

Chapitre 4

Paroi tricouche

4.1 Description de la paroi

L'exemple traité ici est une structure tricouche en conduction unidimensionnelle. Cet exemple est volontairement simple (dans un but pédagogique). Il servira en effet à illustrer les étapes importantes de la méthode de réduction par amalgame modal.

La paroi traitée est une structure symétrique et composée de trois couches: béton-isolant-béton. Deux lames d'air de $1mm$ d'épaisseur chacune, sont introduites de part et d'autre de l'isolant. Ceci permet de tenir compte - de façon approximative - de l'air enfermé dans les aspérités de l'isolant (Polystyrène) en contact avec le béton. La figure 4.1 illustre la paroi tandis que le tableau 4.1 donne les paramètres thermophysiques de chaque couche homogène.

Les coefficients d'échange **globaux**¹ sont fixés à: $h_g = 8Wm^{-1}K^{-1}$ et $h_d = 18Wm^{-1}K^{-1}$. Ces valeurs sont à peu près celles recommandées par le CSTB² pour des murs extérieurs d'une enveloppe de bâtiment.

Le modèle d'état modal de référence est obtenu à partir du logiciel **MurAna**³ [54]. Il repose

¹On regroupe dans les coefficients h_g et h_d ceux de la convection et du rayonnement linéarisés.

²Centre Scientifique et Techniques du Bâtiment

³Nous avons développé, à partir d'une formulation analytique, un logiciel nommé **MurAna**, capable de générer un modèle d'état modal d'une paroi plane multicouche. Le contact thermique entre les couches peut être imparfait. La démarche utilisée consiste à résoudre une équation transcendante aux valeurs propres issue du formalisme des matrices de transfert. Le calcul des modes propres associés ne pose pas de problème particulier. Cependant des algorithmes appropriés sont introduits pour fiabiliser le programme informatique. Les algorithmes importants introduits dans **MurAna** permettent

- de ne pas rater de racines de l'équation aux valeurs propres, qui peuvent être numériquement très proches ou simplement groupées.

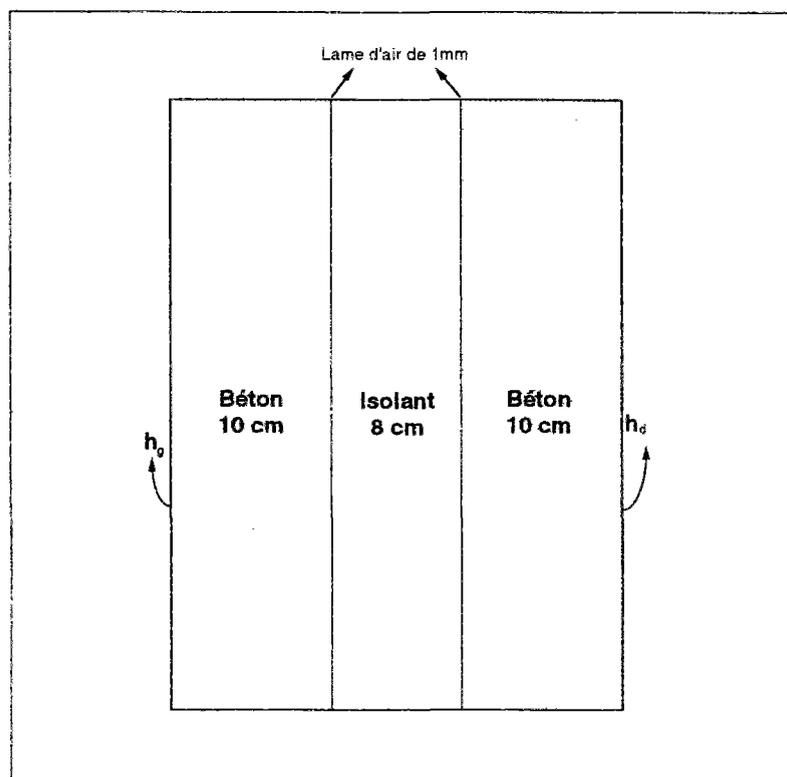


Figure 4.1: Structure multicouche

ici sur 250 éléments propres. La constante de temps principale est $\tau_1 = 7\text{h } 42\text{mn } 40.98\text{s}$. La dernière constante de temps calculée est $\tau_{250} = 0.13\text{s}$, ce qui autorise des simulations précises à partir de $t = 1\text{s}$ (4 à 5 fois τ_{250}). Une fois les fonctions propres connues analytiquement, il est possible de calculer leurs valeurs en des points quelconques de la structure, ce qui permet aussi de travailler sur un maillage non uniforme. Nous avons alors opéré un échantillonnage de trois nœuds par centimètre, ce qui revient à prendre 57 nœuds pour l'ensemble de la paroi (la paroi a une épaisseur totale de 28cm).

Les sollicitations agissant sur la structure sont au nombre de deux: températures des ambiances côté gauche et droit. Les sorties de notre modèle sont toutes les températures aux nœuds considérés (au total 57 nœuds).

Les résultats qui suivent ont été obtenus pour les conditions suivantes:

- d'asservir le pas d'exploration par une euristique originale, ce qui permet un gain appréciable en temps de calcul.

MurAna est doté d'une interface graphique interactive qui permet de visualiser l'évolution temporelle d'une sortie mais également d'analyser ou de réduire le modèle d'état modal.

matériaux	béton	Air	isolant	Air	béton
conductivité ($W m^{-1} K^{-1}$)	1.75	0.025	0.04	0.0625	1.75
masse vol. ($kg m^{-3}$)	2500	1.24	30	1.24	2500
C_p ($J kg^{-1} K^{-1}$)	820	1000.0	850	1000.0	820
épaisseur (m)	0.1	0.001	0.08	0.001	0.1

Tableau 4.1: Composition de la structure multicouche

- ▶ Transferts conductifs unidimensionnels dans la paroi.
- ▶ Plage temporelle $\mathcal{D}_t = [0, \infty]$.
- ▶ Sollicitations de type échelon.
- ▶ Champ de température initial nul.

4.2 Réduction modale

4.2.1 Les sous-espaces d'amalgame

La réduction du modèle d'état modal de la paroi tricouche est ici développée. Nous appliquons l'algorithme de réduction présenté au §3.5 **en imposant simplement la dimension du modèle réduit $n = 5$** . Pour cette dimension, on obtient les valeurs de \mathcal{M} et $\overline{\mathcal{M}}$ suivantes

mesure de l'erreur \mathcal{M} ($J ^\circ C s$)	erreur $\overline{\mathcal{M}}$ ($^\circ C$)
8639.63	$3.07 \cdot 10^{-4}$

Tableau 4.2: Valeurs de \mathcal{M} et $\overline{\mathcal{M}}$ pour $n = 5$.

Les sous-espaces d'amalgames issus de la méthode d'amalgame sont donnés dans le tableau 4.3. Les modes principaux des différents sous-espaces sont encadrés $\boxed{\bullet}$.

Les modes principaux d'amalgame ne sont pas ceux de la troncature de Marshall. En effet, le cinquième mode principal est le mode sept. Notons que pour cet exemple, on obtient trois sous-espaces d'amalgame monodimensionnels: les sous-espaces 1,2 et 4. La plupart des modes mineurs sont affectés dans le dernier sous-espace d'amalgame.

sous-espace	1	2	3	4	5
composition en modes	1	2	3 6	4	7 5, 8, 9, 10 11, 12...250

Tableau 4.3: répartition de l'espace des modes propres en 5 sous-espaces d'amalgame

Remarque: Dans le cadre de l'étude thermique des enveloppes de bâtiments, Lefebvre [41] tronque le modèle modal puis corrige le dernier élément propre grâce à une information récupérée sur les modes négligés. Le dernier sous-espace d'amalgame obtenu pour notre paroi tricouche regroupe la plupart des modes mineurs. Ce résultat peut être rapproché de la technique de Lefebvre. Mais ceci est loin de constituer une règle générale même pour les parois de bâtiment. En effet, pour la même paroi tricouche décrite ci-dessus, en changeant simplement les valeurs numériques des coefficients d'échanges convectifs ($h_g = 11 \frac{W}{mK}$ et $h_d = 19 \frac{W}{mK}$), nous obtenons les sous-espaces suivants

Sous-espace 1: **1** (dimension 1)

Sous-espace 2: **2** (dimension 1)

Sous-espace 3: **3** 7,9,12,17,25,30,33,35,47,49,52... (dimension 62)

Sous-espace 4: **4** (dimension 1)

Sous-espace 5: **6** 5,8,10,11,13,14,15,16,18,19,20... (dimension 185)

Nous aurons l'occasion de voir d'autres sous-espaces d'amalgames lorsque nous aborderons les prochains exemples.

4.2.2 Les modes amalgamés

Pour avoir une illustration simple, intéressons-nous seulement au troisième sous-espace d'amalgame qui se compose du mode principal **3** et du mode mineur 6. A partir de ce sous-espace, nous allons générer le troisième mode amalgamé $\tilde{V}_3(M)$ défini par (voir §3.3.3)

$$\tilde{V}_3(M) = \omega_3(1)V_3(M) + \omega_3(2)V_6(M)$$

Les coefficients $\omega_3(1)$ et $\omega_3(2)$ qui réalisent le minimum de la fonctionnelle \mathcal{M}_3 sont

$$\omega_3(1) = 1$$

$$\omega_3(2) = 0.087$$

Le coefficient $\omega_3(2)$ étant faible, le mode mineur $V_6(M)$ apporte peu d'information thermique au mode principal $V_3(M)$. L'interprétation géométrique du mode amalgamé $\tilde{V}_3(M)$ est donnée dans figure 4.2. On remarquera que le mode principal est peu modifié.

En revanche, le dernier sous-espace d'amalgame est de dimension 245. Le mode principal $V_7(M)$ récupère une information thermique de 244 modes mineurs. Voyons si ce mode principal est modifié de façon notable ou non. Pour cela, nous traçons dans la figure 4.3 le mode principal $V_7(M)$ et le mode amalgamé $\tilde{V}_5(M)$ issu du cinquième sous-espace d'amalgame. La différence entre les deux modes est particulièrement importante dans la couche d'isolant. La correction apportée par l'amalgame modal dans le dernier sous-espace concerne donc l'isolant. En examinant le mode mineur 5 qui est donné dans la figure 4.4, on s'aperçoit qu'il a une amplitude importante dans l'isolant et il est difficile de le négliger complètement. Le coefficient $\omega_5(2)$ associé au mode mineur $V_5(M)$ est égal à 0.35 et est justement le plus grand parmi $\omega_5(m)$ $m = 2 \dots 245$.

La forme de chaque mode amalgamé permet de déduire globalement son rôle dans le modèle réduit. Examinons les modes amalgamés dans l'ordre:

- ▶ le premier mode amalgamé est principalement localisé dans la couche de béton du côté gauche de la paroi. Il est donc important pour la dynamique de cette couche. Son tracé est donné dans la figure 4.5.
- ▶ Le mode amalgamé $\tilde{V}_2(M)$ est approximativement le symétrique (au signe près) de $\tilde{V}_1(M)$ et il concerne la dynamique de la couche de béton du côté droit de paroi. Son tracé est donné dans la figure 4.5.
- ▶ Le troisième mode amalgamé $\tilde{V}_3(M)$ est réparti entre la couche de béton côté gauche et l'isolant. Ce mode intervient vraisemblablement pour assurer le "lien thermique" (ou continuité thermique) entre ces deux couches. Son tracé est donné dans la figure 4.2.
- ▶ Le mode amalgamé $\tilde{V}_4(M)$ peut aussi être considéré (au signe près) comme le symétrique de $\tilde{V}_3(M)$. De façon similaire, ce mode assure le lien thermique entre la couche du béton côté droit et l'isolant. Son tracé est donné dans la figure 4.5.
- ▶ Le dernier mode amalgamé est principalement localisé dans la centre de la paroi. L'opération d'amalgame modal dans le dernier sous-espace a donc eu pour effet de représenter l'isolant. Son tracé est donné dans la figure 4.3.

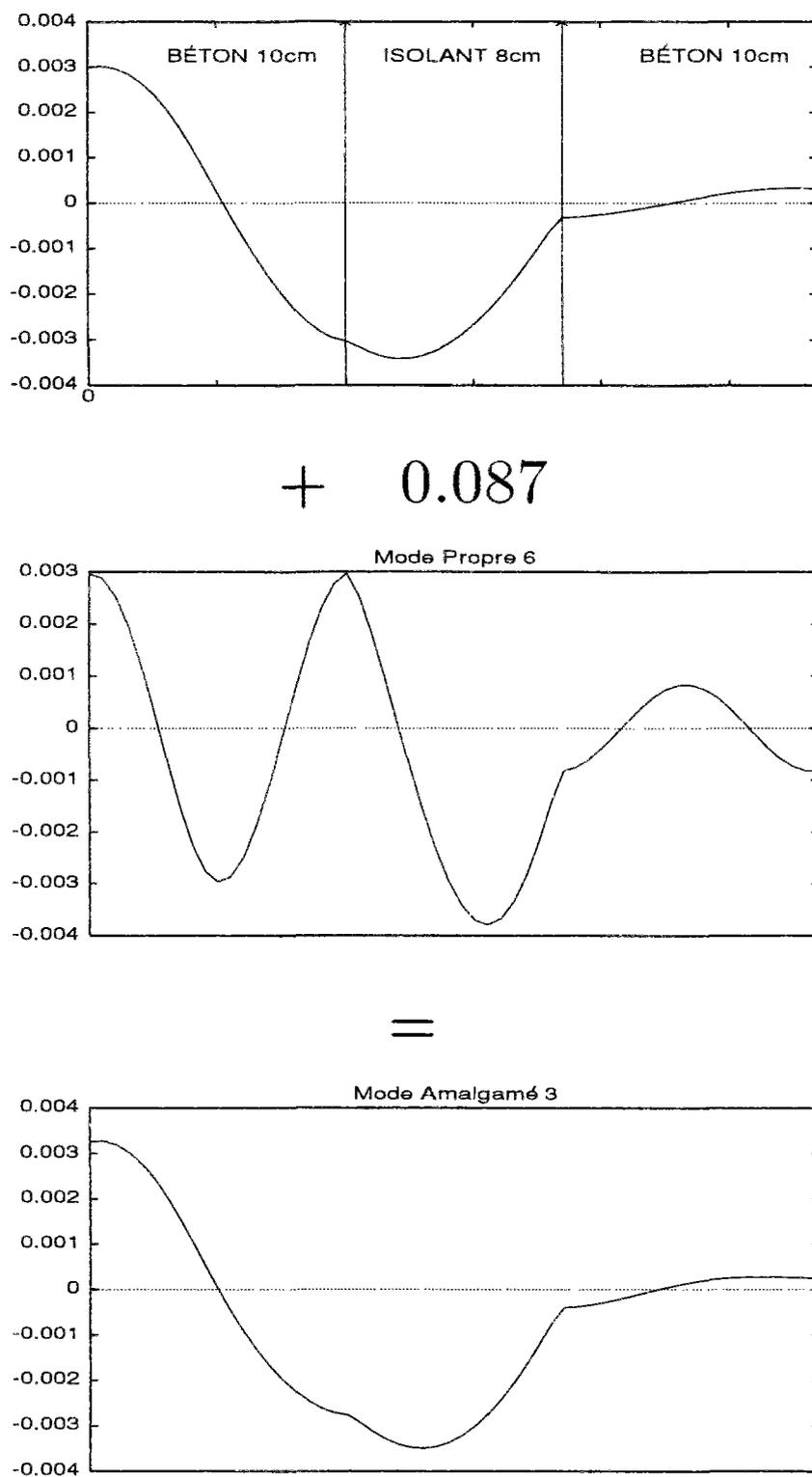


Figure 4.2: Interprétation géométrique du troisième mode amalgamé

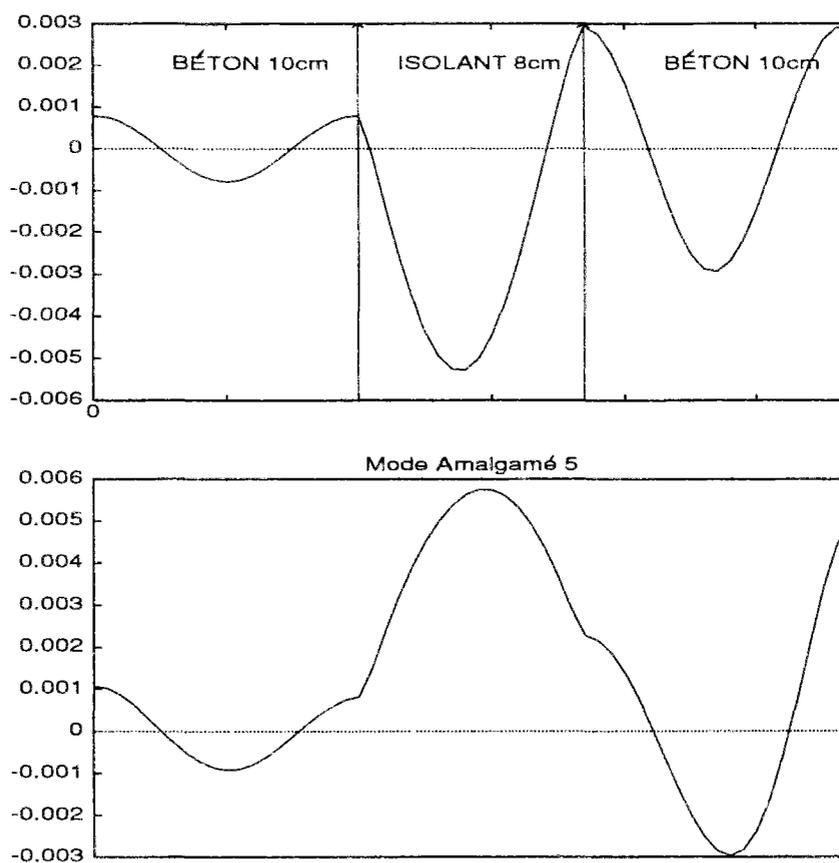


Figure 4.3: Sous-espace 5: comparaison du mode principal $V_7(M)$ et du mode amalgamé $\tilde{V}_5(M)$.

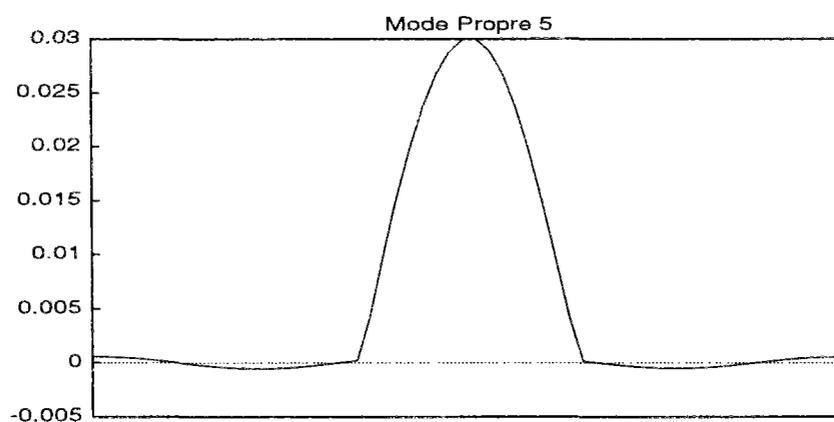


Figure 4.4: Mode Propre 5

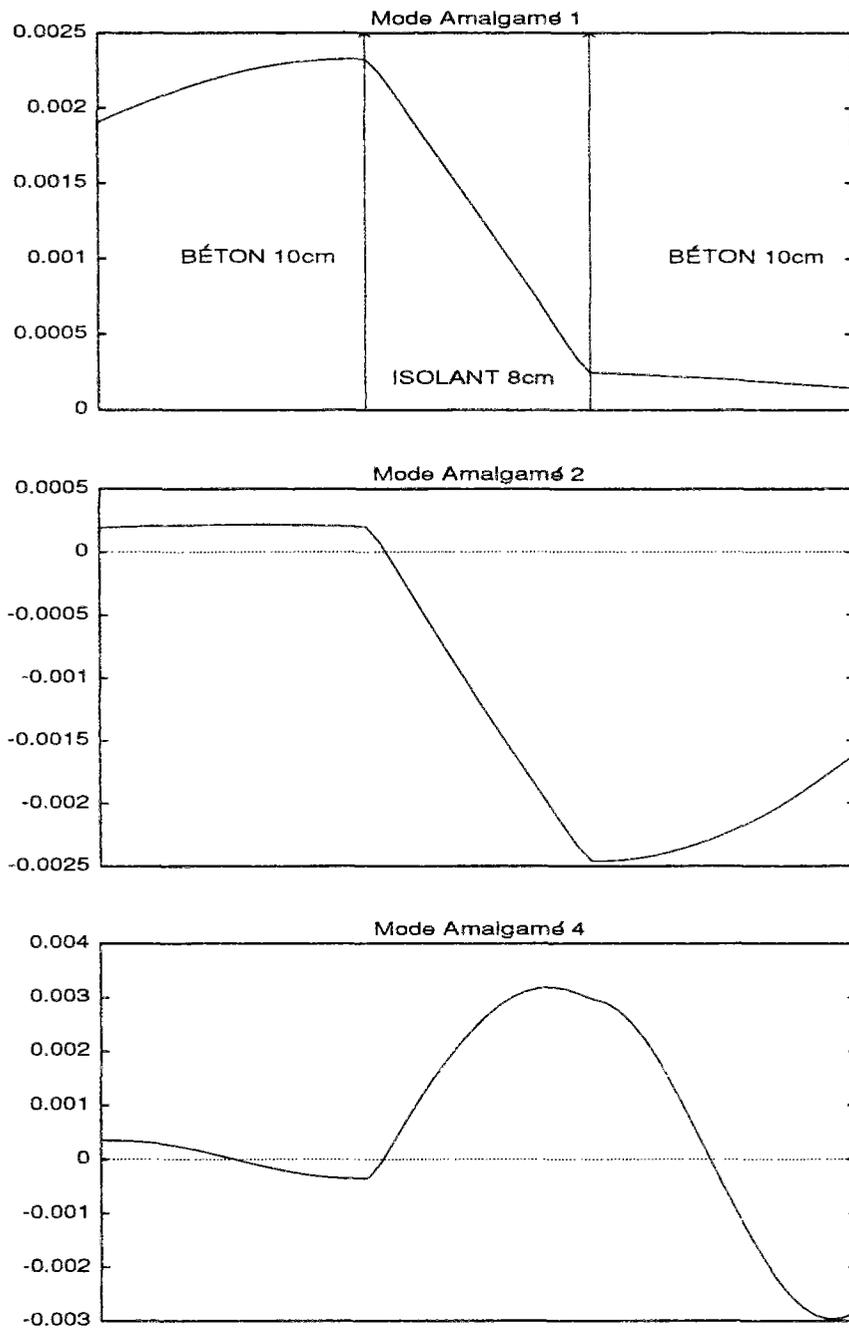


Figure 4.5: Modes amalgamés 1,2 et 4

4.2.3 Simulation de l'évolution thermique

Afin de montrer l'efficacité de la méthode de réduction par amalgame modal, il est nécessaire d'effectuer la simulation de l'évolution thermique de la paroi. En fait nous limiterons les calculs aux points d'échantillonnage au nombre de 57 pour cet exemple. Pour cela, nous considérons la paroi tricouche lorsqu'elle est sollicitée par un échelon unitaire à travers sa face droite (la sollicitation sur la face gauche est nulle). Pour simplifier, le champ initial de température est considéré comme étant identiquement nul et le domaine temporel \mathcal{D}_t s'étale de zéro à l'infini.

La représentation graphique utilisée est tridimensionnelle: L'axe "x" représente l'épaisseur matérielle de la paroi, c'est à dire la paroi elle-même. L'axe "y" est le temps. Cet axe utilise une échelle de type logarithmique⁴, ce qui permet de mieux distinguer les temps d'évolution rapide où se trouvent généralement les erreurs des différents modèles. Les axe "x" et "y" forment un plan horizontal. La direction verticale est la température (réponse des différents nœuds à la sollicitation échelon).

La figure 4.6 donne l'évolution thermique de l'ensemble des nœuds de la paroi tricouche. Ce champ spatio-temporel de température est calculé à partir du modèle de référence (**M.Ref**), qui repose sur 250 éléments propres. Le temps d'établissement du régime permanent est d'environ 28h. Remarquons au passage le rôle de l'isolant dans l'atténuation de la perturbation thermique à travers la paroi.

Considérons maintenant le modèle principal (**M.Pri**), c'est à dire le **modèle tronqué** reposant sur les modes principaux seulement (modes 1,2,3,4 et 7). La figure 4.7 montre l'écart (en valeur absolue) entre les champs spatio-temporels de température donnés par (**M.Ref**) et (**M.Pri**) respectivement. La localisation des erreurs dans la couche de l'isolant est nette.

On suit la même démarche en ce qui concerne le modèle amalgamé (**M.Ama**). Examinons la figure 4.8 qui donne l'écart (en valeur absolue) entre les champs spatio-temporels de température donnés par (**M.Ref**) et (**M.Ama**) respectivement. Les erreurs du modèle principal sont maintenant bien atténuées grâce à la prise en compte de l'effet des modes mineurs. Remarquons que la correction apportée par l'amalgame modal concerne surtout le domaine de l'espace occupé par l'isolant. Il est possible d'expliquer ce résultat: la mesure de l'erreur \mathcal{M} fait intervenir une pondération par la capacité calorifique (voir §3.3.3). Logiquement, les modes propres d'amplitude importante dans la couche d'isolant

⁴ Rappel: La variable temporelle t^* utilisée pour l'axe "y" est définie par

$$t^* = \frac{\text{Ln} \left(1 + 100 \frac{t}{t_{ref}} \right)}{\text{Ln}(101)}$$

Pour $t = t_{ref}$, on obtient $t^* = 1$. La variation du paramètre t_{ref} permet d'avoir une échelle dilatable de telle sorte que les erreurs puissent être distinguées aux faibles instants.

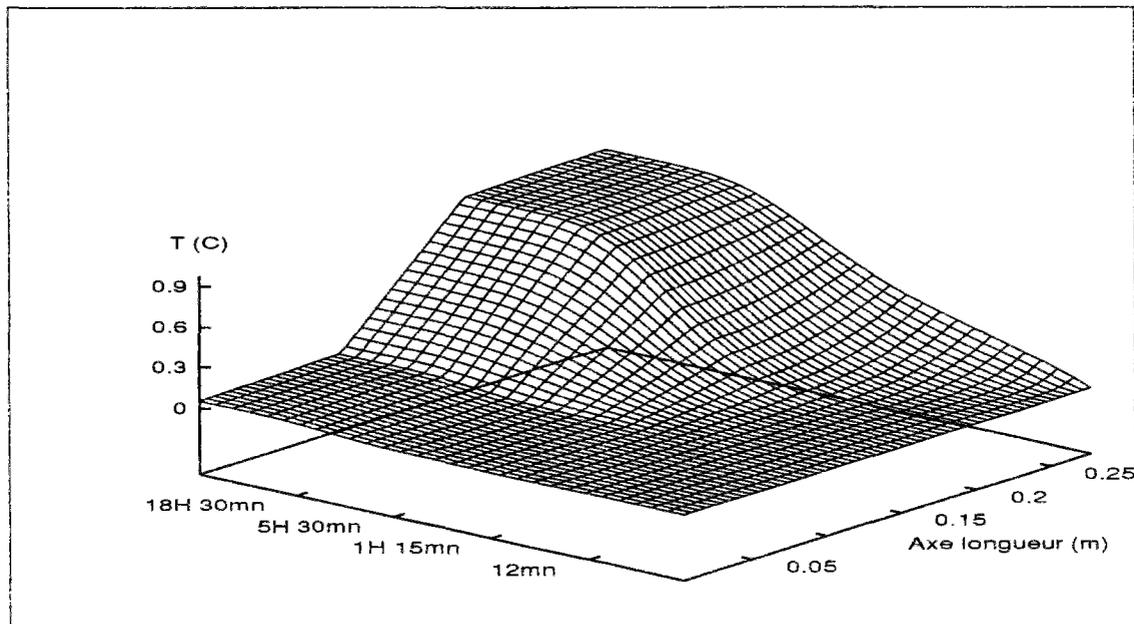


Figure 4.6: Réponse en température de la paroi à une sollicitation échelon sur son côté droit (modèle détaillé).

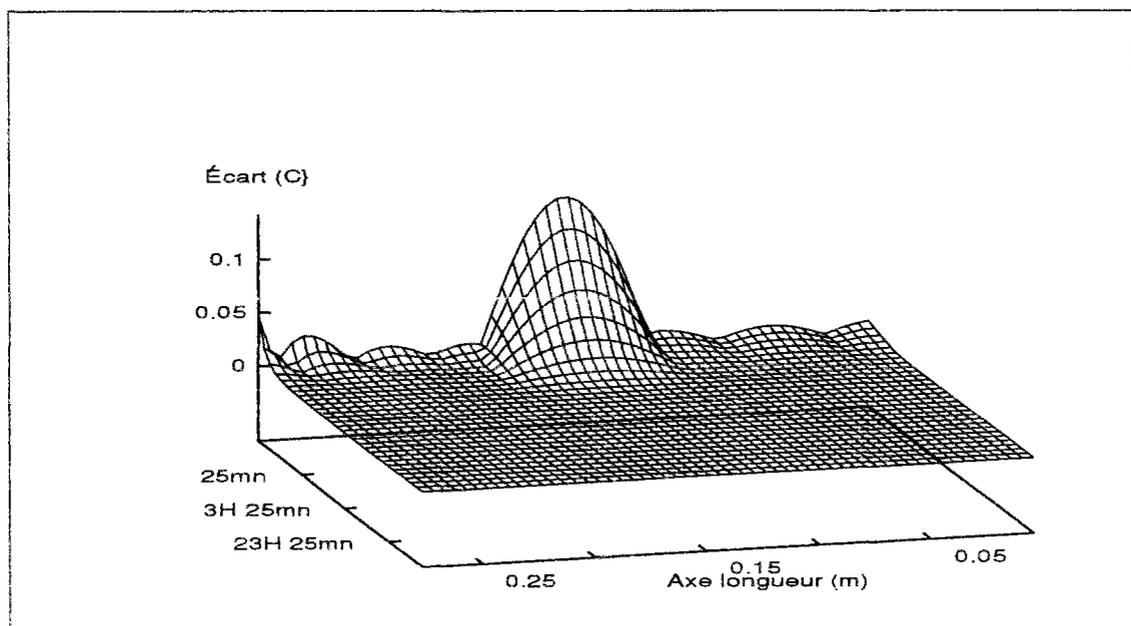


Figure 4.7: Ecart entre la réponse spatio-temporelle de (M.Ref) et celle de (M.Pri) obtenu pour $\mathcal{D}_t = [0, \infty[$.

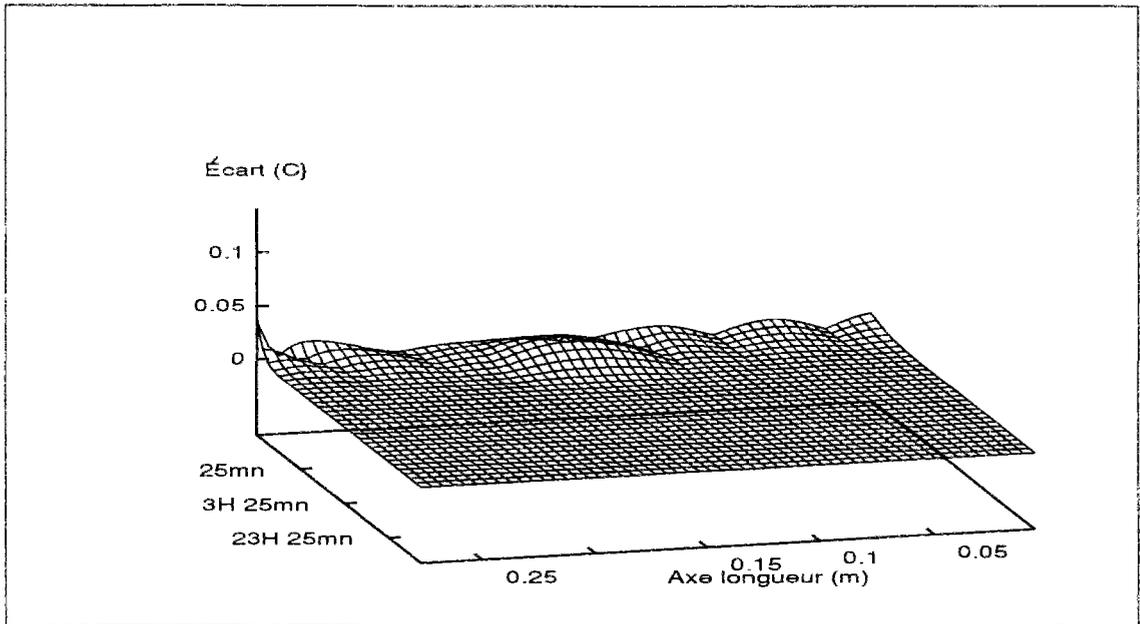


Figure 4.8: Écart entre la réponse spatio-temporelle de (M.Ref) et celle de (M.Ama) obtenu pour $\mathcal{D}_t = [0, \infty[$.

ont peu de chance d'être parmi les modes principaux. Ceci explique les erreurs importantes du (M.Pri) au niveau de l'isolant. La méthode d'amalgame modal a donc "concentré" la correction au niveau de la couche de l'isolant.

Remarque: Afin de pouvoir comparer les précisions des modèles (M.Pri) et (M.Ama), nous avons utilisé les mêmes échelles dans les figures 4.7 et 4.8.

4.3 Erreurs de réduction

Nous avons défini en §3.5 une mesure de l'erreur de réduction $\overline{\mathcal{M}}$ que nous pouvons évaluer aussi bien pour (M.Ama) que pour (M.Pri) ou le modèle de Marshall⁵ (M.Mar).

Nous avons effectué des réductions successives du (M.Ref) à l'ordre 1,2,3... Pour chacune de ces dimensions, nous avons évalué numériquement la mesure $\overline{\mathcal{M}}$ pour les trois modèles: (M.Mar), (M.Pri) et (M.Ama). Les résultats obtenus sont résumés dans la figure 4.9 et permettent de faire deux types de comparaisons

- La première consiste à comparer les courbes associées au (M.Pri) et (M.Ama). Cette comparaison permet de confirmer le travail accompli: le (M.Ama) est

⁵Rappel: Le modèle de Marshall est obtenu par simple troncature du (M.Ref) en ne gardant que les n premiers modes propres dans l'ordre décroissant des constantes de temps.

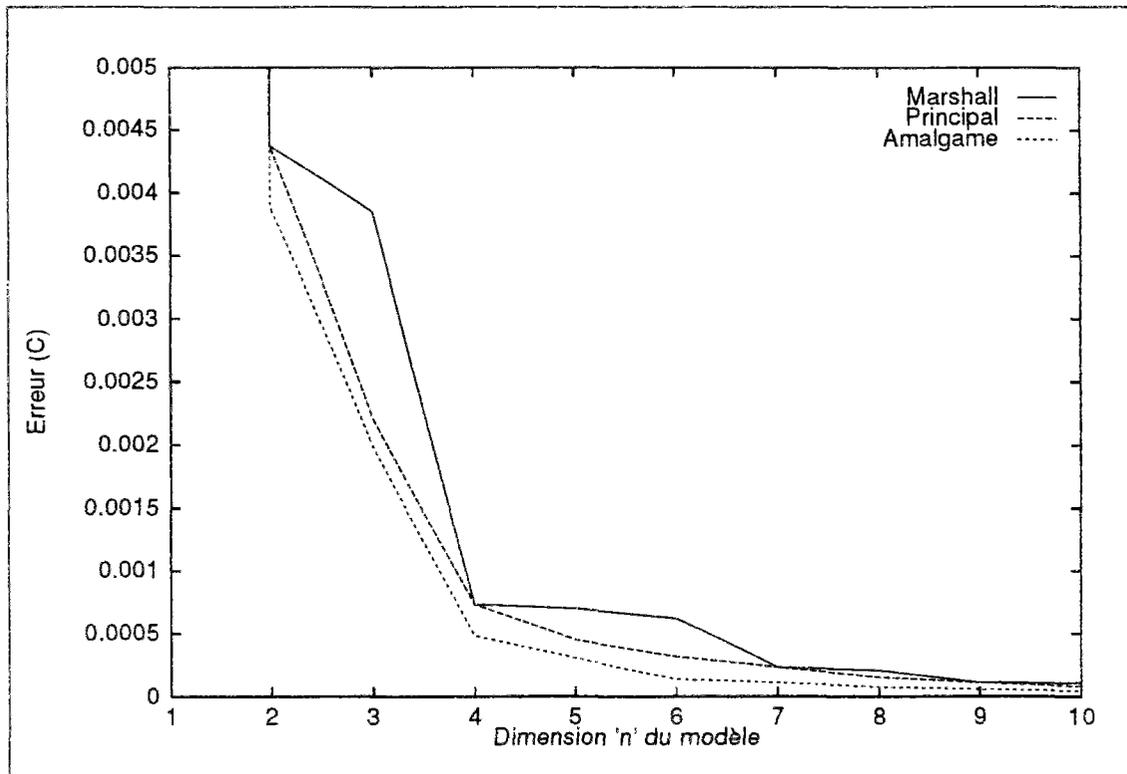


Figure 4.9: Evolution de la mesure \bar{M} en fonction de n .

plus précis que le (M.Pri) quel que soit le degré de la réduction.

► Du point de vue de la troncature modale, il est aussi possible de conclure que le (M.Pri) est plus précis que le (M.Mar) quelle que soit la dimension du modèle réduit. Le critère de troncature permettant le choix des modes principaux (le critère est de type énergétique) est donc plus apte à sélectionner les modes dominants. Les "paliers horizontaux" de la courbe d'erreur associée au (M.Mar) s'expliquent par le rajout de modes faibles au sens de \mathcal{M} . Par contre les courbes d'erreurs associées aux (M.Pri) et (M.Ama) sont plus régulières et présentent un taux de décroissance monotone lorsque n augmente.

4.4 Influence du domaine temporel \mathcal{D}_t

Tous les résultats établis dans la méthode de réduction par amalgame modal ont été donnés dans le cas général $\mathcal{D}_t = [t_1, t_2]$. Cette généralité nous a conduit à obtenir des expressions contenant des termes $[\Delta f(t)]_{t_2}^{t_1}$ qui désignent l'écart $[f(t_1) - f(t_2)]$. Ces termes sont réduits à 1 dans le cas où $\mathcal{D}_t = [0, \infty]$.

D'autre part, tous les modèles réduits présentent un défaut commun: les erreurs sont

globalement situées dans le début de l'évolution thermique du système. Dans le cas de la paroi tricouche étudiée ci-dessus, on peut vérifier sur la figure 4.8 que les erreurs (même faibles) sont approximativement réparties entre $t = 0$ et $t = 25mn$ ($25mn$ est de l'ordre de $10^{-2}\tau_1$). Aussi nous appliquons la méthode d'amalgame pour obtenir un modèle réduit d'ordre $n = 5$ et pour les mêmes conditions imposées ci-dessus sauf pour le domaine temporel, c'est à dire

- ▶ Transferts conductifs unidimensionnels dans la paroi.
- ▶ Plage temporelle $\mathcal{D}_t = [10^{-4}\tau_1, 10^{-2}\tau_1]$.
- ▶ Sollicitations de type échelon.
- ▶ Champ de température initial nul.

Le fait d'appliquer la méthode d'amalgame sur $\mathcal{D}_t = [10^{-4}\tau_1, 10^{-2}\tau_1]$ n'aboutit pas aux mêmes sous-espaces d'amalgame que ceux de §4.2.1 ci-dessus. On donne dans le tableau 4.4 ci-dessous la nouvelle partition de l'espace des modes propres.

sous-espace	1	2	3	4	5
composition en modes	1 , 3, 11	2	4	6 , 8, 16, 24, 32 ... (dim 33)	7 , 5, 9, 10 12, 13 ... (dim 212)

Tableau 4.4: répartition de l'espace des modes propres en 5 sous-espaces d'amalgame lorsque $\mathcal{D}_t = [10^{-4}\tau_1, 10^{-2}\tau_1]$

Notons que cette partition se distingue de celle du tableau 4.3 sur deux points essentiels:

Le mode $V_3(M)$ devient ici mineur et se place dans le sous-espace 1, mais le coefficient $\omega_1(2)$ qui lui est associé est de 0.055, ce qui signifie qu'il modifie peu le mode principal $V_1(M)$.

Le mode $V_6(M)$ devient ici principal et récupère une information thermique de la part de 32 modes mineurs.

Ce réarrangement a une conséquence sur la précision du modèle amalgamé obtenu. Pour comparer ce dernier à celui obtenu avec $\mathcal{D}_t = [0, \infty[$ dans §4.2.3, il faut tracer l'écart (en valeur absolue) entre les champs spatio-temporels de température donnés par **(M.Ref)** et **(M.Ama)** respectivement. Cet écart est illustré par la figure 4.10 dans laquelle nous avons gardé les mêmes échelles que les figures 4.7 et 4.8. L'effet de modification du domaine temporel \mathcal{D}_t peut ici être résumé comme suit:

- ▶ Les erreurs du modèle amalgamé sont encore plus atténuées aux faibles instants, c'est à dire jusqu'à $10^{-2}\tau_1$ environ.
- ▶ Il y a apparition de faibles erreurs dans la zone du transitoire (jusqu'à 6h environ sur la figure 4.10). Mais cette détérioration est insignifiante puisque l'écart est de l'ordre de 10^{-3} °C.

► L'erreur aux frontières de la paroi est nettement atténuée. Ces zones sont instantanément atteintes par la sollicitation. Il est donc logique que l'ajustement temporel proposé ici améliore la qualité du modèle réduit sur les limites de la paroi. Ainsi, le modèle réduit par amalgame permet de simuler un comportement qui s'apparente dans les premiers instants à celui d'un massif semi-infini. C'est une des difficultés traditionnelles des décompositions sous forme de série infinie qui trouve ici une solution. Notons que la connaissance précise de l'évolution de température au frontières de la paroi permet de déduire les flux traversant ces dernières.

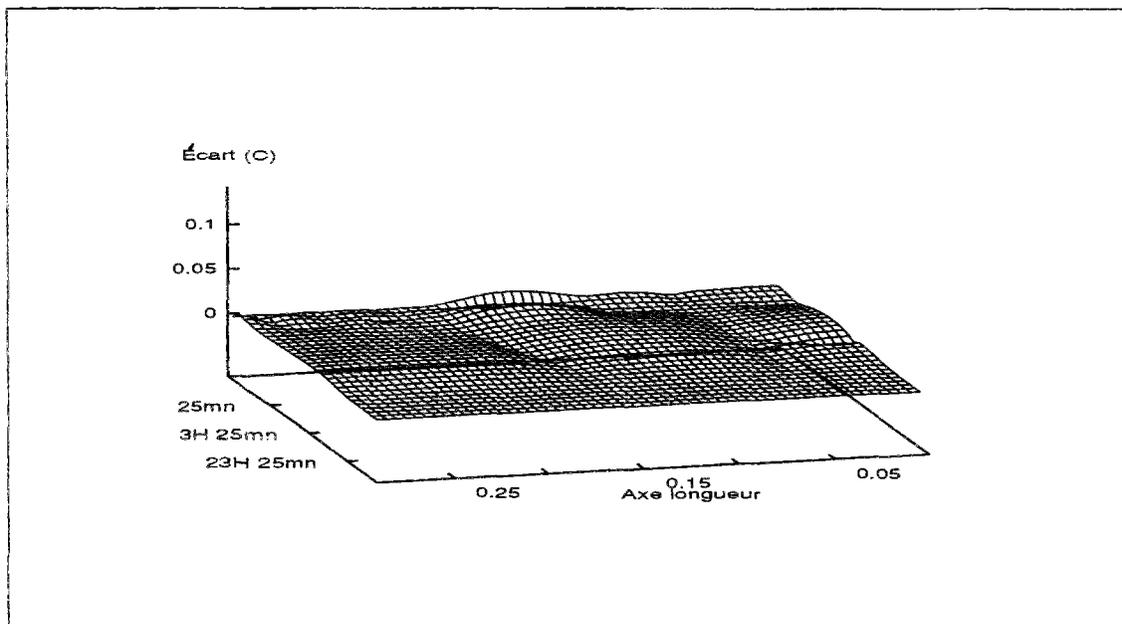


Figure 4.10: Ecart entre la réponse spatio-temporelle de (M.Ref) et celle de (M.Ama) obtenu avec $\mathcal{D}_t = [10^{-4}\tau_1, 10^{-2}\tau_1]$.

Que se passe-t-il si l'on choisit \mathcal{D}_t encore plus petit? Nous avons vérifié que le résultat est similaire à celui que nous avons obtenu ci-dessus: le modèle amalgamé a une grande précision dans \mathcal{D}_t et en dehors de ce domaine, il est possible de voir apparaître des erreurs.

Il ressort de cette première étude que la méthode de réduction par amalgame modal peut générer un petit modèle suffisamment précis avec possibilité de privilégier un horizon temporel.