chi_A(D) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i \mathrm{I}_n - D)$$

$$= \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda_n) \end{pmatrix} = 0.$$

Cf. aussi § 3.5.2 preuve du Th. p. 111.

b) Considérons $f : \begin{array}{rcl}\mathbf{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & \chi_A(A)\end{array}$. Par définition de χ_A, les coefficients de χ_A sont des polynômes en les termes de A. Il en résulte que les termes de $f(A)$ sont des polynômes en les termes de A, donc f est continue sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Comme E est dense dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ et que f s'annule sur E, on conclut :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\quad \chi_A(A) = f(A) = 0.$$

3.5.20

a) D'après le théorème de d'Alembert, χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$; il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - X),$$

d'où : $$\chi_A(B) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i \mathrm{I}_n - B).$$

Alors :

$$\begin{aligned}\chi_A(B) &\in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \\ &\Longleftrightarrow \big(\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \lambda_i\mathrm{I}_n - B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})\big) \\ &\Longleftrightarrow \big(\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \lambda_i \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)\big) \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \varnothing.\end{aligned}$$

b) Soit $X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX = XB$. Une récurrence immédiate montre :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad A^k X = XB^k,$$

d'où, par linéarité :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\quad P(A)X = XP(B).$$

En particulier :

$$\chi_A(A)X = X\chi_A(B).$$

D'après le théorème de Cayley et Hamilton, $\chi_A(A) = 0$; et d'après *a)*, $\chi_A(B)$ est inversible. On déduit : $X = 0$.

c) L'application

$$\phi : \begin{array}{rcl}\mathbf{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & AX - XB\end{array}$$

est linéaire, injective (cf. *b)*) et $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, donc ϕ est bijective.

3.6.1

• Former χ_A et calculer les SEP.

On en déduit que A est diagonalisable. On obtient $A = PDP^{-1}$ où, par exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

• On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Comme $0 \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, A est inversible. En déduire que la formule $A^n = PD^nP^{-1}$ est valable pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Réponse :

$$A^n = 2^{n-2}\begin{pmatrix} 3+(-1)^n & 1-(-1)^n & 1-(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 3+(-1)^n & -1+(-1)^n & -1+(-1)^n \\ 1-(-1)^n & -1+(-1)^n & 3+(-1)^n & -1+(-1)^n \\ 1-(-1)^n & -1+(-1)^n & -1+(-1)^n & 3+(-1)^n \end{pmatrix}.$$

3.6.2

Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} a\mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & b\mathrm{I}_q \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} a^n\mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & b^n\mathrm{I}_q \end{pmatrix}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(\alpha_n, \beta_n) \in K^2$. On a :

$$f^n = \alpha_n e + \beta_n f \iff \begin{cases} a^n = \alpha_n + a\beta_n \\ b^n = \alpha_n + b\beta_n \end{cases},$$

et calculer α_n, β_n.

Réponse : $\alpha_n = \dfrac{ba^n - ab^n}{b-a}$, $\beta_n = \dfrac{b^n - a^n}{b-a}$.

3.6.3

• Former χ_A et calculer les SEP. En déduire que A est diagonalisable. On obtient $A = PDP^{-1}$ où, par exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• En notant $\varDelta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, par exemple, et $B = P\varDelta P^{-1}$, on a : $B^2 = A$.

Réponse : Une solution est $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.6.4

Montrer d'abord, par récurrence sur n, que chaque u_n existe et est > 0.

En notant $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n.$$

En déduire :

$$v_n = \frac{1}{3}\left(\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)v_0 + \left(2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)v_1\right).$$

Réponse :

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n =$

$$3\left(\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\frac{1}{u_0} + \left(2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\frac{1}{u_1}\right)^{-1}$$

• $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{3u_0u_1}{2u_0 + u_1}$.

3.6.5

En notant $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} u_{2n} \\ u_{2n+1} \end{pmatrix}$, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n,$$

d'où : $\qquad \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0.$

Diagonaliser A et déduire la valeur de A^n.

Réponse :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{2n} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big((2+\sqrt{2})^{n+1} - (2-\sqrt{2})^{n+1}\Big) \\ u_{2n+1} = \dfrac{1}{2}\Big((2+\sqrt{2})^{n+1} + (2-\sqrt{2})^{n+1}\Big). \end{cases}$$

P 3.1

1) a) α) Immédiat, puisque :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\alpha A) = \{\alpha\lambda;\ \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}.$$

β) Puisque A est trigonalisable (cf. 3.4 Cor. *2)* p. 100), il existe $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $T = (t_{ij})_{ij} \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ telles que

$$A = QTQ^{-1}.$$

On a alors $A^k = QT^kQ^{-1}$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{t_{ii};\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$,

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A^k) = \{t_{ii}^k;\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

d'où

$$\rho(A^k) = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}}\,(|t_{ii}^k|) = \Big(\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}}\,|t_{ii}|\Big)^k = \big(\rho(A)\big)^k.$$

γ) D'après l'ex. 3.1.14 p. 79, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(BA)$, d'où

$$\rho(AB) = \rho(BA).$$

δ) D'après γ) :

$$\rho(P^{-1}AP) = \rho\big((AP)P^{-1}\big) = \rho(A).$$

Ou encore, puisque $\quad P^{-1}AP \sim A$,

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(P^{-1}AP) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A),$$

et donc $\rho(P^{-1}AP) = \rho(A)$.

b) Examiner l'exemple :

$$n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pour lequel :

$$\rho(A) = \rho(B) = 0,\quad \rho(A+B) = \rho(AB) = 1.$$

Réponse : Non aux deux questions (si $n \geqslant 2$).

2) a) Récurrence sur k (A fixée).

La propriété est triviale pour $k = 1$.

Si $||A^k|| \leqslant ||A||^k$, alors :

$$||A^{k+1}|| = ||A^kA|| \leqslant ||A^k||\,||A|| \leqslant ||A||^k||A|| = ||A||^{k+1}.$$

On remarquera que la formule demandée est « en général » fausse pour $k = 0$.

b) Avec des notations évidentes :

• $N(\alpha A) = \operatorname{Max}_i \Big(\sum_j |\alpha a_{ij}|\Big)$

$$= |\alpha| \operatorname{Max}_i \Big(\sum_j |a_{ij}|\Big) = |\alpha| N(A)$$

• $N(A) = 0 \iff \Big(\forall i,\ \sum_j |a_{ij}| = 0\Big)$

$$\iff (\forall i, \forall j,\ a_{ij} = 0) \iff A = 0$$

• $N(A+B) = \operatorname{Max}_i \Big(\sum_j |a_{ij} + b_{ij}|\Big)$

$$\leqslant \operatorname{Max}_i \Big(\sum_j |a_{ij}| + \sum_j |b_{ij}|\Big)$$

$$\leqslant \operatorname{Max}_i \Big(\sum_j |a_{ij}|\Big) + \operatorname{Max}_i \Big(\sum_j |b_{ij}|\Big)$$

$$= N(A) + N(B)$$

• $N(AB) = \operatorname{Max}_i \Big(\sum_j \Big|\sum_k a_{ik} b_{kj}\Big|\Big)$

$$\leqslant \operatorname{Max}_i \Big(\sum_j \sum_k |a_{ik}|\,|b_{kj}|\Big)$$

$$= \operatorname{Max}_i \Big(\sum_k \Big(|a_{ik}| \sum_j |b_{kj}|\Big)\Big)$$

$$\leqslant \operatorname{Max}_i \Big(\sum_k \Big(|a_{ik}| N(B)\Big)\Big) = N(A)N(B).$$

c) Les vérifications sont immédiates :

• $||\alpha A||_P = ||P^{-1} \alpha A P|| = |\alpha|\ ||P^{-1}AP|| = |\alpha|\ ||A||_P$

• $||A||_P = 0 \iff P^{-1}AP = 0 \iff A = 0$

• $||A+B||_P = ||P^{-1}AP + P^{-1}BP||$

$$\leqslant ||P^{-1}AP|| + ||P^{-1}BP||$$

$$= ||A||_P + ||B||_P$$

• $||AB||_P = ||P^{-1}ABP|| = ||P^{-1}APP^{-1}BP||$

$$\leqslant ||P^{-1}AP||\ ||P^{-1}BP||$$

$$= ||A||_P ||B||_P.$$

3) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$. Notons $M = (X,\dots,X) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice carrée obtenue en plaçant côte à côte X n fois. Il est clair qu'alors $AM = \lambda M$,

d'où :

$$|\lambda|\ ||M|| = ||\lambda M|| = ||AM|| \leqslant ||A||\ ||M||.$$

Comme $M \neq 0$ (car $X \neq 0$), on déduit $|\lambda| \leqslant ||A||$.

Ainsi : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), |\lambda| \leqslant ||A||$, et donc $\rho(A) \leqslant ||A||$.

4) D'après le théorème de trigonalisation dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ (3.4 Cor. *2)* p. 100), il existe

$$P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), \quad T = (t_{ij})_{ij} \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$$

telles que $\qquad A = PTP^{-1}.$

Notons, pour $u \in \mathbb{R}_+^*$, $D_u = \operatorname{diag}(u, u^2, \dots, u^n)$.

Il est clair que D_u est inversible et $D_u^{-1} = D_{u^{-1}}$, d'où :

$$D_u T D_u^{-1} = (u^{i-j} t_{ij})_{ij}$$

$$= \begin{pmatrix} t_{11} & u^{-1}t_{12} & \dots & u^{1-n}t_{1n} \\ & t_{22} & \dots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Comme, pour tout i de $\{1,\dots,n-1\}$:

$\sum_{j=i+1}^{n} u^{i-j}|t_{ij}| \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0$ (car les exposants de u qui interviennent sont tous < 0), il existe $u \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall i \in \{1,\dots,n-1\}, \qquad \sum_{j=i+1}^{n} |u^{i-j} t_{ij}| \leqslant \varepsilon.$$

On a alors :

$$N(D_u T D_u^{-1}) = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} \Big(|t_{ii}| + \sum_{j=i+1}^{n} |u^{i-j} t_{ij}|\Big)$$

$$\leqslant \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} (|t_{ii}| + \varepsilon)$$

$$= \Big(\operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} |t_{ii}|\Big) + \varepsilon.$$

Mais $t_{11},\dots,t_{nn}$ sont les vp de T, donc de A, d'où :

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} |t_{ii}| = \rho(A).$$

Ainsi : $\qquad N(D_u T D_u^{-1}) \leqslant \rho(A) + \varepsilon.$

Comme $PD_u^{-1} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, d'après 2) *b)* et *c)*, l'application $||\cdot|| : \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$,

$$||M|| = N(D_u P^{-1} M P D_u^{-1})$$

$$= N\Big((PD_u^{-1})^{-1} M (PD_u^{-1})\Big)$$

est une norme sous-multiplicative sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Et :

$$||A|| = N(D_u P^{-1} A P D_u^{-1}) = N(D_u T D_u^{-1}) \leqslant \rho(A) + \varepsilon.$$

5) 1) Supposons $A^k \xrightarrow[k\infty]{} 0$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ tel que

$$AX = \lambda X.$$

On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k X = \lambda^k X.$$

Comme $A^k \xrightarrow[k\infty]{} 0$, on déduit successivement

$$A^k X \xrightarrow[k\infty]{} 0, \quad \lambda^k X \xrightarrow[k\infty]{} 0, \quad \lambda^k \xrightarrow[k\infty]{} 0$$

(car X est fixé $\neq 0$), $|\lambda| < 1$.

Ceci prouve : $\quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), |\lambda| < 1$,

et donc : $\quad \rho(A) < 1$.

2) Réciproquement, supposons $\rho(A) < 1$.

En notant $\varepsilon = \frac{1}{2}\Big(1 - \rho(A)\Big) > 0$, d'après 4), il existe une norme sous-multiplicative $||\cdot||$ sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$||A|| \leqslant \rho(A) + \varepsilon < 1.$$

Comme :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad ||A^k|| \leqslant ||A||^k \leqslant (\rho(A)+\varepsilon)^k,$$

on conclut :

$$A^k \xrightarrow[k\infty]{} 0.$$

6) 1) Supposons que $||\cdot||$ soit une norme sous-multiplicative.

• D'après *1) a) β)* et *3)* :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \rho(A) = (\rho(A^k))^{\frac{1}{k}} \leqslant ||A^k||^{\frac{1}{k}}.$$

• Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Notons $B = \dfrac{1}{\rho(A)+\varepsilon}\,A$.

On a alors (cf. *1) a) α)*) :

$$\rho(B) = \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon}\,\rho(A) < 1.$$

D'après *5)* : $\quad B^k \xrightarrow[k\infty]{} 0$.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (k > N \Longrightarrow ||B^k|| < 1).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > N$. On a :

$$||A^k||^{\frac{1}{k}} = (\rho(A)+\varepsilon)||B^k||^{\frac{1}{k}} < \rho(A)+\varepsilon.$$

On a montré ainsi : $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N},$

$$(k > N \Longrightarrow \rho(A) \leqslant ||A^k||^{\frac{1}{k}} \leqslant \rho(A)+\varepsilon),$$

et donc : $\quad ||A^k||^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\infty]{} \rho(A)$.

2) Soit $||\cdot||$ une norme sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, non nécessairement sous-multiplicative. Il existe au moins une norme sous-multiplicative N sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, et $||\cdot||$ et N sont équivalentes. Il existe donc $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

$$\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad \alpha N(M) \leqslant ||M|| \leqslant \beta N(M).$$

D'où, pour $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ fixée :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha^{\frac{1}{k}}\Big(N(A^k)\Big)^{\frac{1}{k}} \leqslant ||A^k||^{\frac{1}{k}} \leqslant \beta^{\frac{1}{k}}\Big(N(A^k)\Big)^{\frac{1}{k}}.$$

D'après *1)*, $\Big(N(A^k)\Big)^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\infty]{} \rho(A)$. Comme $\alpha^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\infty]{} 1$ et $\beta^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\infty]{} 1$, on déduit : $\quad ||A^k||^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\infty]{} \rho(A)$.

7) On peut munir $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ d'au moins une norme sous-multiplicative $||\cdot||$.

D'après 3), et puisque A et B commutent :

$$\rho(AB) \leqslant ||(AB)^k||^{\frac{1}{k}} = ||A^kB^k||^{\frac{1}{k}} \leqslant ||A^k||^{\frac{1}{k}}||B^k||^{\frac{1}{k}}.$$

D'après *6)* :

$$||A^k||^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\infty]{} \rho(A) \quad \text{et} \quad ||B^k||^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\infty]{} \rho(B).$$

On déduit :

$$\rho(AB) \leqslant \rho(A)\rho(B).$$

8) a) Puisque N est une norme sous multiplicative (cf. *2) b)*), on a, d'après *3)* :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \rho(A_k) \leqslant N(A_k).$$

Comme $A_k \xrightarrow[k\infty]{} 0$, par définition $N(A_k) \xrightarrow[k\infty]{} 0$, et donc $\rho(A_k) \xrightarrow[k\infty]{} 0$.

b) D'après *1) a) δ)* : $\;\forall k \in \mathbb{N}, \rho(A) = \rho(B_k)$,

et d'après *8) a)* : $\;\rho(B_k) \xrightarrow[k\infty]{} 0$, donc : $\;\rho(A) = 0$.

Il s'ensuit que A est nilpotente (cf. ex. 3.4.1 p. 105).

9) Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$A^k = (a_{ij}^{[k]})_{ij}, \quad M^k = (m_{ij}^{[k]})_{ij}.$$

Une récurrence immédiate montre :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, |a_{ij}^{[k]}| \leqslant m_{ij}^{[k]}.$$

• D'après *6)* : $||A^k||^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\infty]{} \rho(A)$ et $||M^k||^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\infty]{} \rho(M)$.

Mais, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$||A^k||^{\frac{1}{k}} = \Big(\operatorname*{Max}_{i,j}\Big|a_{ij}^{[k]}\Big|\Big)^{\frac{1}{k}} \leqslant \Big(\operatorname*{Max}_{i,j} m_{ij}^{[k]}\Big)^{\frac{1}{k}}$$
$$= ||M^k||^{\frac{1}{k}}.$$

On déduit, en faisant tendre l'entier k vers l'infini :

$$\rho(A) \leqslant \rho(M).$$

P 3.2

I *a)* Considérons les bases canoniques

$\mathcal{B}' = (\mathrm{E}'_{i'j'})_{(i',j')\in\{1,\ldots,n'\}\times\{1,\ldots,p'\}}$ de $\mathbf{M}_{n',p'}(K)$

et $\mathcal{B} = (\mathrm{E}_{ij})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,p\}}$ de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$, ordonnées lexicographiquement, c'est-à-dire :

$$\mathcal{B}' = (\mathrm{E}'_{11},\ldots,\mathrm{E}'_{1p'},\mathrm{E}'_{21},\ldots,\mathrm{E}'_{2p'},\ldots,\mathrm{E}'_{n'1},\ldots,\mathrm{E}'_{n'p'}),$$
$$\mathcal{B} = (\mathrm{E}_{11},\ldots,\mathrm{E}_{1p},\mathrm{E}_{21},\ldots,\mathrm{E}_{2p},\ldots,\mathrm{E}_{n1},\ldots,\mathrm{E}_{np}).$$

Soit $(i',j') \in \{1,\ldots,n'\}\times\{1,\ldots,p'\}$. En notant $A = (a_{ij})_{ij}$, $\mathrm{E}'_{i'j'} = (\delta_{i'j}\delta_{j'k})_{jk}$, $B = (b_{lk})_{lk}$, pour tout (i,l) de $\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,p\}$, le $(i,l)^{\text{ème}}$ terme de $f_{A,B}(\mathrm{E}'_{i'j'})$ est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n'}\sum_{k=1}^{p'} a_{ij}\delta_{i'j}\delta_{j'k}b_{lk}$, c'est-à-dire $a_{ii'}b_{lj'}$.

Ainsi, la $(i',j')^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f_{A,B})$ est :

$$\begin{pmatrix} a_{1i'}b_{1j'} \\ \vdots \\ a_{1i'}b_{pj'} \\ a_{2i'}b_{1j'} \\ \vdots \\ a_{2i'}b_{pj'} \\ \vdots \\ a_{ni'}b_{1j'} \\ \vdots \\ a_{ni'}b_{pj'} \end{pmatrix},$$

et donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f_{A,B})$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n'}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn'}B \end{pmatrix} = A \otimes B.$$

b) 1) • Soient $\alpha,\alpha' \in K$, $A, A' \in \mathbf{M}_{n,n'}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,p'}(K)$. On a, pour tout M de $\mathbf{M}_{n',p'}(K)$:

$$\begin{aligned} f_{\alpha A+\alpha' A',B}(M) &= (\alpha A + \alpha' A')M\,{}^{\mathrm{t}}B \\ &= \alpha AM\,{}^{\mathrm{t}}B + \alpha' A'M\,{}^{\mathrm{t}}B \\ &= \alpha f_{A,B}(M) + \alpha' f_{A',B}(M), \end{aligned}$$

d'où (cf. *1)*) : $(\alpha A + \alpha' A') \otimes B = \alpha A \otimes B + \alpha' A' \otimes B$.

• Un calcul analogue fournit :

$\forall \beta,\beta' \in K,\ \forall A \in \mathbf{M}_{n,n'}(K),\ \forall B,B' \in \mathbf{M}_{p,p'}(K)$,

$$A \otimes (\beta B + \beta' B') = \beta\ A \otimes B + \beta'\ A \otimes B'.$$

2) Soient $A \in \mathbf{M}_{n,n'}(K)$, $A' \in \mathbf{M}_{n',n''}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,p'}(K)$, $B' \in \mathbf{M}_{p',p''}(K)$.

On a : $\forall M \in \mathbf{M}_{p,p''}(K)$,

$$\begin{aligned} f_{AA',BB'}(M) &= (AA')M\,{}^{\mathrm{t}}(BB') = A(A'M\,{}^{\mathrm{t}}B')\,{}^{\mathrm{t}}B \\ &= f_{A,B} \circ f_{A',B'}(M) \end{aligned},$$

d'où cf *1)*) : $(AA') \otimes (BB') = (A \otimes B)(A' \otimes B')$.

3) Soient $A \in \mathbf{M}_{n,n'}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,p'}(K)$. D'après *2)* :

$$A \otimes B = (A\mathrm{I}_{n'}) \otimes (\mathrm{I}_p B) = (A \otimes \mathrm{I}_p)(\mathrm{I}_{n'} \otimes B).$$

4) Une récurrence immédiate utilisant *2)* montre :

$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall A \in \mathbf{M}_n(K),\ \forall B \in \mathbf{M}_p(K)$,

$$(A \otimes B)^k = A^k \otimes B^k.$$

5) Soient $A \in \mathbf{M}_{n,n'}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,p'}(K)$.

• Il est clair que : $\left|\begin{array}{l} A = 0 \\ \text{ou} \\ B = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow A \otimes B = 0.$

• Réciproquement, supposons $A \otimes B = 0$.

Alors, en notant $A = (a_{ij})_{ij}$:

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n'\}, \quad a_{ij}B = 0.$$

Si $B \neq 0$, alors $\big(\forall (i,j),\ a_{ij} = 0\big)$, donc $A = 0$.

Ceci montre : $A = 0$ ou $B = 0$.

6) Soient $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_p(K)$.

• Si A et B sont inversibles, alors, d'après *2)* :

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) &= (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) \\ &= \mathrm{I}_n \otimes \mathrm{I}_p = \mathrm{I}_{np}, \end{aligned}$$

donc $A \otimes B\ (\in \mathbf{M}_{np}(K))$ est inversible, et :

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

• Réciproquement, supposons $A \otimes B$ inversible.

Raisonnons par l'absurde : supposons A (par exemple) non inversible. Il existe alors $V \in \mathrm{Ker}(A)$ tel que $V \neq 0$, d'où, en notant $A' = (V,\dots,V) \in \mathbf{M}_n(K)$:

$$(A \otimes B)(A' \otimes \mathrm{I}_p) = (AA') \otimes (B\mathrm{I}_p) = 0 \otimes B = 0,$$

et $A' \otimes \mathrm{I}_p \neq 0$ (cf. *5)*), contradiction.

Ainsi, si $A \otimes B$ est inversible, alors A et B sont inversibles.

7) Soient $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_p(K)$.

• Supposons A nilpotente. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$, d'où (cf. *4)*) :

$$(A \otimes B)^k = A^k \otimes B^k = 0 \otimes B^k = 0,$$

donc $A \otimes B$ est nilpotente.

• Réciproquement, supposons $A \otimes B$ nilpotente. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(A \otimes B)^k = 0$. De *4)*, on déduit $A^k \otimes B^k = 0$, puis de *5)* : $A^k = 0$ ou $B^k = 0$, et donc A ou B est nilpotente.

8) Soient $A \in \mathbf{M}_{n,n'}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{p,p'}(K)$.

On a :

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{t}}(A \otimes B) &= {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n'}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn'}B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}\,{}^{\mathrm{t}}B & \dots & a_{n1}\,{}^{\mathrm{t}}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n'}\,{}^{\mathrm{t}}B & \dots & a_{nn'}\,{}^{\mathrm{t}}B \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{t}}A \otimes {}^{\mathrm{t}}B. \end{aligned}$$

En particulier, si $A\ (\in \mathbf{M}_n(K))$ et $B\ (\in \mathbf{M}_p(K))$ sont symétriques, alors $A \otimes B\ (\in \mathbf{M}_{np}(K))$ est symétrique.

9) Soient $A,A' \in \mathbf{M}_{n,n'}(K)$, $B,B' \in \mathbf{M}_{p,p'}(K)$.

• S'il existe $\alpha \in K - \{0\}$ tel que $A' = \alpha A$ et $B' = \dfrac{1}{\alpha}A$, alors :

$$A' \otimes B' = (\alpha A) \otimes \left(\frac{1}{\alpha}B\right) = \alpha\frac{1}{\alpha}(A \otimes B) = A \otimes B.$$

• Réciproquement, supposons

$$A \neq 0,\ B \neq 0,\ A \otimes B = A' \otimes B'.$$

On a alors :

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n'\},\ a_{ij}B = a'_{ij}B'.$$

D'après *5)* :

$$\left\{\begin{array}{l} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{array}\right| \Longrightarrow A' \otimes B' = A \otimes B \neq 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A' \neq 0 \\ B' \neq 0 \end{array}\right. .$$

Il existe donc $(i_0, j_0) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n'\}$ tel que $a'_{i_0 j_0} \neq 0$. En notant $\alpha = a_{i_0 j_0} a'^{-1}_{i_0 j_0}$, on a alors $\alpha \neq 0$ et $B' = \dfrac{1}{\alpha} B$.

Soit $(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n'\}$; on a :

$a_{ij} B = a'_{ij} B' = \dfrac{1}{\alpha} a'_{ij} B$, d'où (puisque $B \neq 0$) :

$$a'_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

On déduit :

$$A' = \alpha A.$$

Remarque :

Soient $A, B \in \mathbf{M}_{n,p}(K)$ telles que $A \neq 0$. On a :

$$A \otimes B = B \otimes A \Longleftrightarrow (\exists \alpha \in K,\ B = \alpha A).$$

10) • Il est clair, d'après *8)*, que, si $A\ \big(\in \mathbf{M}_n(K)\big)$ et $B\ \big(\in \mathbf{M}_p(K)\big)$ sont symétriques ou antisymétriques (quatre cas), alors $A \otimes B$ est symétrique ou antisymétrique, suivant une « règle des signes » :

$$\left\{\begin{array}{l} {}^{\mathrm{t}}A = \varepsilon A \\ {}^{\mathrm{t}}B = \varepsilon' B \end{array}\right. \Longrightarrow {}^{\mathrm{t}}(A \otimes B) = ({}^{\mathrm{t}}A) \otimes ({}^{\mathrm{t}}B)$$
$$= (\varepsilon A) \otimes (\varepsilon' B) = \varepsilon\varepsilon'(A \otimes B).$$

• Réciproquement, soient $A \in \mathbf{M}_n(K) - \{0\}$, $B \in \mathbf{M}_p(K) - \{0\}$ telles que $A \otimes B$ soit symétrique ou antisymétrique :

$${}^{\mathrm{t}}(A \otimes B) = \varepsilon''(A \otimes B),\ \ \varepsilon'' \in \{-1, 1\}.$$

D'après *8)* :

$$({}^{\mathrm{t}}A) \otimes ({}^{\mathrm{t}}B) = {}^{\mathrm{t}}(A \otimes B) = \varepsilon''(A \otimes B) = (\varepsilon'' A) \otimes B.$$

Puis (cf. *9)*), il existe $\alpha \in K - \{0\}$ tel que :

$${}^{\mathrm{t}}A = \alpha\varepsilon'' A \ \text{ et } \ {}^{\mathrm{t}}B = \frac{1}{\alpha} B.$$

Mais alors :

$$B = {}^{\mathrm{tt}}B = \frac{1}{\alpha}\,{}^{\mathrm{t}}B = \frac{1}{\alpha^2} B,$$

d'où

$$\alpha^2 = 1,\ \ \alpha \in \{-1, 1\},$$

et donc A et B sont symétriques ou antisymétriques.

En particulier, si $A \otimes B$ est symétrique et $A \neq 0$ et $B \neq 0$, alors A et B sont symétriques ou sont antisymétriques.

11) Soient $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_p(K) - \{0\}$. On a :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \ldots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \ldots & a_{nn}B \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{np,\mathrm{s}}(K)$$

$$\Longleftrightarrow \Big(\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ (i > j \Longrightarrow a_{ij} B = 0)\Big)$$
$$\Longleftrightarrow \Big(\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ (i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0)\Big)$$
$$\Longleftrightarrow A \in \mathbf{T}_{n,\mathrm{s}}(K).$$

12) Soient $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_n(K)$.

• Si A et B sont diagonales, $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $B = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_p)$, il est clair qu'alors $A \otimes B$ est diagonale et :

$$A \otimes B = \mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_1\mu_p, \lambda_2\mu_1, \ldots, \lambda_2\mu_p, \ldots, \lambda_n\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_p).$$

• Réciproquement, supposons $A \otimes B$ diagonale et $A \neq 0$, $B \neq 0$.

Soit $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ tel que $i \neq j$. Comme $A \otimes B$ est diagonale, on a $a_{ij} B = 0$, d'où $a_{ij} = 0$.

Ceci montre que A est diagonale.

Puis, comme $A \neq 0$, il existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_{i_0 i_0} \neq 0$. Comme $A \otimes B$ est diagonale, $a_{i_0 i_0} B$ est diagonale, et donc B est diagonale.

13) Soient $(A_i)_{i \in I}$ (resp. $(B_j)_{j \in J}$) une famille d'éléments de $\mathbf{M}_n(K)$ (resp. $\mathbf{M}_p(K)$) commutant deux à deux.

Soient $(i,j), (i',j') \in I \times J$. On a, d'après *2)* :

$$\begin{aligned}(A_i \otimes B_j)(A_{i'} \otimes B_{j'}) &= (A_i A_{i'}) \otimes (B_j B_{j'}) \\ &= (A_{i'} A_i) \otimes (B_{j'} B_j) \\ &= (A_{i'} \otimes B_{j'})(A_i \otimes B_j).\end{aligned}$$

Ainsi, les $A_i \otimes B_j$ $\Big((i,j) \in I \times J\Big)$ commutent deux à deux.

14) Soient $A \in \mathbf{M}_n(K)$, $B \in \mathbf{M}_p(K)$.

- $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B).$

- $\det(A \otimes B) = \det\Big((A \otimes I_p)(I_n \otimes B)\Big)$
  $= \det(A \otimes I_p)\det(I_n \otimes B).$

D'une part :

$$\det(I_n \otimes B) = \det\begin{pmatrix} B & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B \end{pmatrix} = \Big(\det(B)\Big)^n.$$

D'autre part, en reprenant la solution de *1)*, on voit que $B \otimes A$ est la matrice de $f_{A,B}$ dans les bases canoniques rangées sous la forme :

$$(\mathrm{E}'_{11}, \ldots, \mathrm{E}'_{n'1}, \mathrm{E}'_{12}, \ldots, \mathrm{E}'_{n'2}, \ldots, \mathrm{E}'_{1p'}, \ldots, \mathrm{E}'_{n'p'})$$

et $\quad (\mathrm{E}_{11}, \ldots, \mathrm{E}_{n1}, \mathrm{E}_{12}, \ldots, \mathrm{E}_{n2}, \ldots, \mathrm{E}_{1p}, \ldots, \mathrm{E}_{np}).$

D'où :

$$\det(A \otimes I_p) = \det(f_{A,I_p}) = \det(I_p \otimes A) = \Big(\det(A)\Big)^p.$$

Finalement :

$$\det(A \otimes B) = \Big(\det(A)\Big)^p \Big(\det(B)\Big)^n.$$

II *1)* Puisque χ_A et χ_B sont scindés, A et B sont trigonalisables (cf. 3.4 Th. p. 99). Il existe donc $P \in \mathbf{GL}_n(K)$,

$$T_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,s}(K),$$

$$Q \in \mathbf{GL}_p(K),\ T_B = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_p \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{p,s}(K)$$

telles que $A = PT_AP^{-1}$ et $B = QT_BQ^{-1}$.

On a alors (cf. ***I*** *2), 6), 11)*) :

$P \otimes Q \in \mathbf{GL}_{np}(K), \quad T_A \otimes T_B \in \mathbf{T}_{np,s}(K),$

$$A \otimes B = (P \otimes Q)(T_A \otimes T_B)(P \otimes Q)^{-1},$$

ce qui fournit une trigonalisation de $A \otimes B$.

Comme

$$T_A \otimes T_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 T_B & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n T_B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1\mu_p & & & \\ & & & \ddots & \cdots & \\ & 0 & & & \lambda_n\mu_1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n\mu_p \end{pmatrix},$$

on obtient : $\chi_{A\otimes B} = \chi_{T_A \otimes T_B} = \prod\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} (\lambda_i\mu_j - \mathrm{X})$.

En particulier, on retrouve le résultat de ***I*** *13)* (dans le cas où K est algébriquement clos) :

$$\det(A \otimes B) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \lambda_i\mu_j$$

$$= \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^p \left(\prod_{j=1}^p \mu_j\right)^n$$

$$= \big(\det(A)\big)^p \big(\det(B)\big)^n.$$

2) $(A \otimes B)^* = {}^{\mathrm{t}}(\overline{A \otimes B}) = {}^{\mathrm{t}}(\overline{A} \otimes \overline{B}) = ({}^{\mathrm{t}}\overline{A}) \otimes ({}^{\mathrm{t}}\overline{B})$

$$= A^* \otimes B^* = A \otimes B.$$

3) Supposons A et B diagonalisables. Il existe

$$P \in \mathbf{GL}_n(K),\ D_A = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbf{D}_n(K),$$

$$Q \in \mathbf{GL}_p(K),\ D_B = \mathrm{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_p) \in \mathbf{D}_p(K),$$

telles que $A = PD_AP^{-1}$ et $B = QD_BQ^{-1}$.

On a alors (cf. ***I*** *2), 6), 12)*) :

$P \otimes Q \in \mathbf{GL}_{np}(K), \quad D_A \otimes D_B \in \mathbf{D}_{np}(K),$

$$A \otimes B = (P \otimes Q)(D_A \otimes D_B)(P \otimes Q)^{-1},$$

ce qui montre que $A \otimes B$ est diagonalisable (et, de plus, fournit une diagonalisation de $A \otimes B$).

Chapitre 4

4.1.1

a) $\Longleftarrow$: évident.

$\Longrightarrow$:

Supposons : $\forall (X,Y) \in \big(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2,\ {}^{\mathrm{t}}XAY = {}^{\mathrm{t}}XBY.$

1ère méthode

Soit $Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; comme :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^{\mathrm{t}}X(AY - BY) = 0,$$

$AY - BY$ est orthogonal (pour le produit scalaire canonique) à tout élément de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $AY - BY = 0$.

Puisque : $\forall Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ (A - B)Y = AY - BY = 0$, on conclut : $A - B = 0$.

2ème méthode

Notons $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{ij})_{ij}$, et appliquons l'hypothèse à $X = \mathrm{E}_i$, $Y = \mathrm{E}_j$ (de la base canonique) ; on obtient : $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$,

$$a_{ij} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{E}_i A\mathrm{E}_j = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{E}_i B\mathrm{E}_j = b_{ij},\ \text{d'où } A = B.$$

b) $\Longleftarrow$: évident.

$\Longrightarrow$:

Supposons : $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^{\mathrm{t}}XAX = {}^{\mathrm{t}}XBX.$

1ère méthode

Soit $(X,Y) \in (\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$. En appliquant l'hypothèse à $X, Y, X+Y$, on déduit :

$${}^{\mathrm{t}}XAY + {}^{\mathrm{t}}YAX = {}^{\mathrm{t}}XBY + {}^{\mathrm{t}}YBX.$$

Comme A et B sont symétriques, on a :

$${}^{\mathrm{t}}YAX = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}XAY) = {}^{\mathrm{t}}XAY \quad \text{et} \quad {}^{\mathrm{t}}YBX = {}^{\mathrm{t}}XBY,$$

d'où : ${}^{\mathrm{t}}XAY = {}^{\mathrm{t}}XBY$.

De *a)*, on déduit : $A = B$.

2ème méthode

En notant ϕ_A (resp. ϕ_B) la fq de matrice A (resp. B) dans la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a, par hypothèse, $\phi_A = \phi_B$, et donc $\varphi_A = \varphi_B$ (formes polaires), c'est-à-dire $A = B$.

c) $\Longleftarrow$:

Si $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, alors, pour tout X de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$${}^{\mathrm{t}}XAX = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}XAX) = {}^{\mathrm{t}}X{}^{\mathrm{t}}AX = {}^{\mathrm{t}}X(-A)X = -{}^{\mathrm{t}}XAX,$$

donc ${}^{\mathrm{t}}XAX = 0$.

$\Longrightarrow$:

Supposons $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et : $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^{\mathrm{t}}XAX = 0$.

Alors :

$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^{\mathrm{t}}X(A + {}^{\mathrm{t}}A)X = {}^{\mathrm{t}}XAX + {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}XAX) = 0.$$

Comme $A + {}^tA \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, on déduit de *b)* : $A + {}^tA = 0$, c'est-à-dire $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.

4.1.2

a) 1) • *Réflexivité* : $\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),\ A\ \mathcal{C}\ A$, en choisissant $P = \mathrm{I}_n$.

• *Symétrie* : Soit $(A,B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = {}^tPAP$.

On a alors $A = ({}^tP)^{-1}BP^{-1} = {}^t(P^{-1})BP^{-1}$, donc $B\ \mathcal{C}\ A$.

• *Transitivité* : Soit $(A,B,C) \in \left(\mathbf{M}_n(\mathbb{R})\right)^3$ tel que $A\ \mathcal{C}\ B$ et $B\ \mathcal{C}\ C$. Il existe $P,Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que : $B = {}^tPAP$ et $C = {}^tQBQ$. On a alors :

$$C = {}^tQ({}^tPAP)Q = {}^t(PQ)A(PQ)$$

et $PQ \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, donc $A\ \mathcal{C}\ C$.

Ainsi : $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

2) • Le lien entre équivalence et similitude a déjà été examiné (cf. Algèbre PCSI-PTSI, 8.2.4 Rem. *1)*) ; on a :

$$\forall A,B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),\ (A \sim B \Longrightarrow A \text{ eq } B),$$

mais la réciproque est fausse.

• Soient $A,B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A\ \mathcal{C}\ B$; il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que : $B = {}^tPAP$.

Alors : $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(A)$, donc A eq B.

• Il est clair que, si $B = {}^tPAP$

alors $\det(B) = (\det(P))^2 \det(A)$,

donc $\operatorname{sgn}(\det(B)) = \operatorname{sgn}(\det(A))$.

En prenant $n = 1$, $A = (1)$, $B = (-1)$, il est clair que :

$$A \sim B \text{ et } A \not{\mathcal{C}}\ B.$$

• En prenant $n = 1$, $A = (1)$, $B = (4)$, on a $A\ \mathcal{C}\ B$ (choisir $P = (2)$) ; on a alors $B = {}^tPAP$ et $A \not\sim B$.

Réponse :

• similitude $\Longrightarrow$ équivalence

• congruence $\Longrightarrow$ équivalence

• il n'y a pas d'autre lien logique.

b) 1) Exemple : $n = 1$, $\alpha = 1$, $A = (1)$, $B = (4)$, $A' = (-9)$, $B' = (-1)$.

On a ici : $A\ \mathcal{C}\ B$, $A'\ \mathcal{C}\ B'$, mais $\alpha A + A' \not{\mathcal{C}}\ \ \alpha B + B'$.

Réponse : non.

2) Si $B = {}^tPAP$, alors ${}^tB = {}^tP\,{}^tAP$.

c) • Si $B = {}^tPAP$,

alors ${}^tMBM = {}^tM\,{}^tPAPM = {}^t(PM)A(PM)$

et $PM \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

• Exemple où $M \notin \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a ici :

$$A\ \mathcal{C}\ B \text{ (choisir } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\text{)},\quad {}^tMAM \not{\mathcal{C}}\ {}^tMBM$$

(car ${}^tMAM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^tMBM = 0$).

Réponse : non.

d) S'il existe $P \in \mathbf{GL}_p(\mathbb{R})$, $Q \in \mathbf{GL}_q(\mathbb{R})$ telles que $A' = {}^tPAP$ et $B' = {}^tQBQ$, alors, en notant $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, on a $R \in \mathbf{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$ et :

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = {}^tR \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} R.$$

e) La propriété résulte trivialement de la formule de changement de base pour les fbs (4.1.2 4) Prop. 4 p. 118).

4.2.1

1) Supposons que ψ soit un produit scalaire sur E. Comme $E \neq \{0\}$, il existe $x_0 \in E - \{0\}$, et on a $\varphi(x_0,x_0) > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(x_0,0) = a\varphi(x_0,x_0), \\ 0 &= \psi(0,x_0) = c\varphi(x_0,x_0), \\ 0 &< \psi(x_0,x_0) = b\varphi(x_0,x_0), \end{aligned}$$

d'où : $a = c = 0,\ \ b > 0$.

2) Réciproque évidente.

Réponse : $a = c = 0$ et $b > 0$.

4.2.2

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à AX, BY dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

4.2.3

Comme $(X,Y) \longmapsto \operatorname{tr}({}^tXY)$ est un produit scalaire sur $\mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ (cf. 4.2.1 Exemple *2)* p. 138) :

$${}^tAA = 0 \Longrightarrow \operatorname{tr}({}^tAA) = 0 \Longrightarrow A = 0.$$

4.2.4

En notant $M = B - C$ et en utilisant l'ex. 4.2.3 :

$$\begin{aligned} BA\,{}^tA = CA\,{}^tA &\Longleftrightarrow MA\,{}^tA = 0 \Longrightarrow MA\,{}^tA\,{}^tM = 0 \\ &\Longleftrightarrow {}^t({}^tA\,{}^tM)({}^tA\,{}^tM) = 0 \Longrightarrow {}^tA\,{}^tM = 0 \\ &\Longrightarrow {}^t(MA) = {}^tA\,{}^tM = 0 \Longrightarrow MA = 0. \end{aligned}$$

4.2.5

1) • Puisque, pour tout X de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$AX = 0 \Longrightarrow ({}^tAA)X = {}^tA(AX) = 0,$$

on a :

$$\operatorname{Ker}(A) \subset \operatorname{Ker}({}^tAA).$$

• Soit $X \in \operatorname{Ker}({}^tAA)$;

alors : $\quad ||AX||^2 = {}^t(AX)(AX) = {}^tX({}^tAAX) = 0$,

donc $\qquad AX = 0$.

On conclut : $\qquad \operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}({}^tAA)$.

En appliquant à ${}^tA$ à la place de A, on obtient aussi :

$$\mathrm{Ker}\,({}^tA) = \mathrm{Ker}\,(A\,{}^tA)\,.$$

2) • Soit $Y \in \mathrm{Im}(A\,{}^tA)$. Il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = (A\,{}^tA)X$, d'où $Y = A({}^tAX) \in \mathrm{Im}(A)$.

Ceci montre : $\quad \mathrm{Im}(A\,{}^tA) \subset \mathrm{Im}(A)$.

• D'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A\,{}^tA) &= n - \dim(\mathrm{Ker}(A\,{}^tA)) = n - \dim(\mathrm{Ker}({}^tA)) \\ &= \mathrm{rg}\,({}^tA) = \mathrm{rg}\,A\,.\end{aligned}$$

Il en résulte : $\mathrm{Im}(A\,{}^tA) = \mathrm{Im}\,A$,

puis, avec ${}^tA$ à la place de A : $\quad \mathrm{Im}({}^tAA) = \mathrm{Im}({}^tA)$.

3) Il n'y a, en général, pas de lien d'inclusion entre $\mathrm{Ker}\,(A)$ et $\mathrm{Ker}\,({}^tA)$, ni entre $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}({}^tA)$.

Par exemple, pour $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\mathrm{Ker}\,(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \mathrm{Ker}\,({}^tA) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \mathrm{Im}({}^tA) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Réponse :

• $\mathrm{Ker}\,({}^tAA) = \mathrm{Ker}\,(A)$, $\quad \mathrm{Ker}\,(A\,{}^tA) = \mathrm{Ker}\,({}^tA)$

• $\mathrm{Im}({}^tAA) = \mathrm{Im}({}^tA)$, $\quad \mathrm{Im}(A\,{}^tA) = \mathrm{Im}(A)$

• $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,({}^tA) = \mathrm{rg}\,({}^tAA) = \mathrm{rg}\,(A\,{}^tA)$.

4.2.6

Notons $B = A^2 - \mathrm{I}_n$. On a alors :

$$B^2 = A^4 - 2A^2 + \mathrm{I}_n = 0,$$

$$\begin{aligned}\text{et}\quad {}^tBB &= {}^tA^2A^2 - A^2 - {}^tA^2 + \mathrm{I}_n \\ &= A^2\,{}^tA^2 - A^2 - {}^tA^2 + \mathrm{I}_n = B\,{}^tB,\end{aligned}$$

d'où :

$${}^t({}^tBB)\,({}^tBB) = ({}^tBB)^2 = {}^tB^2B^2 = 0,$$

donc (cf. ex. 4.2.3) ${}^tBB = 0$, puis encore, $B = 0$.

4.2.7

Notons $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, donc $A = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & \dots & v_n \\ v_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ v_n & & & \end{pmatrix}$.

1) Comme les colonnes nos 2 à $n+1$ de A sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}$, il est clair que $\mathrm{rg}\,(A) \leqslant 2$.

D'autre part, il existe $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $v_i \neq 0$, et les colonnes nos 1 et $i+1$ de A forment une famille libre, d'où $\mathrm{rg}\,(A) \geqslant 2$.

On conclut : $\quad \mathrm{rg}\,(A) = 2$.

2) On a : $\quad A^2 = \begin{pmatrix} {}^tVV & 0 \\ 0 & V\,{}^tV \end{pmatrix}$.

D'une part, comme $\mathrm{Im}(A^2) \subset \mathrm{Im}(A)$, on a :

$$\mathrm{rg}\,(A^2) \leqslant \mathrm{rg}\,(A) = 2\,.$$

D'autre part, ${}^tVV \neq 0$ et $V\,{}^tV \neq 0$ (car $V \neq 0$), donc $\mathrm{rg}\,(A^2) = \mathrm{rg}\,({}^tVV) + \mathrm{rg}\,(V\,{}^tV) \geqslant 2$.

Réponse : $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A^2) = 2$.

4.2.8

Puisque $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(\{A,B\})$, le plan vectoriel $P = \mathrm{Vect}(\{A,B\})$ est stable par f ; notons g l'endomorphisme induit par f sur P, et

$$M = \mathrm{Mat}_{(A,B)}(g) = \begin{pmatrix} -\mathrm{tr}({}^tBA) & -\mathrm{tr}({}^tBB) \\ \mathrm{tr}({}^tAA) & \mathrm{tr}({}^tAB) \end{pmatrix}.$$

On a : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_g(\lambda) = \lambda^2 + \alpha$, où

$$\alpha = -(\mathrm{tr}({}^tAB))^2 + \mathrm{tr}({}^tAA)\mathrm{tr}({}^tBB)\,.$$

Comme (A,B) est libre, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'étude du cas d'égalité, appliqués au produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\alpha = - < A,B >^2 + ||A||^2||B||^2 > 0\,.$$

Ainsi, χ_g n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Comme g est induit par f, $\chi_g | \chi_f$ (cf. ex. 3.2.1 p. 85), et donc χ_f n'est pas non plus scindé sur $\mathbb{R}$.

Réponse : f n'est pas diagonalisable.

4.2.9

a) D'après l'ex. 4.2.5 : $\mathrm{rg}\,({}^tAA) = \mathrm{rg}\,(A) = p$.

Comme $B = {}^tAA \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$, on conclut : $B \in \mathbf{GL}_p(\mathbb{R})$.

b) • $C = AB^{-1}\,{}^tA \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\bullet\ C^2 &= AB^{-1}({}^tAA)B^{-1}\,{}^tA = AB^{-1}BB^{-1}\,{}^tA \\ &= AB^{-1}\,{}^tA = C.\end{aligned}$$

$$\bullet \begin{cases} C = AB^{-1}\,{}^tA \Longrightarrow \mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}(A) \\ CA = AB^{-1}\,{}^tAA = A \Longrightarrow \mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Im}(C) \end{cases}.$$

$$\bullet \begin{cases} C = AB^{-1}\,{}^tA \Longrightarrow \mathrm{Ker}\,({}^tA) \subset \mathrm{Ker}\,(C) \\ {}^tAC = {}^tAAB^{-1}\,{}^tA = {}^tA \Longrightarrow \mathrm{Ker}\,(C) \subset \mathrm{Ker}\,({}^tA) \end{cases}.$$

4.2.10

a) D'après Algèbre PCSI-PTSI, ex. 8.1.30, il existe $U,V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $H = U\,{}^tV$.

Comme $\mathrm{rg}\,(H) = 1$, on a : $\quad U \neq 0$ (et $V \neq 0$).

Si V est colinéaire à U, $V = \alpha U$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), donc $H = \alpha U\,{}^tU$ est symétrique, exclu. Ainsi, (U,V) est libre.

Soit $(\lambda, X) \in \mathbb{R} \times \big(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}\big)$. On a :

$$\begin{aligned}AX = \lambda X &\Longleftrightarrow (U\,{}^tV + V\,{}^tU)X = \lambda X \\ &\Longleftrightarrow ({}^tVX)U + ({}^tUX)V = \lambda X\,.\end{aligned}$$

1) Si $\lambda \neq 0$, alors $X \in \mathrm{Vect}(U,V)$, $X = \alpha U + \beta V$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} \alpha\,{}^{t}VU + \beta\,{}^{t}VV = \lambda\alpha \\ \alpha\,{}^{t}UU + \beta\,{}^{t}UV = \lambda\beta \end{cases}.$$

Le déterminant Δ de ce système (d'inconnue (α,β)) est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} {}^{t}VU - \lambda & {}^{t}VV \\ {}^{t}UU & {}^{t}UV - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - {}^{t}UV)^2 - ({}^{t}UU)({}^{t}VV),$$

et, en notant $<\cdot,\cdot>$ le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $||\cdot||$ la norme euclidienne associée :

$$\Delta = 0 \iff \lambda = <U,V> \pm ||U||\,||V||.$$

Remarquer que

$$<U,V> - ||U||\,||V|| \quad \text{et} \quad <U,V> + ||U||\,||V||$$

sont différents et non nuls (cf. étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, 4.2.1 Prop. 1 p. 138).

2) $AX = 0 \iff {}^{t}VX = {}^{t}UX = 0$, donc $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension $n-2$ (c'est $(\mathrm{Vect}(U,V))^{\perp}$, cf. plus loin 4.2.2 Prop. 1 *4)* p. 142).

Réponse :

• $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$

$$= \Big\{ <U,V> + ||U||\,||V||,\ <U,V> - ||U||\,||V||,\ 0 \Big\}$$

• $\mathrm{SEP}(A, <U,V> + \varepsilon||U||\,||V||)$

$$= \mathrm{Vect}(||V||U + \varepsilon||U||V),\ \varepsilon \in \{-1,1\}$$

• $\mathrm{SEP}(A,0) = \Big(\mathrm{Vect}(U,V)\Big)^{\perp}$,

où $<U,V> = {}^{t}UV$, $||U|| = ({}^{t}UU)^{\frac{1}{2}}$, $||V|| = ({}^{t}VV)^{\frac{1}{2}}$, (U,V) étant un couple de $\big(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2$ tel que $H = U\,{}^{t}V$.

b) Comme H admet trois vp distinctes dont les SEP associés sont de dimensions respectives 1, 1, $n-2$, on conclut que A est diagonalisable.

D'ailleurs, $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, donc A est diagonalisable (cf. plus loin 4.5.1 Th. p. 164).

Réponse : oui.

4.2.11

a) $||{}^{t}AV||^2 = {}^{t}({}^{t}AV){}^{t}AV = {}^{t}VA\,{}^{t}AV = <V, A{}^{t}AV>$

$$\leqslant ||V||\,||A({}^{t}AV)|| \leqslant ||V||\,||{}^{t}AV||,$$

d'où : $||{}^{t}AV|| = 0$ ou $||{}^{t}AV|| \leqslant ||V||$.

b) • Soit $V \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AV = V$. On a :

$$||{}^{t}AV - V||^2 = {}^{t}VA{}^{t}AV - {}^{t}VAV - {}^{t}V\,{}^{t}AV + {}^{t}VV$$
$$= ||{}^{t}AV||^2 - {}^{t}VV - {}^{t}VV + {}^{t}VV$$
$$= ||{}^{t}AV||^2 - ||V||^2 \leqslant 0,$$

d'où ${}^{t}AV = V$.

• D'après *a)*, on peut remplacer A par ${}^{t}A$, donc :

$${}^{t}AV = V \Longrightarrow AV = V.$$

c) Soit $X \in \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) \cap \mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n)$. Alors $AX = X$, et il existe $Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = AY - Y$. D'après *b)*, ${}^{t}AX = X$.

On a : $X = {}^{t}AX = {}^{t}A(AY - Y) = {}^{t}AAY - AY$,

d'où : ${}^{t}AAY = AY + {}^{t}AY - Y$, puis :

$${}^{t}XX = ({}^{t}Y{}^{t}A - {}^{t}Y)(AY - Y)$$
$$= {}^{t}Y({}^{t}AAY - {}^{t}AY - AY + Y) = 0,$$

donc $X = 0$.

Ceci montre : $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) \cap \mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n) = \{0\}$.

• D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n)) + \dim(\mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n)) = n,$$

d'où finalement :

$$\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n).$$

4.2.12

$\Longrightarrow$: évident.

$\Longleftarrow$:

Supposons : $\forall y \in F,\ (x|y) \leqslant ||y||^2$.

Soit $y \in F$; on a : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ (x|\lambda y) \leqslant ||\lambda y||^2$, d'où :

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, & (x|y) \leqslant \lambda||y||^2 \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}_-^*, & (x|y) \geqslant \lambda||y||^2 \end{cases}.$$

En faisant tendre λ vers $0^+, 0^-$, on déduit : $(x|y) = 0$.

4.2.13

L'eve (E,φ) admet au moins une b.o.n. $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$; notons, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\alpha_i = \psi(e_i,e_i)$.

Soit $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ tel que $i \neq j$.

On a $\varphi(e_i,e_j) = 0$, donc (hypothèse) $\psi(e_i,e_j) = 0$.

De même, $\varphi(e_i + e_j, e_i - e_j) = \varphi(e_i,e_i) - \varphi(e_j,e_j) = 0$, donc $\psi(e_i + e_j, e_i - e_j) = 0$,

c'est-à-dire $\psi(e_i,e_i) = \psi(e_j,e_j)$.

Ainsi, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$, noté α.

On a donc : $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ \psi(e_i,e_j) = \alpha\varphi(e_i,e_j)$, d'où par bilinéarité de φ et ψ :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \psi(x,y) = \alpha\varphi(x,y).$$

Enfin, $\alpha = \psi(e_1,e_1) > 0$.

4.2.14

1) $A = (a_{ij})_{ij} \in \big(\mathbf{D}_n(\mathbb{R})\big)^{\perp}$

$$\iff \Big(\forall (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{tr}({}^{t}A\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)) = 0\Big)$$

$$\iff \Big(\forall (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda_i = 0\Big)$$

$$\iff \Big(\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ a_{ii} = 0\Big).$$

2) Soient $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$< S,A > = \mathrm{tr}({}^t\!S A) = \mathrm{tr}\,({}^t({}^t\!S A)) = \mathrm{tr}\,({}^t\!A S) = \mathrm{tr}\,(-AS)$$

$$= -\mathrm{tr}\,(A\,{}^t\!S) = - < S,A > ,$$

d'où : $< S,A > = 0$

Ceci montre :

$$\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \subset \left(\mathbf{A}_n(\mathbb{R})\right)^{\perp} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) \subset \left(\mathbf{S}_n(\mathbb{R})\right)^{\perp}.$$

De plus, $\dim\left((\mathbf{A}_n(\mathbb{R}))^{\perp}\right) = n^2 - \dim\left(\mathbf{A}_n(\mathbb{R})\right)$

$$= n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \dim\left(\mathbf{S}_n(\mathbb{R})\right).$$

Réponse :

- $\left(\mathbf{D}_n(\mathbb{R})\right)^{\perp}$

$$= \left\{A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R});\ \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ a_{ii} = 0\right\}$$

- $\left(\mathbf{S}_n(\mathbb{R})\right)^{\perp} = \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, $\left(\mathbf{A}_n(\mathbb{R})\right)^{\perp} = \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

4.2.15

1) Supposons X vecteur propre de ${}^t\!A$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que ${}^t\!AX = \lambda X$.

On a :

$$\forall Y \in H,\ {}^t\!X(AY) = {}^t({}^t\!AX)Y = {}^t(\lambda X)Y = \lambda\,{}^t\!XY = 0,$$

donc : $\forall Y \in H,\ AY \in H$.

2) Réciproquement, supposons H stable par A.

On a alors :

$$\forall Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ (Y \in H \Longrightarrow AY \in H \Longrightarrow {}^t\!XAY = 0$$

$$\Longrightarrow {}^t({}^t\!AX)Y = 0),$$

c'est-à-dire : $H = X^{\perp} \subset ({}^t\!AX)^{\perp}$.

En passant aux orthogonaux :

$$\mathrm{Vect}(X) = X^{\perp\perp} \supset ({}^t\!AX)^{\perp\perp} = \mathrm{Vect}({}^t\!AX).$$

Ainsi, ${}^t\!AX \in \mathbb{R}X$, donc X est $\overrightarrow{\text{vp}}$ de ${}^t\!A$.

4.3.1

((i) et (ii)) $\Longrightarrow$ (iii) : évident.

((i) et (iii)) $\Longrightarrow$ (ii) : évident.

((ii) et (iii)) $\Longrightarrow$ (i) : $A = {}^t\!AA = {}^t({}^t\!AA) = {}^t\!A$

(iii) ne sert pas).

4.3.2

- On a :

$$\begin{cases} {}^t VAU = {}^t V(AU) = {}^t V(\lambda U) = \lambda\,{}^t VU \\ {}^t VAU = {}^t V\,{}^t\!AU = {}^t(AV)U = {}^t(\mu V)U = \mu\,{}^t VU, \end{cases}$$

d'où, puisque $\lambda \neq \mu$: ${}^t VU = 0$.

- $(U\,{}^t V)^2 = U({}^t VU)\,{}^t V = 0$.

4.3.3

a) Notons $V = \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- $\begin{cases} {}^t VAV = {}^t V({}^t\!AA)V = \|AV\|^2 \geqslant 0, \\ {}^t VAV = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} \end{cases}$,

d'où $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} \geqslant 0$.

- Soit $B = \mathrm{I}_n - A$.

Comme ${}^t\!B = B$ et $B^2 = \mathrm{I}_n - 2A + A^2 = \mathrm{I}_n - A = B$, on peut appliquer le résultat précédent à B au lieu de A, d'où :

$$n - \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} \geqslant 0.$$

b) Notons $A' = (|a_{ij}|)_{i,j}$

et $U = \begin{pmatrix} 1 & \text{---} & 1 \\ | & 1 & | \\ 1 & \text{---} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(A'|U)^2 \leqslant \|A'\|^2\ \|U\|^2$

donne :

$$\left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 1^2\right).$$

Mais : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2 = \mathrm{tr}\,({}^t\!AA) = \mathrm{tr}(A)$ et, puisque A est une matrice de projection : $\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A)$. (En effet, puisque A annule $X(X-1)$, A est diagonalisable, cf. 3.5.2 Exemple *1)* p. 112, et $A \sim \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $r = \mathrm{rg}\,(A)$).

Ainsi : $\left(\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|\right)^2 \leqslant n^2 \mathrm{rg}\,(A)$.

c) • D'après *b)* et $\mathrm{rg}\,(A) \leqslant n$: $\left(\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|\right) \leqslant n^{3/2}$.

- Si $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| = n^{3/2}$, alors $\mathrm{rg}\,(A) = n$,

donc $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, puis $A = I_n$ (puisque $A^2 = A$).

Mais alors $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| = n < n^{3/2}$, contradiction.

4.3.4

- Supposons $n \geqslant 3$, et $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA.$$

Soit $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ tel que $i \neq j$; il existe $k \in \{1,\ldots,n\}$ tel que i,j,k soient deux à deux distincts.

Comme $\mathrm{E}_{jk} - \mathrm{E}_{kj} \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$(\mathrm{E}_{jk} - \mathrm{E}_{kj})M = M(\mathrm{E}_{jk} - \mathrm{E}_{kj}),$$

d'où, en prenant les $(i,k)^{\text{èmes}}$ termes : $0 = -m_{ij}$.

Montrer de même : $m_{ii} = m_{jj}$.

Réciproque immédiate.

- Traiter séparément le cas $n = 2$.

Réponse : Le commutant de $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est :

$$\left|\begin{array}{ll} \mathbb{R}\,\mathrm{I}_n & \text{si } n \neq 2 \\ \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix};\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} & \text{si } n = 2 \end{array}\right.$$

4.3.5

a) Soit $(k,l) \in \{0,\ldots,n-1\}^2$ tel que $k \neq l$.

On a : $< U^k,U^l > = \mathrm{tr}({}^t(U^k)U^l)$.

Comme $U^n = \mathrm{I}_n$, on a : ${}^t(U^k) = U^{n-k} = U^{-k}$, d'où :

$$< U^k,U^l > = \mathrm{tr}(U^{l-k}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad l \neq k \\ n & \text{si} \quad l = k \end{cases}.$$

Ainsi, $(U^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une famille orthogonale.

Comme : $\forall k \in \{0,\ldots,n-1\},\ U^k \neq 0$,

$(U^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base orthogonale de F (cf. 4.2.2 Prop. 2 p. 142).

b) Notons $L_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, U^k \ (0 \leqslant k \leqslant n-1)$.

D'après *a)*, $(L_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une b.o.n. de F, d'où

(cf. 4.3.1 Prop. 4 p. 149) : $p_F(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} < L_k,A > L_k$.

Pour tout k de $\{0,\ldots,n-1\}$, on a :

$$< L_k,A > = \frac{1}{\sqrt{n}}\, \mathrm{tr}({}^t(U^k)A) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, \mathrm{tr}(U^{n-k}A) = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

d'où :

$$p_F(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}\, L_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k.$$

Réponse : $p_F(A) = \dfrac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

4.3.6

1) Soit $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}),\ M\Omega = \Omega M.$$

• Soient $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$,

$$\Omega = \mathrm{diag}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}).$$

On a : $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ m_{ij}\varepsilon_j = \varepsilon_i m_{ij}$.

Supposons $i \neq j$. On peut choisir $\varepsilon_i = 1,\ \varepsilon_j = -1$, d'où $m_{ij} = 0$.

Ceci montre : $M = \mathrm{diag}(m_{11},\ldots,m_{nn})$.

• Soit $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ tel que $i < j$.

En utilisant $\Omega = \mathrm{I}_n - \mathrm{E}_{ii} - \mathrm{E}_{jj} + \mathrm{E}_{ji} - \mathrm{E}_{ij} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, on obtient $m_{ii} = m_{jj}$.

Ainsi : $M \in \mathbb{R}\,\mathrm{I}_n$.

2) Réciproque évidente.

Réponse : Le commutant de $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}\mathrm{I}_n$.

4.3.7

a) Soit $(x,y) \in \mathrm{Ker}\,(f-e) \times \mathrm{Im}(f-e)$. Il existe $z \in E$ tel que $y = f(z) - z$, et $f(x) = x$, d'où :

$$\begin{aligned} < x,y > &= < x, f(z) - z > = < x, f(z) > - < x,z > \\ &= < f(x), f(z) > - < x,z > = 0. \end{aligned}$$

b) D'après le théorème du rang,

$$\dim\,(\mathrm{Ker}\,(f-e)) + \dim\,(\mathrm{Im}(f-e)) = \dim\, E,$$

et, d'après *a)* : $\mathrm{Ker}\,(f-e) \cap \mathrm{Im}(f-e) = \{0\}$.

4.3.8

L'eve E admet au moins une b.o.n. $\mathcal{B}$; notons $\Omega = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors :

$$\text{(i)} \Longleftrightarrow {}^t\Omega\Omega = \mathrm{I}_n, \quad \text{(ii)} \Longleftrightarrow \Omega^2 = -\mathrm{I}_n,$$
$$\text{(iii)} \Longleftrightarrow {}^t\Omega = -\Omega,$$

(cf. ex. 4.1.1).

((i) et (ii)) $\Longrightarrow$ (iii) : ${}^t\Omega\Omega = \mathrm{I}_n = -\Omega^2 \Longrightarrow {}^t\Omega = -\Omega$, car $\Omega \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

((i) et (iii)) $\Longrightarrow$ (ii) : $\Omega^2 = (-{}^t\Omega)\Omega = -\mathrm{I}_n$

((ii) et (iii)) $\Longrightarrow$ (i) : ${}^t\Omega\Omega = (-\Omega)\Omega = -\Omega^2 = \mathrm{I}_n$.

4.3.9

1) Cf. 4.3.1 Prop. 8 p. 150.

2) Réciproquement, supposons $f \in \mathcal{O}(E)$ diagonalisable. Comme $f \in \mathcal{O}(E)$, on a : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1,1\}$. Il existe donc une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_q \end{pmatrix}, \text{ où } (p,q) \in \mathbb{N}^2.$$

On a alors $f^2 = e$, donc f est une symétrie.

Soient $x \in \mathrm{Ker}\,(f-e)$, $y \in \mathrm{Ker}\,(f+e)$; on a :

$$< x,y > = < f(x), f(y) > = < x,-y > = - < x,y >,$$

d'où $< x,y > = 0$.

Finalement, f est une symétrie orthogonale.

4.3.10

1) Soit $\Omega = (a_{ij})_{ij} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

On a :

$$||\Omega||^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n,$$

donc $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ est borné et, de plus :

$$\forall \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}),\ ||\Omega|| = \sqrt{n}.$$

2) • $\forall \Omega_1,\Omega_2 \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$$||\Omega_1 - \Omega_2|| \leqslant ||\Omega_1|| + ||\Omega_2|| = 2\sqrt{n}$$

• $\mathrm{I}_n \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $-\mathrm{I}_n \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $||\mathrm{I}_n - (-\mathrm{I}_n)|| = 2\sqrt{n}$.

Réponse : $\mathrm{diam}\,\big(\mathbf{O}_n(\mathbb{R})\big) = 2\sqrt{n}$.

4.3.11

1) Il est clair que $\Pi_n \subset \Sigma_n$ et $\Pi_n \subset \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$

donc $\Pi_n \subset \Sigma_n \cap \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \Pi_n \cap \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,\dots,n\}, \ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(1-a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = 1 - 1 = 0 \\ \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \quad a_{ij}(1-a_{ij}) \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

d'où : $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \ a_{ij} \in \{0,1\}$.

Soit $i \in \{1,\dots,n\}$.

Comme $\left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \{1,\dots,n\}, \quad a_{ij} \in \{0,1\} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \end{array} \right|,$

il existe $j \in \{1,\dots,n\}$ unique tel que :

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 \\ \forall k \in \{1,\dots,n\} - \{j\}, \ a_{ik} = 0 \end{cases}.$$

L'application $\sigma : \begin{array}{ccc} \{1,\dots,n\} & \longrightarrow & \{1,\dots,n\} \\ i & \longmapsto & j \end{array}$ ainsi définie est injective car, si $i_1, i_2 \in \{1,\dots,n\}$ sont tels que $i_1 \neq i_2$ et $\sigma(i_1) = \sigma(i_2)$,

alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i_1)}^2 \geqslant a_{i_1\sigma(i_1)}^2 + a_{i_2\sigma(i_1)}^2 = 2$,

ce qui contredit $A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, $\sigma : \{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$ est injective, donc bijective, et finalement : $A \in \Pi_n$.

4.3.12

Supposons $M \in \mathbf{O}_{n+p}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ (par exemple, le cas $D \in \mathbf{O}_p(\mathbb{R})$ se traitant de façon analogue).

Un produit par blocs donne, à partir de ${}^{t}MM = \mathrm{I}_{n+p}$:

$$ {}^{t}AA + {}^{t}CC = \mathrm{I}_n, \quad {}^{t}AB + {}^{t}CD = 0, $$

$$ {}^{t}BA + {}^{t}DC = 0, \quad {}^{t}BB + {}^{t}DD = \mathrm{I}_p. $$

Puis : • $\begin{cases} {}^{t}AA = \mathrm{I}_n \\ {}^{t}AA + {}^{t}CC = \mathrm{I}_n \end{cases} \Longrightarrow {}^{t}CC = 0 \Longrightarrow C = 0,$

cf. ex. 4.2.3

• $\begin{cases} C = 0 \\ {}^{t}AB + {}^{t}CD = 0 \end{cases} \Longrightarrow {}^{t}AB = 0 \Longrightarrow B = 0,$

car $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$

• $\begin{cases} C = 0 \\ {}^{t}CC + {}^{t}DD = \mathrm{I}_p \end{cases} \Longrightarrow {}^{t}DD = \mathrm{I}_p \Longleftrightarrow D \in \mathbf{O}_p(\mathbb{R}).$

4.3.13

a) • ${}^{t}(AB) = {}^{t}B\,{}^{t}A = B(-A) = -BA = -AB$,

donc $AB \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.

• ${}^{t}(AX)BX = {}^{t}X\,{}^{t}ABX = -{}^{t}X(AB)X = 0$,

car $AB \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, cf. ex. 4.1.1.

b) $||(A+B)X||^2 = ||AX||^2 + 2\,{}^{t}(AX)BX + ||BX||^2$

$$= ||AX||^2 + ||BX||^2,$$

et de même : $||(A-B)X||^2 = ||AX||^2 + ||BX||^2$.

c) • $(A+B)X = 0 \Longleftrightarrow ||(A+B)X|| = 0$

$$\Longleftrightarrow ||(A-B)X|| = 0 \Longleftrightarrow (A-B)X = 0,$$

donc : $\left| \begin{array}{c} (A+B)X = 0 \\ \text{ou} \\ (A-B)X = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{cases} (A+B)X = 0 \\ (A-B)X = 0 \end{cases}$

$$\Longrightarrow BX = 0 \Longrightarrow X = 0.$$

Ceci montre que $A+B$ et $A-B$ sont inversibles.

• Notons $\Omega = (A+B)(A-B)^{-1}$.

Comme A et B commutent, $A+B$ et $-A+B$ commutent, d'où :

$$\begin{aligned} {}^{t}\Omega\Omega &= {}^{t}(A-B)^{-1}\,{}^{t}(A+B)(A+B)(A-B)^{-1} \\ &= (-A-B)^{-1}(-A+B)(A+B)(A-B)^{-1} \\ &= (A+B)^{-1}(A+B)(A-B)(A-B)^{-1} = \mathrm{I}_n. \end{aligned}$$

4.4.1

• La linéarité de φ_A est immédiate.

• Pour tout (X,Y) de $\big(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2$:

$$\begin{aligned} < \varphi_A(X), Y > &= \mathrm{tr}\,({}^{t}(\varphi_A(X))Y) = \mathrm{tr}\,({}^{t}A\,{}^{t}XAY) \\ &= \mathrm{tr}\,(({}^{t}XAY)\,{}^{t}A) = \mathrm{tr}\,({}^{t}X(AY\,{}^{t}A)) \\ &= < X, AY\,{}^{t}A > = < X, \varphi_{{}^{t}A}(Y) > . \end{aligned}$$

Réponse : $(\varphi_A)^* = \varphi_{{}^{t}A}$.

4.4.2

Le sev F de E admet au moins une b.o.n. $\mathcal{B}_1$, et on peut compléter $\mathcal{B}_1$ en une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$, où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(g)$.

En utilisant des produits par blocs, de $f^* \circ f = f \circ f^*$ on déduit :

$$ {}^{t}AA = A\,{}^{t}A + B\,{}^{t}B, \quad {}^{t}AB = B\,{}^{t}C, \quad {}^{t}BB + {}^{t}CC = C\,{}^{t}C\,; $$

puis :

$$\mathrm{tr}\,(B\,{}^{t}B) = \mathrm{tr}({}^{t}AA - A\,{}^{t}A) = \mathrm{tr}({}^{t}AA) - \mathrm{tr}(A\,{}^{t}A) = 0,$$

donc $B = 0$, et enfin ${}^{t}AA = A\,{}^{t}A$, c'est-à-dire :

$$g^* \circ g = g \circ g^*.$$

4.5.1

a) φ est continue sur le compact S, donc est bornée et atteint ses bornes.

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$;

comme $||\cos\theta\ x_0 + \sin\theta\ x_1||^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on a : $\varphi(\cos\theta x_0 + \sin\theta\ x_1) \leqslant \varphi(x_0)$,

d'où, en développant :

$$\begin{aligned} &2\sin\theta\cos\theta < x_1, f(x_0) > \\ &\qquad\qquad \leqslant \sin^2\theta(< x_0, f(x_0) > - < x_1, f(x_1) >). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \forall \theta \in]0;\pi[,\ 2\cos\theta < x_1, f(x_0) > \\ \qquad\qquad \leqslant \sin\theta\ (< x_0, f(x_0) > - < x_1, f(x_1) >) \\ \forall \theta \in]-\pi;0[,\ 2\cos\theta < x_1, f(x_0) > \\ \qquad\qquad \geqslant \sin\theta\ (< x_0, f(x_0) > .- < x_1, f(x_1) >). \end{cases}$$

En faisant tendre θ vers 0^+ et 0^- respectivement, on déduit : $< x_1, f(x_0) > = 0$.

c) • Soit $x \in x_0^\perp - \{0\}$.

D'après *b)*, $< \dfrac{1}{||x||}x, f(x_0) > = 0$,

donc $< x, f(x_0) > = 0$.

• Ceci montre : $x_0^\perp \subset (f(x_0))^\perp$, d'où, en passant aux orthogonaux : $\mathbb{R}x_0 = x_0^{\perp\perp} \supset (f(x_0))^{\perp\perp} = \mathbb{R}f(x_0)$,

cf. aussi ex. 4.2.15.

Ainsi $f(x_0) \in \mathbb{R}\, x_0$, donc x_0 est vecteur propre de f.

4.5.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$; on a : $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$,

donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1\}$.

Si A était diagonalisable, alors on aurait $A = \mathrm{I}_2$, contradiction.

Réponse : $\begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$.

4.5.3

Puisque $A + {}^{\mathrm{t}}A$ est symétrique, d'après le **théorème fondamental**, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + {}^{\mathrm{t}}A = \Omega D \Omega^{-1}$.

D'autre part, comme $A + {}^{\mathrm{t}}A$ est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(A + {}^{\mathrm{t}}A)^p = 0$, d'où $D^p = 0$.

En notant $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on a $\lambda_1^p = \ldots = \lambda_n^p = 0$, d'où $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, $D = 0$, $A + {}^{\mathrm{t}}A = 0$, $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$.

4.5.4

Notons $S = \dfrac{1}{2}(A + {}^{\mathrm{t}}A) \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

D'après le **théorème fondamental**, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = \Omega D \Omega^{-1}$. Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de Ω, $X = C_1 + \ldots + C_n$,

$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = D$.

On a alors : ${}^{\mathrm{t}}XX = n$ et ${}^{\mathrm{t}}XSX = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}\,(S)$.

De plus : ${}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}AX = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}AX) = {}^{\mathrm{t}}XAX$,

donc : ${}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}XAX$.

Enfin, $\mathrm{tr}\,(S) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}A)\right) = \mathrm{tr}(A)$.

4.5.5

D'après le **théorème fondamental**, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

On a alors : $A = \Omega(D + \mathrm{i}\mathrm{I}_n)\Omega^{-1}$.

En notant $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$:

$$\det(D + \mathrm{i}\mathrm{I}_n) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mathrm{i}) \neq 0,$$

car : $\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $D + \mathrm{i}\mathrm{I}_n \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, puis $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 2+\mathrm{i} & 0 & 3 \\ 4 & 0 & \mathrm{i} & 7 \\ -5 & 3 & 7 & 3+\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{R})$.

4.5.6

1) Soit (X, Y) convenant.

Alors X et Y sont inversibles et :

$$Y = ({}^{\mathrm{t}}X)^{-1}X^{-1} = (X\,{}^{\mathrm{t}}X)^{-1} \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}),$$

et de même : $X \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

On a alors $\begin{cases} XYX = \mathrm{I}_n \\ YXY = \mathrm{I}_n \end{cases}$, d'où $\begin{cases} (XY)^2 = (XYX)Y = Y \\ (XY)^2 = X(YXY) = X \end{cases}$,

et donc $X^3 = XYX = \mathrm{I}_n$.

D'après le **théorème fondamental**, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$$

telles que $X = \Omega D \Omega^{-1}$.

On a :

$$\begin{aligned} X^3 = \mathrm{I}_n &\Longrightarrow D^3 = \mathrm{I}_n \Longrightarrow (\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \lambda_k^3 = 1) \\ &\Longrightarrow (\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \lambda_k = 1) \Longrightarrow D = \mathrm{I}_n \\ &\Longrightarrow X = \mathrm{I}_n, \end{aligned}$$

donc $X = Y = \mathrm{I}_n$.

2) Réciproque triviale.

Réponse : $\{(\mathrm{I}_n, \mathrm{I}_n)\}$.

4.5.7

a) D'après le **théorème fondamental**, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$$

telles que $S = \Omega D \Omega^{-1}$. Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

${}^{\mathrm{t}}XX = 1$; notons $Y = \Omega^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On a :

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{t}}YY = {}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}\Omega^{-1}\Omega^{-1}X = {}^{\mathrm{t}}X\Omega\Omega^{-1}X = {}^{\mathrm{t}}XX = 1 \\ {}^{\mathrm{t}}YDY = {}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}\Omega^{-1}D\Omega^{-1}X = {}^{\mathrm{t}}X\Omega D\Omega^{-1}X = {}^{\mathrm{t}}XSX. \end{cases}$$

D'autre part : ${}^{\mathrm{t}}YDY = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$,

d'où, en notant $\alpha = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Min}}\ \lambda_i$ et $\beta = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}}\ \lambda_i$:

$$\alpha = \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant {}^{\mathrm{t}}YDY \leqslant \beta \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \beta.$$

b) Notons $\Sigma = \{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}); {}^{\mathrm{t}}XX = 1\}$, $\phi : \begin{array}{l} S \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longmapsto {}^{\mathrm{t}}XSX \end{array}$.

D'après *a)*, ϕ est bornée et, avec les notations de la solution de *a)* : $\forall X \in \Sigma, \quad \alpha \leqslant \phi(X) \leqslant \beta$.

En gardant les notations de la solution de *a)*, supposons, par exemple, $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, et notons $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_n = \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$X_1 = \Omega Y_1$, $X_n = \Omega Y_n$.

On a : $X_1 \in \Sigma$, $X_n \in \Sigma$, $\phi(X_1) = {}^{\mathrm{t}}Y_1 D Y_1 = \lambda_1$, $\phi(X_n) = {}^{\mathrm{t}}Y_n D Y_n = \lambda_n$.

Ceci montre que ϕ atteint ses bornes inférieure et supérieure en (au moins) X_1 et X_n respectivement.

4.5.8

• D'après le **théorème fondamental**, A étant symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les vp de A, rangées de façon que :

$$\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n.$$

• Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$. On a :

$$AX = \lambda X$$

$$\iff \left(\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \left(\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} x_j\right) + d_i x_i = \lambda x_i\right)$$

$$\iff \left(\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \sum_{j=1}^{n} x_j = (\lambda + 1 - d_i) x_i\right).$$

Remarquons d'abord que les $d_i - 1 \ (1 \leqslant i \leqslant n)$ ne sont pas vp de A. En effet, si $\lambda = d_i - 1$, alors $\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$, d'où, pour tout k de $\{1,\ldots,n\} - \{i\}$, $(\lambda + 1 - d_k)x_k = 0$,

donc $x_k = 0$ (car $d_1, \ldots, d_n$ sont deux à deux distincts).

Mais alors $x_i = -\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} x_k = 0$, d'où $X = 0$, exclu.

Nous pouvons donc supposer :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \quad \lambda + 1 - d_i \neq 0.$$

En notant $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$, on a $s \neq 0$. En effet, si $s = 0$, alors $(\forall i \in \{1,\ldots,n\}, (\lambda + 1 - d_i)x_i = 0)$, donc $X = 0$, exclu.

Ainsi :

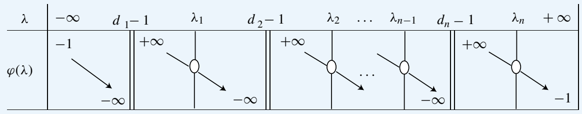
$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} s = \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \quad x_i = \dfrac{s}{\lambda + 1 - d_i} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda + 1 - d_i} = 1 \\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \quad x_i = \dfrac{s}{\lambda + 1 - d_i}. \end{cases}$$

Notons φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(\lambda) = -1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda + 1 - d_i}.$$

Calculer φ' et en déduire les variations de φ :



On a donc :

$$d_1 - 1 < \lambda_1 < d_2 - 1 < \ldots < \lambda_{n-1} < d_n - 1 < \lambda_n.$$

• $\left\{\begin{array}{l} d_1 - 1 < \lambda_1 \\ \quad\vdots \\ d_{n-1} - 1 < \lambda_{n-1} \end{array}\right| \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-1}(d_i - 1) < \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$

$\iff \left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right) - d_n - (n-1) < \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) - \lambda_n$

$\iff \mathrm{tr}(A) - d_n - (n-1) < \mathrm{tr}(A) - \lambda_n$

$\iff \lambda_n < d_n + (n-1)$.

4.5.9

a) Il est clair que $\psi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(x,y) = \phi(a)\phi(b)\varphi(x,y) - \frac{1}{2}\varphi(a,b)(\varphi(a,x)\varphi(b,y) + \varphi(b,x)\varphi(a,y))$$

est une fbs sur $E \times E$, et que Ψ est la fq associée à ψ.

b) • D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour φ, on a, pour tout x de E :

$$\varphi(a,b)^2 \leqslant \phi(a)\phi(b), \qquad (\varphi(a,x))^2 \leqslant \phi(a)\phi(x),$$
$$(\varphi(b,x))^2 \leqslant \phi(b)\phi(x),$$

d'où, par multiplication et puisque ϕ est positive :

$$\varphi(a,b)\varphi(a,x)\varphi(b,x) \leqslant \phi(a)\phi(b)\phi(x).$$

Ainsi, Ψ est une fq positive.

• Soit $x \in E$ tel que $\Psi(x) = 0$.

Supposons $\phi(x) > 0$. D'après les inégalités précédentes et puisque $\phi(a) > 0$, $\phi(b) > 0$, $\phi(x) > 0$, on déduit $|\varphi(a,b)| = \phi(a)\phi(b)$, ce qui contredit la liberté de (a,b) (cf. 4.2.1 Prop. 1 p. 138).

4.5.10

a) 1) Supposons ϕ positive. Comme $\phi \neq 0$, il existe $a \in E$ tel que $\phi(a) \neq 0$, donc tel que $\phi(a) > 0$. Puisque :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(ta) = t^2\phi(a),$$

il en résulte $\phi(\mathbb{R}a) = \mathbb{R}_+$ et donc $\phi(E) = \mathbb{R}_+$.

2) Réciproquement, si $\phi(E) = \mathbb{R}_+$, alors $\phi(E) \subset \mathbb{R}_+$, donc ϕ est positive.

b) Même raisonnement qu'en *a)*, ou bien appliquer *a)* à $-\phi$.

c) 1) Supposons ϕ ni positive ni négative. Il existe $a,b \in E$ tels que $\phi(a) < 0$ et $\phi(b) > 0$. Comme ci-dessus, puisque $\phi(a) < 0$, on a $\phi(\mathbb{R}a) = \mathbb{R}_-$, et, puisque $\phi(b) > 0$, on a $\phi(\mathbb{R}b) = \mathbb{R}_+$. Puis :

$$\phi(E) \supset \phi(\mathbb{R}a) \cup \phi(\mathbb{R}b) = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}$$

et donc $\phi(E) = \mathbb{R}$.

2) Réciproquement, si $\phi(E) = \mathbb{R}$, alors il existe $(a,b) \in E^2$ tels que $\phi(a) < 0$ et $\phi(b) > 0$, donc ϕ n'est ni positive ni négative.

4.5.11

• $\begin{cases} A_1 \leqslant B_1 \\ A_2 \leqslant B_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_1 - A_1 \in \mathbf{S}_n^+ \\ B_2 - A_2 \in \mathbf{S}_n^+ \end{cases}$

$\Longrightarrow (B_1 + B_2) - (A_1 + A_2)$

$$= (B_1 - A_1) + (B_2 - A_2) \in \mathbf{S}_n^+$$

$\Longrightarrow A_1 + A_2 \leqslant B_1 + B_2$, cf. 4.5.3 Rem. *1)* 3) p. 171.

• Idem avec 4.5.3 Rem. *1)* 4).

4.5.12

a) • $\forall k \in \{1,\ldots,p\},\ S_k^2 \in \mathbf{S}_n^+$, cf. 4.5.3 Rem. *1)* 5) p. 171

• $\sum_{k=1}^{p} S_k^2 \in \mathbf{S}_n^+$, cf. 4.5.3 Rem. *1)* 3).

b) $\Longleftarrow$: trivial

$\Longrightarrow$:

$S = 0$

$$\Longrightarrow \left(\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \begin{cases} \forall k \in \{1,\ldots,p\},\ {}^tX S_k^2 X \geqslant 0 \\ \sum_{k=1}^{p} {}^tX S_k^2 X = {}^tX S X = 0 \end{cases} \right)$$

$\Longrightarrow \left(\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall k \in \{1,\ldots,p\},\ {}^tX S_k^2 X = 0\right)$

$\Longleftrightarrow (\forall k \in \{1,\ldots,p\}, \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ||S_k X|| = 0)$

$\Longrightarrow (\forall k \in \{1,\ldots,p\},\ S_k = 0)$.

4.5.13

a) ${}^t({}^tASA) = {}^tA\,{}^tS\,{}^{tt}A = {}^tASA$.

b) $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX({}^tASA)X = {}^t(AX)S(AX) \geqslant 0$

c) $\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \Big({}^tX({}^tASA)X = 0$

$$\Longleftrightarrow {}^t(AX)S(AX) = 0 \Longrightarrow AX = 0 \Longrightarrow X = 0\Big).$$

4.5.14

• ${}^t(AB + BA) = {}^tB\,{}^tA + {}^tA\,{}^tB = BA + AB = AB + BA$

• $A^2 + B^2 - (AB + BA) = (A - B)^2 \in \mathbf{S}_n^+$,

cf. 4.5.3 Rem. *1)* 5) p. 171.

4.5.15

Examiner l'exemple :

$n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dans lequel

$A \in \mathbf{S}_2^+,\ B \in \mathbf{S}_2^+$, mais $AB + BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathbf{S}_2^+$, car $\det(AB + BA) = -1 < 0$, ou encore,

avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, ${}^tX(AB + BA)X = -2 < 0$.

Réponse : • oui, si $n = 1$

• non, si $n \geqslant 2$.

4.5.16

Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(A + B)X = 0$.

On a : ${}^tXA = {}^t(AX) = -{}^t(BX) = {}^tXB$,

puis $\begin{cases} {}^tXAX = {}^tX(AX) = -{}^tXBX \\ {}^tXAX = ({}^tXA)X = {}^tXBX \end{cases}$, donc ${}^tXAX = 0$.

Comme $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, on déduit $X = 0$.

Ceci montre : $A + B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

4.5.17

a) ${}^tAA \in \mathbf{S}_p(\mathbb{R})$ et : $\forall X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tX({}^tAA)X = {}^t(AX)(AX) = ||AX||^2 \geqslant 0.$$

b) D'après l'ex. 4.2.5, $\mathrm{rg}\,({}^tAA) = \mathrm{rg}\,(A)$, d'où :

$${}^tAA \in \mathbf{S}_p^{++} \Longleftrightarrow \mathrm{rg}\,({}^tAA) = p \Longleftrightarrow \mathrm{rg}\,(A) = p.$$

4.5.18

Soient $X_k \in \mathbf{M}_{n_k,1}(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$,

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ décomposée en blocs.

On a alors : ${}^tXSX = \sum_{k=1}^{N} {}^tX_k S_k X_k$.

a) $S \in \mathbf{S}_n^+ \Longleftrightarrow \left(\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0\right)$

$$\Longleftrightarrow \left(\forall (X_1,\ldots,X_N) \in \prod_{k=1}^{N} \mathbf{M}_{n_k,1}(\mathbb{R}),\ \sum_{k=1}^{N} {}^tX_k S_k X_k \geqslant 0\right)$$

$\Longleftrightarrow \left(\forall k \in \{1,\ldots,N\},\ \forall X_k \in \mathbf{M}_{n_k,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX_k S_k X_k \geqslant 0\right)$

$\Longleftrightarrow (\forall k \in \{1,\ldots,N\},\ S_k \in \mathbf{S}_n^+)$.

b) Même méthode qu'en *a)*.

4.5.19

En notant $P = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ -B^{-1}\,{}^tU & \mathrm{I}_q \end{pmatrix}$, on a $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$,

$${}^tP = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & -UB^{-1} \\ 0 & \mathrm{I}_q \end{pmatrix},$$

et $${}^tPSP = \begin{pmatrix} A - UB^{-1}\,{}^tU & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

a) On déduit de l'ex. 4.5.18 :

$$\begin{aligned}
S \in \mathbf{S}^+_{p+q} &\iff \begin{pmatrix} A - UB^{-1}\,{}^tU & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathbf{S}^+_{p+q} \\
&\iff \begin{cases} A - UB^{-1}\,{}^tU \in \mathbf{S}^+_p \\ B \in \mathbf{S}^+_q \end{cases} \\
&\iff A - UB^{-1}\,{}^tU \in \mathbf{S}^+_p.
\end{aligned}$$

b) Même méthode.

4.5.20

a) L'application $f : \underset{A \longmapsto {}^tA - A}{\mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R})}$ est continue, $\{0\}$ est fermé dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0\})$; donc $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbf{S}^+_n$, convergeant vers un élément A de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

• D'après *a)*, comme $\mathbf{S}^+_n \subset \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, on a déjà : $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

• Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a : $\forall k \in \mathbb{N},\ {}^tXA_kX \geqslant 0$.

Comme $A_k \xrightarrow[k\infty]{} A$, on déduit :

$${}^tXA_kX \xrightarrow[k\infty]{} {}^tXAX.$$

Par passage à la limite dans les inégalités, on obtient : ${}^tXAX \geqslant 0$, et donc $A \in \mathbf{S}^+_n$.

Ceci montre que $\mathbf{S}^+_n$ est fermé dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Enfin, $\mathbf{S}^+_n = \mathbf{S}^+_n \cap \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, donc $\mathbf{S}^+_n$ est aussi fermé dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

4.5.21

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $SX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Par hypothèse : $\begin{cases} \forall k \in \{1,\ldots,n\}, \quad x_k \leqslant 0 \\ \forall k \in \{1,\ldots,n\}, \quad y_k \geqslant 0 \\ {}^tXSX = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqslant 0 \end{cases}$,

d'où ${}^tXSX = 0$, puis $X = 0$ (car $S \in \mathbf{S}^{++}_n$).

4.5.22

Former le polynôme caractéristique :

$$\chi_C(\lambda) = (1-\lambda)^3 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - (1-\lambda)M,$$

où $M = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$.

Étudier les variations de χ_C :

λ	$-\infty$	0	$1-\sqrt{\frac{M}{3}}$		$1+\sqrt{\frac{M}{3}}$		$+\infty$
$\chi_C(\lambda)$	$+\infty$ $\searrow$	δ	$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Comme $\chi_C(0) = \delta > 0$, χ_C n'admet aucun zéro dans $]-\infty; 0]$. D'autre part, d'après le théorème fondamental, χ_C est scindé sur $\mathbb{R}$. Ainsi, les vp de C sont toutes > 0 et donc (4.5.3 Th. p. 172) : $C \in \mathbf{S}^{++}_3$.

4.5.23

Examiner l'exemple

$$n = 2,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pour lequel $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui n'est pas diagonalisable.

Réponse : • oui, si $n = 1$
• non, si $n \geqslant 2$.

4.5.24

D'après le **théorème fondamental**, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$$

telles que $A = \Omega D \Omega^{-1}$.

a) $\phi \geqslant 0 \iff A \in \mathbf{S}^+_n \iff (\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \lambda_i \geqslant 0)$

$$\implies \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \geqslant 0.$$

b) $\phi > 0 \iff A \in \mathbf{S}^{++}_n \iff (\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \lambda_i > 0)$

$$\implies \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0.$$

4.5.25

D'après le **théorème fondamental**, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$$

telles que $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

En notant $R = \Omega \begin{pmatrix} \sqrt[p]{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt[p]{\lambda_n} \end{pmatrix} \Omega^{-1}$, on a :

$$R \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad R^p = \Omega D \Omega^{-1} = S.$$

De plus, $R \in \mathbf{S}^+_n$ si $S \in \mathbf{S}^+_n$, car alors :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \lambda_i \geqslant 0.$$

4.5.26

a) On a ${}^tAA \in \mathbf{S}^+_n$, donc (4.5.3 Th. p. 172) :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\quad \mu_i \geqslant 0.$$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \mathrm{tr}\,({}^tAA) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right).$

4.5.27

Soit $(S, S') \in (\mathbf{S}^+_n)^2$.

D'après le **théorème fondamental**, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

Notons $B = \Omega^{-1} S' \Omega$. On a alors :

$$S = \Omega D \Omega^{-1}, \quad S' = \Omega B \Omega^{-1}, \quad SS' = \Omega D B \Omega^{-1},$$

d'où :

$$\operatorname{tr}(SS') = \operatorname{tr}(DB) \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(S)\operatorname{tr}(S') = \operatorname{tr}(D)\operatorname{tr}(B).$$

Autrement dit, on a reporté le problème sur le couple (D,B) au lieu de (S,S'), où D est diagonale.

Notons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $B = (b_{ij})_{ij}$.

Comme $S \in \mathbf{S}_n^+$, on a : $\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \lambda_i \geqslant 0$.

D'autre part, $B \in \mathbf{S}_n^+$ car : $B = \Omega^{-1} S' \Omega$, $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $S' \in \mathbf{S}_n^+$. En particulier, en notant $(\mathrm{E}_1,\ldots,\mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ b_{ii} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{E}_i B \mathrm{E}_i \geqslant 0.$$

a) Il est clair (par développement, par exemple) que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ii} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_{ii}\Big),$$

d'où : $\operatorname{tr}(SS') = \operatorname{tr}(DB) \leqslant \operatorname{tr}(D)\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(S)\operatorname{tr}(S')$.

b) Si $(S,S') \in (\mathbf{S}_n^{++})^2$, alors :
$\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, $(\lambda_i > 0$ et $b_{ii} > 0)$, d'où (si $n \geqslant 2$) :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ii} < \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_{ii}\Big),$$

et donc : $\operatorname{tr}(SS') < \operatorname{tr}(S)\operatorname{tr}(S')$.

4.5.28

Soit $(A,B) \in \big(\mathbf{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$. On a :

$$||AB||^2 = \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}(AB)AB) = \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}B({}^{\mathrm{t}}AAB)) = \operatorname{tr}(({}^{\mathrm{t}}AA)(B\,{}^{\mathrm{t}}B)).$$

D'après l'ex. 4.5.27 *a)*, comme ${}^{\mathrm{t}}AA \in \mathbf{S}_n^+$ et $B\,{}^{\mathrm{t}}B \in \mathbf{S}_n^+$, on a :

$$\operatorname{tr}(({}^{\mathrm{t}}AA)(B\,{}^{\mathrm{t}}B)) \leqslant \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}AA)\operatorname{tr}(B\,{}^{\mathrm{t}}B) = \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}AA)\operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}BB) = ||A||^2||B||^2.$$

Remarque : En particulier :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ ||A^k|| \leqslant ||A||^k,$$

et donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ ||A^k||^{1/k} \leqslant ||A||.$$

4.5.29

1) Pour $p = 2$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique $<\cdot,\cdot>$ sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$|\operatorname{tr}(A_1A_2)| = |<{}^{\mathrm{t}}A_1, A_2>| \leqslant ||{}^{\mathrm{t}}A_1||\ ||A_2|| = ||A_1||\ ||A_2||.$$

2) Soit $p \geqslant 3$. D'après le cas $p = 2$:

$$\left|\operatorname{tr}\Big(\prod_{i=1}^{p} A_i\Big)\right| \leqslant \left\|\prod_{i=1}^{p-1} A_i\right\|\ ||A_p||.$$

D'autre part, d'après l'exercice 4.5.29 et une récurrence immédiate : $\left\|\prod_{i=1}^{p-1} A_i\right\| \leqslant \prod_{i=1}^{p-1} ||A_i||$.

D'où : $\left|\operatorname{tr}\Big(\prod_{i=1}^{p} A_i\Big)\right| \leqslant \prod_{i=1}^{p} ||A_i||$.

4.5.30

Il suffit d'appliquer l'ex. 4.5.7 à $S = {}^{\mathrm{t}}AA \in \mathbf{S}_n^+$, en remarquant :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad {}^{\mathrm{t}}XSX = ||AX||^2.$$

4.5.31

1) Supposons $A \in \mathbf{S}_n^{++}$. Notons $\mathcal{B} = (\mathrm{E}_1,\ldots,\mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ϕ la fq de matrice A dans $\mathcal{B}$, et, pour chaque i de $\{1,\ldots,n\}$, ϕ_i la fq sur $\mathrm{Vect}(\mathrm{E}_1,\ldots,\mathrm{E}_i)$ de matrice $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ \vdots & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i \end{pmatrix}$ dans la base $(\mathrm{E}_i,\ldots,\mathrm{E}_i)$.

Chaque ϕ_i est définie-positive, donc (ex. 4.5.25) :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\quad \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ \vdots & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i \end{vmatrix} > 0.$$

Mais, par $L_k \longleftarrow L_k - L_{k-1}$ $(2 \leqslant k \leqslant i)$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ \vdots & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ & a_2 - a_1 & \cdots & a_2 - a_1 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_i - a_{i-1} \end{vmatrix}$$
$$= a_1(a_2 - a_1)\ldots(a_i - a_{i-1}).$$

D'où :

$$a_1 > 0,\ a_1(a_2 - a_1) > 0, \ldots,\ a_1(a_2 - a_1)\ldots(a_n - a_{n-1}) > 0,$$

et donc : $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

2) Réciproquement, supposons $0 < a_1 < \ldots < a_n$.

Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ (à choisir ultérieurement)

et $T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_1 \\ & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{R})$.

On a :

$$
{}^{\mathrm{t}}TT = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^2 \\ \alpha_1^2 & \alpha_1^2+\alpha_2^2 & \cdots & \alpha_1^2+\alpha_2^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^2 & \alpha_1^2+\alpha_2^2 & \ldots & \alpha_1^2 \ldots + \alpha_n^2 \end{pmatrix}.
$$

En choisissant $\alpha_1 = \sqrt{a_1} > 0$, $\alpha_2 = \sqrt{a_2 - a_1} > 0$, $\ldots$, $\alpha_n = \sqrt{a_n - a_{n-1}} > 0$, on a : $T \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A = {}^{\mathrm{t}}TT$, d'où : $A \in \mathbf{S}_n^{++}$.

4.5.32

Remarquer d'abord : $A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

D'après § 2.7.2 Exemple :

$$
\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & & b \\ & \ddots & \\ b & & a-\lambda \end{vmatrix}
$$

$$
= \big(a - \lambda + (n-1)b\big)(a - \lambda - b)^{n-1}.
$$

D'après 4.5.3 Th. p. 172 :

• $A \in \mathbf{S}_n^+ \iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_+ \iff \begin{cases} a + (n-1)b \geqslant 0 \\ a - b \geqslant 0 \end{cases}$

• $A \in \mathbf{S}_n^{++} \iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_+^* \iff \begin{cases} a + (n-1)b > 0 \\ a - b > 0. \end{cases}$

Réponse : • $A \in \mathbf{S}_n^+ \iff a \geqslant \mathrm{Max}\big(b, (1-n)b\big)$

• $A \in \mathbf{S}_n^{++} \iff a > \mathrm{Max}\big(b, (1-n)b\big)$.

4.5.33

Remarquer d'abord : $S \in \mathbf{S}_{n+1}(\mathbb{R})$.

• En notant P_{n+1} le polynôme caractéristique de S, et en développant par rapport à la $(n+1)^{\text{ème}}$ ligne :

$$
P_{n+1}(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & x_1 & \ldots & x_n \\ x_1 & \beta-\lambda & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ x_n & 0 & & \beta-\lambda \end{vmatrix}_{[n+1]}
$$

$$
= (\beta-\lambda)P_n(\lambda) + (-1)^n x_n \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \beta-\lambda & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \beta-\lambda & 0 \end{vmatrix}_{[n]}
$$

$$
= (\beta-\lambda)P_n(\lambda) - (\beta-\lambda)^{n-1}x_n^2.
$$

En déduire :

$$
\chi_S(\lambda) = (\beta-\lambda)^{n-1}T_n(\lambda),
$$

où T_n est le trinôme défini par

$$
T_n(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \left(\alpha\beta - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).
$$

Le discriminant de T est $(\alpha-\beta)^2 + 4\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$, et les zéros de T sont > 0 si et seulement si leur somme et leur produit sont > 0, c'est-à-dire : $\alpha + \beta > 0$ et $\alpha\beta - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 > 0$.

Appliquer enfin 4.5.3 Th. p. 172.

Réponse : $\beta > 0$ et $\alpha > \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

4.5.34

D'après l'ex. 3.3.7, les vp de S sont :

$$
\lambda_p = a + 2b\cos\frac{p\pi}{n+1}, \quad 1 \leqslant p \leqslant n.
$$

Alors (cf. 4.5.3 Th. p. 172) :

$$
S \in \mathbf{S}_n^+ \iff \left(\forall p \in \{1, \ldots, n\},\quad 2b\cos\frac{p\pi}{n+1} \geqslant -a\right)
$$

$$
\iff -2|b|\cos\frac{\pi}{n+1} \geqslant -a,
$$

et démarche analogue pour $\mathbf{S}_n^{++}$.

Réponse : • $S \in \mathbf{S}_n^+ \iff 2|b|\cos\dfrac{\pi}{n+1} \leqslant a$

• $S \in \mathbf{S}_n^{++} \iff 2|b|\cos\dfrac{\pi}{n+1} < a$.

4.5.35

$\Longrightarrow$: évident.

$\Longleftarrow$:

Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $AS^k = S^kA$.

D'après le **théorème fondamental**, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$$
D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})
$$

telles que $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

De plus, puisque $S \in \mathbf{S}_n^+$: $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \lambda_i \geqslant 0$.

On a alors : $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ (\lambda_i^k = \lambda_j^k \Longrightarrow \lambda_i = \lambda_j)$.

Donc (interpolation de Lagrange sur les λ_i^k deux à deux distincts), il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$
\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lambda_i = P(\lambda_i^k).
$$

Alors $D = P(D^k)$, puis $S = P(S^k)$. Comme S^k commute avec A et que S est un polynôme en S^k, on conclut que S commute avec A.

4.5.36

a) Il est clair que $f \in \mathcal{L}(E)$. De plus :

• $\forall (x,y) \in E^2$, $(f(x)|y) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(e_i|x)e_i \,\middle|\, y\right)$

$$
= \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)(e_i|y) = \left(x \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}(e_i|y)e_i\right) = (x|f(y))
$$

• $\forall x \in E,\ \Big(x|f(x)\Big) = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2 \geqslant 0$

• Pour tout x de E :

$$\begin{aligned}(x|f(x)) = 0 &\iff \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2 = 0\\ &\iff (\forall i \in \{1,\dots,n\},\ (x|e_i) = 0)\\ &\iff x \in \{e_1,\dots,e_n\}^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}\\ &\iff x = 0.\end{aligned}$$

Finalement, f est symétrique défini-positif.

b) Soit $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E ; notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

D'après *a)*, $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, donc A^{-1} existe et $A^{-1} \in \mathbf{S}_n^{++}$; ceci montre que f^{-1} existe et est symétrique défini-positif.

D'après l'ex. 4.5.26, il existe $R \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que $R^2 = A^{-1}$. En notant u l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R$, il est clair que u est symétrique défini-positif et $u \circ u = f^{-1}$.

c) Notons, pour $i \in \{1,\dots,n\}$, $v_i = f^{-1}(e_i)$.

On a :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\quad e_i = f(v_i) = \sum_{j=1}^{n}(e_j|v_i)e_j.$$

Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est libre, il en résulte :

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ (e_j|v_i) = \delta_{ij}$$

(symbole de Kronecker).

Puis, pour tout (i,j) de $\{1,\dots,n\}^2$:

$$\begin{aligned}(u(e_i)|u(e_j)) = (u\circ u(e_i)|e_j) &= (f^{-1}(e_i)|e_j)\\ &= (v_i|e_j) = \delta_{ij},\end{aligned}$$

donc $(u(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une b.o.n. de E.

4.5.37

a) D'après l'ex. 4.5.26, il existe $R \in \mathbf{S}_n^{+}$ telle que $R^2 = A$. Alors (cf. ex. 3.1.14) :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(R(RB)) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(RBR).$$

Mais $RBR \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(RBR) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(RBR) \subset \mathbb{R}$.

b) Comme en *a)*, avec de plus $RBR \in \mathbf{S}_n^{+}$, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(RBR) \subset \mathbb{R}_+$.

c) Il existe $R \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que $R^2 = A$, d'où :

$$AB = R^2B = R(RBR)R^{-1} \sim RBR.$$

Comme $RBR \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, RBR est diagonalisable (dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$), et donc AB, qui lui est semblable, l'est aussi.

d) **Réponse :** $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

4.5.38

a) • $\mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{S}_n^{+}$ et $\mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ (car $\forall S \in \mathbf{S}_n^{++}$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$), donc $\mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{S}_n^{+} \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

• Soit $S \in \mathbf{S}_n^{+} \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+$ et $0 \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$, d'où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$, et donc $S \in \mathbf{S}_n^{++}$.

b) $\mathbf{S}_n^{++} = \mathbf{S}_n^{+} \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert (dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, cf. Analyse PC-PSI-PT, ex. 1.3.2, donc $\mathbf{S}_n^{++}$ est ouvert dans $\mathbf{S}_n^{+}$.

c) Soit $S \in \mathbf{S}_n^{+}$. On a : $\begin{cases}\forall p \in \mathbb{N}^*, & S + \dfrac{1}{p}\,\mathrm{I}_n \in \mathbf{S}_n^{++}\\ S + \dfrac{1}{p}\mathrm{I}_n \xrightarrow[p\infty]{} S\end{cases}$.

Ceci montre que $\mathbf{S}_n^{++}$ est dense dans $\mathbf{S}_n^{+}$.

4.5.39

$\alpha)$ D'après 4.5.3 Th. p. 172, et le **théorème fondamental**, comme $B - A \in \mathbf{S}_n^{+}$, on a $\mathrm{tr}(B-A) \geqslant 0$, donc $\mathrm{tr}(A) \leqslant \mathrm{tr}(B)$.

$\beta)$ 1) Si $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, d'après le théorème de réduction simultanée (4.5.2 Th. p. 169), il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$,

$D = \begin{pmatrix}d_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n\end{pmatrix} \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = {}^{\mathrm{t}}PP \quad\text{et}\quad B = {}^{\mathrm{t}}PDP.$$

Puisque $B - A \in \mathbf{S}_n^{+}$ et $B - A = {}^{\mathrm{t}}P(D - \mathrm{I}_n)P$,

on déduit $D - \mathrm{I}_n \in \mathbf{S}_n^{+}$, d'où : $\forall i \in \{1,\dots,n\},\ d_i \geqslant 1$.

Puis : $\det(D) = \prod_{i=1}^{n} d_i \geqslant 1$,

donc :

$$\det(B) = (\det(P))^2\det(D) \geqslant (\det(P))^2 = \det(A).$$

2) Si $A \in \mathbf{S}_n^{+} - \mathbf{S}_n^{++}$, alors $\det(A) = 0$ et, comme $B \geqslant A \geqslant 0$, $B \in \mathbf{S}_n^{+}$ donc $\det(B) \geqslant 0$ (cf. ex. 4.5.25), et finalement : $\det(A) \leqslant \det(B)$.

4.5.40

Puisque $(A,B) \in \mathbf{S}_n^{++} \times \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le **théorème de réduction simultanée** (4.5.3 Th. p. 169), il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$,

$D = \begin{pmatrix}d_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n\end{pmatrix} \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = {}^{\mathrm{t}}PP$ et $B = {}^{\mathrm{t}}PDP$.

On a :

$$\begin{aligned}A \leqslant B \iff B - A \in \mathbf{S}_n^{+} &\iff D - \mathrm{I}_n \in \mathbf{S}_n^{+}\\ &\iff (\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \lambda_i \geqslant 1).\end{aligned}$$

Et, comme

$$A^{-1} = P^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}(P^{-1}) \quad\text{et}\quad B^{-1} = P^{-1}D^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}(P^{-1}),$$

on a aussi :

$$B^{-1} \leqslant A^{-1} \iff \left(\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \frac{1}{\lambda_i} \leqslant 1\right).$$

Enfin : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \left(\lambda \geqslant 1 \Longrightarrow \frac{1}{\lambda} \leqslant 1\right).$

4.5.41

D'après le **théorème de réduction simultanée** (4.5.3 Th. p. 169), il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$$

telles que : $A = {}^{t}PP$ et $B = {}^{t}PDP$.

Alors :

- $\det(A) = (\det(P))^2$
- $|\det(A + \mathrm{i}B)| = |\det({}^{t}P(\mathrm{I}_n + \mathrm{i}D)P)|$

$$= (\det(P))^2 |\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{i}D)|$$

- $|\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{i}D)| = \left|\prod_{k=1}^{n}(1 + \mathrm{i}d_k)\right| = \prod_{k=1}^{n}\sqrt{1 + d_k^2} \geqslant 1,$

d'où : $\det(A) \leqslant |\det(A + \mathrm{i}B)|$.

Cas d'égalité :

$$\det(A) = |\det(A + \mathrm{i}B)| \iff \prod_{k=1}^{n}(1 + d_k^2) = 1$$

$$\iff (\forall k \in \{1,\ldots,n\},\ d_k = 0).$$

Réponse : $\det(A) = |\det(A + \mathrm{i}B)| \iff B = 0$.

4.5.42

Puisque A est symétrique réelle, d'après le **théorème fondamental** (4.5.1 Th. p. 164) il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$,

$D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = \Omega D \Omega^{-1}$.

On déduit :

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \mathrm{tr}\,(D) = \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}\,({}^{t}MM - M{}^{t}M)$$

$$= \mathrm{tr}\,({}^{t}MM) - \mathrm{tr}(M{}^{t}M) = 0.$$

D'autre part $A \in \mathbf{S}_n^{+}$, donc : $\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \lambda_i \geqslant 0$.

On déduit : $\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \lambda_i = 0$,

d'où $D = 0$, puis $A = 0$.

4.5.43

D'après 3.4 Cor. p. 100, f est trigonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, donc $\det(f) = \prod_{k=1}^{n}\lambda_k$, où $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont les vp de f (non nécessairement distinctes) dans $\mathbb{C}$. De plus, les vp complexes non réelles de f sont deux à deux conjuguées, donc $\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \lambda_k \notin \mathbb{R}}}\lambda_k$ est un réel > 0.

D'autre part, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1,1\}$ (cf. 4.3.2 Prop. 10 p. 155).

Comme $\det(f) = -1$, il en résulte que l'ordre de multiplicité de la vp -1 de f est impair ; en particulier, cet ordre est non nul, donc $-1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

4.5.44

Formons les polynômes caractéristiques :

- $$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{1n} & & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$+(-\lambda)^{n-2}\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{vmatrix} + \ldots$$

- $$\chi_D(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$+(-\lambda)^{n-2}\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ii}a_{jj} + \ldots$$

Supposons $A \sim D$. Alors $\chi_A = \chi_D$, et en particulier :

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ii}a_{jj},$$

d'où : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}^2 = 0$,

donc : $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ (i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0)$,

et finalement : $A = D$.

4.5.45

Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, \quad ({}^{t}XA_k^2X \geqslant 0,\ {}^{t}XB_k^2X \geqslant 0) \\ {}^{t}XA_k^2X + {}^{t}XB_k^2X = {}^{t}X\left(A_k^2 + B_k^2\right)X \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

on déduit : ${}^{t}XA_k^2X \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$ (et ${}^{t}XB_k^2X \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$).

Mais : $\forall k \in \mathbb{N},\ {}^{t}XA_k^2X = ||A_kX||^2$ (où $||.||$ est la norme euclidienne canonique) ; on en déduit : $A_kX \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme $(\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ A_kX \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0)$, il est alors clair que : $A_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$ (et de même $B_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$), en remplaçant X successivement par les vecteurs de la base canonique, par exemple.

Remarque :

On peut montrer de façon analogue le « Théorème d'encadrement » suivant :

Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ trois suites dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, et $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

Si $\left\{\begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N},\ A_k \leqslant B_k \leqslant C_k \\ A_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} S \text{ et } C_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} S \end{array}\right|$, alors $B_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} S$.

4.5.46

a) $\begin{cases} \mathrm{I}_n \in \mathbf{S}_n^{++} \\ A_k^2 \in \mathbf{S}_n^{+} \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{I}_n + A_k^2 \in \mathbf{S}_n^{++} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

b) On peut munir $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ d'au moins une norme d'algèbre (on dit aussi : norme multiplicative, ou : norme sous-multiplicative), c'est-à-dire d'une norme $||.||$ vérifiant :

$$\forall (A,B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2, \quad ||AB|| \leqslant ||A||\,||B||.$$

Il suffit de choisir, par exemple :

$$||\bullet|| : A = (a_{ij})_{ij} \longmapsto \frac{1}{n} \underset{1\leqslant i,j\leqslant n}{\mathrm{Max}} |a_{ij}|.$$

On a :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N},\ ||A_k|| = ||(\mathrm{I}_n + A_k^2)B_k|| \leqslant ||\mathrm{I}_n + A_k^2||\,||B_k|| \\ (\mathrm{I}_n + A_k^2)_{k\in\mathbb{N}} \text{ bornée (car } (A_k)_k \text{ l'est)} \\ B_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right. ,$$

d'où : $A_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0.$

4.5.47

Notons $F = \mathrm{Ker}(\Omega - \mathrm{I}_n)$; $F^\perp$ est stable par Ω car, si $X \in F^\perp$, alors :

$$\forall Y \in F,\ {}^t Y(\Omega X) = {}^t(\Omega Y)\Omega X = {}^t Y X = 0,$$

donc $\Omega X \in F^\perp$.

En utilisant une b.o.n. de F et une b.o.n. de $F^\perp$, il existe donc $P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $\Omega' \in \mathbf{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ (où $p = \dim(F)$) telles que : $\Omega = P\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & \Omega' \end{pmatrix} P^{-1}$.

Puisque Ω et P sont orthogonales, il est clair que Ω' l'est aussi. De plus, $\Omega' - \mathrm{I}_{n-p}$ est inversible car

$$\Omega - \mathrm{I}_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega' - \mathrm{I}_{n-p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}\,(\Omega - \mathrm{I}_n) = n - p.$$

On a : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A_k = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \Omega^i = P\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & A'_k \end{pmatrix} P^{-1}$, où $A'_k = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \Omega'^i$.

Comme $\mathrm{I}_{n-p} - \Omega'$ est inversible, on a :

$$\sum_{i=0}^{k} \Omega'^i = (\mathrm{I}_{n-p} - \Omega')^{-1}(\mathrm{I}_{n-p} - \Omega'^{k+1}).$$

D'autre part, munissons $\mathbf{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ de la norme $|||.|||$ définie par : $|||M||| = \underset{X\in\mathbf{M}_{n-p,1}(\mathbb{R})-\{0\}}{\mathrm{Sup}} \dfrac{||MX||}{||X||}$, où $||.||$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{n-p,1}(\mathbb{R})$.

On sait (cf. Analyse PC-PSI-PT, § 1.3.4 Prop.) que $|||.|||$ est multiplicative ; de plus, il est clair que :

$$\forall \Omega' \in \mathbf{O}_{n-p}(\mathbb{R}),\ |||\Omega'||| = 1.$$

D'où : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad |||\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \Omega'^i||| \leqslant 2|||(\mathrm{I}_{n-p} - \Omega')^{-1}|||.$

Ceci montre que $\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \Omega'^i\right)$ est bornée,

donc $\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \Omega'^i \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi : $A_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} P\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, notée A.

- A est un projecteur car : $A^2 = P\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = A$
- $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(\Omega - \mathrm{I}_n)$
- ${}^t A = A$ car P est orthogonale.

Réponse : $A_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} A$, où A est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(\Omega - \mathrm{I}_n)$.

4.5.48

a) α) Puisque $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, il existe $R \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que $A = R^2$ (cf. ex. 4.5.26, ou ex. 4.5.62). Alors :

$$AB = R^2 B = R(RBR)R^{-1} \sim RBR.$$

Mais $RBR \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, donc RBR est diagonalisable, et finalement AB est diagonalisable.

β) Avec les notations de α), puisque $(B,R) \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}_n^{++}$, on a $RBR \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(AB) \subset \mathbb{R}_+^* &\iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(RBR) \subset \mathbb{R}_+^* \\ &\iff RBR \in \mathbf{S}_n^{++} \iff B \in \mathbf{S}_n^{++}. \end{aligned}$$

b) (i) $\Longrightarrow$ (ii) : résulte de *a)* .

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :

Supposons M diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$, et les termes diagonaux λ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de D sont > 0.

Considérons $\Delta = \mathrm{diag}\left(\left(\sqrt{\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$, $A = P\Delta\,{}^t P$, $B = {}^t P^{-1}\Delta P^{-1}$. On a alors $A \in \mathbf{S}_n^{++}$, $B \in \mathbf{S}_n^{++}$, et :

$$\begin{aligned} AB &= P\Delta\,{}^t P\,{}^t P^{-1}\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1} \\ &= PDP^{-1} = M. \end{aligned}$$

c) Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $A,B,C,D \in \mathbf{S}_n^{++}$ telles que :

$$-\mathrm{I}_n = ABCD.$$

Notons $U = AB$, $V = CD$.

Ainsi : $-\mathrm{I}_n = UV$, donc $U \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $V = -U^{-1}$.

Mais, d'après *b)* :

$$\varnothing \neq \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(V) \subset \mathbb{R}_+^* \text{ et } \varnothing \neq \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(-U^{-1}) \subset \mathbb{R}_-^*,$$

d'où une contradiction.

4.5.49

a) α) Soient $A \in \mathbf{S}_n^{+}$, $p \in \{1,\dots,n\}$.

Notons $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ϕ la fq de matrice A dans $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_p = (e_1,\dots,e_p)$,

$E_p = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_p)$. Il est clair que A_p est la matrice dans $\mathcal{B}_p$ de la fq ϕ_p restriction de ϕ à E_p ; comme ϕ est positive, ϕ_p l'est aussi, donc $A_p \in \mathbf{S}_p^+$, d'où (cf. ex. 4.5.25) :

$$\det(A_p) \geqslant 0.$$

β) Examiner l'exemple : $n=2,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Réponse : non.

b) α) *1)* En raisonnant comme en *a)* α), on montre :

$$A \in \mathbf{S}_n^{++} \Longrightarrow \Big(\forall\, p \in \{1,\dots,n\},\ \det(A_p) > 0\Big).$$

2) Réciproquement, supposons :

$$\forall\, p \in \{1,\dots,n\},\ \det(A_p) > 0.$$

Nous allons montrer $(\forall\, p \in \{1,\dots,n\},\ A_p \in \mathbf{S}_p^{++})$ par récurrence (bornée) sur p.

Il est clair que $A_1 = (a_{11}) \in \mathbf{S}_1^{++}$.

Supposons $A_p \in \mathbf{S}_p^{++}$.

Décomposons A_{p+1} en blocs :

$$A_{p+1} = \begin{pmatrix} A_p & C_p \\ {}^{\mathrm{t}}C_p & a_{p+1\ p+1} \end{pmatrix},\ \text{où}\ \ C_p \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R}).$$

Il existe $M \in \mathbf{GL}_p(\mathbb{R})$ telle que : $A_p = {}^{\mathrm{t}}MM$ (on peut même choisir M dans $\mathbf{S}_p^{++}$; cf. ex. 4.5.26).

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ (à choisir ultérieurement), $N = \begin{pmatrix} M & C \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

On a : $A_{p+1} = {}^{\mathrm{t}}NN \Longleftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} C_p = {}^{\mathrm{t}}MC \\ a_{p+1\ p+1} = {}^{\mathrm{t}}CC + \alpha^2 \end{pmatrix} \right.$.

Choisissons $C = {}^{\mathrm{t}}M^{-1}C_p$; pour montrer l'existence de α, il suffit maintenant de prouver :

$$a_{p+1\ p+1} - {}^{\mathrm{t}}CC \geqslant 0.$$

Mais :

$$\begin{pmatrix} A_p & C_p \\ {}^{\mathrm{t}}C_p & a_{p+1\ p+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_p^{-1} & -A_p^{-1}C_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ {}^{\mathrm{t}}C_pA_p^{-1} & a_{p+1\ p+1} - {}^{\mathrm{t}}C_pA_p^{-1}C_p \end{pmatrix},$$

d'où en passant aux déterminants :

$$a_{p+1\ p+1} - {}^{\mathrm{t}}CC = a_{p+1\ p+1} - {}^{\mathrm{t}}C_pA_p^{-1}C_p = \frac{\det(A_{p+1})}{\det(A_p)} > 0.$$

Ainsi, il existe (α, C) convenant.

Il est clair qu'alors

$$N \in \mathbf{GL}_{p+1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad A_{p+1} = {}^{\mathrm{t}}NN \in \mathbf{S}_{p+1}^{++}.$$

β) L'application $f : \begin{array}{l} \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ A \longmapsto (\det(A_1),\dots,\det(A_n)) \end{array}$ est continue, $(\mathbb{R}_+^*)^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et, d'après *b)* α) :

$$\mathbf{S}_n^{++} = \{A \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R});\ \forall\, p \in \{1,\dots,n\},\quad \det(A_p) > 0\} = f^{-1}\left((\mathbb{R}_+^*)^n\right).$$

On conclut que $\mathbf{S}_n^{++}$ est un ouvert de $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

4.5.50

Notons $D = \mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$ et $r = \mathrm{rg}(D)$.

Il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que :

$$\begin{cases} \forall\, i \in \{1,\dots,r\}, & d_{\sigma(i)} \neq 0 \\ \forall\, i \in \{r+1,\dots,n\}, & d_{\sigma(i)} = 0. \end{cases}$$

Notons P la **matrice de permutation** définie par : $P = \left(\delta_{\sigma(i),j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où δ est le symbole de Kronecker.

Il est clair que P est orthogonale et :

$$PDP^{-1} = \mathrm{diag}\left((d_{\sigma(i)})_{1 \leqslant i \leqslant n}\right).$$

En notant $D' = PDP^{-1}$ et $A' = PAP^{-1}$, on a alors :

$${}^{\mathrm{t}}AA = D^2 \Longleftrightarrow {}^{\mathrm{t}}A'A' = D'^2.$$

Puis, pour toute Ω' de $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$:

$$A' = \Omega'D' \Longleftrightarrow A = P^{-1}\Omega'PD,$$

et $P^{-1}\Omega'P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

Ceci montre qu'on peut se ramener au cas $d_1,\dots,d_r$ tous $\neq 0$ et $d_{r+1},\dots,d_n$ tous nuls, ce que nous supposons maintenant.

Notons $A_1,\dots,A_n$ les colonnes de A. Puisque ${}^{\mathrm{t}}AA = D^2$, on a :

$\forall\,(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,$

$$\begin{cases} i \neq j \Longrightarrow {}^{\mathrm{t}}A_iA_j = 0 \\ i = j \leqslant r \Longrightarrow {}^{\mathrm{t}}A_iA_i = d_i^2 > 0 \\ i = j \geqslant r+1 \Longrightarrow {}^{\mathrm{t}}A_iA_i = 0 \end{cases}.$$

On a donc : $\forall\, i \in \{r+1,\dots,n\},\ A_i = 0$ (cf. ex. 4.2.3 p. 141).

Notons, pour $i \in \{1,\dots,r\}$, $A'_i = \dfrac{1}{d_i}A_i$. Ainsi, $(A'_1,\dots,A'_r)$ est une famille orthonormale (pour le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). On peut la compléter en une b.o.n. $(A'_1,\dots,A'_r,A'_{r+1},\dots,A'_n)$ de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons Ω la matrice dont les colonnes sont $A'_1,\dots,A'_n$; il est clair que : $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

De plus :

$$\Omega D = (A'_1 \dots A'_r\ A'_{r+1} \dots A'_n)\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = (A_1 \dots A_r\ 0 \dots 0) = A.$$

4.5.51

1) E est fermé

Soient $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans E et $S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$S_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} S.$$

• Puisque $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) = \theta^{-1}(\{0\})$, où $\theta : \begin{array}{l}\mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R})\\ A \longmapsto {}^{\mathrm{t}}A - A\end{array}$ est continue et $\{0\}$ fermé, $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, et donc $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

• Puisque $\mathbf{S}_n^+$ est fermé dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ (cf. ex. 4.5.20) et que, pour tout k de $\mathbb{N}$, $S_k - A \in \mathbf{S}_n^+$, on a :

$$S - A = \lim_{k\infty}(S_k - A) \in \mathbf{S}_n^+,$$

donc $A \leqslant S$.

De même : $S \leqslant B$.

Ainsi : $S \in E$.

Ceci montre que E est fermé dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ (et dans $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$).

2) ***E* est borné**

Munissons $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne canonique (définie par $||X|| = ({}^{\mathrm{t}}XX)^{\frac{1}{2}}$), et $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée $|||.|||$ (cf. Analyse PC-PSI-PT, § 1.3.4) définie par :

$$|||M||| = \operatorname*{Sup}_{X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}} \frac{||MX||}{||X||}.$$

On sait (Analyse PC-PSI-PT, § 1.3.4) que $|||.|||$ est une norme multiplicative.

Soit $S \in E$; notons $S' = S - A$, $B' = B - A$. On a ainsi : $0 \leqslant S' \leqslant B'$.

D'après l'ex. 4.5.26, S' et B' admettent des racines carrées dans $\mathbf{S}_n^+$. On a, pour tout X de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}||S'^{\frac{1}{2}}X||^2 &= {}^{\mathrm{t}}XS'X \leqslant {}^{\mathrm{t}}XB'X\\ &= ||B'^{\frac{1}{2}}X||^2 \leqslant |||B'^{\frac{1}{2}}|||^2||X||^2,\end{aligned}$$

d'où : $|||S'^{\frac{1}{2}}||| \leqslant |||B'^{\frac{1}{2}}|||$,

puis :

$$|||S'||| = |||\left(S'^{\frac{1}{2}}\right)^2||| \leqslant |||S'^{\frac{1}{2}}|||^2 \leqslant |||B'^{\frac{1}{2}}|||^2,$$

et enfin :

$$|||S||| \leqslant |||S - A||| + |||A||| \leqslant |||B'^{\frac{1}{2}}|||^2 + |||A|||.$$

Ceci montre que E est borné.

3) Comme E est une partie fermée bornée dans un evn de dimension finie ($\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$), on conclut : E est compact.

4.5.52

a) Par produits par blocs :

$$\begin{cases}{}^{\mathrm{t}}\Omega\Omega = \mathrm{I}_n\\ \Omega{}^{\mathrm{t}}\Omega = \mathrm{I}_n\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}{}^{\mathrm{t}}AA + {}^{\mathrm{t}}CC = \mathrm{I}_p,\ {}^{\mathrm{t}}AB + {}^{\mathrm{t}}CD = 0,\\ \qquad {}^{\mathrm{t}}BB + {}^{\mathrm{t}}DD = \mathrm{I}_{n-p}\\ A\,{}^{\mathrm{t}}A + B\,{}^{\mathrm{t}}B = \mathrm{I}_p,\ A{}^{\mathrm{t}}C + B\,{}^{\mathrm{t}}D = 0,\\ \qquad C\,{}^{\mathrm{t}}C + D\,{}^{\mathrm{t}}D = \mathrm{I}_{n-p}\end{cases}.$$

En particulier :

$$\begin{cases}(\det(A))^2 = \det({}^{\mathrm{t}}AA) = \det(\mathrm{I}_p - {}^{\mathrm{t}}CC)\\ \qquad = (-1)^p\chi_{{}^{\mathrm{t}}CC}(1)\\ (\det(D))^2 = \det(D\,{}^{\mathrm{t}}D) = \det(\mathrm{I}_{n-p} - C\,{}^{\mathrm{t}}C)\\ \qquad = (-1)^{n-p}\chi_{C\,{}^{\mathrm{t}}C}(1).\end{cases}$$

D'après l'ex. 3.2.12 :

$$(-\mathrm{X})^p\chi_{{}^{\mathrm{t}}CC}(\mathrm{X}) = (-\mathrm{X})^{n-p}\chi_{C\,{}^{\mathrm{t}}C}(\mathrm{X}),$$

d'où : $(\det(A))^2 = (\det(D))^2$.

b) • Montrons : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}({}^{\mathrm{t}}AA) \subset [0;1]$.

Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}({}^{\mathrm{t}}AA)$, $X \in \mathrm{SEP}({}^{\mathrm{t}}AA, \lambda)$.

Puisque ${}^{\mathrm{t}}AA \in \mathbf{S}_n^+$, on a déjà : $\lambda \geqslant 0$.

D'autre part : ${}^{\mathrm{t}}CCX = (\mathrm{I}_p - {}^{\mathrm{t}}AA)\mathrm{X} = (1-\lambda)\mathrm{X}$, donc $1 - \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}({}^{\mathrm{t}}CC)$.

Comme ${}^{\mathrm{t}}CC \in \mathbf{S}_n^+$, on déduit $1 - \lambda \geqslant 0$.

Ceci montre : $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

• D'après le **théorème fondamental**, il existe :

$$\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}),\quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$$

telles que ${}^{\mathrm{t}}AA = \Omega D\Omega^{-1}$.

On vient de voir : $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \lambda_i \in [0;1]$. D'où :

$$(\det(A))^2 = \det({}^{\mathrm{t}}AA) = \det(D) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \in [0;1].$$

4.5.53

1ère méthode

D'après le théorème de réduction simultanée (4.5.3 Th. p. 169) il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = {}^{\mathrm{t}}PP \quad \text{et} \quad B = {}^{\mathrm{t}}PDP.$$

On a alors : $AB = {}^{\mathrm{t}}PP\,{}^{\mathrm{t}}PDP$.

Notons $M = P\,{}^{\mathrm{t}}PDP\,{}^{\mathrm{t}}P$, qui est symétrique; on a ainsi :

$${}^{\mathrm{t}}PM = AB\,{}^{\mathrm{t}}P.$$

Puisque AB est nilpotente, il existe $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ tel que $(AB)^k = 0$. On déduit alors :

$${}^{\mathrm{t}}PM^k = (AB)^k\,{}^{\mathrm{t}}P = 0,$$

d'où, puisque $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $M^k = 0$.

Ainsi, M est symétrique et nilpotente.

D'après le **théorème fondamental** (4.5.1 Th. p. 164), il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $\Delta \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \Omega\Delta\Omega^{-1}$.

On a : $\Delta^k = \Omega^{-1}M^k\Omega = 0$, donc (puisque Δ est diagonale) $\Delta = 0$, puis $M = 0$.

Puisque $P\,{}^{\mathrm{t}}PDP\,{}^{\mathrm{t}}P = 0$ et $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, on déduit $D = 0$, puis $B = {}^{\mathrm{t}}PDP = 0$.

2ème méthode

D'après l'ex. 4.5.26, il existe $R \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que $A = R^2$. On a :

$$AB = R^2B = R(RBR)R^{-1} \sim RBR.$$

Ainsi, RBR est symétrique et nilpotente, donc (comme dans la 1ère méthode), $RBR = 0$, d'où $B = 0$.

4.5.54

a) Notons $\psi_1 : \underset{(P,Q)\longmapsto\varphi(PQ)}{(\mathbb{R}_n[X])^2 \longrightarrow \mathbb{R}}$ et $\psi_2 : \underset{(P,Q)\longmapsto\varphi(XPQ)}{(\mathbb{R}_n[X])^2 \longrightarrow \mathbb{R}}$. Il est clair que ψ_1 et ψ_2 sont des formes bilinéaires symétriques. De plus :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X] - \{0\},\quad \psi_1(P,P) = \varphi(P^2) > 0,$$

donc la fq associée à ψ_1 est définie-positive.

D'après le **théorème de réduction simultanée** (4.5.2 Th. p. 169), il existe $(\alpha_0,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une famille libre $(\varphi_0,\ldots,\varphi_n)$ de formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$, tels que :

$$\forall\,(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X]^2),\ \begin{cases} \psi_1(P,Q) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(P)\varphi_i(Q) \\ \psi_2(P,Q) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\varphi_i(P)\varphi_i(Q). \end{cases}$$

b) • Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a, pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(P)\varphi_i(XQ) = \varphi(PXQ) = \varphi(XPQ)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\varphi_i(P)\varphi_i(Q),$$

d'où : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(\varphi_i(XQ) - \alpha_i\varphi_i(Q))\varphi_i = 0$.

Comme $(\varphi_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre, on déduit :

$$\forall\, i \in \{0,\ldots,n\},\quad \varphi_i(XQ) = \alpha_i\varphi_i(Q).$$

En appliquant ceci à $Q = 1, X, \ldots, X^{n-1}$, on déduit :

$$\varphi_i(X) = \alpha_i\varphi_i(1),\quad \varphi_i(X^2) = \alpha_i^2\varphi_i(1),$$
$$\ldots,\ \varphi_i(X^n) = \alpha_i^n\varphi_i(1).$$

• Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ quelconque, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \beta_k X^k$. On a :

$$\forall\, i \in \{0,\ldots,n\},\quad \varphi_i(P) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k\varphi_i(X^k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \beta_k\alpha_i^k\varphi_i(1) = P(\alpha_i)\varphi_i(1).$$

D'où, pour tout (P,Q) de $(\mathbb{R}_n[X])^2$:

$$\varphi(PQ) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(P)\varphi_i(Q) = \sum_{i=0}^{n} (\varphi_i(1))^2 P(\alpha_i)Q(\alpha_i).$$

4.5.55

Notons $R = \dfrac{1}{2}(A + \overline{A})$, $S = \dfrac{1}{2i}(A - \overline{A})$; ainsi :

$$(R,S) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2 \quad\text{et}\quad A = R + iS$$

(on dit que R et S sont les *parties réelle* et *imaginaire* de A).

De ${}^tA = A$, on déduit : ${}^tR = R$ et ${}^tS = S$.

Ainsi, $(R,S) \in (\mathbf{S}_n(\mathbb{R}))^2$; de plus, par hypothèse, $R = \dfrac{1}{2}(A + \overline{A}) \in \mathbf{S}_n^{++}$.

D'après le **théorème de réduction simultanée** (4.5.2 Th. p. 169), il existe $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$R = {}^tQQ \quad\text{et}\quad S = {}^tQ\,\mathrm{diag}\,(t_1,\ldots,t_n)Q.$$

En notant $P = Q^{-1}$, on obtient :

$${}^tPAP = {}^tQ^{-1}(R + iS)Q^{-1} = \mathrm{I}_n + i\,\mathrm{diag}\,(t_1,\ldots,t_n)$$
$$= \begin{pmatrix} 1+it_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1+it_n \end{pmatrix}.$$

4.5.56

D'après le **théorème fondamental** (4.5.1 Th. p. 164), puisque ${}^tAA \in \mathbf{S}_n^{++}$, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels qu'en notant $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, on ait :

$${}^tAA = \Omega D\Omega^{-1}.$$

Il est clair qu'on peut supposer $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n > 0$.

Notons $V = \Omega^{-1}U = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. On a :

$$||AU||^2 = {}^tU\,{}^tAAU = {}^tVDV = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2,$$

donc :

$$||AU||^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_n v_i^2 = \lambda_n||V||^2 = \lambda_n||U||^2 = \lambda_n.$$

D'autre part, en appliquant la **comparaison entre moyennes arithmétique et géométrique** à $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$, on obtient :

$$\left(\frac{(\det(A))^2}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{\det({}^tAA)}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$
$$\leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i < \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \frac{1}{n-1}\mathrm{tr}\,({}^tAA).$$

D'où : $\quad ||AU||^2 \geqslant \lambda_n > \dfrac{(\det(A))^2}{(\mathrm{tr}\,({}^tAA))^{n-1}}(n-1)^{n-1}$.

4.5.57

• Soit $A \in \mathbf{S}_n^+$.

D'après le **théorème fondamental** (4.5.1 Th. p. 164), il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$, et : $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\},\ \lambda_i \geqslant 0$.

Soit $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$; notons $Q = P^{-1}\Omega P$, qui est orthogonale. On a : $\mathrm{tr}\,(A\Omega) = \mathrm{tr}(DQ)$.

Notons $Q = (q_{ij})_{ij}$. Ainsi :

$$|\mathrm{tr}\,(DQ)| = |\sum_{i=1}^{n}\lambda_i q_{ii}| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i|q_{ii}|.$$

Puisque $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$: $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\},\ |q_{ii}| \leqslant 1$, d'où :

$$|\mathrm{tr}(DQ)| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \mathrm{tr}\,(A).$$

4.5.58

Considérons la matrice ${}^{\mathrm{t}}AA$.

On a : ${}^{\mathrm{t}}AA \in \mathbf{S}_p(\mathbb{R})$ et, comme :

$\forall\, X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$ {}^{\mathrm{t}}X({}^{\mathrm{t}}AA)X = {}^{\mathrm{t}}(AX)(AX) = ||AX||_2^2 \geqslant 0, $$

on a : ${}^{\mathrm{t}}AA \in \mathbf{S}_p^+$.

Notons λ la plus grande valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$; on a : $\lambda \geqslant 0$. Notons $\alpha = \sqrt{\lambda}$. Il existe $U \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que : $||U||_2 = 1$ et $({}^{\mathrm{t}}AA)U = \lambda U = \alpha^2 U$.

• Supposons $AU = 0$. Alors $\lambda U = {}^{\mathrm{t}}A(AU) = 0$ et $U \neq 0$, donc $\lambda = 0$, puis, comme λ est la plus grande valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$ et que ${}^{\mathrm{t}}AA \in \mathbf{S}_p^+$, on a ${}^{\mathrm{t}}AA = 0$. Il s'ensuit, pour tout $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$$ ||AX||_2^2 = {}^{\mathrm{t}}(AX)(AX) = {}^{\mathrm{t}}X({}^{\mathrm{t}}AAX) = 0, $$

donc $AX = 0$, puis $A = 0$. Mais alors, $\alpha = 0$ et U, V quelconques normés conviennent.

• Supposons donc $AU \neq 0$ et notons $V = \dfrac{AU}{||AU||_2}$, qui est normé.

On a : $AU = ||AU||_2 V$ et :

$$ {}^{\mathrm{t}}AV = {}^{\mathrm{t}}A\frac{AU}{||AU||_2} = \frac{1}{||AU||_2}\,{}^{\mathrm{t}}AAU = \frac{1}{||AU||_2}\alpha^2 U = \frac{\alpha^2}{||AU||_2}U. $$

De plus :

$$ ||AU||_2^2 = {}^{\mathrm{t}}(AU)(AU) = {}^{\mathrm{t}}U({}^{\mathrm{t}}AAU) = {}^{\mathrm{t}}U(\lambda U) = \lambda{}^{\mathrm{t}}UU = \alpha^2, $$

donc $\quad ||AU||_2 = \alpha \quad$ et $\quad \dfrac{\alpha^2}{||AU||_2} = \alpha.$

On conclut :

$$ AU = \alpha V \quad \text{et} \quad {}^{\mathrm{t}}AV = \alpha U. $$

• Comme ${}^{\mathrm{t}}AA \in \mathbf{S}_p^+$ et que λ est la plus grande valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$, on a pour tout $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$$ ||{}^{\mathrm{t}}AAX||_2 \leqslant \lambda ||X||_2, $$

d'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy et Schwarz :

$$ ||AX||_2^2 = {}^{\mathrm{t}}(AX)(AX) = {}^{\mathrm{t}}X({}^{\mathrm{t}}AAX) \leqslant ||X||_2 ||{}^{\mathrm{t}}AAX||_2 = \lambda ||X||_2^2 = \alpha^2 ||X||_2^2, $$

et donc : $||AX||_2 \leqslant \alpha ||X||_2$.

4.5.59

a) (ii) $\Longrightarrow$ (i) : évident

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

Nous allons faire une récurrence sur n.

La propriété est triviale pour $n = 1$.

Supposons-la vraie pour un n de $\mathbb{N}^*$, et soit $S \in \mathbf{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}\,(S) = 0$.

D'après le **théorème fondamental** (4.5.1 Th. p. 164), il existe $\Omega_1 \in \mathbf{O}_{n+1}(\mathbb{R})$, $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{D}_{n+1}(\mathbb{R})$ telles que $S = \Omega_1 D \Omega_1^{-1}$.

Considérons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

On a : $\quad {}^{\mathrm{t}}UDU = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = \mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(S) = 0.$

Il existe $\Omega_2 \in \mathbf{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont la $1^{\text{ère}}$ colonne soit $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}U$ (d'après le théorème de la b.o.n. incomplète).

Notons :

$$ A' = \Omega_2^{-1} D \Omega_2 = {}^{\mathrm{t}}\Omega_2 D \Omega_2 $$

$$ = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \text{---} & 1 \\ & \ldots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ | & \ldots & \\ 1 & & \end{pmatrix}. $$

Le $(1,1)^{\text{ème}}$ terme de A' est égal à $\dfrac{1}{n}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1})$, donc est nul.

Il existe donc $C \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$ A' = \begin{pmatrix} 0 & {}^{\mathrm{t}}C \\ C & B \end{pmatrix}. $$

De plus : $\quad \mathrm{tr}\,(B) = \mathrm{tr}\,(A') = \mathrm{tr}\,(D) = 0.$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\Omega_3 \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $B' \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ à termes diagonaux tous nuls, telles que $B = \Omega_3 B' \Omega_3^{-1}$.

Notons $\Omega' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}_{n+1}(\mathbb{R})$. Un produit par blocs donne : $\Omega'^{-1} A' \Omega' = \begin{pmatrix} 0 & {}^{\mathrm{t}}C\Omega_3 \\ \Omega_3^{-1}C & B' \end{pmatrix}$, qui est symétrique et à diagonale nulle.

b) Il s'agit du même résultat que *a)*, exprimé en termes de forme quadratique.

4.5.60

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

Supposons $p \circ q = q \circ p$.

Soit $(x, y) \in ((F \cap G)^{\perp} \cap F) \times ((F \cap G)^{\perp} \cap G)$.

Puisque $x \in F = \mathrm{Im}(p)$, on a $p(x) = x$,

puis $p(q(x)) = q(p(x)) = q(x)$, donc $q(x) \in \mathrm{Im}(p)$.

Ainsi : $\quad q(x) \in F \cap G$.

Comme $y \in (F \cap G)^{\perp}$ et que q est symétrique, on déduit :

$$ < x, y > = < x, q(y) > = < q(x), y > = 0. $$

Ceci montre que les sev $(F \cap G)^{\perp} \cap F$ et $(F \cap G)^{\perp} \cap G$ sont orthogonaux.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :

Supposons que les sev $(F \cap G)^{\perp} \cap F$ et $(F \cap G)^{\perp} \cap G$ soient orthogonaux.

1) Soit $x \in E$. On a :

$\forall z \in F \cap G,$

$$< p(x - q(x)), z > = < x - q(x), p(z) > = 0,$$

puisque p est symétrique et que

$$\begin{cases} x - q(x) \in \mathrm{Ker}\,(q) = G^{\perp} \\ p(z) = z \in G \end{cases}$$

Ainsi : $\forall x \in E,\ \ p(x - q(x)) \in (F \cap G)^{\perp}$, et donc :

$$\forall x \in E,\ \ p(x - q(x)) \in (F \cap G)^{\perp} \cap F.$$

De même : $\forall y \in E,\ \ q(y - p(y)) \in (F \cap G)^{\perp} \cap G.$

D'après l'hypothèse :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \ < p(x - q(x)),\ q(y - p(y)) > = 0.$$

2) Soit $x \in F^{\perp} = \mathrm{Ker}(p)$. D'après le résultat précédent :

$$\forall y \in E,\ \ < -p(q(x)),\ q(y - p(y)) > = 0.$$

En particulier, en remplaçant y par x :

$$< -p(q(x)),\ q(x) >= 0,$$

d'où : $0 = < p \circ q(x),\ q(x) > = < p^2 \circ q(x), q(x) >$

$$= < p \circ q(x),\ p \circ q(x) > = ||p \circ q(x)||^2,$$

donc $p \circ q(x) = 0$, et en particulier : $p \circ q(x) = q \circ p(x)$.

Ceci montre que $F^{\perp}$ est stable par q.

3) Comme $F^{\perp}$ est stable par q et que q est symétrique, on en déduit aisément que $F (= F^{\perp\perp})$ est aussi stable par q. Donc : $\forall x \in F,\ q(x) \in F,$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in F,\ \ (p \circ q)(x) = q(x) = (q \circ p)(x).$$

4) On a prouvé que $p \circ q$ et $q \circ p$ coïncident sur F et sur $F^{\perp}$ qui sont supplémentaires dans E, donc $p \circ q = q \circ p$.

4.5.61

a) **(i) $\Longrightarrow$ (ii)** :

Supposons $f \in A$. Alors : $(f^* \circ f)^2 = f^* \circ (f \circ f^* \circ f) = f^* \circ f$, donc $f^* \circ f$ est un projecteur de E. De plus $(f^* \circ f)^* = f^* \circ f$. Ainsi, $f^* \circ f$ est un projecteur symétrique de E, donc est un projecteur orthogonal (cf. ex. 4.3.1).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) :

Supposons que $f^* \circ f$ soit un projecteur orthogonal de E.

Soit $x \in (\mathrm{Ker}\,(f))^{\perp}$. On a :

$||f((f^* \circ f)(x) - x)||^2$

$$= < f^* \circ f \circ f^* \circ f(x) - f^* \circ f(x),\ f^* \circ f(x) - x > = 0,$$

donc $f((f^* \circ f)(x) - x) = 0,\ \ f^* \circ f(x) - x \in \mathrm{Ker}\,(f).$

On déduit $< f^* \circ f(x) - x, x > = 0$, d'où :

$$||f(x)||^2 =< f(x), f(x) > = < f^* \circ f(x), x > = < x, x > = ||x||^2.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) :

Supposons : $\forall x \in (\mathrm{Ker}\,(f))^{\perp},\ ||f(x)|| = ||x||.$

Soit $u \in E$. Il existe $(y,z) \in (\mathrm{Ker}(f))^{\perp} \times (\mathrm{Ker}\,(f))$ tel que $u = y + z$. On a alors $f(u) = f(y)$.

Montrons $f^* \circ f(y) = y$.

• $y \in (\mathrm{Ker}\,(f))^{\perp}$, donc $||f(y)|| = ||y||$, d'où :

$$||f^* \circ f(y) - y||^2 = ||f^* \circ f(y)||^2 - 2||f(y)||^2 + ||y||^2 = ||f^* \circ f(y)||^2 - ||f(y)||^2$$

• $f^* \circ f(y) \in (\mathrm{Ker}\,(f))^{\perp}$ car :

$$\forall t \in \mathrm{Ker}\,(f),\ \ < t, f^* \circ f(y) > = < f(t), f(y) > = 0.$$

Donc $||f(f^* \circ f(y))|| = ||f^* \circ f(y)||$, d'où comme ci-dessus :

$||f \circ f^* \circ f(y) - f(y)||^2$

$$= ||f \circ f^* \circ f(y)||^2 - 2||f^* \circ f(y)||^2 + ||f(y)||^2 = -||f^* \circ f(y)||^2 + ||f(y)||^2.$$

En additionnant les deux résultats précédents, on déduit :

$$||f^* \circ f(y) - y||^2 = ||f \circ f^* \circ f(y) - f(y)||^2 = 0,$$

donc $f^* \circ f(y) = y$.

Alors :

$$f \circ f^* \circ f(u) = f \circ f^* \circ f(y) = f(y) = f(u),$$

et finalement $f \in A$.

b) 1) D'après *a)* (implication i $\Longrightarrow$ iii), on a déjà :

$$\mathrm{Ker}\,(f) \subset \{x \in E;\ \ ||f(x)|| = ||x||\}.$$

2) Soit $x \in E$ tel que $||f(x)|| = ||x||$. On a :

$$||f^* \circ f(x) - x||^2 = ||f^* \circ f(x)||^2 - 2||f(x)||^2 + ||x||^2 = < f(x),\ f \circ f^* \circ f(x) > -2||f(x)||^2 + ||x||^2 = -||f(x)||^2 + ||x||^2 = 0,$$

donc $f^* \circ f(x) = x$.

3) Soit $x \in E$ tel que $f^* \circ f(x) = x$. On a, pour tout z de $\mathrm{Ker}\,(f)$:

$$< x, z > = < f^* \circ f(x), z > = < f(x), f(z) > = 0,$$

ce qui montre : $x \in (\mathrm{Ker}\,(f))^{\perp}$.

c) 1) $f \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow f^* \circ f = e \Longrightarrow f \circ f^* \circ f = f \Longleftrightarrow f \in A$, donc $\mathcal{O}(E) \subset A$.

2) Soient $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{O}(E)$ et $f \in A$ tels que : $f_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} f$. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ f_k^* \circ f_k = f_k \circ f_k^* = e,$$

d'où, en passant à la limite et en remarquant $f_k^* \underset{k\infty}{\longrightarrow} f^*$ (dans $\mathcal{L}(E)$) : $f^* \circ f = f \circ f^* = e$, donc $f \in \mathcal{O}(E)$.

Ceci montre que $\mathcal{O}(E)$ est fermé dans A.

Ou encore, on sait que $\mathcal{O}(E)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E)$, donc fermé dans A, puisque $\mathcal{O}(E) \subset A \subset \mathcal{L}(E)$.

3) Montrons : $\mathcal{O}(E) = A \cap \mathcal{GL}(E)$.

L'inclusion $\mathcal{O}(E) \subset A \cap \mathcal{GL}(E)$ est déjà acquise.

Soit $f \in A \cap \mathcal{GL}(E)$. Alors $f \circ f^* \circ f = f$ et f est inversible, d'où $f^* \circ f = e$, donc $f \in \mathcal{O}(E)$.

Ainsi : $\mathcal{O}(E) = A \cap \mathcal{GL}(E)$. Comme $\mathcal{GL}(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$, il en résulte que $\mathcal{O}(E)$ est ouvert dans A.

4.5.62

1) Existence (cf. aussi ex. 4.5.26)

D'après le **théorème fondamental**, il existe $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ et $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ tels qu'en notant $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, on ait $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

Considérons $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$, et $R = \Omega\Delta\Omega^{-1}$.

Alors :

- $R^2 = \Omega\Delta^2\Omega^{-1} = \Omega D\Omega^{-1} = S$
- ${}^{\mathrm{t}}R = {}^{\mathrm{t}}\Omega^{-1}\Delta\,{}^{\mathrm{t}}\Omega = \Omega\Delta\Omega^{-1} = R$, donc $R \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$
- $R \in \mathbf{S}_n^+$ car $R \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(R) \subset \mathbb{R}_+$.

2) Unicité

Soit $R \in \mathbf{S}_n^+$ telle que $R^2 = S$.

- On a : $\begin{cases} \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(R) \subset \{\sqrt{\mu};\ \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S)\} \\ \forall\,\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(R), \quad \mathrm{SEP}(R,\lambda) \subset \mathrm{SEP}(S,\lambda^2) \end{cases}$,

car : $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$(RX = \lambda X \Longrightarrow SX = R^2X = \lambda^2 X).$$

Puisque R et S sont diagonalisables, on déduit :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) &= \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(R)} \mathrm{SEP}(R,\lambda) \\ &\subset \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(R)} \mathrm{SEP}(S,\lambda^2) \subset \bigoplus_{\mu\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S)} \mathrm{SEP}(S,\mu) \\ &= \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\end{aligned}$$

d'où nécessairement :

$$\begin{cases} \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) = \{\lambda^2;\ \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(R)\} \\ \forall\,\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(R),\ \ \mathrm{SEP}(R,\lambda) = \mathrm{SEP}(S,\lambda^2) \end{cases}.$$

- Il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$S = \Omega D\Omega^{-1}.$$

D'après le résultat précédent, il existe $D' \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telle que $R = \Omega D'\Omega^{-1}$. Comme $R \in \mathbf{S}_n^+$, D' est formée des racines carrées des éléments de D, dans l'ordre, d'où l'unicité de R.

4.5.63

a) Supposons $\Omega \sim S$. Alors : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(S) \subset \mathbb{R}_+$.

Comme $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, il s'ensuit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \{1\}$.

Puisque S est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) = \{1\}$, on a $S \sim \mathrm{I}_n$, et donc $S = \mathrm{I}_n$

b) En notant $S' = S^{-\frac12}(\Omega S)S^{-\frac12}$, on a :

$\begin{cases} \Omega = S^{\frac12}S'S^{-\frac12} \sim S' \\ S' \in \mathbf{S}_n^+ \end{cases}$, d'où, d'après *a)* : $\Omega = \mathrm{I}_n$.

4.5.64

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

Supposons qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathbf{S}_n^{++}$ telles que $M = PSP^{-1}$.

Alors, en notant $A = PS^{\frac12}\,{}^{\mathrm{t}}P$ et $B = {}^{\mathrm{t}}P^{-1}S^{\frac12}P^{-1}$, on a :

$$\begin{cases} M = PS^{\frac12}\,{}^{\mathrm{t}}P\,{}^{\mathrm{t}}P^{-1}S^{\frac12}P^{-1} = AB \\ A \in \mathbf{S}_n^{++},\ B \in \mathbf{S}_n^{++}. \end{cases}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :

Supposons qu'il existe $A,B \in \mathbf{S}_n^{++}$ telles que $M = AB$.

En notant $F = A^{\frac12}$, on a :

$$\begin{cases} M = F^2B = F(FBF)F^{-1} \sim FBF \\ FBF \in \mathbf{S}_n^{++} \end{cases}.$$

4.5.65

1) Si R commute avec M, alors, comme $A(=R^2)$ est un polynôme en R, A commute avec M.

2) Réciproquement, supposons $AM = MA$.

Il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = \Omega D\Omega^{-1}$, et : $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}, \lambda_i \geqslant 0$.

En notant $\Delta = \mathrm{diag}\,(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$, on a (cf. ex. 4.5.62) : $R = \Omega\Delta\Omega^{-1}$.

Il existe $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que : $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}, P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.

En effet, il suffit de choisir un **polynôme d'interpolation** sur les λ_i deux à deux distincts.

Alors : $\Delta = \mathrm{diag}\Big(P(\lambda_1),\ldots P(\lambda_n)\Big) = P(D)$, puis :

$$R = \Omega\Delta\Omega^{-1} = \Omega P(D)\Omega^{-1} = P(\Omega D\Omega^{-1}) = P(A).$$

Ainsi, R est un polynôme en A. Comme A commute avec M, on en déduit que R commute avec M.

4.5.66

1) Soit $B \in \mathbf{S}_n^{++}$ telle que $AB = BA$ et $(AB)^2 = -\mathrm{I}_n$.

Alors $A^2B^2 = -\mathrm{I}_n$, d'où $B^2 = (-A^2)^{-1}$,

puis $B = ((-A^2)^{-1})^{\frac12}$, sous réserve d'existence.

2) Réciproquement, $-A^2 \in \mathbf{S}_n^{++}$ car :

$$\begin{aligned}\forall\, X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\},\ {}^{\mathrm{t}}X(-A^2)X \\ = {}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}AAX = \|AX\|^2 > 0.\end{aligned}$$

On peut donc définir $B = ((-A^2)^{-1})^{\frac12}$.

Alors B commute avec A (car $(-A^2)^{-1}$ commute avec A, cf. ex. 4.5.65), et :

$$(AB)^2 = A^2B^2 = A^2(-A^2)^{-1} = -\mathrm{I}_n.$$

4.5.67

a) • On a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$, car, pour tout x de E :

$$f(x) = 0 \iff ||f(x)|| = 0 \iff ||g(x)|| = 0$$
$$\iff g(x) = 0.$$

D'après le théorème du rang, il en résulte :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$$
$$= \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(g)).$$

• Le sev $\mathrm{Ker}(f)$ $(= \mathrm{Ker}(g))$ de E admet au moins un supplémentaire F dans E.

Notons $f' : \begin{array}{c} F \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ et $g' : \begin{array}{c} F \longrightarrow \mathrm{Im}(g) \\ x \longmapsto g(x) \end{array}$.

L'application f' est linéaire, et surjective car, pour tout y de $\mathrm{Im}(f)$, il existe $u \in E$ tel que $y = f(u)$, puis $(x,z) \in F \times \mathrm{Ker}(f)$ tel que $u = x + z$, et on a $y = f(u) = f(x)$.

Puisque

$$\dim(F) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)),$$

il en résulte que f' est bijective ; de même, g' est bijective.

Notons $\theta = f' \circ g'^{-1}$, qui est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev de $\mathrm{Im}(g)$ sur $\mathrm{Im}(f)$. De plus, θ conserve la norme car :

$$\forall t \in \mathrm{Im}(g),\ ||\theta(t)|| = ||f(g'^{-1}(t))|| = ||g(g'^{-1}(t))||$$
$$= ||g'(g'^{-1}(t))|| = ||t||.$$

• Notons $F' = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$, $G' = (\mathrm{Im}(g))^{\perp}$.

Comme $\dim(F') = \dim(G')$, il existe un isomorphisme $\varphi : G' \longrightarrow F'$ conservant la norme (il suffit d'envoyer une b.o.n. de G' sur une b.o.n. de F').

• Notons h l'endomorphisme de E obtenu par recollement de θ et φ, c'est-à-dire l'élément de $\mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathrm{Im}(g), & h(x) = \theta(x) \\ \forall x \in (\mathrm{Im}(g))^{\perp}, & h(x) = \varphi(x). \end{cases}$$

Soit $x \in E$.

Il existe $(u,v) \in \mathrm{Im}(g) \times (\mathrm{Im}(g))^{\perp}$ tel que $x = u + v$.

On a :

$$||h(x)||^2 = ||h(u) + h(v)||^2 = ||h(u)||^2 + ||h(v)||^2,$$

car $h(u) \in \mathrm{Im}(f)$ et $h(v) \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$,

puis : $||h(u) + h(v)||^2 = ||\theta(u)||^2 + ||\varphi(v)||^2$
$$= ||u||^2 + ||v||^2 = ||x||^2.$$

Ceci montre : $h \in \mathcal{O}(E)$.

• Soit $t \in E$. Il existe $(x,z) \in F \times \mathrm{Ker}(f)$ tel que $t = x + z$.

Puisque $g(z) = f(z) = 0$, on a :

$$h(g(t)) = \theta(g'(x)) = f'(x) = f(x) = f(t).$$

Ainsi : $h \circ g = f$.

b) C'est la traduction matricielle du *a)*.

Remarque :

On peut déduire ce *b)* de l'ex. 4.5.53.

En effet, soit $(A,B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que ${}^tAA = {}^tBB$.

Comme ${}^tAA \in \mathbf{S}_n^+$, il existe $\Omega_1 \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = \Omega_1 D^2 \Omega_1^{-1}$.

En notant $A' = \Omega_1^{-1} A \Omega_1$ et $B' = \Omega_1^{-1} B \Omega_1$, on a :

$${}^tA'A' = \Omega_1^{-1}\,{}^tAA\Omega_1 = D^2 \quad \text{et} \quad {}^tB'B' = D^2.$$

D'après l'exercice 4.5.53, il existe $\Omega_2, \Omega_3 \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A' = \Omega_2 D$ et $B' = \Omega_3 D$.

On déduit : $\begin{cases} A = \Omega_1 A' \Omega_1^{-1} = \Omega_1 \Omega_2 D \Omega_1^{-1} \\ B = \Omega_1 B' \Omega_1^{-1} = \Omega_1 \Omega_3 D \Omega_1^{-1} \end{cases}$,

d'où $A = \Omega B$, où $\Omega = \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3^{-1} \Omega_1^{-1} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

4.5.68

Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Existence

Comme ${}^tAA \in \mathbf{S}_n^{++}$, on peut considérer $S = ({}^tAA)^{\frac{1}{2}} \in \mathbf{S}_n^{++}$ (cf. ex. 4.5.62), puis $\Omega = AS^{-1}$.

On a : ${}^t\Omega\Omega = {}^tS^{-1}\,{}^tAAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = \mathrm{I}_n$, donc $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

Unicité

Soit $(\Omega, S) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}_n^{++}$ tel que $A = \Omega S$.

Alors : ${}^tAA = S\,{}^t\Omega\Omega S = S^2$, d'où par l'unicité de la racine carrée de ${}^tAA$ dans $\mathbf{S}_n^+$ (cf. ex. 4.5.62) : $S = ({}^tAA)^{\frac{1}{2}}$; puis $\Omega = AS^{-1}$.

Variante pour l'unicité, utilisant l'ex. 4.5.49 :

Soient $\Omega, \Omega' \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $S, S' \in \mathbf{S}_n^{++}$ telles que $\Omega S = \Omega' S'$. Alors $\Omega'^{-1}\Omega = S'S^{-1}$; mais $\Omega'^{-1}\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et $S'S^{-1}$ est le produit de deux matrices de $\mathbf{S}_n^{++}$, donc (ex. 4.5.49) $S'S^{-1}$ est diagonalisable et à valeurs propres toutes > 0. Donc $\Omega'^{-1}\Omega$ est orthogonale, diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et à valeurs propres > 0, d'où facilement $\Omega'^{-1}\Omega = \mathrm{I}_n$, puis $\Omega' = \Omega$, $S' = S$.

4.5.69

Puisque $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_k \underset{k\infty}{\longrightarrow} M$.

D'après l'ex. 4.5.68, pour chaque k de $\mathbb{N}$, il existe $(\Omega_k, S_k) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}_n^{++}$ tel que $M_k = \Omega_k S_k$.

Comme $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ est compact (car fermé borné dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$), il existe une extractrice σ et $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $\Omega_{\sigma(k)} \underset{k\infty}{\longrightarrow} \Omega$.

Alors :

$$S_{\sigma(k)} = \Omega_{\sigma(k)}^{-1} M_{\sigma(k)} \underset{k\infty}{\longrightarrow} \Omega^{-1}M.$$

Notons $S = \Omega^{-1}M$, de sorte que déjà : $M = \Omega S$.

• $\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N},\ {}^{t}S_{\sigma(k)} = {}^{t}M_{\sigma(k)}\Omega_{\sigma(k)} \underset{k\infty}{\longrightarrow} {}^{t}M\Omega \\ {}^{t}S_{\sigma(k)} = S_{\sigma(k)} \underset{k\infty}{\longrightarrow} S \end{cases}$,

donc $S = {}^{t}M\Omega = {}^{t}(\Omega^{-1}M) = {}^{t}S$, d'où $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

• Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a : $\forall k \in \mathbb{N},\ {}^{t}XS_{\sigma(k)}X \geqslant 0$, d'où en passant à la limite : ${}^{t}XSX \geqslant 0$, et donc $S \in \mathbf{S}_n^{+}$.

Unicité de S :

si $(\Omega, S) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}_n^{+}$ est tel que $M = \Omega S$, alors ${}^{t}MM = {}^{t}S\,{}^{t}\Omega\Omega S = S^2$, donc S est la racine carrée de ${}^{t}MM$ dans $\mathbf{S}_n^{+}$ (cf. ex. 4.5.62).

Application :

Soit $(A,B) \in (\mathbf{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que ${}^{t}AA = {}^{t}BB$.

D'après la décomposition polaire dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, il existe Ω_A, $\Omega_B \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $S_A, S_B \in \mathbf{S}_n^{+}$ telles que : $A = \Omega_A S_A$, $B = \Omega_B S_B$. Comme ${}^{t}BB = {}^{t}AA$, on a $S_B^2 = S_A^2$, puis, par unicité de la racine carrée dans $\mathbf{S}_n^{+}$ (cf. ex. 4.5.62) : $S_B = S_A$. Alors $A = \Omega B$, où $\Omega = \Omega_A\Omega_B^{-1} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

Remarque :

On peut d'ailleurs aussi déduire le théorème de décomposition polaire dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de l'ex. 4.5.67 *b)* :

Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque ${}^{t}MM \in \mathbf{S}_n^{+}$, il existe $S \in \mathbf{S}_n^{+}$ telle que ${}^{t}MM = S^2 = {}^{t}SS$. D'après l'ex. 4.5.67 *b)*, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = \Omega S$. Cette argumentation évite alors l'intervention de la compacité.

4.5.70

$$\begin{aligned} &{}^{t}XX + {}^{t}XA + {}^{t}AX = 0 \\ &\iff {}^{t}(X+A)(X+A) = {}^{t}AA \\ &\iff (\exists \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}),\ X + A = \Omega A). \end{aligned}$$

Réponse : $\{(\Omega - \mathrm{I}_n)A;\ \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})\}$.

4.5.71

• Soit (X,Y) convenant. Alors :

$${}^{t}(X-Y)(X-Y) = A - B.$$

Notons $C = (A-B)^{\frac{1}{2}} \in \mathbf{S}_n^{+}$. D'après le théorème de décomposition polaire dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ (ex. 4.5.69), il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $X - Y = \Omega C$.

• En remplaçant X par $Y + \Omega C$ ($\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$), on obtient :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} {}^{t}XX + {}^{t}YY = A \\ {}^{t}XY + {}^{t}YX = B \end{cases} \\ &\iff 2\,{}^{t}YY + {}^{t}Y\Omega C + C\Omega^{-1}Y = B \\ &\iff {}^{t}\Big(Y + \frac{1}{2}\Omega C\Big)\Big(Y + \frac{1}{2}\Omega C\Big) = \frac{1}{4}(A+B). \end{aligned}$$

Notons $R = \frac{1}{2}(A+B)^{\frac{1}{2}} \in \mathbf{S}_n^{+}$. D'après le théorème de décomposition polaire à nouveau, la relation précédente équivaut à l'existence de $\Omega' \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$Y + \frac{1}{2}\Omega C = \Omega' R.$$

Réponse :

$\{(\Omega U + \Omega' U', -\Omega U + \Omega' U');\ (\Omega, \Omega') \in (\mathbf{O}_n(\mathbb{R}))^2\}$,

où $U = \frac{1}{2}(A-B)^{\frac{1}{2}}$ et $U' = \frac{1}{2}(A+B)^{\frac{1}{2}}$.

4.5.72

D'après l'ex. 4.5.69, il existe $(\Omega, S) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{S}_n^{+}$ tel que $A = \Omega S$. Puis, d'après le théorème fondamental, il existe $P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ à termes diagonaux $\geqslant 0$, telles que $S = PDP^{-1}$. Alors, en notant $U = \Omega P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et $V = P^{-1} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$A = \Omega S = \Omega PDP^{-1} = UDV.$$

4.5.73

Récurrence sur n.

La propriété est triviale pour $n = 1$.

Supposons-la vraie pour tout p de $\mathbb{N}^*$ tel que $p < n$, et soient I un ensemble non vide, $(S_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ commutant deux à deux.

Le cas $(\forall i \in I,\ S_i \in \mathbb{R}\,\mathrm{I}_n)$ est trivial.

Supposons donc qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $S_{i_0} \notin \mathbb{R}\mathrm{I}_n$.

D'après le théorème fondamental, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S_{i_0} = \Omega D\Omega^{-1}$.

Comme $S_{i_0} \notin \mathbb{R}\mathrm{I}_n$, les éléments diagonaux de D ne sont pas tous égaux. On peut donc supposer $D = \begin{pmatrix} \lambda_0 \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$, où $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \{1,\ldots,n-1\}$, $D' \in \mathbf{D}_{n-r}(\mathbb{R})$ à termes diagonaux $\neq \lambda_0$.

Pour chaque i de I, décomposons $\Omega^{-1}S_i\Omega$ en blocs :

$$\Omega^{-1}S_i\Omega = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ {}^{t}B_i & C_i \end{pmatrix},$$

où $A_i \in \mathbf{S}_r(\mathbb{R})$, $B_i \in \mathbf{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C_i \in \mathbf{S}_{n-r}(\mathbb{R})$.

Comme les $S_i\ (i \in I)$ commutent deux à deux, en particulier : $\forall i \in I,\ S_iS_{i_0} = S_{i_0}S_i$.

En effectuant un produit par blocs, on en déduit :

$$\forall\, i \in I,\ \lambda_0 B_i = B_i D',$$

c'est-à-dire : $\forall i \in I,\ B_i(D' - \lambda_0\mathrm{I}_{n-r}) = 0$.

Mais $D' - \lambda_0\mathrm{I}_{n-r}$ est inversible, d'où : $\forall i \in I,\ B_i = 0$.

Montrer alors : $\forall (i,j) \in I^2,\ \begin{cases} A_iA_j = A_jA_i \\ C_iC_j = C_jC_i \end{cases}$.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux deux familles $(A_i)_{i\in I}$ et $(C_i)_{i\in I}$.

Il existe donc $\Omega_1 \in \mathbf{O}_r(\mathbb{R})$ et $\Omega_2 \in \mathbf{O}_{n-r}(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall\, i \in I,\quad \begin{cases} \Omega_1^{-1}A_i\Omega_1 \in \mathbf{D}_r(\mathbb{R}) \\ \Omega_2^{-1}C_i\Omega_2 \in \mathbf{D}_{n-r}(\mathbb{R}) \end{cases}.$$

En notant $\Omega' = \Omega \begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{pmatrix}$, on a alors facilement : $\Omega' \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et : $\forall i \in I,\ \Omega'^{-1}S_i\Omega' \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$.

4.5.74

D'après l'ex. 4.5.73, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, $\mu_1,\ldots,\mu_n \in \mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$) tels qu'en notant

$D_A = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $D_B = \operatorname{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$, on ait :

$$A = \Omega D_A \Omega^{-1},\ B = \Omega D_B \Omega^{-1}.$$

Alors : $\quad AB = \Omega D_A D_B \Omega^{-1}$

$$= \Omega \operatorname{diag}\left((\lambda_i \mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)\Omega^{-1} \in \mathbf{S}_n^+ \text{ (resp. } \mathbf{S}_n^{++}).$$

4.5.75

Supposons $0 \leqslant A \leqslant B$.

Puisque A et B commutent, $B - A$ et $B + A$ commutent aussi. D'après l'ex. 4.5.74, comme $B - A \in \mathbf{S}_n^+$ et $B + A \in \mathbf{S}_n^+$, on en déduit : $\quad (B - A)(B + A) \in \mathbf{S}_n^+$.

Mais, puisque A et B commutent :

$$(B - A)(B + A) = B^2 - A^2.$$

Finalement : $\quad A^2 \leqslant B^2$.

P 4.1

1) D'après le **théorème fondamental**, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = \Omega D \Omega^{-1}$.

On a alors $A^2 = \Omega D^2 \Omega^{-1}$, d'où (cf. ex. 4.5.62) :

$$|A| = (A^2)^{\frac{1}{2}} = \Omega \Delta \Omega^{-1},$$

en notant $\Delta = \operatorname{diag}(|\lambda_1|,\ldots,|\lambda_n|)$.

On en déduit :

$$\begin{cases} |A| - A = \Omega \operatorname{diag}\left((|\lambda_i| - \lambda_i)_i\right)\Omega^{-1} \in \mathbf{S}_n^+ \\ |A| + A = \Omega \operatorname{diag}\left((|\lambda_i| + \lambda_i)_i\right)\Omega^{-1} \in \mathbf{S}_n^+ \end{cases},$$

donc : $\quad A \leqslant |A| \quad$ et $\quad -A \leqslant |A|$.

De plus : $\quad |A| = A \iff (\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ |\lambda_i| = \lambda_i)$

$$\iff (\forall i \in \{1\ldots,n\},\ \lambda_i \geqslant 0) \iff A \in \mathbf{S}_n^+.$$

2) $|\alpha A| = ((\alpha A)^2)^{\frac{1}{2}} = (\alpha^2 A^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|(A^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha||A|$.

3) • Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

on a $A^2 = \mathrm{I}_2$, donc $|A| = \mathrm{I}_2$.

• Cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Diagonaliser A par le groupe orthogonal : $A = \Omega D \Omega^{-1}$,

où $\Omega = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Omega^{-1} = {}^{\mathrm{t}}\Omega$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

D'où $\quad |A| = \Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Réponse : $\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) a) Puisque $A, B \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $AB = BA$, d'après l'ex. 4.5.73, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D_A, D_B \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = \Omega D_A \Omega^{-1}$ et $B = \Omega D_B \Omega^{-1}$.

Notons

$$D_A = \operatorname{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\ D_B = \operatorname{diag}(\beta_1,\ldots,\beta_n).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} A \leqslant B \\ -A \leqslant B \end{cases} &\iff \begin{cases} B - A \in \mathbf{S}_n^+ \\ B + A \in \mathbf{S}_n^+ \end{cases} \\
&\iff \left(\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \begin{cases} \beta_i - \alpha_i \geqslant 0 \\ \beta_i + \alpha_i \geqslant 0 \end{cases}\right) \\
&\iff (\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ |\alpha_i| \leqslant \beta_i) \\
&\iff B - |A| = \Omega(D_B - |D_A|)\Omega^{-1} \in \mathbf{S}_n^+ \\
&\iff |A| \leqslant B.
\end{aligned}$$

b) Examiner l'exemple

$$n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix},$$

dans lequel on a : $\quad B - A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_2^+$

(car, par exemple :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x\,y)(B - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2\sqrt{2}xy + 3y^2$$

$$= (x + \sqrt{2}y)^2 + y^2 \geqslant 0),$$

$B + A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_2^+$,

$B - |A| = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \notin \mathbf{S}_2^+$

(car, par exemple :

$$(1\ \ -1)(B - |A|)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - 2\sqrt{2} + 1 < 0).$$

Réponse : non (si $n \geqslant 2$).

5) a) Raisonner comme dans la solution de *4) a)*.

b) Examiner l'exemple :

$$n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix},$$

dans lequel on a :

• $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad |A + B| = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

• $|A| = A \quad$ (car $A \in \mathbf{S}_2^+$), et $|B| = -B \quad$ (car $-B \in \mathbf{S}_2^+$)

• $|A| + |B| - |A + B| = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \notin \mathbf{S}_2^+$ (déterminant < 0).

Réponse : non (si $n \geqslant 2$).

6) α) Soient $S \in \mathbf{S}_n^+, \Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. Montrons :

$$({}^{\mathrm{t}}\Omega S \Omega)^{\frac{1}{2}} = {}^{\mathrm{t}}\Omega S^{\frac{1}{2}} \Omega.$$

D'après le théorème fondamental, il existe $\Omega_1 \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ à termes diagonaux $\geqslant 0$, telles que $S = \Omega_1 D \Omega_1^{-1}$, et on sait $S^{\frac{1}{2}} = \Omega_1 \Delta \Omega_1^{-1}$, où $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2}},\ldots,\lambda_n^{\frac{1}{2}})$.

On a : ${}^{\mathrm{t}}\Omega S \Omega = {}^{\mathrm{t}}(\Omega_1^{-1}\Omega) D (\Omega_1^{-1}\Omega)$,

d'où, en notant $S' = {}^{\mathrm{t}}(\Omega_1^{-1}\Omega)\Delta(\Omega_1^{-1}\Omega)$:

$$S' \in \mathbf{S}_n^+ \text{ et } S'^2 = {}^{\mathrm{t}}(\Omega_1^{-1}\Omega)\Delta^2(\Omega_1^{-1}\Omega) = {}^{\mathrm{t}}\Omega S \Omega.$$

D'après l'unicité de la racine carrée dans $\mathbf{S}_n^+$ (ex. 4.5.62), on déduit $S' = ({}^{\mathrm{t}}\Omega S \Omega)^{\frac{1}{2}}$.

Enfin : $S' = {}^{\mathrm{t}}\Omega \Omega_1 \Delta \Omega_1^{-1} \Omega = {}^{\mathrm{t}}\Omega S^{\frac{1}{2}} \Omega$.

$\beta)$ En utilisant $\alpha)$:

$$|{}^{\mathrm{t}}\Omega A \Omega| = \left(({}^{\mathrm{t}}\Omega A \Omega)^2\right)^{\frac{1}{2}} = ({}^{\mathrm{t}}\Omega A^2 \Omega)^{\frac{1}{2}}$$
$$= {}^{\mathrm{t}}\Omega (A^2)^{\frac{1}{2}} \Omega = {}^{\mathrm{t}}\Omega |A| \Omega.$$

Chapitre 5

Les solutions de certains exercices du chapitre 5 sont analogues à celles d'exercices du chapitre 4 (Algèbre bilinéaire).

5.1.1

Cf. ex. 4.1.1 p. 136.

5.1.2

Cf. ex. 4.3.1 p. 153.

5.1.3

• Notons $V = X + \mathrm{i}Y$. On a :

$$V^*(AV) = \lambda V^* V$$

et $$(V^*A)V = -(AV)^*V = -\overline{\lambda} V^* V,$$

d'où : $(\lambda + \overline{\lambda})V^*V = 0$.

Comme $V^*V \in \mathbb{R}_+^*$, on déduit $\lambda + \overline{\lambda} = 0$, $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda = \mathrm{i}\alpha$.

De plus :

$$AV = \lambda V \Longleftrightarrow A(X+\mathrm{i}Y) = \mathrm{i}\alpha(X+\mathrm{i}Y)$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} AX = -\alpha Y \\ AY = \alpha X \end{cases},$$

puisque α est réel et que X, Y, A sont réelles.

• ${}^{\mathrm{t}}X(AX) = -\alpha\, {}^{\mathrm{t}}XY$

et $({}^{\mathrm{t}}XA)X = -{}^{\mathrm{t}}(AX)X = \alpha\, {}^{\mathrm{t}}YX$,

d'où, puisque ${}^{\mathrm{t}}XY = {}^{\mathrm{t}}YX \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq 0$:

$${}^{\mathrm{t}}XY = {}^{\mathrm{t}}YX = 0.$$

• ${}^{\mathrm{t}}X(AY) = \alpha\, {}^{\mathrm{t}}XX$

et $({}^{\mathrm{t}}XA)Y = -{}^{\mathrm{t}}(AX)Y = \alpha\, {}^{\mathrm{t}}YY$,

d'où: ${}^{\mathrm{t}}XX = {}^{\mathrm{t}}YY$.

5.1.4

a) Comme

$$A\overline{A} = (X+\mathrm{i}Y)(X-\mathrm{i}Y) = (X^2+Y^2) + \mathrm{i}(YX - XY),$$

on a :

$$A^{-1}(X^2+Y^2) = \overline{A} \Longleftrightarrow X^2+Y^2 = A\overline{A} \Longleftrightarrow YX = XY.$$

b) Examiner l'exemple : $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Réponse : Oui.

c) Examiner l'exemple : $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Réponse : Oui.

5.1.5

On a, pour tout λ de $\mathbb{C}$:

$$\overline{\chi_{AB}(\lambda)} = \overline{\det(AB - \lambda \mathrm{I}_n)} = \det((AB - \lambda\mathrm{I}_n)^*)$$
$$= \det(B^*A^* - \overline{\lambda}\mathrm{I}_n)$$
$$= \det(BA - \overline{\lambda}\mathrm{I}_n) = \chi_{BA}(\overline{\lambda}).$$

D'après l'ex. 3.2.12 p. 86, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$,

d'où :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \overline{\chi_{AB}(\lambda)} = \chi_{AB}(\overline{\lambda}).$$

Il en résulte (cf. Algèbre PCSI-PTSI, 5.3.5 Prop. 1):

$$\chi_{AB} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}].$$

Comme $\mathrm{tr}(AB)$ est (au signe près) le coefficient du terme de degré $n-1$ de χ_{AB}, on obtient en particulier :

$$\mathrm{tr}(AB) \in \mathbb{R}.$$

5.1.6

On utilise essentiellement le fait que les deux involutions $A \longmapsto {}^{\mathrm{t}}A$ et $A \longmapsto \overline{A}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ commutent.

a) • Une inclusion est évidente.

• Si $A = (t_{ij}) \in \mathbf{H}_n \cap \mathbf{T}_{n,s}(\mathbb{C})$, alors :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \begin{cases} i > j & \Longrightarrow & t_{ij} = 0 \\ i = j & \Longrightarrow & \overline{t_{ii}} = t_{ii} \\ i < j & \Longrightarrow & t_{ij} = \overline{t_{ji}} = 0 \end{cases},$$

donc $A \in \mathbf{D}_n(\mathbb{R})$.

b)

$$({}^{\mathrm{t}}A)^* = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}\overline{A}) = {}^{\mathrm{t}}(A^*) = {}^{\mathrm{t}}\overline{A},\quad (\overline{A})^* = \overline{({}^{\mathrm{t}}\overline{A})} = \overline{A^*} = {}^{\mathrm{t}}A.$$

c) En notant $P = \sum_{k=0}^{N} a_k \mathrm{X}^k$ où les a_k sont réels, on a :

$$\left(P(A)\right)^* = {}^{\mathrm{t}}\left(\overline{\sum_{k=0}^{N} a_k A^k}\right) = {}^{\mathrm{t}}\left(\sum_{k=0}^{N} a_k (\overline{A})^k\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{N} a_k (A^*)^k = \sum_{k=0}^{N} a_k A^k = P(A).$$

Plus généralement :

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall P \in \mathbb{C}[\mathrm{X}],\ \left(P(A)\right)^* = \overline{P}(A^*).$$

5.1.7

Cf. ex. 4.3.2 p. 153.

5.2.1

Cf. ex. 4.2.2 p. 141.

5.2.2

Cf. ex. 4.2.3 p. 141.

5.2.3

Cf. ex. 4.2.5 p. 141.

Réponse :

• $\mathrm{Ker}\,(A^*A) = \mathrm{Ker}\,(A), \quad \mathrm{Ker}\,(AA^*) = \mathrm{Ker}\,(A^*)$

• $\mathrm{Im}(A^*A) = \mathrm{Im}(A^*), \quad \mathrm{Im}(AA^*) = \mathrm{Im}(A)$

• $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A^*) = \mathrm{rg}\,(A^*A) = \mathrm{rg}\,(AA^*)$.

5.2.4

En notant $H = AA^*$, on a :

$$\begin{cases} H^* = (AA^*)^* = AA^* = H \\ H^* = (A - A^*)^* = A^* - A = -H \end{cases},$$

d'où $H = 0$.

Puis, comme $AA^* = 0$, on déduit $A = 0$ (cf. ex. 5.2.2).

5.2.5

Remarquons d'abord que $A^*A \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C})$

et $\mathrm{rg}\,(A^*A) = \mathrm{rg}\,(A) = p$ (cf. ex. 5.2.3),

donc $(A^*A)^{-1}$ existe.

Puis, $H = B^*B - B^*A(A^*A)^{-1}A^*B$ existe et $H \in \mathbf{H}_q$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

Supposons qu'il existe $(X,Y) \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \times \mathbf{M}_{q,1}(\mathbb{C})$ tel que : $(X,Y) \neq (0,0)$ et $AX = BY$.

• $Y \neq 0$, car sinon : $AX = BY = 0,\ A^*AX = 0,\ X = 0$.

• $HY = B^*AX - B^*A(A^*A)^{-1}A^*AX$
$= B^*AX - B^*AX = 0$.

Donc H n'est pas inversible.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :

Supposons H non inversible.

Il existe $Y \in \mathbf{M}_{q,1}(\mathbb{C})$ tel que : $Y \neq 0$ et $HY = 0$.

Notons $X = (A^*A)^{-1}A^*BY$, de sorte que

$$A^*AX = A^*BY \quad \text{et} \quad B^*AX = (B^*A(A^*A)^{-1}A^*B)Y = (B^*B - H)Y = B^*BY.$$

• $(X,Y) \neq (0,0)$ car $Y \neq 0$. Et même, plus précisément, $X \neq 0$ car sinon : $B^*BY = B^*AX = 0,\ Y = 0$.

•
$$\begin{aligned} ||AX - BY||_2^2 &= (AX - BY)^*(AX - BY) \\ &= (X^*A^* - Y^*B^*)(AX - BY) \\ &= X^*A^*AX - X^*A^*BY - Y^*B^*AX \\ &\qquad + Y^*B^*BY \\ &= X^*(A^*AX - A^*BY) \\ &\qquad - Y^*(B^*AX - B^*BY) = 0, \end{aligned}$$

d'où $AX = BY$.

5.2.6

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Le cas $X = 0$ étant d'étude triviale, supposons $X \neq 0$.

1) $\boldsymbol{p = 1,\ q = \infty}$

• Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$||Y||_1 = \sum_{k=1}^n |y_k| = 1.$$

On a :

$$\begin{aligned} |Y^*X| = \left|\sum_{k=1}^n \overline{y}_k x_k\right| &\leqslant \sum_{k=1}^n |y_k|\,|x_k| \\ &\leqslant \left(\mathop{\mathrm{Max}}_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|\right)\sum_{k=1}^n |y_k| \\ &= ||X||_\infty ||Y||_1 = ||X||_\infty. \end{aligned}$$

• Il existe $j \in \{1,\dots,n\}$ tel que $|x_j| = ||X||_\infty$.

Considérons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ défini par :

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad y_k = \begin{cases} \dfrac{x_j}{|x_j|} & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}.$$

On a alors

$$||Y||_1 = 1 \quad \text{et} \quad |Y^*X| = \frac{\overline{x}_j}{|x_j|}x_j = |x_j| = ||X||_\infty.$$

2) $\boldsymbol{p = 2,\ q = 2}$

• D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout Y de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $||Y||_2 = 1$:

$$|Y^*X| \leqslant ||Y||_2\ ||X||_2 = ||X||_2.$$

• En choisissant $Y = \dfrac{X}{||X||_2}$, on a $||Y||_2 = 1$

et $|Y^*X| = \dfrac{1}{||X||_2}X^*X = \dfrac{1}{||X||_2}||X||_2^2 = ||X||_2$.

3) $\boldsymbol{p = \infty,\ q = 1}$

• Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$||Y||_\infty = \mathop{\mathrm{Max}}_{1\leqslant k\leqslant n} |y_k| = 1.$$

On a :

$$\begin{aligned} |Y^*X| = \left|\sum_{k=1}^n \overline{y}_k x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |y_k|\,|x_k| \leqslant \left(\mathop{\mathrm{Max}}_{1\leqslant k\leqslant n} |y_k|\right)\sum_{k=1}^n |x_k| \\ = ||Y||_\infty\ ||X||_1 = ||X||_1. \end{aligned}$$

• Considérons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ où :

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\}, \begin{cases} y_k = \dfrac{x_k}{|x_k|} & \text{si } x_k \neq 0 \\ 0 & \text{si } x_k = 0 \end{cases}.$$

On a alors $||Y||_\infty = 1$ et

$$|Y^*X| = \sum_{k,x_k \neq 0} \frac{\overline{x}_k}{|x_k|} x_k = \sum_{k,x_k \neq 0} |x_k|$$
$$= \sum_{k=1}^{n} |x_k| = ||X||_1.$$

Remarque : Dans la solution ci-dessus, on a établi :

$$\forall (X,Y) \in \left(\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})\right)^2, \quad |Y^*X| \leqslant ||Y||_p \, ||X||_q.$$

Cette formule est vraie pour tout p de $[1;+\infty]$, en notant $q \in [1;+\infty]$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (cf. Analyse PC-PSI-PT, ex. 1.1.8, normes de Hölder).

5.2.7

En notant $u = x+y$, $v = x-y$, on a :

$$||x||^2 + ||y||^2 - ||x+y|| \, ||x-y||$$
$$= \frac{1}{4}||u+v||^2 + \frac{1}{4}||u-v||^2 - ||u|| \, ||v||$$
$$= \frac{1}{2}||u||^2 + \frac{1}{2}||v||^2 - ||u|| \, ||v|| = \frac{1}{2}(||u|| - ||v||)^2.$$

Réponse :

Il y a égalité si et seulement si $\text{Ré}\,(< x,y >) = 0$.

5.2.8

Développer le second membre.

5.2.9

Notons $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{N}} \quad (0 \leqslant k \leqslant N-1)$. On a :

$$\sum_{k=0}^{N-1} ||\omega_k x + y||^2 \omega_k$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left(||x||^2 + \overline{\omega_k} < x,y > + \omega_k < y,x > + ||y||^2\right) \omega_k$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k\right)(||x||^2 + ||y||^2) + N < x,y >$$
$$+ \left(\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^2\right) < y,x >,$$

et

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_1^k = \frac{1-\omega_1^N}{1-\omega_1} = 0 \\ \qquad \text{(somme des racines } N^{\text{èmes}} \text{ de 1)}, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_2^k = \frac{1-\omega_2^N}{1-\omega_2} = 0 \\ \qquad (\omega_2 \neq 1 \text{ car } N \geqslant 3). \end{cases}$$

5.2.10

$$\int_0^{2\pi} ||\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} x + y||^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \, \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (||x||^2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} < x,y >$$
$$+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} < y,x > + ||y||^2) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \, \mathrm{d}\theta$$
$$= \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \, d\theta\right)(||x||^2 + ||y||^2)$$
$$+ \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right) < x,y > + \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} \, \mathrm{d}\theta\right) < y,x >$$
$$= 2\pi < x,y > .$$

Remarquer l'analogie avec l'ex. 5.2.9.

5.2.11

• Soit $(x,y) \in E^2$. En appliquant l'hypothèse à $x, y, x + \mathrm{i}y$, $x - \mathrm{i}y$, déduire $< f(x),y > = 0$.

• Pour le cas réel, examiner l'exemple : $E = \mathbb{R}^2$, $f = \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}$.

Réponse : Non.

5.2.12

$$A^*AB = 0 \Longrightarrow B^*A^*AB = 0$$
$$\Longrightarrow \text{tr}\,((AB)^*(AB)) = 0$$
$$\Longrightarrow AB = 0.$$

5.2.13

On a :

$$||A - A^*||^2 = \text{tr}\,((A^* - A)(A - A^*))$$
$$= \text{tr}\,(A^*A) - \text{tr}\,(A^2) - \text{tr}\,(A^{*2}) + \text{tr}\,(AA^*).$$

Par hypothèse : $\text{tr}\,(A^2) = \text{tr}\,(AA^*)$,

puis :

$$\text{tr}\,(A^{*2}) = \text{tr}\,((A^2)^*) = \overline{\text{tr}\,(A^2)} = \overline{\text{tr}\,(AA^*)}$$
$$= \text{tr}\,((AA^*)^*) = \text{tr}\,(AA^*) = \text{tr}\,(A^*A).$$

On déduit $\quad ||A - A^*|| = 0, \quad A = A^*, \quad A \in \mathbf{H}_n.$

5.2.14

Même méthode que pour l'ex. 4.2.8 p. 141. (Mais ici, χ_g est scindé sur $\mathbb{C}$ et à zéros deux à deux distincts et tous non nuls).

Réponse : f est diagonalisable.

5.2.15

a) • φ est à symétrie hermitienne :

$$\varphi(Q,P) = \sum_{k=0}^{n} \overline{Q(a_k)} P(a_k)$$
$$= \overline{\sum_{k=0}^{n} \overline{P(a_k)} Q(a_k)} = \overline{\varphi(P,Q)}.$$

• φ est linéaire par rapport à la deuxième place :

$$\begin{aligned}\varphi(P,\alpha Q+R) &= \sum_{k=0}^{n}\overline{P(a_k)}(\alpha Q+R)(a_k)\\ &= \alpha\sum_{k=0}^{n}\overline{P(a_k)}Q(a_k)+\sum_{k=0}^{n}\overline{P(a_k)}R(a_k)\\ &= \alpha\varphi(P,Q)+\varphi(P,R).\end{aligned}$$

• La forme hermitienne ϕ associée à φ est positive :

$$\phi(P)=\sum_{k=0}^{n}\overline{P(a_k)}P(a_k)=\sum_{k=0}^{n}|P(a_k)|^2\geqslant 0.$$

• ϕ est définie, car, si $\phi(P)=0,$ alors

$$\forall k\in\{0,\ldots,n\}\quad P(a_k)=0,$$

donc le polynôme P, de degré $\leqslant n,$ s'annule en $n+1$ points deux à deux distincts, d'où $P=0$.

On conclut que φ est un produit scalaire.

b) Considérons les polynômes d'interpolation de Lagrange sur les abscisses $a_0,\ldots,a_n$ (cf. 1.3.3 2) p. 18) :

$$\forall p\in\{0,\ldots,n\},\ \ L_p=\frac{\displaystyle\prod_{q\neq p}(\mathrm{X}-a_q)}{\displaystyle\prod_{q\neq p}(a_p-a_q)}.$$

On a :

• $\forall p\in\{0,\ldots,p\},\ \ L_p\in E$

• $\forall(p,q)\in E^2,$

$$\begin{aligned}\varphi(L_p,L_q) &= \sum_{k=0}^{n}\overline{L_p(a_k)}L_q(a_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\overline{L_p(a_k)}\delta_{p,q}\\ &= \overline{L_p(a_q)}=\overline{\delta_{p,q}}=\delta_{p,q},\end{aligned}$$

et on conclut que $(L_p)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est une b.o.n. de E.

Réponse : Une base orthonormale de E est la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange sur les abscisses $a_0,\ldots,a_n$.

5.2.16

• Soit $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k v_k=0.$

On a, pour tout $p\in\{1,\ldots,n\}$:

$$\begin{aligned}0 &= \left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k v_k\,\middle|\,e_p\right)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(v_k\,|\,e_p)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(u_k+e_k\,|\,e_p)=\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(u_k\,|\,e_p)\right)+\alpha_p,\end{aligned}$$

d'où :

$$\alpha_p=-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(u_k\,|\,e_p).$$

D'après l'inégalité de Cauchy et Schwarz et l'inégalité triangulaire, on a alors :

$$\begin{aligned}|\alpha_p| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(u_k\,|\,e_p)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|\,|(u_k\,|\,e_p)|\\ &\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|\,||u_k||\,||e_p||=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|\,||u_k||.\end{aligned}$$

Il existe $q\in\{1,\ldots,n\}$ tel que $|\alpha_q|=\displaystyle\operatorname*{Max}_{1\leqslant k\leqslant n}|\alpha_k|.$

On a alors :

$$|\alpha_q|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|\,||u_k||\leqslant|\alpha_q|\sum_{k=1}^{n}||u_k||,$$

c'est-à-dire :

$$|\alpha_q|\left(1-\sum_{k=1}^{n}||u_k||\right)\leqslant 0.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}||u_k||<1,$ il en résulte $|\alpha_q|=0,$ puis, par définition de q, $\forall p\in\{1,\ldots,n\},\ \ \alpha_p=0,$ ce qui établit que la famille $(v_1,\ldots,v_n)$ est libre.

• Puisque $(v_1,\ldots,v_n)$ est libre et que $\dim(E)=n,$ on conclut que $(v_1,\ldots,v_n)$ est une base de E.

Chapitre 6

6.1.1

a) Une représentation paramétrique de l'enveloppe est :

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ y=\frac{2t}{1+t^2}\ ;$$

la reconnaître en notant $\theta=\operatorname{Arctan}t$.

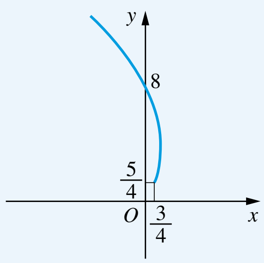
Réponse : Le cercle de centre O et de rayon 1.

b) Simplifier l'équation de D_t par le changement de variable $u=\operatorname{ch}2t$. Une représentation paramétrique de l'enveloppe est :

$$x=2u-u^2,\quad y=2u+u^2,\quad u\in[1;+\infty[.$$

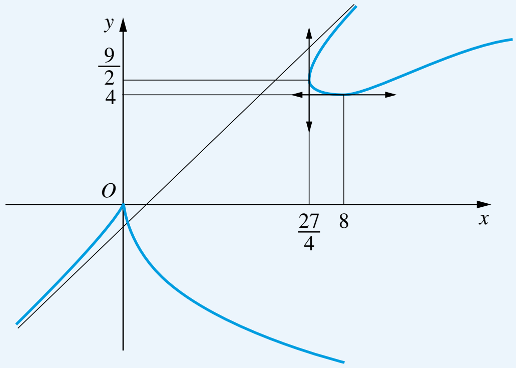
Réponse : Le morceau de parabole défini par :

$$(x+y)^2+8(x-y)=0\ \text{ et } x+y-2\geqslant 0\,.$$



c) **Réponse :** Une représentation paramétrique de l'enveloppe est :

$$x=\frac{t^3}{t-1},\ y=\frac{t^2}{t-1},\ t\in\mathbb{R}-\{1\}\,.$$



6.1.2

Choisir un repère orthonormé dans lequel $D\ :\ y=b$,

$$C : x^2+y^2=a^2,\ (a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+.$$

Alors $\Gamma:\ \ (x-\lambda)^2+(y-c)^2=R^2$, où $c\in\mathbb{R}$ est fixé, et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Former une équation de la corde commune, en étudiant sa réalité :

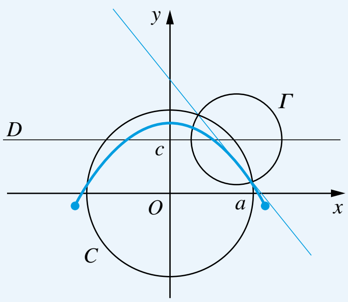
$$\begin{cases} 2\lambda x+2cy-(\lambda^2+c^2+a^2-R^2)=0\\ R^2-2aR\leqslant\lambda^2\leqslant R^2+2aR.\end{cases}$$

Réponse : Le morceau de la parabole

$$x^2+2cy-c^2-a^2+R^2=0$$

limité par la relation

$$R^2-2aR+a^2-c^2\leqslant x^2\leqslant R^2+2aR+a^2-c^2.$$

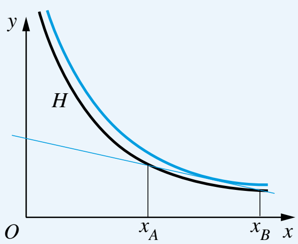


6.1.3

En notant $A\left(\lambda,\dfrac{1}{\lambda}\right)$, $B\left(2\lambda,\dfrac{1}{2\lambda}\right)$, l'équation de (AB) est :

$$-x+3\lambda-2\lambda^2y=0.$$

Réponse : L'hyperbole d'équation $\ xy=\dfrac{9}{8}$.



6.1.4

En notant $P(\lambda,0)$ et $Q(0,\mu)$, on a :

$$\begin{aligned}(AP)\perp(BQ) &\iff a(\lambda-a)+b(\mu-b)=0\\ &\iff \mu=\frac{a^2+b^2-a\lambda}{b}.\end{aligned}$$

Une EC de (PQ) est : $\quad \mu x+\lambda y-\lambda\mu=0$,

c'est-à-dire :

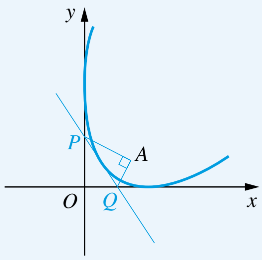
$$(a^2+b^2-a\lambda)x+b\lambda y-\lambda(a^2+b^2-a\lambda)=0.$$

On obtient une EC de l'enveloppe en éliminant λ dans :

$$\begin{cases} D_\lambda\ :\ (a^2+b^2-a\lambda)x+b\lambda y-\lambda(a^2+b^2-a\lambda)=0\\ D'_\lambda\ :\ -ax+by-(a^2+b^2-2a\lambda)=0.\end{cases}$$

Réponse : L'enveloppe de (PQ) est la parabole d'équation cartésienne :

$$(by-ax)^2-2(a^2+b^2)(by+ax)+(a^2+b^2)^2=0.$$

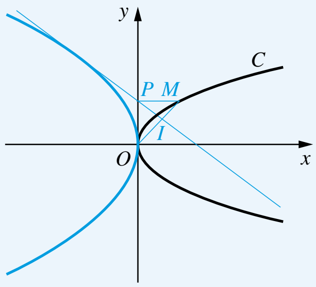


6.1.5

En notant $M\left(\dfrac{t^2}{2p},t\right)$, une équation de (IP) est :

$$2px+ty-t^2=0.$$

Réponse : La parabole d'équation $y^2=-8px$.

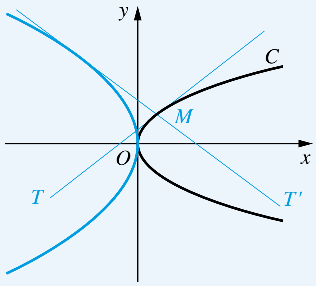


6.1.6

En notant $M\left(\dfrac{t^2}{2p},t\right)$, une équation de T' est :

$$px+ty-\frac{3t^2}{2}=0.$$

Réponse : La parabole d'équation $y^2=-6px$.



6.1.7

Former une équation cartésienne de la médiatrice D_t de (PQ) :

$$M(x,y) \in D_t \iff (x-\cos t)^2 + y^2 = x^2 + (y-\sin t)^2$$
$$\iff 2x\cos t - 2y\sin t = \cos 2t.$$

On obtient une RP de l'enveloppe de D_t en résolvant le système d'équations :

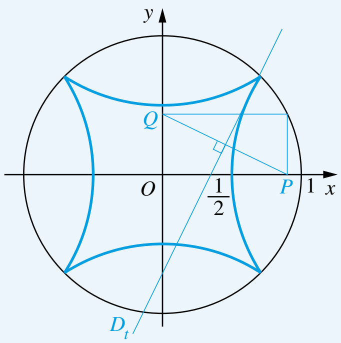
$$\begin{cases} D_t : x\cos t - y\sin t = \dfrac{1}{2}\cos 2t \\ D'_t : x\sin t + y\cos t = \sin 2t. \end{cases}$$

Réponse : L'enveloppe est l'arc paramétré

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}(3\cos t - \cos 3t) \\ y = \dfrac{1}{4}(3\sin t + \sin 3t). \end{cases}$$

Le changement de paramètre $u = t - \dfrac{\pi}{4}$ et le changement de repère orthonormé direct défini par $\measuredangle(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ permet de reconnaître l'astroïde de RP :

$$X = \cos^3 u,$$
$$Y = \sin^3 u.$$



6.1.8

Former l'équation aux x des points d'intersection d'une droite D, d'équation $y = mx + p$, et de E :

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mpx + a^2(p^2 - b^2) = 0.$$

Il s'agit de deux points réels, de milieu d'abscisse d, si et seulement si :

$$\begin{cases} \dfrac{a^2mp}{b^2 + a^2m^2} = -d \\ (a^2mp)^2 - a^2(b^2 + a^2m^2)(p^2 - b^2) \geqslant 0. \end{cases}$$

Une équation de la corde est donc :

$$a^2(x-d)m^2 - a^2ym - b^2d = 0.$$

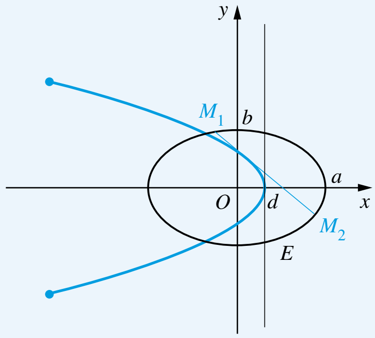
Réponse : Le morceau de la parabole d'équation

$$a^2y^2 + 4b^2d(x-d) = 0,$$

limité par la condition

$$|y| \leqslant \frac{2bd|x-d|}{a\sqrt{a^2-d^2}}$$

(si $|d| \geqslant a$, l'enveloppe est vide).



6.1.9

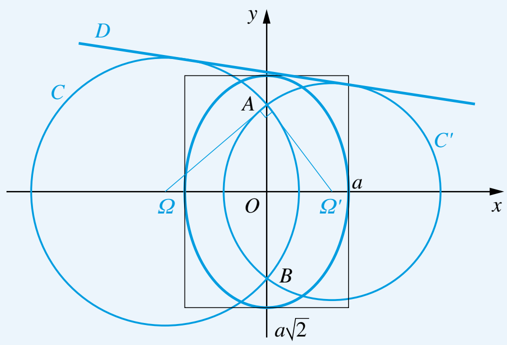
Dans un repère orthonormé convenable, les deux points fixes sont $A(0,a)$, $B(0,-a)$, et les deux cercles C, C' ont pour centres $\Omega(\lambda a, 0)$, $\Omega'\left(-\dfrac{a}{\lambda}, 0\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et pour rayons R, R' définis par :

$$R^2 = a^2(1+\lambda^2), \quad R'^2 = a^2\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Une droite D, d'équation $ux + vy + h = 0$, est tangente à C si et seulement si $d(\Omega, D) = R$.

En déduire que D est tangente à C et C' si et seulement si :

$$\begin{cases} (u\lambda a + h)^2 = a^2(1+\lambda^2)(u^2+v^2) \\ \left(-\dfrac{ua}{\lambda} + h\right)^2 = a^2\left(1 + \dfrac{1}{\lambda^2}\right)(u^2+v^2). \end{cases}$$



L'élimination de λ fournit $a^2(u^2 + 2v^2) = h^2$ (ce qui constitue l'*équation tangentielle* de l'enveloppe). Le paramétrage $u = \dfrac{h}{a}\cos\theta$, $v = \dfrac{h}{a\sqrt{2}}\sin\theta$ donne, pour équation de D : $x\cos\theta + \dfrac{y}{\sqrt{2}}\sin\theta + a = 0$.

Réponse : L'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{2a^2} = 1$.

6.1.10

a) α) Soient D une droite $ux + vy + h = 0$ son équation. L'équation aux t des points de $D \cap C_\lambda$ est :

$$ut^3 + 3vt^2 - (3u+h)t + (h\lambda - v) = 0.$$

Cette équation admet une racine triple si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} ut^3 + 3vt^2 - (3u+h)t + (h\lambda - v) = 0 \\ 3ut^2 + 6vt - (3u+h) = 0 \\ ut + v = 0. \end{cases}$$

L'élimination de t fournit

$$\left\{\begin{array}{l} 2v^3 + (3u+h)uv + (h\lambda - v)u^2 = 0 \\ 3v^2 + (3u+h)u = 0 \end{array}\right|,$$

qui se ramène à $\left\{\begin{array}{l} v = -3u\lambda \\ h = -3u(1+9\lambda^2) \end{array}\right|$,

en montrant $u \neq 0$ et $h \neq 0$.

Ainsi, la droite d'inflexion a pour équation :

$$x - 3\lambda y - 3(1+9\lambda^2) = 0.$$

$\beta)$ **Réponse :** La parabole d'équation $y^2 = -12(x-3)$.

b) $\alpha)$ Montrer d'abord $\dfrac{y}{x} \underset{t\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{3}{t} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

Puis $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1-3t^2}{3t-t^3} \underset{t\to\lambda}{\longrightarrow} \dfrac{1-3\lambda^2}{3\lambda-\lambda^3}$,

et montrer

$$y - \frac{1-3\lambda^2}{3\lambda-\lambda^3}\,x \underset{t\to\lambda}{\longrightarrow} -\frac{3(1+\lambda^2)^2}{3\lambda-\lambda^3}.$$

Réponse : $\Delta_\lambda \left| \; y = \dfrac{1-3\lambda^2}{3\lambda-\lambda^3}\,x - \dfrac{3(1+\lambda^2)^2}{3\lambda-\lambda^3} \right.$

$\beta)$ **Réponse :** L'enveloppe est représentée paramétriquement par :

$$x = \frac{3-6\lambda^2-\lambda^4}{1+\lambda^2}, \quad y = \frac{-8\lambda}{1+\lambda^2}.$$

6.1.11

Dans un repère orthonormé convenable :

$$A(-a,0),\ B(a,0),\ M(a\cos t, a\sin t).$$

Comme $\measuredangle(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AM}) \equiv \dfrac{t}{2}\ [\pi]$, on a les coordonnées de P : $P\left(a, 2a\tan\dfrac{t}{2}\right)$.

De même : $Q\left(-a, 2a\cot\dfrac{t}{2}\right)$.

On forme une EC de (PQ) :

$$\begin{vmatrix} x-a & -1 \\ y - 2a\tan\dfrac{t}{2} & \cot\dfrac{t}{2} - \tan\dfrac{t}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, en notant $u = \tan\dfrac{t}{2}$:

$$(1-u^2)(x-a) + uy - 2au^2 = 0.$$

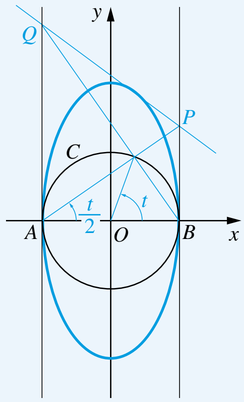
On obtient une EC de l'enveloppe cherchée en éliminant u dans :

$$\left\{\begin{array}{l} (1-u^2)(x-a) + uy - 2au^2 = 0 \\ -2u(x-a) + y - 4au = 0, \end{array}\right.$$

ou encore, en annulant le discriminant du trinôme en u formé par l'équation de (PQ).

Réponse : L'enveloppe de la droite (PQ) est l'ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1.$$



6.1.12

a) Former des équations de (AM') :

$$(\lambda - a)(x-a) + ay = 0,$$

et de $(A'M')$: $\quad (\lambda + a)(x+a) + ay = 0;$

d'où : $\quad M'\left(-\lambda, \dfrac{\lambda^2-a^2}{a}\right)$.

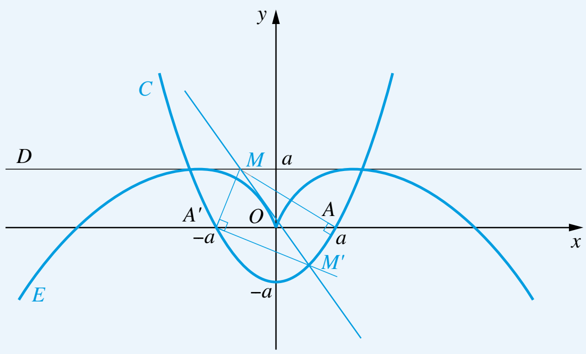
Réponse : La parabole d'équation $x^2 = a(y+a)$.

b) Une équation de (MM') est :

$$(\lambda^2 - 2a^2)(x-\lambda) + 2a\lambda(y-a) = 0.$$

Réponse : L'enveloppe est représentée paramétriquement par :

$$x = \frac{2\lambda^3}{\lambda^2+2a^2}, y = -\frac{\lambda^2(\lambda^2-6a^2)}{2a(\lambda^2+2a^2)}.$$



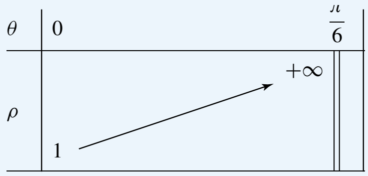
6.1.13

a) • ρ est $\dfrac{2\pi}{3}$-périodique ; on fait varier θ dans un intervalle de longueur $\dfrac{2\pi}{3}$, puis on effectue deux fois la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

• ρ est paire ; on fait varier θ dans $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$, puis on effectue la symétrie par rapport à $x'x$.

• $\rho\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right) = -\rho(\theta)$; on fait varier θ dans $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$, puis on effectue la symétrie par rapport à la droite d'angle polaire $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}$.

•



• **Etude en** $\frac{\pi}{6}$: Par le changement de variable $\varphi = \theta - \frac{\pi}{6}$, on a :

$$Y(\theta) = \rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sin\varphi}{\sin 3\varphi}$$
$$= -\frac{1}{3 - 4\sin^2\varphi} \xrightarrow[\varphi\to 0]{} -\frac{1}{3}^{-}.$$

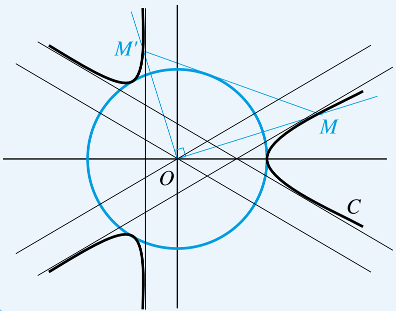
Donc C admet pour asymptote la droite D d'équation $Y = -\frac{1}{3}$ dans le repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$ défini par $\measuredangle(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et, lorsque θ tend vers $\frac{\pi}{6}^{-}$, C se trouve au-dessous de D.

b) Soient $\theta \in \mathbb{R}$, M le point de C d'angle polaire θ, M' le point de C d'angle polaire $\theta + \frac{\pi}{2}$. On a ainsi :

$$M\left(\frac{\cos\theta}{\cos 3\theta}, \frac{\sin\theta}{\cos 3\theta}\right), \quad M'\left(-\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}, \frac{\cos\theta}{\sin 3\theta}\right).$$

En déduire une EC de (MM') : $x\cos 4\theta + y\sin 4\theta = 1$.

Réponse : L'enveloppe des cordes de C vues de O sous un angle droit est le cercle de centre O et de rayon 1 (privé de trois points).



6.1.14

Le point A est obtenu sur Γ pour $\theta = 0$.

On a : $\rho'(\theta) = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\left(1 + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$, donc $\rho'(0) = 0$.

Ainsi, la tangente en A à Γ est parallèle à $y'y$.

On a donc : $R_A = \lim\limits_{\theta\to 0} -\dfrac{y^2}{2(x-1)}$.

$$\text{Et : } -\frac{y^2}{2(x-1)} = -\frac{\rho^2\sin^2\theta}{2(\rho\cos\theta - 1)}$$
$$= -\frac{2\sin^2\theta}{\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(2\cos\theta - 1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$= -\frac{2\theta^2 + o(\theta^2)}{\left(2 - \frac{\theta^2}{8} + o(\theta^2)\right)\left(-\frac{7}{8}\theta^2 + o(\theta^2)\right)} \xrightarrow[\theta\to 0]{} \frac{8}{7}.$$

Ainsi, $R = \frac{8}{7}$, puis $\overrightarrow{AC} = R\overrightarrow{N}$, d'où, comme $\overrightarrow{N} = -\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{AC} = -\frac{8}{7}\overrightarrow{i}$.

Réponse : $C\left(-\frac{1}{7}, 0\right)$.

6.1.15

Le point O est point multiple de Γ, obtenu pour $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ (et, par symétrie par rapport à $y'y$, pour $\theta = -\pi, -\frac{\pi}{2}$) ; les tangentes sont respectivement $x'x$, $y'y$, $x'x$.

On a donc :

$$R_0 = \lim_{\theta\to 0} \frac{x^2}{2y}, \quad R_{\frac{\pi}{2}} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} -\frac{y^2}{2x}, \quad R_\pi = \lim_{\theta\to\pi} \frac{x^2}{2y}.$$

1) **Au voisinage de** $\theta = 0$:

$$\rho = \frac{\sin 2\theta}{2\cos\theta - 1} \underset{\theta\to 0}{\sim} 2\theta, \text{ puis : } \frac{x^2}{2y} = \frac{\rho\cos^2\theta}{2\sin\theta} \xrightarrow[\theta\to 0]{} 1.$$

On a donc $R_0 = 1$, et $C_0(0,1)$.

2) **Au voisinage de** $\theta = \frac{\pi}{2}$:

Notons $u = \theta - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{2}]{} 0$, de sorte que $\theta = \frac{\pi}{2} + u$; puis

$\rho = \dfrac{\sin 2u}{2\sin u + 1} \underset{u\to 0}{\sim} 2u$, et :

$$-\frac{y^2}{2x} = -\frac{\rho\sin^2\theta}{2\cos\theta} = \frac{\rho\cos^2 u}{2\sin u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1.$$

On a donc : $R_{\frac{\pi}{2}} = 1$ et $C_{\frac{\pi}{2}}(-1,0)$.

3) **Au voisinage de** $\theta = \pi$:

Notons $v = \theta - \pi$, d'où $\rho = -\dfrac{\sin 2v}{2\cos v + 1} \underset{v\to 0}{\sim} -\dfrac{2v}{3}$,

et : $\dfrac{x^2}{2y} = \dfrac{\rho\cos^2\theta}{2\sin\theta} = -\dfrac{\rho\cos^2 v}{2\sin v} \xrightarrow[v\to 0]{} \dfrac{1}{3}$.

On a donc : $R_\pi = \frac{1}{3}$, et $C_\pi\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

$$\textbf{Réponse : } \begin{cases} R_0 = 1, & C_0(0,1) \\ R_{\frac{\pi}{2}} = 1, & C_{\frac{\pi}{2}}(-1,0) \\ R_\pi = \frac{1}{3}, & C_\pi\left(0, \frac{1}{3}\right). \end{cases}$$

6.1.16

Le point courant M de Γ est paramétré par :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{array}\right|, t \in \mathbb{R}.$$

On a calculé les coordonnées du centre de courbure C en M à Γ dans l'exemple de 6.1.4 p. 220 : $\begin{cases} x_C = \frac{3}{2}\cos^3 t \\ y_C = -3\sin^3 t. \end{cases}$

D'où les coordonnées de P :

$$\begin{cases} x = 2x_M - x_C = 4\cos t - \frac{3}{2}\cos^3 t \\ y = 2y_M - y_C = 2\sin t + 3\sin^3 t. \end{cases}$$

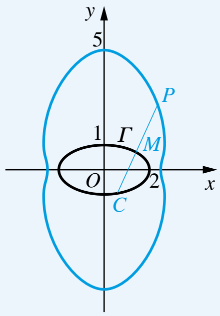
On a :

$$\begin{cases} x' = -4\sin t + \dfrac{9}{2}\cos^2 t \sin t \\ \quad = -\sin t\left(4 - \dfrac{9}{2}\cos^2 t\right) \\ y' = 2\cos t + 9\sin^2 t \cos t = \cos t(2 + 9\sin^2 t). \end{cases}$$

On peut limiter l'étude à $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Notons $t_0 = \operatorname{Arccos}\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

t	0		t_0		$\frac{\pi}{2}$
x'	0	$+$	0	$-$	
x	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	0
y	0		$\nearrow$		5
y'			$+$		0



6.1.17

Effectuons un changement de r.o.n.d. par rotation d'angle $\theta = -\operatorname{Arctan}\lambda$; les formules de changement de repère sont : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$,

d'où l'équation de Γ_λ dans le nouveau repère :

$$\cos\theta\Big(-2\lambda X + (1-\lambda^2)Y\Big)^2 - (1+\lambda^2)Y = 0.$$

Comme $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, on obtient :

$$\Gamma_\lambda : \quad \Big(-2\lambda X + (1-\lambda^2)Y\Big)^2 - (1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}Y = 0.$$

Comme Γ_λ est tangente en O à $X'X$, on a $Y = \underset{X\to 0}{o}(X)$, d'où :

$$(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}Y = \Big(-2\lambda X + (1-\lambda^2)Y\Big)^2 \underset{X\to 0}{\sim} 4\lambda^2 X^2,$$

et donc : $R = \lim\limits_{X\to 0}\dfrac{X^2}{2Y} = \dfrac{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{8\lambda^2}$.

Le centre de courbure C_λ en O à Γ_λ a pour coordonnées dans $(O; X, Y)$: $X = 0$, $Y = \dfrac{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{8\lambda^2}$, et donc, dans le repère initial :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{8\lambda^2}\cdot\dfrac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \dfrac{1+\lambda^2}{8\lambda} \\ y = \dfrac{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{8\lambda}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \dfrac{1+\lambda^2}{8\lambda^2}, \end{cases}$$

ce qui fournit une RP du lieu cherché.

On obtient une EC en éliminant t.

Réponse : Le lieu cherché a pour EC :

$$8x^2y - (x^2+y^2) = 0, \quad x > 0.$$

6.1.18

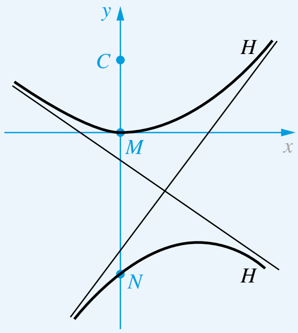
Choisissons un repère orthonormé direct de centre M et d'axe $x'x$ tangent en M à H.

L'équation de H est de la forme :

$$a(x^2-y^2) + 2bxy + cy = 0$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$, $c \neq 0$.

En déduire $N\left(0, \dfrac{c}{a}\right)$. D'autre part, $\overline{MC} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2y}$ et $\dfrac{x^2}{2y} = \dfrac{y}{2} - \dfrac{b}{a}x - \dfrac{c}{2a}$, d'où $\overline{MC} = -\dfrac{c}{2a}$.



6.1.19

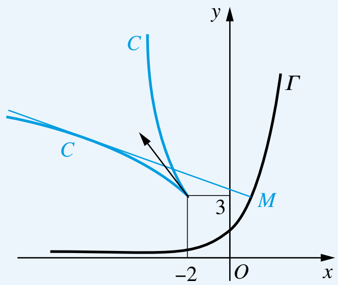
a) $s'(x) = \sqrt{1+e^{2x}}$, $\overrightarrow{T} = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}(\overrightarrow{i} + e^x\overrightarrow{j})$,

$\overrightarrow{N} = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}(-e^x\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$, $\tan\varphi = e^x$,

$\varphi'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$, $R = (1+e^{2x})^{3/2}e^{-x}$.

Réponse : C admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X = x - 1 - e^{2x} \\ X = 2e^x + e^{-x} \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



b) $x'(t) = a(1-\cos t)$, $y'(t) = a\sin t$,

$s'(t) = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$; $\overrightarrow{T} = \varepsilon(t)\left(\sin\frac{t}{2}\overrightarrow{i} + \cos\frac{t}{2}\overrightarrow{j}\right)$,

$\overrightarrow{N} = \varepsilon(t)\left(-\cos\frac{t}{2}\overrightarrow{i} + \sin\frac{t}{2}\overrightarrow{j}\right)$,

où $\varepsilon(t) = \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{t}{2}\right)$;

$\tan\varphi = \operatorname{cotan}\frac{t}{2}$, $\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$, $R = -4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$.

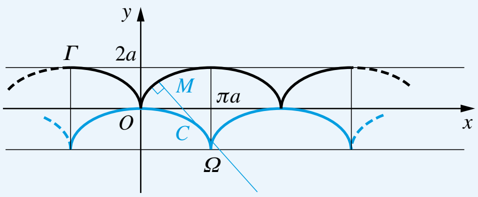
On déduit les coordonnées de C :

$$\begin{cases} X = a(t-\sin t) + 4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\varepsilon(t)\cos\frac{t}{2} \\ \quad = a(t+\sin t) \\ X = a(1-\cos t) - 4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\varepsilon(t)\sin\frac{t}{2} \\ \quad = -a(1-\cos t). \end{cases}$$

Prendre pour nouvelle origine $\Omega(\pi a, -2a)$, et pour nouveau paramètre $u = \pi - t$.

Réponse :

C est la cycloïde translatée de Γ par $\pi a\overrightarrow{i} - 2a\overrightarrow{j}$.



c) $M(\varepsilon a\,\mathrm{ch}\,t, b\,\mathrm{sh}\,t)$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$;

$s'(t) = \sqrt{a^2\mathrm{sh}^2 t + b^2\mathrm{ch}^2 t}$, $\tan\varphi = \varepsilon\,\frac{b}{a}\coth t$,

$\varphi'(t) = -\dfrac{\varepsilon ab}{a^2\mathrm{sh}^2 t + b^2\mathrm{ch}^2 t}$,

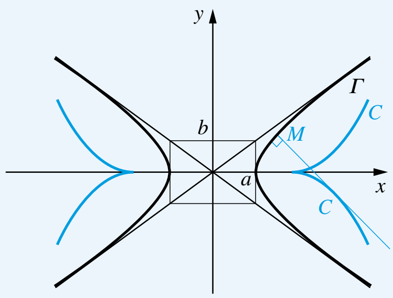
$R = -\dfrac{(a^2\mathrm{sh}^2 t + b^2\mathrm{ch}^2 t)^{3/2}}{\varepsilon ab}$,

$\overrightarrow{T} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2\mathrm{sh}^2 t + b^2\mathrm{ch}^2 t}}(\varepsilon a\,\mathrm{sh}\,t\,\overrightarrow{i} + b\,\mathrm{ch}\,t\,\overrightarrow{j})$,

$\overrightarrow{N} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2\mathrm{sh}^2 t + b^2\mathrm{ch}^2 t}}(-b\,\mathrm{ch}\,t\,\overrightarrow{i} + \varepsilon a\,\mathrm{sh}\,t\,\overrightarrow{j})$.

Réponse : Une représentation paramétrique de C est :

$$X = \varepsilon\,\frac{a^2+b^2}{a}\,\mathrm{ch}^3 t, \quad Y = -\frac{a^2+b^2}{b}\,\mathrm{sh}^3 t, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}$$



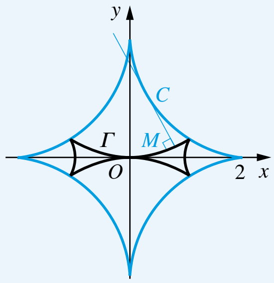
d) $s'(t) = |3\cos^2 t - 1|$, $R = |3\cos^2 t - 1|$,

$\overrightarrow{T} = \varepsilon(t)(-\sin t\,\overrightarrow{i} + \cos t\,\overrightarrow{j})$,

où $\varepsilon(t) = \operatorname{sgn}(3\cos^2 t - 1)$.

Réponse : La développée C de Γ est l'astroïde représentée paramétriquement par :

$$x = 2\sin^3 t, \quad y = 2\cos^3 t.$$



e) • $x' = -3a\cos^2 t\sin t$, $y' = 3a\sin^2 t\cos t$,

$s' = 3a\sin t\cos t$ (pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$)

• $\tan\varphi = \dfrac{y'}{x'} = -\tan t$, $\varphi \equiv -t\ [\pi]$, $\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{d}t$

• $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = -3a\cos t\sin t$

• $\overrightarrow{T} = -\cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{N} = -\sin t\,\overrightarrow{i} - \cos t\,\overrightarrow{j}$

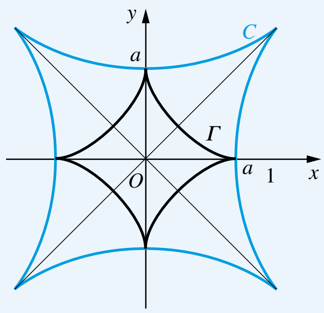
• C : $\begin{cases} X = a\cos^3 t + 3a\cos t\sin^2 t \\ Y = a\sin^3 t + 3a\cos^2 t\sin t. \end{cases}$

En prenant comme nouveau r.o.n.d.

$\left(O; \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}), \frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})\right)$, obtenu par rotation de $\frac{\pi}{4}$, C admet comme RP, avec $u = t - \frac{\pi}{4}$:

$$X = 2a\cos^3 u, \quad Y = 2a\sin^3 u.$$

Réponse : C est l'astroïde obtenue à partir de Γ par la similitude de centre O, de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{4}$.



f) • $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$, $\rho' = -\dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$,

$s'^2 = \rho^2 + \rho'^2 = \dfrac{1}{\cos 2\theta}$, $s' = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}$

• $\overrightarrow{T} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\rho(\theta)\overrightarrow{u(\theta)}\right)$

$= \sqrt{\cos 2\theta}\left(\rho'(\theta)\overrightarrow{u(\theta)} + \rho(\theta)\overrightarrow{v(\theta)}\right)$

$$= \sqrt{\cos 2\theta}\left(-\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,\overrightarrow{u(\theta)} + \sqrt{\cos 2\theta}\,\overrightarrow{v(\theta)}\right)$$

$$= -\sin 2\theta\,\overrightarrow{u(\theta)} + \cos 2\theta\,\overrightarrow{v(\theta)} = \overrightarrow{u\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right)},$$

$$\varphi \equiv 3\theta + \frac{\pi}{2}\ [2\pi],\quad \overrightarrow{N} = \overrightarrow{u(3\theta+\pi)} = -\overrightarrow{u(3\theta)}$$

• $\mathrm{d}\varphi = 3\,\mathrm{d}\theta,\quad R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\,\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\varphi} = \dfrac{1}{3\sqrt{\cos 2\theta}}$

• $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N}$

$$= \sqrt{\cos 2\theta}\ \overrightarrow{u(\theta)} - \frac{1}{3\sqrt{\cos 2\theta}}\ \overrightarrow{u(3\theta)},$$

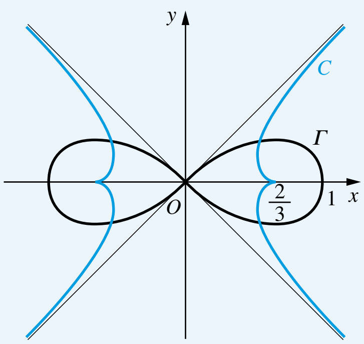
d'où les coordonnées (X,Y) de C dans $(O;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

$$X = \sqrt{\cos 2\theta}\,\cos 2\theta - \frac{\cos 3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$= \frac{3\cos 2\theta\cos\theta - \cos 3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{2\cos^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$Y = \sqrt{\cos 2\theta}\,\sin\theta - \frac{\sin 3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$= \frac{3\cos 2\theta\sin\theta - \sin 3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}} = -\frac{2\sin^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}.$$



Réponse : La développée C de Γ admet la RP :

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\cos^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}} \\[2ex] y = -\dfrac{2\sin^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}. \end{cases}$$

g) Passer par les complexes : $z = x + \mathrm{i}y = p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{p}} - q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{q}}$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{p}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{q}}\right)$$

$$= \left(-2\sin\left(\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\frac{t}{2}\right)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\frac{t}{2}}.$$

Ceci montre :

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \quad\text{et}\quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -2\varepsilon\sin\left(\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\frac{t}{2}\right),$$

où $\varepsilon = \operatorname{sgn}\left(-2\sin\left(\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)\dfrac{t}{2}\right)\right).$

Les vecteurs $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ ont pour affixes respectives :

$$\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\frac{t}{2}},\quad \mathrm{i}\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\frac{t}{2}}.$$

Enfin : $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = -\dfrac{4\varepsilon pq}{p+q}\sin\left(\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)\dfrac{t}{2}\right).$

On en déduit l'affixe ζ du centre de courbure :

$\zeta = z + R\varepsilon\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\frac{t}{2}},$

et finalement $\quad \zeta = \dfrac{p-q}{p+q}\left(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{p}} + q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{q}}\right).$

Réponse : Une représentation paramétrique de C est :

$$x = \frac{p-q}{p+q}\left(p\cos\frac{t}{p} + q\cos\frac{t}{q}\right),$$

$$y = \frac{p-q}{p+q}\left(p\sin\frac{t}{p} + q\sin\frac{t}{q}\right).$$

h) $\left(s'(\theta)\right)^2 = \left(\rho(\theta)\right)^2 + \left(\rho'(\theta)\right)^2 = 4a^2\cos^2\dfrac{\theta}{2},$

d'où $\quad s'(\theta) = 2\varepsilon a\cos\dfrac{\theta}{2},\quad$ où $\ \varepsilon = \operatorname{sgn}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\right).$

En notant $\overrightarrow{u} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{u})$, on a :

$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u},\quad \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta} = \rho'\overrightarrow{u} + \rho\overrightarrow{v},$

d'où $\quad \overrightarrow{T} = \varepsilon\left(-\sin\dfrac{\theta}{2}\overrightarrow{u} + \cos\dfrac{\theta}{2}\overrightarrow{v}\right),$

$$\overrightarrow{N} = -\varepsilon\left(\cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u} + \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{v}\right).$$

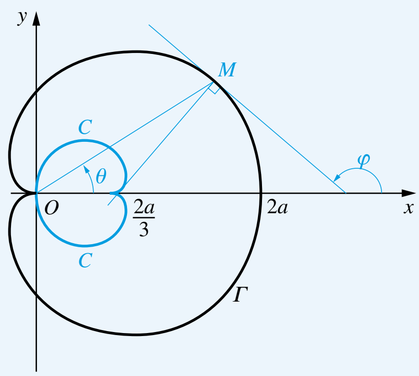
D'autre part, $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'} = -\mathrm{cotan}\,\dfrac{\theta}{2},\quad \varphi = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3\theta}{2}\ [\pi],$

donc $\ \mathrm{d}\varphi = \dfrac{3}{2}\,\mathrm{d}\theta,\ R = \dfrac{4a}{3}\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$. On déduit :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N} = \frac{a}{3}(1+\cos\theta)\overrightarrow{u} - \frac{2a}{3}\sin\theta\,\overrightarrow{v}$$

$$= \frac{2a}{3}\overrightarrow{i} + \frac{a}{3}\cos\theta(1-\cos\theta)\,\overrightarrow{i}$$

$$+ \frac{a}{3}\sin\theta(1-\cos\theta)\,\overrightarrow{j}.$$



Réponse : La développée de la cardioïde Γ d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$ est la cardioïde C d'équation polaire $\rho = \dfrac{a}{3}(1-\cos\theta)$ dans le repère $(A;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où A a pour coordonnées $\left(\dfrac{2a}{3}, 0\right)$ dans le repère $(O;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Ainsi $C = t \circ h(\Gamma)$ où h est l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{1}{3}$, et t est la translation de vecteur $\dfrac{2a}{3}\overrightarrow{i}$.

i) En notant $\overrightarrow{u} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$

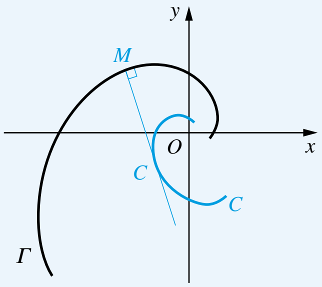
et $\overrightarrow{v} = -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j}$,

on obtient $\overrightarrow{N} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(-\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v})$, $\tan V = \dfrac{1}{\lambda}$

d'où $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\theta$, $R = a\sqrt{1+\lambda^2}\mathrm{e}^{\lambda\theta}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N} = a\lambda\mathrm{e}^{\lambda\theta}\overrightarrow{v}\\ &= \lambda\mathrm{e}^{-\frac{\lambda\pi}{2}}\rho\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{u}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$



Réponse : La développée de la spirale logarithmique Γ d'équation polaire $\rho = a\mathrm{e}^{\lambda\theta}$ est la spirale logarithmique C déduite de Γ par la similitude directe de centre O, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, de rapport $\lambda\mathrm{e}^{-\frac{\lambda\pi}{2}}$, ou encore, dans l'homothétie de centre O et de rapport λ.

6.1.20

• Développée C_1 de C_0 :

$s'(t) = 2\,\mathrm{ch}\,t$, $\overrightarrow{T} = \cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j}$,

$\overrightarrow{N} = -\sin t\,\overrightarrow{i} + \cos t\,\overrightarrow{j}$, $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t$, $R = 2\mathrm{ch}\,t$;

le centre de courbure C_1 de C_0 en M a pour coordonnées $X_1 = \cos t\,\mathrm{sh}\,t - \sin t\,\mathrm{ch}\,t$, $Y_1 = \sin t\,\mathrm{sh}\,t + \cos t\,\mathrm{ch}\,t$.

• Développée C_2 de C_1 :

$s'(t) = 2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,t$ où $\varepsilon = \mathrm{sgn}(t)$,

$\overrightarrow{N} = -\varepsilon(\cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j})$, $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t$, $R = 2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,t$;

le centre de courbure C_2 de C_1 en C_1 a pour coordonnées

$$X_2 = -(\sin t\,\mathrm{ch}\,t + \cos t\,\mathrm{sh}\,t),$$

$$Y_2 = -\sin t\,\mathrm{sh}\,t + \cos t\,\mathrm{ch}\,t.$$

Réponse : En notant $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des développées successives de C_0, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$C_{4p} = C_0 : \quad \begin{cases} x = \sin t\,\mathrm{ch}\,t + \cos t\,\mathrm{sh}\,t \\ y = \sin t\,\mathrm{sh}\,t - \cos t\,\mathrm{ch}\,t \end{cases}$$

$$C_{4p+1} = C_1 : \quad \begin{cases} x = \cos t\,\mathrm{sh}\,t - \sin t\,\mathrm{ch}\,t \\ y = \sin t\,\mathrm{sh}\,t + \cos t\,\mathrm{ch}\,t \end{cases}.$$

C_{4p+2} est la symétrique de C_{4p} par rapport à $y'y$

C_{4p+3} est la symétrique de C_{4p+1} par rapport à $y'y$.

Remarque : On peut aussi passer par les complexes.

6.1.21

Choisissons un repère orthonormé direct pour lequel la direction fixe soit celle de $x'x$. La courbe Γ est l'enveloppe de la famille de droites (D_θ) : $x\cos\theta + y\sin\theta = p(\theta)$, d'où les coordonnées de M :

$$\begin{aligned} x_M &= p(\theta)\cos\theta - p'(\theta)\sin\theta,\\ y_M &= p(\theta)\sin\theta + p'(\theta)\cos\theta.\end{aligned}$$

La développée C de Γ est l'enveloppe de la famille de droites (D'_θ) : $-x\sin\theta + y\cos\theta = p'(\theta)$, et le point C_2 est le point caractéristique de l'enveloppe de la famille de droites (D''_θ) : $x\cos\theta + y\sin\theta = -p''(\theta)$, d'où les coordonnées de C_2 :

$$x_{C_2} = -p''(\theta)\cos\theta - p^{(3)}(\theta)\sin\theta,$$

$$y_{C_2} = -p''(\theta)\sin\theta - p^{(3)}(\theta)\cos\theta.$$

La condition $y_M = y_{C_2}$ se traduit par l'équation différentielle $q(\theta)\sin\theta + q'(\theta)\cos\theta = 0$, où $q = p + p''$. La solution générale (sur un intervalle où cos ne s'annule pas) est $q : \theta \longmapsto 2\lambda\cos\theta$ $(\lambda \in \mathbb{R})$; en déduire p : $p(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta + \lambda\theta\sin\theta$.

Calculer enfin x_M et y_M :

$$x_M = A - \frac{\lambda}{2}(1-\cos 2\theta), \quad y_M = B + \frac{\lambda}{2}(2\theta + \sin 2\theta).$$

Réponse : Γ est une *cycloïde*.

6.1.22

En paramétrant C par :

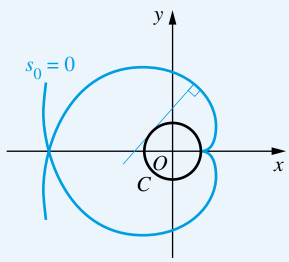
$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t,$$

on obtient :

$$s'(t) = R, \quad \overrightarrow{T} = -\sin t\,\overrightarrow{i} + \cos t\,\overrightarrow{j},$$

d'où une représentation paramétrique des développantes de C.

Réponse : $\begin{cases} X = R\cos t - (s_0 - Rt)\sin t \\ Y = R\sin t + (s_0 - Rt)\cos t \end{cases}$, $s_0 \in \mathbb{R}$ fixé.



6.1.23

a) • On a : $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 6\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t \\ y'(t) = 6\,\mathrm{sh}^2\mathrm{ch}\,t \end{array}\right|$, d'où $s'(t) = 6\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}^2 t$, puis en intégrant (et $s(0) = 2$ par exemple) :

$$s(t) = 2\,\mathrm{ch}^3 t.$$

• Les développantes de C ont pour RP :

$$\begin{cases} X = x + (\lambda - s)\dfrac{x'}{s'} = \dfrac{\lambda}{\mathrm{ch}\,t} + \mathrm{ch}^2 t - 3 \\ Y = y + (\lambda - s)\dfrac{y'}{s'} = \lambda\,\mathrm{th}\,t - 2\,\mathrm{sh}\,t. \end{cases}$$

Réponse : Les développantes de C sont les courbes $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de RP :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch} t} + \operatorname{ch}^2 t - 3 \\ y = \lambda \operatorname{th} t - 2 \operatorname{sh} t \end{array}\right|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Γ_λ passe par $A(-2,0)$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch} t} + \operatorname{ch}^2 t - 1 = 0 \\ \lambda \operatorname{th} t - 2 \operatorname{sh} t = 0. \end{array}\right.$$

Si $t \neq 0$, on déduit $\lambda = 2 \operatorname{ch} t$, puis $1 + \operatorname{ch}^2 t = 0$, contradiction.

Pour $t = 0$, on obtient $\lambda = 0$.

Ainsi, la courbe cherchée est Γ_0 : $\left\{\begin{array}{l} x = \operatorname{ch}^2 t - 3 \\ y = -2 \operatorname{sh} t \end{array}\right.$.

L'élimination de $\operatorname{sh} t$ (qui décrit $\mathbb{R}$) permet d'obtenir une EC de Γ_0 : $\quad y^2 = 4(x+2)$.

On retrouve ainsi le résultat de 4.2.3 Exemple p. 253.

Réponse : Il existe une développante et une seule de C passant par $A(-2,0)$; il s'agit de la parabole d'équation cartésienne : $y^2 = 4(x+2)$.

6.2.1

Puisque $\mathbb{R}_2[X]$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3, la famille $(P,Q,R,1+X^2)$, qui a 4 éléments, est liée. Il existe donc $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 - \{(0,0,0,0)\}$ tel que :

$$aP + bQ + cR + d(1+X^2) = 0.$$

De plus, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, car $1 + X^2 \neq 0$.

On a alors, pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$a\,x(t) + b\,y(t) + c\,z(t) + d = 0,$$

ce qui montre que Γ est plane, dans le plan d'EC

$$ax + by + cz + d = 0.$$

6.2.2

Notons $\quad \vec{c} = \operatorname{ch} a\,\vec{i} + \operatorname{ch} b\,\vec{j} + \operatorname{ch} c\,\vec{k}$,

$$\vec{s} = \operatorname{sh} a\,\vec{i} + \operatorname{sh} b\,\vec{j} + \operatorname{sh} c\,\vec{k}.$$

On a, pour tout point $M(t)$ de Γ :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \operatorname{ch} t\,\vec{c} + \operatorname{sh} t\,\vec{s},$$

donc Γ est plane, dans le plan (ou la droite) défini(e) par $(O;\vec{c},\vec{s})$. Il est clair que $(\vec{c},\vec{s})$ est liée si et seulement si $a = b = c$.

• Si $a = b = c$, alors, pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{OM(t)} = \operatorname{ch}(t+a)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}).$$

• Sinon, $(\vec{c},\vec{s})$ est libre, et Γ admet pour RP, dans le plan $(O;\vec{c},\vec{s})$: $\quad X = \operatorname{ch} t,\ Y = \operatorname{sh} t,\ t \in \mathbb{R}$.

Réponse : • Si $a = b = c$, alors Γ est la demi-droite d'origine $(1,1,1)$ dirigée et orientée par $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

• Sinon, Γ est une demi-hyperbole.

6.2.3

Soustraire les deux équations, puis factoriser.

Réponse : Γ est la réunion des deux ellipses :

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 - \dfrac{y}{4} = 0 \\ y = z \end{array}\right.,$$

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 + \dfrac{y}{4} + \dfrac{1}{16} = 0 \\ y + z + \dfrac{1}{4} = 0. \end{array}\right.$$

6.2.4

Une droite parallèle à yOz ne coupe Γ qu'en un seul point ; on peut donc supposer que Δ admet un système d'équations $\left\{\begin{array}{l} y = ax + p \\ z = bx + q \end{array}\right|$, $(a,b,p,q) \in \mathbb{R}^4$.

• $\Delta \cap D \neq \varnothing$ se traduit par $\quad (1-b)p = (1-a)q$.

• Δ coupe Γ en deux points disctincts si et seulement si les polynômes $X^2 - aX - p$ et $X^3 - bX - q$ admettent deux zéros réels distincts communs. En utilisant une division euclidienne, on obtient :

$$a^2 + p - b = 0,\quad ap - b = 0,\quad a^2 + 4p > 0.$$

• Eliminer (a,b,p,q) dans :

$(1-b)p = (1-a)q, \quad (p,q) \neq (0,0), \quad a^2 + p - b = 0, \quad ap - b = 0,\ \ a^2 + 4p > 0.$

Réponse : $\ x^2 + y^2 - xy - xz - y + z = 0$.

6.2.5

a) Soit P un plan, d'équation $Ax + By + Cz + D = 0$.

L'équation aux t de $P \cap C$ est :

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Bt + D = 0.$$

Eliminer (A,B,C,D) dans :

$$A\sigma_1 = -B,\quad A\sigma_2 = C,\quad A\sigma_3 = -B,\quad A\sigma_4 = D.$$

Réponse : $\sigma_1 = \sigma_3$.

b) α) et β) Avec $t_1 = t_2$ noté u, et $t_3 = t_4$ noté v, la condition précédente se traduit par :

$$S = 0 \quad \text{ou} \quad P = 1.$$

• Pour $S = 0$ (c'est-à-dire $v = -u$), le plan bitangent a pour équation $x - 2u^2 z + u^4 = 0$; il est parallèle à $y'y$.

• Pour $P = 1$ (et $S^2 \geqslant 4$), le plan bitangent a pour équation : $x - 2Sy + (S^2+2)z + 1 = 0$; il passe par le point fixe de coordonnées $(-1,0,0)$.

γ) • Pour $S = 0$, la corde qui joint $M(u)$ et $M(-u)$ a pour équations $\left\{\begin{array}{l} x = u^4 \\ z = u^2 \end{array}\right.$.

• Pour $P = 1$, la corde qui joint $M(u)$ et $M\left(\dfrac{1}{u}\right)$ a pour milieu le point

$$\left(\frac{1}{2}(S^4 - 4S^2 + 2),\ \frac{1}{2}(S^3 - 2S),\ \frac{1}{2}(S^2 - 2)\right)$$

et est dirigée par le vecteur $(S^3-2S)\overrightarrow{i}+S^2\overrightarrow{j}+S\overrightarrow{k}$. La corde admet donc pour équations :

$$\frac{x-\dfrac{S^3-4S^2+2}{2}}{S^3-2S}=\frac{y-\dfrac{S^3-2S}{2}}{S^2}=\frac{z-\dfrac{S^2-2}{2}}{S}.$$

Eliminer S.

Réponse : La surface demandée est la réunion du demi-cylindre défini par $(x=z^2,\ z\geqslant 0)$ et de la quadrique d'équation $(x+2z+1)z-y^2=0$.

6.2.6

• $x'=-\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}(a\sin at\ \mathrm{ch}\,t+\cos at\ \mathrm{sh}\,t)$,

$y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}(a\cos at\ \mathrm{ch}\,t-\sin at\ \mathrm{sh}\,t)$, $\quad z'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}$,

d'où $\quad s'^2=x'^2+y'^2+z'^2=\dfrac{a^2+1}{\mathrm{ch}^2 t}$, $\quad s'=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{\mathrm{ch}\,t}$.

• $L=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}s'(t)\,\mathrm{d}t=\sqrt{a^2+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,t}$

$=2\sqrt{a^2+1}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,t}\underset{[u=\mathrm{sh}\,t]}{=}2\sqrt{a^2+1}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$

$=\pi\sqrt{a^2+1}$.

Réponse : $L=\pi\sqrt{a^2+1}$.

6.2.7

Γ est paramétrée par $(x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t))$, où $x,y,z:I\longrightarrow\mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur l'intervalle (fermé borné) I. Ainsi :

$$L=\int_I\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

et $\quad l_1+l_2+l_3$

$$=\int_I\sqrt{y'^2+z'^2}+\int_I\sqrt{x'^2+z'^2}+\int_I\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

• En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ usuel à $\left(\sqrt{y'^2+z'^2},\sqrt{x'^2+z'^2},\sqrt{x'^2+y'^2}\right)$ et $(1,1,1)$, on obtient

$$\sqrt{y'^2+z'^2}+\sqrt{x'^2+z'^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}\leqslant\sqrt{6}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

d'où : $\qquad l_1+l_2+l_3\leqslant\sqrt{6}L$.

• Montrer, pour tout $(a,b,c)\in(\mathbb{R}_+)^3$:

$$2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\leqslant\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}.$$

On peut, à cet effet, remarquer :

$$\|(a,b,0)\|+\|(a,0,c)\|+\|(0,b,c)\|\geqslant\|2(a,b,c)\|.$$

En déduire (avec $a=|x'|,\ldots$) : $2L\leqslant l_1+l_2+l_3$.

6.3.1

Réponse : $\ x=8\cos^3\theta\cos^3\varphi$, $\quad y=8\sin^3\theta\cos^3\varphi$, $z=8\sin^3\varphi$, $\quad(\theta,\varphi)\in[-\pi;\pi]\times\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

6.3.2

Utiliser les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ de u,v,w, et $S_k=u^k+v^k+w^k$ $(1\leqslant k\leqslant 3)$; on obtient :

$$x=\sigma_1,\quad y=S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2,$$

$$z=S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

Réponse : $x^3-3xy+2z-6=0$.

6.3.3

Montrer qu'une droite $\varDelta$ parallèle à xOy ne peut rencontrer D_1 et D_2. En notant alors $\varDelta:\left\{\begin{array}{l}x=az+p\\ y=bz+q\end{array}\right|$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l}\varDelta\cap D_1\neq\varnothing\\ \varDelta\cap D_2\neq\varnothing\\ \varDelta\cap D_3\neq\varnothing\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}b+q=-1\\ -a+p=1\\ a(q-1)=b(p+1)\end{array}\right..$$

Montrer $a\neq-1$, puis éliminer a,b,p,q.

Réponse : $xy+xz+yz+1=0$ (hyperboloïde à une nappe, de révolution).

6.3.4

Même méthode que pour l'exercice 6.3.3.

Réponse : $a^2(z+h)(z-h)+h^2xy=0$

(privé des deux droites $(z=-h,\ y=0)$, $(z=h,\ x=0)$).

6.3.5

Soit $\ M\left(\dfrac{t^2}{2},t,0\right)$ (resp. $M'\left(\dfrac{u^2}{3},0,u\right)$) décrivant P (resp. P').

Montrer : $(MM')\ //\ \pi\iff u=-t$;

puis former les équations de (MM'), et éliminer t.

Réponse : $6x-3y^2+5yz-2z^2=0$ ou $\ y=z$.

6.3.6

Soient $M_1\left(at_1,bt_1^3,c(t_1^2+1)\right)$, $M_2\left(at_2,bt_2^3,c(t_2^2+1)\right)$ deux points de Γ, distincts.

Montrer : $\quad(M_1M_2)\ //\ xOy\iff t_2=-t_1$.

Former une représentation paramétrique de (M_1M_2) :

$$x=at_1+\lambda at_1,\ y=bt_1^3+\lambda bt_1^3,\ z=c(t_1^2+1).$$

Eliminer (λ,t_1).

Réponse : $-bxz+bcx+acy=0$.

6.3.7

Soit D une droite de l'espace. Si $D\ //\ yOz$, alors D ne coupe Γ qu'en au plus deux points.

On peut donc supposer $D\not\parallel yOz$. Ainsi, D admet un SEC

$$\left\{\begin{array}{l}y=ax+p\\ z=bx+q\end{array}\right.,\ (a,b,p,q)\in\mathbb{R}^4.$$

Un point $M(t)$ de Γ est sur D si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{l}t^3-t=at^2+p\\ t^4-t=bt^2+q.\end{array}\right.$$

On calcule le reste R de la division euclidienne de $X^4 + bX^2 - X - q$ par $X^3 - aX^2 - X - p$:

$$R = (a^2 - b + 1)X^2 + (a + p - 1)X + ap - q.$$

La droite D rencontre Γ en trois points si et seulement si $R = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a^2 - b + 1 = 0 \\ a + p - 1 = 0 \\ ap - q = 0 \end{cases}, \text{ ce qui revient à } \begin{cases} b = a^2 + 1 \\ p = -a + 1 \\ q = -a^2 + a. \end{cases}$$

Une EC de S est obtenue en éliminant a dans :

$$\begin{cases} y = ax - a + 1 \\ z = (a^2 + 1)x - a^2 + a. \end{cases}$$

Réponse : $x^2 + y^2 - xz - x - y + z = 0$.

6.3.8

$$\begin{cases} z^2 - xy - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z^2 - xy - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

et réciproque du meme genre.

6.3.9

Dans un système d'équations cartésiennes d'une droite de $\mathcal{E}_3$, exprimer, de manière adaptée à l'exemple, deux des trois coordonnées en fonction de la troisième. Ainsi, une droite de $\mathcal{E}_3$, non parallèle au plan xOy, admet un système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$, $(a,b,p,q) \in \mathbb{R}^4$.

Reporter dans l'équation de S et identifier.

Réponses :

a) Les six droites d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = -z \end{cases}$, $\begin{cases} y = -1 \\ x = -z \end{cases}$, $\begin{cases} z = -1 \\ x = -y \end{cases}$.

b) Les deux droites d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

c) La famille de droites d'équations $\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{b^2}{3} \\ z = bx \end{cases}$, $b \in \mathbb{R}$,

et la droite d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

d) Les deux droites d'équations $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$.

6.3.10

a) **Réponse :** • $M(u,v)$ est régulier si et seulement si $u \neq v$.

• $3(u^2 + uv + v^2)\big(X - (u + v)\big)$

$$-3(u+v)(Y - uv) - \big(Z - (u^3 + v^3)\big) = 0,$$

ou encore : $3(u^2 + uv + v^2)X - 3(u + v)Y - Z$

$$-(2u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + 2v^3) = 0.$$

b) **Réponse :** • il y a exactement quatre points non réguliers, correspondant à

$$(u,v) = (1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1).$$

• $u(1 - v^2)(u^2 - v^2)\left(X - \left(u + \dfrac{1}{u}\right)\right)$

$$-v(1 - u^2)(u^2 - v^2)\left(Y - \left(v + \frac{1}{v}\right)\right)$$

$$+uv(1 - u^2)(1 - v^2)\left(Z - \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right)\right) = 0.$$

6.3.11

Pour simplifier les calculs, on peut remarquer que S admet la RP : $\phi : \begin{array}{c} \mathbb{R} \times]0; +\infty[\longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ (t,\theta) \longmapsto (t\ \cos\theta, t\ \sin\theta, t^2) \end{array}$.

On a, pour tout (t,θ) : $\dfrac{\partial\vec{\phi}}{\partial t}(t,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 2t)$,

$$\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial\theta}(t,\theta) = (-t\ \sin\theta, t\ \cos\theta, 0),$$

et la famille $\left(\dfrac{\partial\vec{\phi}}{\partial t}(t,\theta),\ \dfrac{\partial\vec{\phi}}{\partial\theta}(t,\theta)\right)$ est libre, donc tout point de S est régulier.

Le plan tangent à S en $M(t,\theta)$ est parallèle à $\vec{u}\,(1,1,1)$ si et seulement si $\left(\dfrac{\partial\vec{\phi}}{\partial t}(t,\theta), \dfrac{\partial\vec{\phi}}{\partial\theta}(t,\theta), \vec{u}\right)$ est liée, c'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -t\ \sin\theta & 1 \\ \sin\theta & t\ \cos\theta & 1 \\ 2t & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore : $1 - 2t(\cos\theta + \sin\theta) = 0$.

Réponse : La courbe intersection de S avec le plan d'équation $x + y = \dfrac{1}{2}$.

6.3.12

Une équation du plan tangent en un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de S est : $x_0x + y_0y + 2z_0z - 1 = 0$.

Ce plan est perpendiculaire à D si et seulement si :

$$x_0 = \frac{y_0}{3} = -z_0.$$

On obtient $x_0^2 = \dfrac{1}{12}$.

Réponse : Les deux plans d'équations

$$x + 3y - 2z - 2\varepsilon\sqrt{3} = 0,\ \ \varepsilon \in \{-1,1\}.$$

6.3.13

Une équation du plan tangent en un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de S est :

$$y_0x + x_0y - 3z_0^2z + x_0y_0 = 0.$$

Ce plan contient D si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\frac{y_0}{\lambda} = x_0 = z_0^2 = -\frac{x_0y_0}{2\lambda + 3}.$$

En déduire $z_0 = -1$ ou $z_0 = -2$.

Réponse : Les deux plans d'équations

$$x - y + 3z + 1 = 0, \quad x - 2y + 6z + 4 = 0.$$

6.3.14

a) Un plan P, parallèle à xOy, d'équation $z = z_0$ ($z_0 \in [1; +\infty[$) coupe Γ en deux points de paramètres $t_1 = \sqrt{z_0 - 1}$, $t_2 = -t_1$; former une représentation paramétrique de la droite $\big(M(t_1)M(t_2)\big)$.

Réponse : Une représentation paramétrique de S est : $x = tu$, $y = t^3u$, $z = t^2 + 1$, $(t,u) \in \mathbb{R}^2$; une équation cartésienne de S est : $\quad xz = x + y, \quad z \geqslant 1$.

b) Une équation du plan tangent à S en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de S est :

$$(z_0 - 1)(x - x_0) - (y - y_0) + x_0(z - z_0) = 0.$$

Ce plan passe par O si et seulement si $x_0 + y_0 - 2x_0z_0 = 0$.

Réponse : L'ensemble des points de S en lesquels le plan tangent contient O est la demi-droite d'équations : $x = 0$, $y = 0$, $z \geqslant 1$.

6.3.15

• Pour tout point $M(x,y,z)$ de $\mathcal{E}_3$, on a :

$$M \in S_1 \cap S_2 \iff \begin{cases} y^2(x^2+z^2) = b^2x^2 + a^2z^2 \\ \dfrac{x^2}{c^2-a^2} + \dfrac{y^2}{c^2} + \dfrac{z^2}{c^2-b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y^2 = \dfrac{b^2x^2 + a^2z^2}{x^2+z^2} \\ c^2\left(1 - \dfrac{x^2}{c^2-a^2} - \dfrac{z^2}{c^2-b^2}\right) \\ (x^2+z^2) = b^2x^2 + a^2z^2 \ (1) \end{cases}$$

Et : (1) $\iff \left(\dfrac{x^2}{c^2-a^2} + \dfrac{z^2}{c^2-b^2}\right)$

$$\big((c^2-a^2)(c^2-b^2) - c^2(x^2+z^2)\big) = 0.$$

Comme $0 < a < c < b$, le deuxième facteur ne peut pas s'annuler. On déduit :

$$M \in S_1 \cap S_2 \iff \begin{cases} \dfrac{x^2}{c^2-a^2} = \dfrac{z^2}{b^2-c^2} \\ \dfrac{y^2}{c^2} = 1. \end{cases}$$

Ceci montre que $S_1 \cap S_2$ est formée de quatre droites.

• Notons $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies par, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$:

$$F_1(x,y,z) = y^2(x^2+z^2) - (b^2x^2 + a^2z^2),$$

$$F_2(x,y,z) = \frac{x^2}{c^2-a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2-b^2} - 1.$$

Ces applications sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F_1(x,y,z) = 2\big(x(y^2-b^2),\ y(x^2+z^2),\quad z(y^2-a^2)\big),$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F_2(x,y,z) = 2\left(\frac{x}{c^2-a^2}, \frac{y}{c^2}, \frac{z}{c^2-b^2}\right).$$

Soit $M(x,y,z)$ un point de $S_1 \cap S_2$.

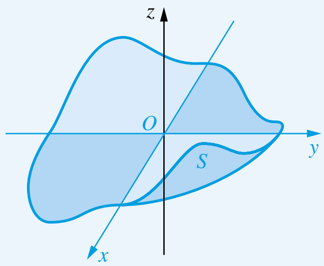
Si $M \neq (0, \pm c, 0)$, alors $\overrightarrow{\text{grad}}\, F_1(M) \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, F_2(M) \neq \overrightarrow{0}$, donc M est un point régulier de S_1 et de S_2. On a :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\text{grad}}\, F_1(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, F_2(M) \\
&\quad = \frac{x^2(y^2-b^2)}{c^2-a^2} + \frac{y^2(x^2+z^2)}{c^2} + \frac{(y^2-a^2)z^2}{c^2-b^2} \\
&\quad = \frac{x^2(c^2-b^2)}{c^2-a^2} + (x^2+z^2) + \frac{(c^2-a^2)z^2}{c^2-b^2} \\
&\quad = (2c^2-a^2-b^2)\left(\frac{x^2}{c^2-a^2} + \frac{z^2}{c^2-b^2}\right) = 0,
\end{aligned}$$

donc les plans tangents en M à S_1 etS_2 sont orthogonaux.

6.3.16

O est un point régulier de S, et le plan tangent en O à S est xOy. Au voisinage de $(0,0)$, $(x,y) \longmapsto y \tan x$ est > 0 ou < 0, selon que $xy > 0$ ou $xy < 0$. Donc, S traverse son plan tangent en O ; le point O est un point-col de S.



6.3.17

a) Une représentation paramétrique de S est :

$$x = a\cos t + \lambda, \quad y = a\sin t,$$
$$z = a\sin t\cos t + \lambda, \quad (t,\lambda) \in \mathbb{R}^2.$$

Eliminer (t,λ).

Réponse : $\quad a^2(x-z)^2 + (a-y)^2y^2 - a^2(a-y)^2 = 0.$

b) Même méthode qu'en *a)*

Réponse : $\ 4x^2 + (y-z)^2 + 4y - 4z - 1 = 0.$

6.3.18

Puisque Γ est plane, dans le plan $x + y + z = a$, les génératrices de S sont parallèles à $\overrightarrow{u}\,(1,1,1)$.

Pour obtenir une EC de S, on élimine (λ, x_0, y_0, z_0) dans :

$$x = x_0 + \lambda, \quad y = y_0 + \lambda, \quad z = z_0 + \lambda,$$
$$x_0y_0z_0 = a^3, \quad x_0 + y_0 + z_0 = a.$$

Réponse :

$$(2x - y - z + a)(-x + 2y - z + a)$$
$$(-x - y + 2z + a) = 27a^3.$$

6.3.19

a) En notant $P = x - y$ et $Q = y - z$, S admet pour équation : $\dfrac{1}{P} + \dfrac{1}{Q} - \dfrac{1}{P+Q} = 0$, donc S est un cylindre.

Cependant, l'équation obtenue se ramène à

$$P^2 + PQ + Q^2 = 0,$$

c'est-à-dire $P = Q = 0$.

Réponse : $S = \varnothing$.

b) En notant $P = x - y$ et $Q = y - z$, S admet pour équation :

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} - \frac{1}{P+Q} = 1,$$

donc S est un cylindre, et les génératrices de S sont parallèles à la droite $\left\{\begin{array}{l} P = 0 \\ Q = 0 \end{array}\right|$, c'est-à-dire dirigées par $\overrightarrow{u}\,(1,1,1)$.

Une section droite de S est obtenue en coupant S par un plan orthogonal à $\overrightarrow{u}$. À cet effet, faisons un changement de r.o.n.d. de façon que $\overrightarrow{u}$ dirige le 3ème axe de coordonnées.

En notant

$$\overrightarrow{K} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}),$$

$$\overrightarrow{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}),$$

$$\overrightarrow{J} = \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{I} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}),$$

le repère $\mathcal{R}' = (O;\ \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ est orthonormé direct. Les formules de changement de repère sont, pour un point M de coordonnées (x,y,z) dans $\mathcal{R}$ et (X,Y,Z) dans $\mathcal{R}'$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

On en déduit une EC de S dans $\mathcal{R}'$, après calculs :

$$X(X^2 - 3Y^2)\sqrt{2} + 3(X^2 + Y^2) = 0.$$

La courbe Γ, intersection de S avec le plan $Z = 0$, est une cubique (courbe algébrique de degré 3) ; en coupant Γ par des droites d'équation $Y = tX$, $t \in \mathbb{R}$, on obtient une RP de Γ :

$$X = \frac{3}{\sqrt{2}}\,\frac{1+t^2}{3t^2-1}, \quad Y = \frac{3}{\sqrt{2}}\,\frac{t(1+t^2)}{3t^2-1}, \quad Z = 0.$$

Réponse : • S est un cylindre à génératrices parallèles à $\overrightarrow{u}\,(1,1,1)$

• Une section droite de S est la courbe d'équations

$X(X^2 - 3Y^2)\sqrt{2} + 3(X^2 + Y^2) = 0, \quad Z = 0,$

dans le r.o.n.d. défini plus haut.

c) En notant $P = x - y$ et $Q = y - z$, S admet pour équation :

$$2^P + 2^Q - 2^{-P-Q} - 1 = 0,$$

donc S est un cylindre, et les génératrices de S sont dirigées par $\overrightarrow{u}\,(1,1,1)$.

Une directrice Γ de S (non nécessairement une section droite) est obtenue en coupant S par un plan non parallèle à $\overrightarrow{u}$, par exemple le plan xOy.

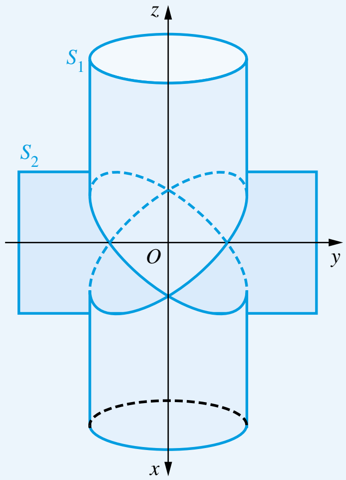
Réponse : S est un cylindre, à génératrices parallèles à $\overrightarrow{u}\,(1,1,1)$ et de directrice

$$\Gamma \quad \left\{\begin{array}{l} 2^{x-y} + 2^y - 2^{-x} - 1 = 0 \\ z = 0. \end{array}\right.$$

6.3.20

a) Réponse : S_1 et S_2 sont des cylindres (elliptiques) de directions respectives $z'z$, $y'y$.

$$b)\ \left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}. \end{array}\right.$$



Réponse : $S_1 \cap S_2$ est la réunion des deux ellipses d'EC :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = \varepsilon\,\frac{c}{b}\,y \end{array}\right. , \quad \varepsilon \in \{-1,1\}.$$

c) Par raison de symétries, les axes des deux ellipses précédentes ont pour EC : $\ x = 0\ $ ou $\ y = 0,\ z = \varepsilon\,\frac{c}{b}\,y,$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, c'est-à-dire : $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \pm b \\ z = \pm\varepsilon c \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} x = \pm a \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$.

On en déduit les longueurs des demi-axes : $\sqrt{b^2 + c^2}$ et a.

Réponse : $\ a^2 = b^2 + c^2$.

6.3.21

a)

$$M(x,y,z) \in S \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists m \in \Gamma,\ \overrightarrow{\Omega M} = \lambda \overrightarrow{\Omega m})$$
$$\iff \Big(\exists (\lambda,t) \in \mathbb{R}^2,\ x = \lambda t,\ y = \lambda t^2, z = \lambda t^3\Big).$$

Réponse :

$$y^2 - xy = 0 \text{ (privée de } (x'x - \{O\}) \cup (z'z - \{O\})).$$

b)

$$M(X,Y,Z) \in S \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists m \in \Gamma,\ \overrightarrow{\Omega M} = \lambda \overrightarrow{\Omega m})$$
$$\iff \Big(\exists (\lambda,x,y,z) \in \mathbb{R}^4,\ (X - 1 = \lambda(x-1),$$
$$Y + 1 = \lambda(y+1),\ Z = \lambda z,\ y + z = 1,\ x^2 + y^2 = z)\Big).$$

Réponse :

$$2x^2+2xy+y^2+2xz-yz-2x-3z+1=0.$$

6.3.22

En notant $F_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$F_\lambda(x,y,z)=x(\lambda-y)+y(\lambda-z)+z(\lambda-x)-\lambda,$$

on a :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F_\lambda(x,y,z)=0\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial F_\lambda}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial F_\lambda}{\partial z}(x,y,z)=0\\ \Longleftrightarrow\ &x=y=z=\frac{\lambda}{2}.\end{aligned}$$

Voir ensuite si le point $\Omega_\lambda\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$ est sur S_λ.

Réponse : S_λ est un cône si et seulement si $\lambda \in \left\{0,\frac{4}{3}\right\}$.

• S_0 est le cône de sommet O et admettant pour directrice l'hyperbole d'équations $\begin{cases} z=1\\ xy+x+y=0\end{cases}$.

• $S_{\frac{4}{3}}$ est le translaté de S_0 dans $t_{\frac{2}{3}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})}$.

Réponse : Avec les notations précédentes, le lieu cherché est la surface d'équation

$$(z_0y-y_0z)^2+2p(z-z_0)(z_0x-x_0z)=0.$$

C'est, en général, un cône de sommet $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

6.3.23

Notons $M_0(x_0,y_0,z_0)$ et $P\ \left|\begin{cases} z=0\\ y^2=2px\end{cases}\right.$ les point et parabole donnés, et $A(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathcal{E}_3$.

Former une équation cartésienne du cône S de sommet A et de directrice

$$\Gamma:\ 2p(z-\gamma)(\gamma x-\alpha z)+(\beta z-\gamma y)^2=0.$$

Traduire $M_0\in S$.

6.3.24

$$\begin{cases}2x+3y-z=0\\ x^2+y^2-z^2=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z=2x+3y\\ 8y^2+12xy+3x^2=0\end{cases}.$$

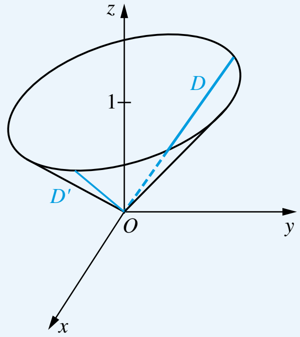
Donc $P\cap S=D\cup D'$ où D et D' sont les droites passant par O et dirigées par

$$\vec{V}\,(4,\ -3-\sqrt{3},\ -1-3\sqrt{3}),$$

$$\vec{V'}\,(4,\ -3+\sqrt{3},\ -1+3\sqrt{3}).$$

Calculer $\sphericalangle(\vec{V},\vec{V'})$ par $\cos(\vec{V},\vec{V'})=\dfrac{\vec{V}\cdot\vec{V'}}{||\vec{V}||\cdot||\vec{V'}||}$.

Réponse : Arccos $\left(-\frac{1}{13}\right)\simeq 1{,}648$.



6.3.25

Si une droite horizontale (i.e. // xOy) convient, alors conviendront aussi, par symétrie, une droite parallèle à yOz et une droite parallèle à xOz. Ces deux dernières droites ne peuvent pas être toutes deux horizontales.

Nous pouvons donc supposer qu'il existe une droite D tangente aux trois cônes et non horizontale ; D admet un SEC

$$\left.\begin{cases}x=az+p\\ y=bz+q\end{cases}\right|,\ (a,b,p,q)\in\mathbb{R}^4.$$

Puisque D est tangente à S_1, l'équation

$$(az+p)^2+(bz+q)^2-z^2=0$$

admet une solution double(en z), d'où, par un discriminant :

$$(ap+bq)^2-(a^2+b^2-1)(p^2+q^2)=0 \qquad (1)$$

On obtient de même :

$$(bq-ap)^2-(b^2+1-a^2)(-p^2+q^2)=0 \qquad (2)$$

et $$(ap-bq)^2-(1+a^2-b^2)(p^2-q^2)=0. \qquad (3)$$

De (2) et (3), on déduit : $p^2-q^2=0$.

Si $p=q=0$, alors D passe par O, exclu.

S'il existe $\varepsilon\in\{-1,1\}$ tel que $q=\varepsilon p\neq 0$, alors, $b=a\varepsilon$, puis, en reportant dans (1), $p^2=0$, exclu.

6.3.26

$$M(x,y,z)\in S \Longleftrightarrow \left(\exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x^2+y^2=\cos^6 t+\sin^6 t\\ z=\cos^2 t\end{cases}\right).$$

Réponse : $4(x^2+y^2)-3z^2-1=0$ et $-1\leqslant z\leqslant 1$; c'est un morceau d'hyperboloïde à une nappe.

6.3.27

a) $M\in S \Longleftrightarrow d(M,D)=R$.

Un point de D est $A(2,1,0)$ et un vecteur directeur de D est $\vec{v}\,(1,1,1)$.

Réponse :

$$(y-z-1)^2+(x-z-2)^2+(x-y-1)^2-3R^2=0.$$

b) **1ère méthode :** Traduire, pour l'équation aux z des points de $S\cap z'z$, $(z+1)^2+(z+2)^2+1-3R^2=0$, l'existence d'une solution double.

2ème méthode : $R=d(D,z'z)$.

Réponse : $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6.3.28

S admet pour directrice le cercle d'équations

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}.$$

Réponse : $xy+xz+yz=0$.

6.3.29

Remarquer que l'équation proposée est symétrique en x,y,z. Noter $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ les fonctions symétriques élémentaires de x,y,z, et, pour $k\in\mathbb{N}^*$, $S_k=x^k+y^k+z^k$. Montrer que l'équation de S est de la forme $F(\sigma_1,S_2)=0$.

Prouver $S_4=S_2^2+4\sigma_1\sigma_3-2\sigma_2^2$; d'où l'équation de S sous la forme :

$$S_2^2-\frac{1}{2}(\sigma_1^2-S_2)^2-1=0.$$

Réponse : S est une surface de révolution, d'axe $O+\mathbb{R}(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})$.

6.3.30

a) La courbe Γ est incluse dans le plan P d'EC :

$$2x-y-5z=0.$$

Un changement de r.o.n.d., en prenant P pour 1$^{\text{er}}$ plan de coordonnées, montre que Γ est une parabole.

Une RP de Γ est : $x=t^2+2t,\ \ y=2t^2-t,\ \ z=t,\ \ t\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{u}+t^2\overrightarrow{v}$,

où $\overrightarrow{u}(2,-1,1)$ et $\overrightarrow{v}(1,2,0)$.

On a, pour tout t de $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{1}{t^2}\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{t}\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, donc la direction de (OM) tend vers celle de $\overrightarrow{v}$ quand t tend vers $\pm\infty$. Il en résulte que l'axe de Γ est dirigé par $\overrightarrow{v}$.

Le sommet de Γ est le point de Γ en lequel la tangente à Γ est orthogonale à l'axe. La tangente à Γ en un point quelconque $M(t)$ est dirigée par $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{u}+2t\overrightarrow{v}$. On a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\perp\overrightarrow{v}\iff(\overrightarrow{u}+2t\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{v}\iff t=0,$$

puisque $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$.

Ainsi, le sommet de Γ est O.

Réponse : Γ est une parabole, de sommet O et d'axe la droite passant par O et dirigée par $\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$.

b) L'équation cartésienne générale d'un cercle $C_{\lambda,\mu}$ d'axe l'axe de Γ est :

$$\begin{cases} x+2y=\lambda \\ x^2+y^2+z^2=\mu^2 \end{cases},\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

On a :

$$\begin{aligned}
&C_{\lambda,\mu}\cap\Gamma\neq\varnothing\\
&\iff\left(\exists z\in\mathbb{R},\ \begin{cases} 5z^2=\lambda \\ (z^2+2z)^2+(2z^2-z)^2+z^2=\mu^2 \end{cases}\right)\\
&\iff\left(\exists z\in\mathbb{R},\ \begin{cases} 5z^2=\lambda \\ 5z^4+6z^2=\mu^2 \end{cases}\right)\\
&\iff\lambda^2+6\lambda-5\mu^2=0.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour tout point $M(x,y,z)$ de $\mathcal{E}_3$:

$$\begin{aligned}
M\in S&\iff\left(\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad M\in C_{\lambda,\mu}\right)\\
&\iff\left(\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x+2y=\lambda \\ x^2+y^2+z^2=\mu^2 \\ \lambda^2+6\lambda-5\mu^2=0 \end{cases}\right)\\
&\iff(x+2y)^2+6(x+2y)-5(x^2+y^2+z^2)=0.
\end{aligned}$$

Réponse : $4x^2+4xy+y^2+5z^2-6x-12y=0$.

6.3.31

En notant V le volume demandé, on a, par symétries, $V=2^4V_1$, où $V_1=\displaystyle\iiint_{D_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ et

$$D_1=\Big\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3;$$
$$x^2+y^2\leqslant R^2,\ x^2+z^2\leqslant R^2,\ y^2+z^2\leqslant R^2,\ y\leqslant x\Big\}.$$

En passant en coordonnées cylindriques, on obtient $V_1=\displaystyle\iiint_{\Delta_1}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$, où :

$$\Delta_1=\Big\{(\rho,\theta,z)\in[0;\,R]\times\Big[0;\,\frac{\pi}{4}\Big]\times\mathbb{R}_+;$$
$$0\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-\rho^2\cos^2\theta}\Big\}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
V_1&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2\cos^2\theta}}\mathrm{d}z\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2\cos^2\theta}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{3\cos^2\theta}\Big[(R^2-\rho^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^R\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin^3\theta}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\\
&\underset{[u=\cos\theta]}{=}\frac{R^3}{3}\left([\tan\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1-u^2}{u^2}\,\mathrm{d}u\right)\\
&=\frac{R^3}{3}\left(1+\left[\frac{1}{u}+u\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}R^3.
\end{aligned}$$

Réponse : $V=8(2-\sqrt{2})R^3\simeq 4{,}686\,R^3$.

6.3.32

Notons Q la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la forme quadratique définie par la partie homogène de degré 2 de l'équation, et χ_Q le polynôme caractéristique de Q.

a) Comme $\chi_Q(\lambda)=-(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-1)$, $0\notin\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(Q)$ donc S est une quadrique à centre.

Le centre Ω est obtenu en résolvant le système d'équations :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=0,$$

où $F(x,y,z)$ est le premier membre de l'équation cartésienne donnée pour S.

On trouve $\Omega\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$.

Une équation de S dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_1=(\Omega;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$$X^2+Y^2+Z^2-2XY+2XZ+\frac{3}{4}=0.$$

La matrice $Q=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ se diagonalise en $Q=PDP^{-1}$ où :

$$D=\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}&0&0\\0&1+\sqrt{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

et
$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Une équation de S dans le nouveau repère orthonormé est : $(1-\sqrt{2})\xi^2+(1+\sqrt{2})\zeta^2+\eta^2+\frac{3}{4}=0$.

Réponse :

Dans le répère orthonormé direct $(\Omega;\ \vec{I},\vec{J},\vec{K})$ défini par $\overrightarrow{O\Omega}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}-\frac{1}{2}\vec{k}$, $\vec{J}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}-\frac{1}{2}\vec{k}$, $\vec{K}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$, la quadrique S admet l'équation réduite

$$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\zeta^2}{b^2}-\frac{\eta^2}{c^2}=1,\quad \text{où}\quad a=\frac{\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2},$$

$$b=\frac{\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2},\qquad c=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

S est un hyperboloïde à deux nappes.

b) On a : $\chi_Q(\lambda)=-\lambda(\lambda+9)(\lambda-18)$; Q se diagonalise en $Q=PDP^{-1}$, où :

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-9&0\\0&0&18\end{pmatrix},\quad P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&2\\2&2&1\\1&-2&2\end{pmatrix}.$$

En notant
$$\vec{I}=\frac{1}{3}(-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}),$$
$$\vec{J}=\frac{1}{3}(\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}),$$
$$\vec{K}=\frac{1}{3}(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}),$$

une équation de S dans le r.o.n.d. $\mathcal{R}_1=(O;\ \vec{I},\vec{J},\vec{K})$ est :

$$-Y^2+2Z^2+4X+12Y-8Z+4=0,$$

ou encore : $(Y-6)^2-2(Z-2)^2-4(X+8)=0$.

En notant Ω le point de coordonnées $(-8,6,2)$ relativement à $\mathcal{R}_1$, une équation de S dans le r.o.n.d. $\mathcal{R}_2=(\Omega;\ \vec{I},\vec{J},\vec{K})$ est : $\zeta^2-2\eta^2-4\xi=0$.

Réponse :

Dans le repère orthonormé direct $(\Omega;\ \vec{I},\vec{J},\vec{K})$ défini par $\Omega\left(\frac{26}{3},-\frac{2}{3},-\frac{16}{3}\right)$, $\vec{I}=\frac{1}{3}(-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$, $\vec{J}=\frac{1}{3}(\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k})$, $\vec{K}=\frac{1}{3}(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$, la quadrique S admet l'équation réduite $\zeta^2-2\eta^2-4\xi=0$; S est un paraboloïde hyperbolique.

c) Remarquer

$$x^2+y^2+z^2+2xy-1=(x+y)^2+z^2-1.$$

Réponse :

Dans le repère orthonormé direct $(O;\ \vec{I},\vec{J},\vec{K})$ défini par $\vec{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})$, $\vec{J}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$, $\vec{K}=\vec{k}$, la quadrique S admet l'équation réduire : $2Y^2+Z^2=1$; S est un cylindre elliptique.

d) Une équation de S dans $\mathcal{R}$ est :

$$(x-2)^2+5\left(-\frac{3}{5}y+\frac{4}{5}z\right)-2=0.$$

Par le changement

$$X=x-2,\quad Y=-\frac{3}{5}y+\frac{4}{5}z,\quad Z=-\frac{4}{5}y-\frac{3}{5}z,$$

l'équation de S devient $X^2+5Y-2=0$, ou encore $X^2=-5Y'$, où $Y'=Y-\frac{2}{5}$.

Réponse :

Dans le repère orthonormé direct $(S;\ \vec{I},\vec{J},\vec{K})$ défini par $\overrightarrow{OS}=2\vec{i}+\frac{2}{5}\vec{j}$, $\vec{I}=\vec{i}$, $\vec{J}=\frac{1}{5}(-3\vec{j}+4\vec{k})$, $\vec{K}=-\frac{1}{5}(4\vec{j}+3\vec{k})$, la quadrique S admet l'équation réduite $X^2=-5Y$; S est un cylindre parabolique.

6.3.33

Remarquer, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2&\\-2abxy-2bcyz-2cazx&\\=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2&\end{aligned}$$

et $a(bz-cy)+b(cx-az)+c(ay-bx)=0$.

Réponse : S est un cylindre elliptique.

6.3.34

La quadrique S est de révolution si et seulement s'il existe un r.o.n.d. $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{E}_3$ tel que S admette sans $\mathcal{R}'$ une EC de la forme :

$$\lambda(X^2+Y^2)+\mu Z^2+2IZ+J=0,$$

où $\lambda\in\mathbb{R}^*$, $\mu,I,J\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ tel que Q soit semblable à $\mathrm{diag}(\lambda,\lambda,\mu)$.

6.3.35

On forme la matrice Q de S dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, puis son polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}\chi_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda \mathrm{I}_3) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & c & b \\ c & b-\lambda & a \\ b & a & c-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & b-\lambda & a \\ 1 & a & c-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-\sigma)(\lambda-\omega)(\lambda+\omega),\end{aligned}$$

où $\quad \sigma = a+b+c,$

$$\omega = |a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2 c| = (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après l'exercice 6.3.34, S est de révolution si et seulement si deux des réels $\sigma,\omega,-\omega$ sont égaux et non nuls (ou $\sigma = \omega = -\omega = 0$). On a :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma = \omega \\ \quad \text{ou} \\ \sigma = -\omega \end{array} \right. \iff \sigma^2 = \omega^2 \iff ab+bc+ca = 0.$$

Réponse :

S est de révolution si et seulement si $ab+bc+ca = 0$.

6.3.36

a) Une droite horizontale de $\mathcal{E}_3$ ne peut pas rencontrer D et D', qui sont dans des plans horizontaux distincts.

Soit Δ une droite non horizontale de $\mathcal{E}_3$, de SEC :

$$\begin{cases} x = \alpha z + p \\ y = \beta z + q \end{cases}, \quad (\alpha,\beta,p,q) \in \mathbb{R}^4.$$

On a : $\begin{cases} \Delta \cap D \neq \varnothing \\ \Delta \cap D' \neq \varnothing \\ \Delta \cap H \neq \varnothing \end{cases} \iff \begin{cases} \beta h + q = 0 \\ -\alpha h + p = 0 \\ pq = a^2. \end{cases}$

On obtient une EC de S en éliminant α,β,p,q dans :

$$\beta h + q = 0, \quad -\alpha h + p = 0, \quad pq = a^2,$$
$$x = \alpha z + p, \quad y = \beta z + q.$$

Réponse : $h^2 xy + a^2(z^2 - h^2) = 0$.

b) La surface S est une quadrique, et la matrice Q de S dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est : $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{h^2}{2} & 0 \\ \frac{h^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont $\frac{h^2}{2}, -\frac{h^2}{2}, a^2$.

D'après l'exercice 6.3.34, S est de révolution si et seulement si deux (au moins) des réels $\frac{h^2}{2}, -\frac{h^2}{2}, a^2$ sont égaux, c'est-à-dire : $\frac{h^2}{2} = a^2$.

On peut d'ailleurs vérifier que, dans ce cas, S est de révolution, puisque S admet alors pour EC :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x-y)^2 - 2a^2 = 0.$$

Réponse : $h^2 = 2a^2$.

6.3.37

Toute équation du second degré symétrique en x,y,z est de la forme :

$$A\sigma_1^2 + B\sigma_2 + C\sigma_1 + D = 0,$$

où $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ sont les fonctions symétriques élémentaires de x,y,z.

En notant $S_2 = x^2+y^2+z^2$, comme $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - S_2)$, l'équation devient

$$\left(A + \frac{1}{2}B\right)\sigma_1^2 - \frac{1}{2}S_2 + C\sigma_1 + D = 0,$$

et la surface est donc une quadrique de révolution.

L'axe en est : $\quad O + \mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

6.3.38

Remarquer : $\quad (x-2y) + (2y-3z) = -(3z-x)$.

Réponse : S est un cylindre elliptique.

6.3.39

a) **Réponse :** S est un cylindre parabolique ; les génératrices sont dirigées par $\vec{v}\,(1,-3,2)$, et une directrice est la parabole d'équations $\begin{cases} z = 0 \\ (x+y)^2 - 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$.

b) Le plan de symétrie P de S est de direction d'équation

$$x + y + z = 0.$$

En les points de $P \cap S$, le plan tangent à S est orthogonal à P ; déterminer les points M de S pour lesquels $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M) \in \vec{P}$.

Réponse : $x + y + z + \frac{2}{3} = 0$.

c) T est orthogonale à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M)$ pour tout $M \in P \cap S$, et T contient la droite $P \cap S$.

Réponse : $30x - 6y - 24z + 13 = 0$.

6.3.40

On peut choisir un r.o.n.d. tel que : $P = xOy$ et $O \in D$.

Alors D admet un SEC $\begin{cases} x = az \\ y = bz \end{cases}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$; un vecteur directeur de D est $\vec{u}\,(a,b,1)$.

On a, pour tout point $M(x,y,z)$ de $\mathcal{E}_3$, $d(M,P) = |z|$ et :

$$\begin{aligned} d(M,D)^2 &= \frac{||\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}||^2}{||\vec{u}||^2} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2+1}\Big((y-bz)^2 + (az-x)^2 + (bx-ay)\Big)^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} M \in S \iff (y-bz)^2 + (az-x)^2 + (bx-ay)^2 \\ = (a^2+b^2+1)z^2 \\ \iff (a^2+b^2+1)(x^2+y^2) - (ax+by+z)^2 = 0. \end{aligned}$$

Réponse : S est un cône de sommet le point formant $P \cap D$.

6.3.41

Les droites D et D', n'étant pas coplanaires, admettent une perpendiculaire commune Δ. Considérons le r.o.n. $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ défini par :

$$\begin{cases} O \text{ est le milieu de } [HH'], \text{ où } H \in D,\ H' \in D', \\ \quad (HH') = \Delta \\ \overrightarrow{k} \text{ dirige } \Delta \\ \overrightarrow{i} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}, \text{ où } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'} \text{ sont normés} \\ \quad \text{et dirigent respectivement } D, D'. \end{cases}$$

Ainsi : $D \begin{cases} y = mx \\ z = h \end{cases}$, $D' \begin{cases} y = -mx \\ z = -h \end{cases}$,

où $(m,h) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+^*$.

La droite D passe par $A(0,0,k)$ et est dirigée par $\overrightarrow{v}(1,m,0)$, d'où, pour tout point $M(x,y,z)$ de $\mathcal{E}_3$:

$$\begin{aligned} d(M,D)^2 &= \frac{||\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v}||^2}{||v||^2} \\ &= \frac{\big(-m(z-h)\big)^2 + (z-h)^2 + (mx-y)^2}{1+m^2} \\ &= (z-h)^2 + \frac{(y-mx)^2}{1+m^2}. \end{aligned}$$

De même :

$$d(M,D')^2 = (z+h)^2 + \frac{(y+mx)^2}{1+m^2}.$$

D'où : $M \in S \iff (z-h)^2 + \dfrac{(y-mx)^2}{1+m^2}$

$$= (z+h)^2 + \frac{(y+mx)^2}{1+m^2}$$

$$\iff 2mxy + (1+m^2)hz = 0.$$

Réponse : S est un paraboloïde hyperbolique.

6.3.42

Considérons une quadrique quelconque S, d'EC :

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz$$
$$+Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0.$$

On a : $\Gamma \subset S$

$$\iff \Big(\forall t \in \mathbb{R}^*,\quad At^6 + 2Bt^2(t^3-1) + 2Ct^2(t^3+1)$$
$$+ D\frac{(t^3-1)^2}{t^2} + 2E\frac{t^6-1}{t^2} + F\frac{(t^3+1)^2}{t^2}$$
$$+ 2Gt^3 + 2H\frac{t^3-1}{t} + 2I\frac{t^3+1}{t} + J = 0\Big)$$

$$\iff \big(A = 0,\ 2(B+C) = 0,\ D + 2E + F = 0,\ 2G = 0,$$
$$-2B + 2C + 2H + 2I = 0,\ -2D + 2F = 0,\ J = 0,$$
$$-2H + 2I = 0,\ D - 2E + F = 0\big)$$

$$\iff \big(A = D = E = F = G = J = 0,\ H = I = B,\ C = -B\big).$$

Réponse : Il existe une quadrique S et une seule contenant Γ. Une EC de S est :

$$xy - xz + y + z = 0,$$

et S est un paraboloïde hyperbolique.

6.3.43

Considérons une quadrique quelconque S, d'EC :

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2$$
$$+2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0.$$

- On a :

$$P \subset S \iff \Big(\forall y \in \mathbb{R},\ A\frac{y^4}{4p^2} + B\frac{y^3}{p} + Dy^2$$
$$+G\frac{y^2}{p} + 2Hy + J = 0\Big)$$
$$\iff (A = B = H = J = 0,\ G = -Dp).$$

Ainsi, S admet pour EC :

$$2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 - 2Dpx + 2Iz = 0.$$

- Puis :

$$D \subset S \iff \Big(\forall z \in \mathbb{R},\ C(p+2z)z + Dp^2 + 2Epz$$
$$+Fz^2 - Dp(p+2z) + 2Iz = 0\Big)$$
$$\iff (2C + F = 0,\ Cp + Ep - Dp + I = 0)$$
$$\iff \Big(F = -2C,\ I = (-C + D - E)p\Big).$$

Alors, S admet pour EC :

$$2Cxz + Dy^2 + 2Eyz - 2Cz^2 - 2Dpx$$
$$-2(C - D + E)pz = 0.$$

- S est tangente en O au plan yOz si et seulement si, en notant ϕ le premier membre de l'équation précédente, $\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi(0,0,0)$ est colinéaire à $(1,0,0)$.

Comme

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi(0,0,0) = \Big(-2Dp, 0, -2(C-D+E)p\Big),$$

la condition revient à : $E = D - C$.

Finalement, S a pour EC :

$$2Cxz + Dy^2 + 2(D-C)yz - 2Cz^2 - 2Dpx = 0,$$

ou encore :

$$2C(xz - yz - z^2) + D(y^2 + 2yz - 2px) = 0.$$

On obtient ainsi le *faisceau linéaire de quadriques* (hors-programme) de base (S_1, S_2), où S_1 est la réunion des deux plans $z = 0$, $x - y - z = 0$, et S_2 le paraboloïde hyperbolique $y^2 + 2yz - 2px = 0$.

Réponse : Une (double) infinité de quadriques, celles d'EC :

$$2C(xz - yz - z^2) + D(y^2 + 2yz - 2px) = 0,$$
$$(C,D) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

6.3.44

Même méthode que pour l'exercice 6.3.43.

Réponse : Les quadriques d'EC :

$$2Ehx^2 + 2Cxz + 2Eyz + Fz^2 - 2Ehy - Fhz = 0,$$
$$(C,E,F) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}.$$

6.3.45

Soit $M(X,Y,Z) \in \mathcal{E}_3$; former un système d'équations cartésiennes du cercle C_M d'axe Δ et passant par M :

$$\begin{cases} (x-X)+(z-Z)=0 \\ x^2+y^2+z^2 = X^2+Y^2+Z^2. \end{cases}$$

Traduire ensuite $C_M \cap D \neq \varnothing$ en éliminant (x,y,z) dans :

$$z=0, \quad y=x+1, \quad (x-X)+(z-Z)=0,$$
$$x^2+y^2+z^2 = X^2+Y^2+Z^2.$$

Réponse : $x^2+4xz-y^2+z^2+2x+2z+1=0$ (hyperboloïde à une nappe)

6.3.46

Soit $M(x,y,z) \in S$. Une EC du plan tangent Π en M à S est :

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}-1=0.$$

On déduit : $P\left(\dfrac{a^2}{x},0,0\right)$, $Q\left(0,\dfrac{b^2}{y},0\right)$, $R\left(0,0,\dfrac{c^2}{z}\right)$, puis :

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{k} \iff \frac{a^2}{x}=\frac{b^2}{y}=\frac{c^2}{z}$$
$$\iff \Big(\exists\lambda\in\mathbb{R}^*, \quad \big(x=\lambda a^2, \quad y=\lambda b^2, \quad z=\lambda c^2\big)\Big).$$

Ensuite : $\quad M\in S \iff \lambda^2a^2+\lambda^2b^2+\lambda^2c^2=1\,.$

Réponse : Les deux plans d'EC :

$$x+y+z-\varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2}=0, \quad \varepsilon\in\{-1,1\}.$$

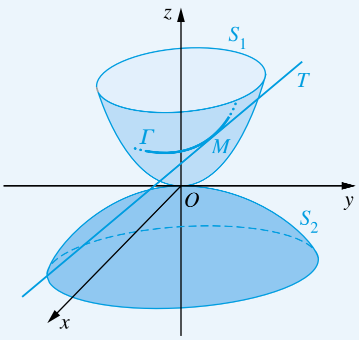
6.3.47

a) **Réponse :** S_1 et S_2 sont des paraboloïdes elliptiques, de révolution.

b) On peut chercher Γ sous la RP :

$$x=\rho(\theta)\cos\theta, \quad y=\rho(\theta)\sin\theta, \quad z=\frac{\rho^2(\theta)}{2p},$$

où $\rho=\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+^*$ est de classe C^1.



Un vecteur tangent en $M(\theta)$ à Γ est $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}$, d'où une RP de la tangente $T(\theta)$, en $M(\theta)$ à Γ (en notant, pour abréger, ρ au lieu de $\rho(\theta)$) :

$$\begin{cases} X &= \rho\cos\theta+\lambda(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta) \\ &= (\rho+\lambda\rho')\cos\theta-\lambda\rho\sin\theta \\ Y &= \rho\sin\theta+\lambda(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta) \\ &= (\rho+\lambda\rho')\sin\theta+\lambda\rho\cos\theta \\ Z &= \dfrac{\rho^2}{2p}+\lambda\dfrac{\rho\rho'}{p}. \end{cases}$$

Cette droite $T(\theta)$ est tangente à S_2 si et seulement si l'équation aux λ des points de $T(\theta)\cap S_2$:

$$(\rho+\lambda\rho')^2+\lambda^2\rho^2+2q\left(\frac{\rho^2}{2p}+\lambda\frac{\rho\rho'}{p}\right)=0$$

admet une solution double.

L'équation du second degré obtenue :

$$(\rho^2+\rho'^2)\lambda^2+2\rho\rho'\left(1+\frac{q}{p}\right)\lambda+\rho^2\left(1+\frac{q}{p}\right)=0$$

a pour discriminant (réduit) :

$$\Delta' = \rho^2\rho'^2\left(1+\frac{q}{p}\right)^2-(\rho^2+\rho'^2)\rho^2\left(1+\frac{q}{p}\right).$$

La condition revient donc à : $\quad \rho'^2=\dfrac{p}{q}\,\rho^2.$

Comme ρ' est continue sur $\mathbb{R}$ et que ρ est à valeurs >0, le théorème des valeurs intermédiaires montre que ρ' est de signe fixe (strict), donc $\rho'=\varepsilon\sqrt{\dfrac{p}{q}}\rho$, où $\varepsilon\in\{-1,1\}$, puis

$$\rho : \theta \longmapsto C\mathrm{e}^{\varepsilon\sqrt{\frac{p}{q}}\theta}, \quad C\in\mathbb{R}_+^*.$$

Réponse : Les courbes de RP : $x=C\mathrm{e}^{k\theta}\cos\theta$, $y=C\mathrm{e}^{k\theta}\sin\theta$, $z=\dfrac{C^2}{2p}\,\mathrm{e}^{2k\theta}$, $C\in\mathbb{R}_+^*$ fixé, $k=\varepsilon\sqrt{\dfrac{p}{q}}$, $\varepsilon\in\{-1,1\}$ fixé, $\theta\in\mathbb{R}$ le paramètre.

6.3.48

Notons $Q=\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix}$ la matrice symétrique associée à S dans la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. Pour qu'il existe trois génératrices de S deux à deux orthogonales, il faut et il suffit qu'il existe une b.o.n. $(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3})$ de $\mathbb{R}^3$ telle que, en notant R la matrice associée à S dans la base $(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3})$, on ait :

$$\forall i\in\{1,2,3\}, \quad {}^t\mathrm{E}_i R\mathrm{E}_i=0,$$

où $(\mathrm{E}_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ est la base canonique $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Ceci revient à ce qu'il existe une matrice Ω de $\mathbf{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $\Omega^{-1}Q\Omega$ soit à termes diagonaux tous nuls. D'après l'exercice 4.5.59, cette condition équivaut à $\mathrm{tr}(Q)=0$, c'est-à-dire : $A+D+F=0$.

6.3.49

Les deux quadriques Q_1 et Q_2 admettent O pour centre de symétrie. Les matrices des formes quadratiques associées à Q_1 et Q_2 sont ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$, où $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$. Comme ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ ont le même polynôme caractéristique (cf. exercice 3.2.12), les deux quadriques Q_1 et Q_2 ont la même équation réduite (dans deux repères orthonormés).

6.3.50

• En notant $m(u)\ (\cos u,\ \sin u,\ u^2)$ et $\overrightarrow{G(u)}\ (-\sin u, \cos u, 2u)$ (qui est $\neq \overrightarrow{0}$), une RP de S est $\phi : (u,v) \longmapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)}$, ce qui montre que S est réglée.

• Comme, pour tout (u,v) de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\overrightarrow{\partial\phi}}{\partial u}(u,v) = \overrightarrow{m'(u)} + v\overrightarrow{G'(u)} = \overrightarrow{G(u)} + v\overrightarrow{G'(u)},$$

$$\frac{\overrightarrow{\partial\phi}}{\partial v}(u,v) = \overrightarrow{G(u)},$$

et que $(\overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)})$ est libre, le point $M(u,v)$ de S est régulier si et seulement si $v \neq 0$.

En tout point $M(u,v)$ $(v \neq 0)$ de S, le plan tangent à S est dirigé par $(\overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)})$, donc ne dépend pas de v, ce qui montre que S est développable.

6.3.51

• En notant $m(u)\ (3u, 2u^2, 0)$ et $\overrightarrow{G(u)}(1, 2u, u^3)$, une RP de S est $\phi : (u,v) \longmapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)}$, ce qui montre que S est réglée.

• On a, pour tout u de $\mathbb{R}$:

$$\det_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}\left(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4u & 2u & 2 \\ 0 & u^3 & 3u^2 \end{vmatrix} = 0,$$

et donc S est développable.

• Il est clair que : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{m'(u)} = 3\overrightarrow{G(u)} - u\overrightarrow{G'(u)}$, d'où, avec les notations de 6.3.5 2) p. 263 :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \lambda(u) = 3 \quad \text{et} \quad \mu(u) = -u,$$

et l'arête de rebroussement admet pour RP

$$u \in \mathbb{R} \longmapsto \phi\big(u, -\mu(u)\big).$$

Réponse : L'arête de rebroussement a pour RP :

$$x = 4u,\ y = 4u^2,\ z = u^4,\ u \in \mathbb{R}.$$

6.3.52

a) • Puisque u,v jouent des rôles symétriques, on obtient une autre RP de la surface S proposée en notant $\sigma = u + v$ et $\pi = uv$:

$$x = \frac{\pi}{\sigma}, \quad y = \sigma^2 - 3\sigma\pi, \quad z = \sigma^2 - 2\pi.$$

En notant $m(\sigma)(0, \sigma^3, \sigma^2)$ et $\overrightarrow{G(\sigma)}\left(\frac{1}{\sigma}, -3\sigma, -2\right)$, S admet pour RP $\phi : (\sigma,\pi) \longmapsto m(\sigma) + \pi\overrightarrow{G(\sigma)}$, donc S est réglée.

En fait, la réalité de (u,v) se traduit, pour (σ,π) donné, par $\sigma^2 - 4\pi \geqslant 0$, donc π ne décrit qu'une demi-droite de $\mathbb{R}$, et donc S n'est qu'« à demi » réglée.

• On a, pour tout σ de $\mathbb{R}$:

$$\det_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}\left(\overrightarrow{m'(\sigma)}, \overrightarrow{G(\sigma)}, \overrightarrow{G'(\sigma)}\right) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sigma} & -\frac{1}{\sigma^2} \\ 3\sigma^2 & -3\sigma & -3 \\ 2\sigma & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

donc S n'est pas développable.

b) • Chercher d'abord une RP de S :

$$x^2z^2 = x^2 + y^2 \iff \left(\exists u \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = xz\cos u \\ y = xz\sin u \end{cases}\right)$$

$$\iff \left|\begin{array}{l} x = y = 0 \\ \quad \text{ou} \\ \exists u \in D, \quad z = \dfrac{1}{\cos u} \text{ et } y = x\tan u, \end{array}\right.$$

où $D = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

Une RP de S est donc : $x = v,\ y = v\tan u,\ z = \dfrac{1}{\cos u}$.

En notant $m(u)\left(0, 0, \dfrac{1}{\cos u}\right)$ et $\overrightarrow{G(u)}(1, \tan u, 0)$, une RP de S est $(u,v) \longmapsto m(u) + v\overrightarrow{G(u)}$, ce qui montre que S est réglée.

• On a, pour tout (u,v) de $D \times \mathbb{R}$:

$$\det_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}\left(\overrightarrow{m'(u)}, \overrightarrow{G(u)}, \overrightarrow{G'(u)}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tan u & \frac{1}{\cos^2 u} \\ \frac{\sin u}{\cos^2 u} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sin u}{\cos^2 u} \neq 0,$$

ce qui montre que S n'est pas développable.

6.3.53

Un point $M(X,Y,Z)$ est sur le cylindre Σ circonscrit à S dans la direction de la droite D si et seulement si la droite D_M, passant par M et parallèle à D, est tangente à S. Une RP de D_M est : $x = X + \lambda, y = Y + \lambda, z = Z + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$. La droite D_M est tangente à S si et seulement si l'équation :

$$(X + \lambda)^2 + (Y + \lambda)^2 - (Z + \lambda) = 0$$

admet (au moins) une solution double, c'est-à-dire :

$$(2X + 2Y - 1)^2 - 8(X^2 + Y^2 - Z) = 0$$

Réponse :

$$4X^2 - 8XY + 4Y^2 + 4X + 4Y - 8Z - 1 = 0.$$

6.3.54

Un point $M(X,Y,Z)$ est sur le cône Σ de sommet A et circonscrit à S si et seulement si la droite (AM) est tangente à S. Une RP de (AM) est :

$$x = -2 + \lambda(X+2), \quad y = -2 + \lambda(Y+2),$$
$$z = \lambda Z, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Une CNS est que l'équation

$$\Big(\lambda(X+2) - 2\Big)\Big(\lambda(Y+2) - 2\Big) + \Big(\lambda(X+2) - 2\Big)\lambda Z + \Big(\lambda(Y+2) - 2\Big)\lambda Z - 1 = 0$$

admette une solution double, c'est-à-dire que son discriminant soit nul.

Réponse : $\Big((X+2) + (Y+2) + 2Z\Big)^2$

$$-3\Big((X+2)(Y+2) + (X+2)Z + (Y+2)Z\Big) = 0.$$

6.3.55

Chercher Γ par une RP de la forme :

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = \varphi(t).$$

Réponse : Les courbes de RP : $x = a\cos t, \quad y = a\sin t,$ $z = \varepsilon k a \operatorname{ch}\left(\dfrac{t}{k} + C\right)$, $C \in \mathbb{R}$ fixé, $\varepsilon \in \{-1,1\}$ fixé, $t \in \mathbb{R}$ le paramètre.

6.3.56

I *1)* Même méthode que pour l'exercice 6.3.29.

S est de révolution et son axe Δ passe par O et est dirigé par $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

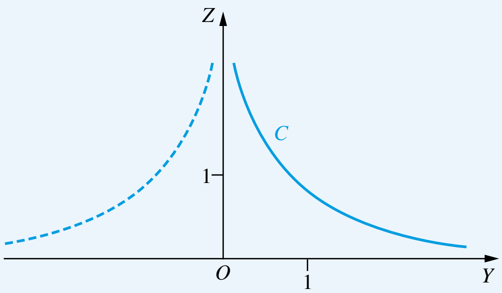
Soit $\mathcal{R}' = (O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ le repère orthonormé direct de $\mathcal{E}_3$ défini par :

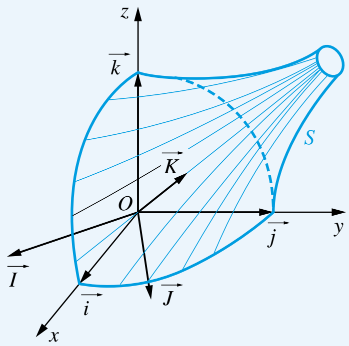
$$\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j}, \vec{k}), \quad \vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}),$$
$$\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}).$$

Une équation de S dans $\mathcal{R}'$ est : $(X^2+Y^2)Z = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Une méridienne C de S est obtenue en coupant S par le (demi-)plan d'équation $X = 0$ (et $Y \geqslant 0$).

On obtient C : $X = 0, \quad (Y \geqslant 0), \quad Y^2 Z = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.





2) a) Pour tout $M(x,y,z)$ de $\mathcal{E}_3$, notons

$$A(M) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$

L'application $A : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_3 & \longrightarrow & \mathbf{M}_3(\mathbb{R}) \\ M(x,y,z) & \longmapsto & A(M) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Montrer : $\forall (M,M') \in \mathcal{E}_3^2, \quad A(M)A(M') = A(P)$.

Ainsi :

$$(M,M') \in S^2 \Longrightarrow \det\Big(A(M)\Big) = \det\Big(A(M')\Big) = 1$$
$$\Longrightarrow \det\Big(A(P)\Big) = 1 \Longrightarrow P \in S.$$

b) • Il est clair que $*$ est interne dans S, commutative, et admet $E(1,0,0) \in S$ pour neutre. Puisque la multiplication dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ est associative et que A est injective, $*$ est associative dans S.

• Soit $M(x,y,z) \in S$; alors $A(M) \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ et :

$$\Big(A(M)\Big)^{-1} = \begin{pmatrix} x^2 - yz & y^2 - xz & z^2 - xy \\ z^2 - xy & x^2 - yz & y^2 - xz \\ y^2 - xz & z^2 - xy & x^2 - yz \end{pmatrix}$$
$$= A(N),$$

où $N(x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$.

De plus :

$$\det\Big(A(N)\Big) = \det\Big((A(M))^{-1}\Big)$$
$$= \Big(\det(A(M))\Big)^{-1} = 1,$$

donc $N \in S$.

Ainsi M admet N pour symétrique pour $*$ dans S.

Remarque : Autre méthode pour l'existence des symétriques.

Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{M} = \Big\{x\mathrm{I}_3 + yJ + zJ^2;\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\Big\}.$$

• Montrer que $\mathcal{M}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre (pour les lois usuelles) et que (I_3, J, J^2) est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}$.

• Soit $A = x\mathrm{I}_3 + yJ + zJ^2 \in \mathcal{M} \cap \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$; montrer que l'application $\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$ est linéaire et injective. En déduire que φ_A est bijective et qu'il existe $(\xi,\zeta,\eta) \in \mathbb{R}^3$ tel qu'en notant $B = \xi\mathrm{I}_3 + \zeta J + \eta J^2$, on ait $AB = \mathrm{I}_3$.

• Montrer que, si $A \in S$, alors $B \in S$.

• En déduire que tout élément de S admet un symétrique pour $*$ dans S.

3) a) On a : $x+y+z = \mathrm{e}^{2t}$, $x+\mathrm{j}y+\mathrm{j}^2z = \mathrm{e}^t u$,

$$x+\mathrm{j}^2y+\mathrm{j}z = \mathrm{e}^t\overline{u},$$

d'où $\quad f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$= (x+y+z)(x+\mathrm{j}y+\mathrm{j}^2z)(x+\mathrm{j}^2y+\mathrm{j}z) = |u|^2 = 1\,.$$

b) • Il est clair que ϕ est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}\times\mathbb{U}$ dans S.

• Soit $(x,y,z)\in S$; on a :

$$1 = f(x,y,z) = (x+y+z)|x+\mathrm{j}y+\mathrm{j}^2z|^2,$$

d'où $\quad x+y+z > 0.$

Il existe donc $t\in\mathbb{R}$ unique tel que $x+y+z = \mathrm{e}^{-2t}$.

Comme $\left\{\begin{array}{l} \overline{x+\mathrm{j}y+\mathrm{j}^2z} = x+\mathrm{j}^2y+\mathrm{j}z \\ |x+\mathrm{j}y+\mathrm{j}^2z|^2 = \dfrac{1}{x+y+z} = \mathrm{e}^{2t} \end{array}\right|,$

il existe $u\in\mathbb{U}$ unique tel que $x+\mathrm{j}y+\mathrm{j}^2z = \mathrm{e}^t u$.

On a alors : $\quad x+y+z = \mathrm{e}^{-2t}, \quad x+\mathrm{j}y+\mathrm{j}^2z = \mathrm{e}^t u,$

$$x+\mathrm{j}^2y+\mathrm{j}z = \mathrm{e}^t\overline{u}.$$

Ceci montre que ϕ est bijective.

• On vient de voir :

$$t = -\frac{1}{2}\ln(x+y+z)$$

et $\qquad \operatorname{Arg} u = \operatorname{Arg}\Big(\mathrm{e}^{-t}(x+\mathrm{j}y+\mathrm{j}^2z)\Big)\ [2\pi].$

Ceci montre que ϕ^{-1} est de classe C^∞ sur S.

• Soient $(t,u),\quad (t',u')\in\mathbb{R}\times\mathbb{U}$,

$$M(x,y,z) = \phi(t,u),\ \ M'(x',y',z') = \phi(t',u')\,,$$

(X,Y,Z) les coordonnées de $M*M'$. On a :

$$\begin{cases} X+Y+Z = (x+y+z)(x'+y'+z') \\ \qquad\qquad = \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{-2t'} = \mathrm{e}^{-2(t+t')} \\ X+\mathrm{j}Y+\mathrm{j}^2Z = (x+\mathrm{j}y+\mathrm{j}^2z)(x'+\mathrm{j}y'+\mathrm{j}^2z') \\ \qquad\qquad = \mathrm{e}^t u\mathrm{e}^{t'}u' = \mathrm{e}^{t+t'}uu' \\ X+\mathrm{j}^2Y+\mathrm{j}Z = \overline{X+\mathrm{j}Y+\mathrm{j}^2Z} = \mathrm{e}^{t+t'}\overline{uu'}. \end{cases}$$

Munissons $\mathbb{R}\times\mathbb{U}$ de la loi-produit $\top$ (de la loi $+$ de $\mathbb{R}$ et de la loi $\cdot$ de $\mathbb{U}$) c'est-à-dire :

$$(t,u)\top(t',u') = (t+t',uu').$$

On a montré :

$\forall(t,u),\ (t',u')\in\mathbb{R}\times\mathbb{U}$,

$$\phi\Big((t,u)\top(t',u')\Big) = \phi(t,u)*\phi(t',u')\,.$$

c) $M_1 = \phi\Big(1,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\Big)$ d'où $\ M_n = \Big(\phi(1,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})\Big)^{[n]}$

$$= \phi\Big((1,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})^{[n]}\Big) = \phi(n,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}),\quad \text{d'où :}$$

$$M_n\left(\frac{1+2\mathrm{e}^{3n}\cos\frac{n\pi}{3}}{3\mathrm{e}^{2n}},\quad \frac{1+2\mathrm{e}^{3n}\cos\frac{(n-2)\pi}{3}}{3\mathrm{e}^{2n}},\right.$$

$$\left.\frac{1+2\mathrm{e}^{3n}\cos\frac{(n+2)\pi}{3}}{3\mathrm{e}^{2n}}\right).$$

Index des notations

Index alphabétique

T

U

V W X Y Z

J'INTÈGRE
Série Monier

Jean-Marie Monier

5e édition

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE PC-PSI-PT

Cours, méthodes et exercices corrigés

Cette 5e édition du cours d'Algèbre et de géométrie de Jean-Marie Monier a été **entièrement revue afin de répondre aux besoins des étudiants** de classes préparatoires :

Un cours complet, pédagogique et conforme au programme.

- Toutes les notions du **programme**.
- Des commentaires dans la marge pour mieux comprendre le cours, présenter les difficultés, mettre en avant les résultats importants.
- Les « **méthodes à retenir** ».

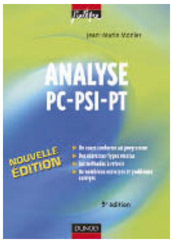
De nombreux exercices, accessibles, à difficulté progressive et tous corrigés.

- Des exercices-types avec solution commentée pour **maîtriser les techniques incontournables**.
- Des **exercices classés par niveau de difficulté** et tous résolus pour s'entraîner.
- Des **problèmes résolus**, en fin de chapitre, pour aller plus loin.

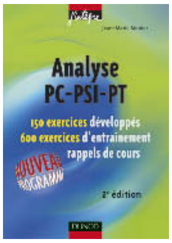
Une nouvelle maquette structure le contenu pour en faciliter la lecture et assurer un accompagnement pédagogique optimum.

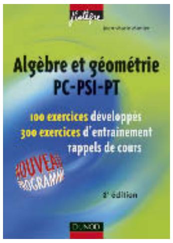
Dans la série Monier, sont également disponibles :

Le cours



Les exercices





JEAN-MARIE MONIER
est professeur en classe de Spéciales au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon.

ISBN 978-2-10-053970-3

www.dunod.com

DUNOD