Opérades

Les opérades furent introduites dans les années 1970 à peu de choses près au même moment par May [May72] et par Boardman et Vogt [BV73] dans le contexte de la topologie algébrique et l'étude des espaces de lacets. Cette nouvelle notion tombait progressivement dans l'oubli lorsque, à partir des années 1990, elle trouva des applications dans d'autres domaines [Lod95], [Sta99b], [MSS02], notamment en algèbre, en physique et en combinatoire. Quelques références à la fois générales et introductives sur les opérades sont [GK94], [Mar06], ainsi que [LV10].

De manière simplifiée, une opérade est une structure algébrique qui contient des opérateurs abstraits pouvant se composer pour en former de plus gros. Par exemple, composer un opérateur x d'arité n avec un autre opérateur y d'arité m donne un opérateur d'arité $n + m - 1$ car l'opérateur obtenu dispose des entrées de y ainsi que celles de x excepté de l'une d'entre elles — celle utilisée pour réaliser la composition. Une algèbre sur une opérade est un espace vectoriel sur lequel ces opérateurs agissent, c'est-à-dire qu'ils permettent de calculer un élément en sortie sur l'entrée de plusieurs éléments de l'espace vectoriel. Le point fondamental est que les relations qui existent entre les opérateurs de l'opérade impliquent des relations entre les éléments de l'algèbre. Par exemple, toute algèbre sur l'opérade associative (voir [AL07]) possède un opérateur, un produit, qui est associatif. De même, toute algèbre sur l'opérade de Lie possède un crochet de Lie qui vérifie la relation de Jacobi et est antisymétrique. Ainsi, chaque type d'algèbre est gouverné par une opérade. L'un des points forts de cette théorie est qu'il devient alors possible de comparer différents types d'algèbres en passant par les opérades, ce qui se fait par l'intermédiaire de morphismes d'opérade. Citons à ce propos [Zin10] qui répertorie une vaste gamme de types d'algèbres ainsi que leurs opérades correspondantes.

Notre traitement des opérades sera quelque peu différent puisque nous avons une vision purement combinatoire de ces structures. En suivant notre même approche dans l'étude des algèbres de Hopf qui consiste à les regarder comme encodant l'*assemblage* et le *désassemblage* d'objets combinatoires avec une notion de compatibilité, les opérades sont vues comme des structures permettant d'encoder le *greffage* d'objets combinatoires. La différence avec la notion d'assemblage propre aux algèbres de Hopf est que l'on peut choisir un endroit dans l'objet pour réaliser ladite greffe. Cette vision met en évidence le fait qu'un objet combinatoire est constitué de *secteurs de substitution* — jouant le rôle d'entrées d'opérateurs — sur lesquels d'autres objets peuvent y être greffés. Cette opération est incarnée par les opérateurs de substitution partielle des opérades.

Dans ces dernières années, un grand nombre d'opérades ont été définies et étudiées, et force est de constater que la plupart sont définies sur des objets combinatoires — ou des espaces vectoriels engendrés par une classe combinatoire. Une large palette d'opérades mettant en jeu différentes espèces d'arbres occupent une place de choix en combinatoire algébrique [Cha08].

Citons par exemple l'opérade dendriforme [Lod01] de Loday et l'opérade dupliciale [BF03] de Brouder et Frabetti toutes deux sur les arbres binaires. Ou encore, l'opérade pré-Lie [CL01] de Chapoton et Livernet et l'opérade non associative permutative [Liv06] de Livernet toutes deux définies sur les arbres enracinés. Citons également des opérades sur des objets combinatoires plus exotiques comme l'opérade des plantes et des arbres non croisés [Cha06b], des forêts d'arbres binaires dont les feuilles sont étiquetées [Cha04], et des arbustes [Cha10], toutes construites par Chapoton. Un point remarquable dans ces exemples est que la substitution partielle s'exprime par des algorithmes combinatoires et met en évidence certaines propriétés des objets mis en jeu.

Dans ce chapitre, nous posons les concepts de base sur les opérades que nous utiliserons dans les chapitres 6 et 7. Nous définissons ainsi dans le paragraphe 3.1 les opérades dans la catégorie des espaces vectoriels, les notions de morphismes d'opérade, d'idéaux et de quotient. Nous donnons également une description de l'opérade libre sur un ensemble de générateurs et de la présentation d'une opérade comme un quotient de cette dernière. De plus, nous rappelons ce qu'est une algèbre sur une opérade. Nous donnons dans le paragraphe 3.2, quatre exemples d'opérades qui nous paraissent fondamentales : l'opérade commutative et associative, l'opérade associative, l'opérade de Lie et l'opérade dendriforme. Nous terminons par le paragraphe 3.3 en rappelant une construction classique qui, à une opérade ensembliste, associe un groupe, puis deux algèbres de Hopf, l'une commutative et l'autre non.

3.1 Définitions et propriétés de base

3.1.1 Définitions

Substitutions dans une permutation

Nous avons avant tout besoin de décrire une opération sur les permutations. Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\nu \in \mathfrak{S}_m$ deux permutations. Pour tout $i \in [n]$, la *substitution* de ν en position i dans σ, notée $B_i(\sigma, \nu)$, est la permutation π qui vérifie

$$\pi := \pi_1 \cdot \ \dots \ \cdot \pi_{i-1} \cdot (\sigma_i + \nu_1 - 1) \cdot \ \dots \ \cdot (\sigma_i + \nu_m - 1) \cdot \pi_{i+1} \cdot \ \dots \ \pi_n, \tag{3.1.1}$$

où

$$\pi_j := \begin{cases} \sigma_j & \text{si } \sigma_j < \sigma_i, \\ \sigma_j + m - 1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Nous avons ainsi par exemple $B_3(5341672, 231) = 735641892$.

Opérades

Définition 3.1.1. *Une* opérade *est un espace vectoriel gradué $\mathcal{P}$ de la forme*

$$\mathcal{P} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{P}(n), \tag{3.1.3}$$

muni pour tout $i \geqslant 1$ d'applications linéaires $\circ_i$, nommées opérateurs de substitution partielle*, qui sont pour tous $n \geqslant i$ et $m \geqslant 1$ de la forme*

$$\circ_i : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m) \to \mathcal{P}(n + m - 1), \tag{3.1.4}$$

*et qui vérifient pour tous $x \in \mathcal{P}(n)$, $y \in \mathcal{P}(m)$, $z \in \mathcal{P}(k)$, $i \in [n]$ et $j \in [m]$ la relation d'*associativité en série *:*

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z), \tag{3.1.5}$$

et pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant n$*, la relation d'*associativité en parallèle *:*

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y. \tag{3.1.6}$$

Il existe de plus un élément $\mathbf{1} \in \mathcal{P}(1)$*, appelé* unité*, tel que pour tout* $x \in \mathcal{P}(n)$ *et* $i \in [n]$*,*

$$\mathbf{1} \circ_1 x = x \circ_i \mathbf{1} = x. \tag{3.1.7}$$

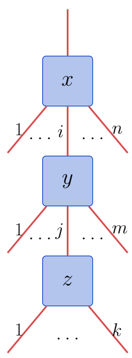
Chaque espace vectoriel $\mathcal{P}(n)$ *est muni d'une action du groupe symétrique linéaire à gauche*

$$\cdot : \mathcal{P}(n) \times \mathfrak{S}_n \to \mathcal{P}(n), \tag{3.1.8}$$

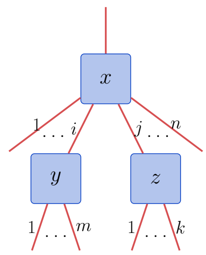
qui vérifie, pour tous $x \in \mathcal{P}(n)$*,* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$*,* $y \in \mathcal{P}(m)$*,* $\nu \in \mathfrak{S}_m$ *et* $i \in [n]$ *la relation*

$$(x \cdot \sigma) \circ_i (y \cdot \nu) = (x \circ_{\sigma_i} y) \cdot B_i(\sigma, \nu). \tag{3.1.9}$$

Les éléments de $\mathcal{P}(n)$ peuvent être vus comme des opérateurs qui disposent de n entrées et d'une sortie. De ce fait, si x est un élément de $\mathcal{P}(n)$, nous dirons que l'*arité* de x est n. Les relations imposées dans la définition 3.1.1 peuvent se comprendre en termes d'assemblages d'opérateurs. En effet, en ce qui concerne les relations d'associativité en série et en parallèle, il suffit de voir que l'on peut assembler trois opérateurs x, y et z d'exactement deux manières différentes, au renommage près des opérateurs :



et



(3.1.10)

Pour comprendre la relation d'associativité en série, on peut observer qu'il existe deux manières, à partir des éléments x, y, et z d'obtenir l'opérateur de gauche de (3.1.10) : on peut en effet commencer par greffer y à x, et ensuite greffer z à l'opérateur obtenu, ou bien, on peut greffer z à y, et ensuite greffer l'opérateur obtenu à x. Le fait que ces substitutions partielles aboutissent à un même élément est encodé par (3.1.5).

De la même manière, pour comprendre la relation d'associativité en parallèle, on peut observer que l'on a deux manières, à partir des éléments x, y, et z d'obtenir l'opérateur de droite de (3.1.10) : on peut en effet commencer par greffer y à x, et ensuite greffer z à l'opérateur obtenu, ou bien, on peut greffer z à x, et ensuite greffer y à l'opérateur obtenu. Ici, le fait que ces substitutions partielles aboutissent à un même élément est encodé par (3.1.6).

En outre, la relation (3.1.9) spécifiant la compatibilité entre les opérateurs de substitution partielle et l'action du groupe symétrique peut se comprendre de la même façon, en sachant que l'action du groupe symétrique sur les éléments de l'opérade se traduit par une permutation des entrées des opérateurs qui les représentent.

Opérateurs de substitution complète

On peut associer à toute opérade $\mathcal{P}$ un *opérateur de substitution complète* $\circ$ de la forme

$$\circ : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(m_n) \to \mathcal{P}(m_1 + \cdots + m_n), \tag{3.1.11}$$
$$(x, y_1, \ldots, y_n) \mapsto x \circ [y_1, \ldots, y_n], \tag{3.1.12}$$

défini pour tous $n, m_1, \ldots, m_n \geqslant 1$ à partir des opérateurs de substitution partielle par

$$x \circ [y_1, \ldots, y_n] := (\ldots((x \circ_n y_n) \circ_{n-1} y_{n-1}) \ldots) \circ_1 y_1, \tag{3.1.13}$$

où $x \in \mathcal{P}(n)$, $y_1 \in \mathcal{P}(m_1)$, …, $y_n \in \mathcal{P}(m_n)$. Les relations d'associativité en série et en parallèle données en (3.1.5) et (3.1.6) se résument alors par l'unique relation

$$\begin{aligned}(x \circ [y_1, \ldots, y_n]) \circ [z_{1,1}, \ldots, z_{1,m_1}, \ldots, z_{n,1}, \ldots, z_{n,m_n}] = \\ x \circ [y_1 \circ [z_{1,1}, \ldots, z_{1,m_1}], \ldots, y_n \circ [z_{n,1}, \ldots, z_{n,m_n}]],\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

pour tous $x \in \mathcal{P}(n)$, $y_1 \in \mathcal{P}(m_1)$, …, $y_n \in \mathcal{P}(m_n)$, et $z_{1,1}, \ldots, z_{1,m_1}$, …, $z_{n,1}, \ldots, z_{n,m_n} \in \mathcal{P}$. La relation (3.1.7) se traduit quant à elle en la relation

$$\mathbf{1} \circ [x] = x \circ [\underbrace{\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}}_{n}] = x, \tag{3.1.15}$$

pour tout $x \in \mathcal{P}$.

Inversement, à partir d'un opérateur de substitution complète $\circ$ vérifiant (3.1.14) et d'une unité $\mathbf{1}$ vérifiant (3.1.15), il est possible de retrouver les opérateurs $\circ_i$ de substitution partielle en posant

$$x \circ_i y := x \circ [\underbrace{\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}}_{i-1}, y, \underbrace{\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}}_{n-i}], \tag{3.1.16}$$

où $x \in \mathcal{P}(n)$, $y \in \mathcal{P}(m)$ et $i \in [n]$.

Il y a de ce fait deux manières équivalentes de voir une même opérade : l'une par l'intermédiaire d'un opérateur de substitution complète et l'autre par le biais d'opérateurs de substitution partielle.

Sous-opérades, morphismes, quotients et séries de Hilbert

Soit $\left(\mathcal{P}, \circ^{\mathcal{P}}, \mathbf{1}^{\mathcal{P}}, \cdot^{\mathcal{P}}\right)$ une opérade. Un espace vectoriel $\mathcal{P}'$ est une *sous-opérade* de $\mathcal{P}$ si pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}'(n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}(n)$, $\mathbf{1}^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}'(1)$ et pour tout $x \in \mathcal{P}'(n)$, $y \in \mathcal{P}'(m)$, $i \in [n]$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $x \circ_i y \in \mathcal{P}'(n+m-1)$ et $x \cdot^{\mathcal{P}} \sigma \in \mathcal{P}'(n)$. La sous-opérade de $\mathcal{P}$ *engendrée* par un ensemble E d'éléments de $\mathcal{P}$, notée $\langle E \rangle_{\mathcal{P}}$ — ou simplement $\langle E \rangle$ s'il n'y a pas d'ambiguïté — est la plus petite sous-opérade de $\mathcal{P}$ qui contient E. Nous dirons que $\mathcal{P}$ est *finiment engendrée* s'il existe un ensemble fini E tel que $\mathcal{P} = \langle E \rangle$.

Soit maintenant $\left(\mathcal{Q}, \circ^{\mathcal{Q}}, \mathbf{1}^{\mathcal{Q}}, \cdot^{\mathcal{Q}}\right)$ une autre opérade. Une application $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ est un *morphisme d'opérade* si $\phi(x) \in \mathcal{Q}(n)$, $\phi\left(\mathbf{1}^{\mathcal{P}}\right) = \mathbf{1}^{\mathcal{Q}}$,

$$\phi\left(x \circ_i^{\mathcal{P}} y\right) = \phi(x) \circ_i^{\mathcal{Q}} \phi(y), \tag{3.1.17}$$

et

$$\phi\left(x \cdot^{\mathcal{P}} \sigma\right) = \phi(x) \cdot^{\mathcal{Q}} \sigma, \tag{3.1.18}$$

pour tous $x \in \mathcal{P}(n)$, $y \in \mathcal{P}(m)$, $i \in [n]$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{P}$ est un *idéal* de $\mathcal{P}$ si

$$x \circ_i^{\mathcal{P}} y \in V, \tag{3.1.19}$$

pour tous $x \in \mathcal{P}(n)$, $y \in \mathcal{P}(m)$ et $i \in [n]$, lorsque x ou y est un élément de V et

$$x \cdot^{\mathcal{P}} \sigma \in V, \tag{3.1.20}$$

pour tous $x \in \mathcal{P}(n)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, lorsque x est un élément de V. Le *quotient* de $\mathcal{P}$ par l'idéal V est l'opérade $\mathcal{P}/_V$ avec la substitution partielle $\circ_i$ définie linéairement par

$$\widehat{x} \circ_i \widehat{y} := \tau\left(x \circ_i^{\mathcal{P}} y\right), \tag{3.1.21}$$

et l'action du groupe symétrique définie linéairement par

$$\widehat{x} \cdot \sigma := \tau\left(x \cdot^{\mathcal{P}} \sigma\right), \tag{3.1.22}$$

pour tous $\widehat{x} \in \mathcal{P}(n)/_V$, $\widehat{y} \in \mathcal{P}(m)/_V$, $i \in [n]$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, où $\tau : \mathcal{P} \to \mathcal{P}/_V$ est la projection canonique et x et y sont des éléments de $\mathcal{P}$ tels que $\tau(x) = \widehat{x}$ et $\tau(y) = \widehat{y}$.

Si les espaces vectoriels $\mathcal{P}(n)$ de l'opérade $\mathcal{P}$ sont de dimensions finies pour tout $n \geqslant 1$, on associe alors à $\mathcal{P}$ sa *série de Hilbert* $F^{e}_{\mathcal{P}}(t)$, la série génératrice exponentielle définie par

$$F^{e}_{\mathcal{P}}(t) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} \dim \mathcal{P}(n)\, t^n. \tag{3.1.23}$$

Opérades ensemblistes

Lorsqu'il existe une base de $\mathcal{P}$ telle que la substitution partielle de deux éléments de base, l'unité de $\mathcal{P}$ et l'action de toute permutation sur un élément de base s'expriment tous par un unique élément de base ayant $1_{\mathbb{K}}$ comme coefficient, nous dirons que $\mathcal{P}$ est une *opérade ensembliste*. Dans ce cas, nous pourrons considérer que l'opérade est définie sur une suite d'ensembles $E(n), n \geqslant 1$, dont les éléments de chaque $E(n)$ sont les éléments de base de $\mathcal{P}(n)$. Il nous arrivera ainsi dans la suite de définir des opérades ensemblistes $\mathcal{Q}$ où les $\mathcal{Q}(n)$ ne sont pas des espaces vectoriels mais des ensembles. On retrouve à partir d'une telle opérade $\mathcal{Q}$ une opérade conforme à la définition 3.1.1 en considérant l'espace vectoriel libre sur l'ensemble $\mathcal{Q}$.

Opérades non symétriques

Une opérade $\mathcal{P}$ est *non symétrique* — ou ns en abrégé — si elle n'est pas munie d'une action du groupe symétrique. Si les espaces vectoriels $\mathcal{P}(n)$ sont de dimensions finies pour tout $n \geqslant 1$, on associe alors à $\mathcal{P}$ sa *série de Hilbert* $F_{\mathcal{P}}(t)$, la série génératrice ordinaire définie par

$$F_{\mathcal{P}}(t) := \sum_{n \geqslant 1} \dim \mathcal{P}(n)\, t^n. \tag{3.1.24}$$

On obtient à partir d'une opérade sa *version non symétrique* simplement en oubliant l'action du groupe symétrique. Inversement, à partir d'une opérade ns $\left(\mathcal{P}, \circ^{\mathcal{P}}, \mathbf{1}^{\mathcal{P}}\right)$, on obtient une opérade $\mathcal{Q}$, la *symétrisée* de $\mathcal{P}$ où

$$\mathcal{Q}(n) := \mathcal{P}(n) \otimes \mathrm{Vect}(\mathfrak{S}_n). \tag{3.1.25}$$

L'opérateur de substitution partielle de $\mathcal{Q}$ est défini linéairement par

$$(x \otimes \sigma) \circ_i (y \otimes \nu) := \left(x \circ_i^{\mathcal{P}} y\right) \otimes B_i(\sigma, \nu), \tag{3.1.26}$$

où $x \in \mathcal{P}(n)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $y \in \mathcal{P}(m)$, $\nu \in \mathfrak{S}_m$ et $i \in [n]$. L'unité de $\mathcal{Q}$ est $\mathbf{1} := \mathbf{1}^{\mathcal{P}} \otimes \epsilon$, et l'action du groupe symétrique de $\mathcal{Q}$ est définie linéairement à gauche pour tous $x \in \mathcal{P}(n)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\nu \in \mathfrak{S}_n$ par

$$(x \otimes \sigma) \cdot \nu := x \otimes (\sigma \cdot \nu), \tag{3.1.27}$$

où le symbole · dans le membre droit de (3.1.27) désigne la composition usuelle des permutations. Notons que dans le cas général, une opérade $\mathcal{P}$ est différente de la symétrisée de sa version non symétrique.

Remarquons que si $\mathcal{P}$ admet une série de Hilbert $F_{\mathcal{P}}(t)$, alors $\mathcal{Q}$ admet également une série de Hilbert $F^{\mathrm{e}}_{\mathcal{Q}}(t)$. En outre, comme nous avons $\dim \mathcal{Q}(n) = n! \dim \mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geqslant 1$, celle-ci vérifie

$$F^{\mathrm{e}}_{\mathcal{Q}}(t) = F_{\mathcal{P}}(t). \tag{3.1.28}$$

Opérades combinatoires

Dans ce mémoire, nous considérerons plus particulièrement la sous-classe des *opérades combinatoires* :

Définition 3.1.2. *Une opérade $\mathcal{P}$ est* combinatoire *s'il existe un espace vectoriel combinatoire V tel que* $\dim V^{(1)} = 1$ *et* $\mathcal{P}(n) = V^{(n)}$ *pour tout* $n \geqslant 1$*. Nous dirons que la* classe combinatoire sous-jacente *à $\mathcal{P}$ est la classe combinatoire sous-jacente à V.*

Notons que d'après la définition 1.1.1 du chapitre 1, toute opérade combinatoire $\mathcal{P}$ admet une série de Hilbert $F^{\mathrm{e}}_{\mathcal{P}}(t)$ puisque les espaces vectoriels $\mathcal{P}(n)$ sont de dimensions finies. Celle-ci est de la forme

$$F^{\mathrm{e}}_{\mathcal{P}}(t) = t + \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n!}[t^n]\mathcal{S}_C(t), \tag{3.1.29}$$

où C est la classe combinatoire sous-jacente à $\mathcal{P}$. Notons que d'après la définition 3.1.2, le coefficient de t dans $F^{\mathrm{e}}_{\mathcal{P}}(t)$ est bien 1.

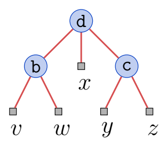
La plupart des opérades combinatoires peuvent s'implanter sans difficulté, par exemple en Sage [S+11]. Il suffit en effet de spécifier la classe combinatoire sous-jacente et de programmer l'opérateur de substitution partielle de deux éléments de base ainsi que l'action du groupe symétrique. Le système étend automatiquement la substitution partielle par linéarité. Un bon nombre d'implantations ont été réalisées dans ce travail pour des expérimentations.

3.1.2 Opérades libres, présentations par générateurs et relations

Nous donnons ici une description simplifiée et suffisante dans notre contexte de l'opérade libre. Pour une construction complète et plus générale, on pourra consulter [Mar06] et [LV10].

Opérades libres sur un ensemble

Soit $E := \uplus_{n \geqslant 1} E(n)$ un ensemble. Les éléments de $E(n)$ peuvent se voir comme des *opérateurs* d'arité n. Nous considérons l'espace vectoriel $\mathcal{F}(E)$ engendré par l'ensemble des arbres plans enracinés dont les nœuds qui ne possèdent pas de fils — les feuilles — ne sont pas étiquetés et les nœuds qui possèdent exactement n fils sont étiquetés sur $E(n)$. Nous appellerons dans ce paragraphe simplement *arbres* ces objets et leur *taille* est leur nombre de feuilles. Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E)$ restreint aux arbres de taille n est noté $\mathcal{F}(E)(n)$. Un arbre peut se voir comme un arbre syntaxique d'une expression où les opérateurs sont les étiquettes de ses nœuds et les variables en entrée correspondent à ses feuilles. Ainsi, par exemple, à l'arbre



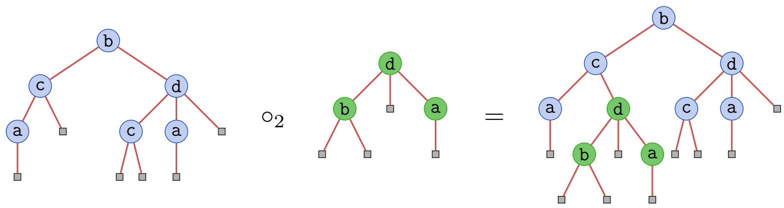
(3.1.30)

correspond l'expression

$$\mathtt{d}(\mathtt{b}(v, w), x, \mathtt{c}(y, z)), \tag{3.1.31}$$

où les nœuds d'étiquettes $\mathtt{b}$ et $\mathtt{c}$ correspondent à des opérateurs d'arité deux, le nœud d'étiquette $\mathtt{d}$ à un opérateur d'arité trois, et v, w, x, y et z sont des variables.

La substitution partielle de deux arbres S et T en position i est l'arbre obtenu en *greffant* la racine de T sur la i^{e} feuille de S en partant de la gauche. Nous notons $S \circ_i T$ l'arbre ainsi obtenu. L'arbre constitué d'une unique feuille est l'unité pour cette substitution partielle. Celui-ci est de taille 1 et est noté $\mathbf{1}$. En étendant la définition de l'opérateur de substitution partielle par linéarité, l'*opérade ns libre* sur l'ensemble E est l'opérade $(\mathcal{F}(E), \circ, \mathbf{1})$. Donnons à présent un exemple. Fixons $E(1) := \{\mathtt{a}\}$, $E(2) := \{\mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, $E(3) := \{\mathtt{d}\}$ et $E := E(1) \uplus E(2) \uplus E(3)$. Nous avons alors dans $\mathcal{F}(E)$ la substitution partielle suivante :



(3.1.32)

L'*opérade libre* sur E est la symétrisée de l'opérade ns libre $\mathcal{F}(E)$. Nous la notons également $\mathcal{F}(E)$. Un élément de cette opérade est donc un arbre muni d'une permutation qui spécifie un ordre total sur ses feuilles.

Présentations par générateurs et relations

L'intérêt principal d'introduire les opérades libres provient du fait que toute opérade peut être définie par l'intermédiaire de *générateurs* engendrant une opérade libre et de *relations* qui définissent un quotient de cette dernière. En effet, toute opérade $\mathcal{P}$ admet l'écriture

$$\mathcal{P} = \mathcal{F}(E)/_{R}, \tag{3.1.33}$$

où $E := \uplus_{n \geqslant 1} E(n)$ est l'*ensemble des générateurs* de $\mathcal{P}$ et R est un idéal de $\mathcal{F}(E)$, l'*espace des relations* de $\mathcal{P}$. L'écriture de $\mathcal{P}$ sous la forme (3.1.33) forme une *présentation* de $\mathcal{P}$.

Un élément x d'une opérade de présentation $\mathcal{F}(E)/_{R}$ admet l'entier n pour *degré* s'il est possible d'obtenir x par des substitutions partielles impliquant n occurrences de générateurs de E.

Une opérade $\mathcal{P}$ est *binaire* si elle admet une présentation $\mathcal{F}(E)/_{R}$ où $\#E(2) \neq 0$ et $\#E(n) = 0$ pour tout $n \neq 2$. Une opérade $\mathcal{P}$ est *quadratique* si elle admet une présentation $\mathcal{F}(E)/_{R}$ où R est engendré uniquement par des éléments de degré deux de $\mathcal{F}(E)$.

Un grand nombre d'opérades connues sont à la fois binaires et quadratiques. Elles sont ainsi générées par des éléments d'arité deux et sont soumises à des relations engendrées par des éléments de degré deux.

3.1.3 Algèbres sur une opérade

L'un des principaux points forts de la théorie des opérades est que la plupart des définitions des structures algébriques peuvent être encodées et manipulées par l'intermédiaire d'opérades. Par exemple, les algèbres associatives, les algèbres associatives et commutatives, les algèbres de Lie, pour ne citer que ces exemples, sont chacune d'elles gouvernées par une opérade bien précise. De plus, il est intéressant de constater que l'inverse reste vrai : à toute opérade est associé un type d'algèbre. Nous décrivons justement ici comment obtenir une algèbre à partir d'une opérade.

L'opérade des applications linéaires

Nous avons besoin avant tout de la définition d'une opérade particulière. Soit V un espace vectoriel. L'*opérade des applications linéaires* de V, notée App_V, est définie comme suit. Les éléments de $App_V(n)$ sont les applications linéaires de la forme $V^{\otimes n} \to V$. Pour tous $x \in App_V(n)$, $y \in App_V(m)$ et $i \in [n]$, la substitution partielle $x \circ_i y$ est l'application linéaire $V^{\otimes n+m-1} \to V$ qui vérifie, pour tout $a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1} \in V^{\otimes n+m-1}$,

$$\begin{aligned}(x \circ_i y)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1}) = \\ x\left(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes y(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+m-1}) \otimes a_{i+m} \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1}\right).\end{aligned} \tag{3.1.34}$$

L'unité $\mathbf{1}$ de App_V est l'application identité sur V et l'action du groupe symétrique sur App_V vérifie, pour tous $x \in App_V(n)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in V$,

$$(x \cdot \sigma)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = x\left(a_{\sigma_1^{-1}} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma_n^{-1}}\right). \tag{3.1.35}$$

Algèbres sur une opérade

Soit $\mathcal{P}$ une opérade et V un espace vectoriel. L'espace vectoriel V est muni d'une structure d'*algèbre sur l'opérade* $\mathcal{P}$ s'il existe un morphisme d'opérade $\phi : \mathcal{P} \to App_V$. L'application ϕ permet de définir des opérations sur V de la manière suivante. Soit pour tout $n \geqslant 1$ l'application d'*évaluation*

$$\mathrm{ev} : \mathcal{P}(n) \otimes V^{\otimes n} \to V, \tag{3.1.36}$$

définie linéairement pour tous $x \in \mathcal{P}(n)$, $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in V$ par

$$\mathrm{ev}(x, a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) := \phi(x)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n). \tag{3.1.37}$$

L'application ev permet de calculer un élément de V en sortie sur l'entrée d'un élément de $\mathcal{P}$ d'arité n et de n éléments de V. Ainsi, à chaque élément de $\mathcal{P}$ correspond une loi de composition sur V.

3.2 Exemples d'opérades

Illustrons les notions rappelées dans le paragraphe précédent à travers quatre exemples d'opérades célèbres.

3.2.1 L'opérade commutative associative

Soit $Com := \bigoplus_{n \geqslant 1} Com(n)$ un espace vectoriel gradué tel que $Com(n) := \mathrm{Vect}\left(\{x_n\}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$. On munit Com de la substitution partielle $\circ_i$ définie linéairement par

$$x_n \circ_i x_m := x_{n+m-1}, \tag{3.2.1}$$

pour tous $n, m \geqslant 1$ et $i \in [n]$. Les espaces vectoriels $Com(n)$ sont également munis de l'action triviale du groupe symétrique, *i.e.*, $x_n \cdot \sigma = x_n$ pour tous $n \geqslant 1$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Avec ces données, Com est une opérade ensembliste : c'est l'*opérade commutative associative*.

D'après la définition de Com, sa série de Hilbert est

$$F^e_{Com}(t) = \exp(t) - 1 = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \cdots. \tag{3.2.2}$$

Il est de plus immédiat que Com est engendré par l'élément x_2. Par conséquent, pour munir un espace vectoriel V d'une structure d'algèbre sur Com, et donc de manière équivalente, pour définir un morphisme d'opérade $\phi : Com \to App_V$, il suffit de définir l'image de x_2 par ϕ. Il est de plus immédiat que l'opérateur qui correspond à x_2 est commutatif et associatif. Ainsi, toute algèbre sur Com est commutative et associative.

3.2.2 L'opérade associative

L'*opérade associative* Ass est la symétrisée de la version non symétrique de Com. En d'autres termes, nous avons, étant donnée que dim $\mathit{Com}(n) = 1$,

$$\mathit{Ass}(n) \quad = \quad \mathit{Com}(n) \otimes \mathrm{Vect}\,(\mathfrak{S}_n) \quad \simeq \quad \mathrm{Vect}\,(\mathfrak{S}_n)\,, \tag{3.2.3}$$

pour tout $n \geqslant 1$, ce qui montre au passage que les éléments de Ass peuvent être identifiés à des permutations. La substitution partielle de Ass vérifie $\sigma \circ_i \nu = B_i(\sigma, \nu)$ pour tous $\sigma \in \mathit{Ass}(n)$, $\nu \in \mathit{Ass}(m)$ et $i \in [n]$. L'action du groupe symétrique sur Ass est simplement la composition des permutations. Sa série de Hilbert est

$$F^e_{\mathit{Ass}}(t) = \frac{t}{1-t} = t + t^2 + t^3 + t^4 + \cdots\,. \tag{3.2.4}$$

Remarquons que Ass est une opérade ensembliste et qu'elle est engendrée par la permutation $\sigma := 12$. Il est en effet évident que tout élément de Ass peut être obtenu en substituant σ avec lui-même et en appliquant ensuite l'action d'une permutation appropriée. Ainsi, toute algèbre sur Ass est munie d'un unique opérateur qui correspond à σ et qui est associatif.

Nous pouvons également définir cette opérade en donnant sa présentation. Son ensemble de générateurs E est de la forme

$$E := \emptyset \;\uplus\; \{\alpha\} \;\uplus\; \emptyset \;\uplus\; \ldots\,, \tag{3.2.5}$$

et son espace des relations R est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E)$ de la forme

$$R := 0 \;\oplus\; 0 \;\oplus\; R(3) \;\oplus\; 0 \;\oplus\; \ldots\,, \tag{3.2.6}$$

où $R(3)$ est engendré par l'élément

$$\alpha \circ_1 \alpha - \alpha \circ_2 \alpha. \tag{3.2.7}$$

L'élément (3.2.7) encode l'associativité du générateur α. L'élément α correspond bien entendu à l'élément σ de la définition précédente de Ass et nous avons $\mathit{Ass} = \mathcal{F}(E)/_R$. Ainsi, d'après sa présentation, Ass est à la fois binaire et quadratique.

3.2.3 L'opérade de Lie

Soit E un ensemble de générateurs de la forme

$$E := \emptyset \;\uplus\; \{\beta\} \;\uplus\; \emptyset \;\uplus\; \ldots\,, \tag{3.2.8}$$

et R un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E)$ de la forme

$$R := 0 \;\oplus\; R(2) \;\oplus\; R(3) \;\oplus\; 0 \;\oplus\; \ldots\,, \tag{3.2.9}$$

où $R(2)$ est engendré par l'élément

$$\beta + (\beta \cdot 21), \tag{3.2.10}$$

et $R(3)$ est engendré par l'élément

$$(\beta \circ_2 \beta) + (\beta \circ_2 \beta) \cdot \sigma + (\beta \circ_2 \beta) \cdot \sigma^2, \tag{3.2.11}$$

où $\sigma := 231$. La relation (3.2.10) encode l'antisymétrie de l'opérateur β et la relation (3.2.11) est connue sous le nom d'*identité de Jacobi*. L'opérade $\mathit{Lie} := \mathcal{F}(E)/_R$ est l'*opérade de Lie*. Cette opérade est une sous-opérade de Ass puisque l'on peut voir Lie comme la sous-opérade de Ass engendrée par l'élément $\alpha - (\alpha \cdot 21)$ (voir [AL07]). De plus, sa série de Hilbert est de la forme

$$F^e_{\mathit{Lie}}(t) = -\log(1-t) = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + \cdots\,. \tag{3.2.12}$$

Une algèbre sur l'opérade *Lie* est une *algèbre de Lie*, *i.e.*, un espace vectoriel V sur lequel est défini une application linéaire $[-,-] : V \otimes V \to V$ appelée *crochet de Lie*, qui vérifie pour tous $x, y, z \in V$ les relations

$$[x, y] + [y, x] = 0, \tag{3.2.13}$$

et

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \tag{3.2.14}$$

Notons la correspondance entre (3.2.10) et (3.2.13), et entre (3.2.11) et (3.2.14).

3.2.4 L'opérade dendriforme

Soit E un ensemble de générateurs de la forme

$$E := \emptyset \uplus \{\prec, \succ\} \uplus \emptyset \uplus \dots , \tag{3.2.15}$$

et R un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E)$ de la forme

$$R := 0 \oplus 0 \oplus R(3) \oplus 0 \oplus \dots , \tag{3.2.16}$$

où $R(3)$ est engendré par les éléments

$$\prec \circ_1 \prec \; - \; \prec \circ_2 \prec \; - \; \prec \circ_2 \succ, \tag{3.2.17}$$

$$\succ \circ_2 \prec \; - \; \prec \circ_1 \succ, \tag{3.2.18}$$

$$\succ \circ_2 \succ \; - \; \succ \circ_1 \succ \; - \; \succ \circ_1 \prec . \tag{3.2.19}$$

L'opérade ns $\mathit{Dend} := \mathcal{F}(E)/_R$ est l'*opérade dendriforme*. Sa série de Hilbert est de la forme

$$F_{\mathit{Dend}}(t) = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t} = t + 2t^2 + 5t^3 + 14t^4 + 42t^5 + 132t^6 + 429t^7 + \cdots , \tag{3.2.20}$$

et est la série génératrice des objets catalans.

Cette opérade fut introduite par Loday [Lod01]. Les algèbres sur *Dend* sont les *algèbres dendriformes* (voir le paragraphe 5.2.4 du chapitre 5 pour plus de détails) et il est remarquable que l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre dendriforme libre sur un générateur est l'espace vectoriel combinatoire engendré par les arbres binaires [LR02] (voir aussi [LR98] et [LV10]).

Remarquons au passage que l'opérateur $\gamma := \prec + \succ$ est associatif, *i.e.*, il vérifie la relation $\gamma \circ_1 \gamma = \gamma \circ_2 \gamma$. En effet, en utilisant les relations (3.2.17), (3.2.18) et (3.2.19), nous avons

$$\begin{aligned}
(\prec + \succ) \circ_1 (\prec + \succ) &= \prec \circ_1 \prec + \prec \circ_1 \succ + \succ \circ_1 \prec + \succ \circ_1 \succ && (3.2.21)\\
&= \prec \circ_2 \prec + \prec \circ_2 \succ + \succ \circ_2 \prec + \succ \circ_2 \succ && (3.2.22)\\
&= (\prec + \succ) \circ_2 (\prec + \succ). && (3.2.23)
\end{aligned}$$

3.3 Groupes et algèbres de Hopf associés à une opérade

Nous rappelons dans ce paragraphe une construction qui à une opérade associe un groupe, une algèbre de Hopf commutative et une algèbre de Hopf non commutative. Ces constructions possèdent diverses applications. L'une est de nature combinatoire : le groupe associé à l'opérade dendriforme apparaît comme un outil fondamental pour compter le nombre d'intervalles dans le treillis de Tamari [Cha06a] ; l'autre, de nature plus algébrique : l'algèbre de Hopf commutative associée à l'opérade non associative permutative *NAP* [Liv06] permet de retrouver, en tant que quotient, l'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer [CL07].

3.3.1 Groupe associé à une opérade

La construction que nous rappelons ici, considérée en [KM01], [Cha02], [vdL04], [CL07] et [Fra08] (voir aussi [Cha08] et [LV10]), associe à toute opérade un monoïde de séries formelles sur ses éléments. Un groupe est ensuite obtenu en se restreignant à ses éléments inversibles.

Soit $(\mathcal{P}, \circ, \mathbf{1})$ une opérade. Si $\mathcal{P}$ est symétrique, nous considérons sa version non symétrique en oubliant l'action du groupe symétrique. Soit $\mathrm{Ser}(\mathcal{P})$ l'ensemble des *séries formelles* d'éléments de $\mathcal{P}$, ou en d'autres termes,

$$\mathrm{Ser}(\mathcal{P}) := \left\{ x := \sum_{n \geqslant 1} x^{(n)} : x^{(n)} \in \mathcal{P}(n) \right\}. \tag{3.3.1}$$

Sur cet ensemble, on définit un produit $\cdot$ à partir de l'opérateur de substitution complète $\circ$ de $\mathcal{P}$ par

$$(x \cdot y)^{(n)} := \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} x^{(k)} \circ \left[y^{(i_1)}, \dots, y^{(i_k)} \right], \tag{3.3.2}$$

pour tous $x, y \in \mathrm{Ser}(\mathcal{P})$. La relation d'associativité de $\circ$ implique l'associativité du produit défini en (3.3.2). De plus, étant donné que l'unité $\mathbf{1}$ de $\mathcal{P}$ est aussi un élément de $\mathrm{Ser}(\mathcal{P})$, cet élément est de manière évidente l'unité de ce produit. Ainsi, $(\mathrm{Ser}(\mathcal{P}), \cdot, \mathbf{1})$ est un monoïde.

Considérons le sous-ensemble suivant de $\mathrm{Ser}(\mathcal{P})$:

$$\mathrm{Ser}_G(\mathcal{P}) := \left\{ x \in \mathrm{Ser}(\mathcal{P}) : x^{(1)} = \lambda \mathbf{1} \right\}, \tag{3.3.3}$$

où $x^{(1)}$ est le résultat de la projection de x sur sa composante homogène constituée des éléments d'arité 1 et λ est un coefficient non nul de $\mathbb{K}$. Étant donné que le produit de deux éléments de $\mathrm{Ser}_G(\mathcal{P})$ est de la forme

$$\left(\lambda_1 \mathbf{1} + \sum_{i \geqslant 2} x^{(i)} \right) \cdot \left(\lambda_2 \mathbf{1} + \sum_{j \geqslant 2} y^{(j)} \right) = \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{1} + \sum_{n \geqslant 2} z^{(n)}, \tag{3.3.4}$$

l'ensemble $\mathrm{Ser}_G(\mathcal{P})$ est un sous-monoïde de $\mathrm{Ser}(\mathcal{P})$. En outre, ce sous-monoïde est un groupe puisque l'on peut calculer arité par arité l'inverse d'un élément. En effet, en posant

$$x^{-1} := \left(\lambda_1 \mathbf{1} + \sum_{i \geqslant 2} x^{(i)} \right)^{-1} = \left(\lambda_2 \mathbf{1} + \sum_{i \geqslant 2} y^{(i)} \right) =: y, \tag{3.3.5}$$

on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$ et, à titre d'exemple jusqu'en arité 3,

$$x^{(1)} \circ \left[y^{(1)} \right] = \mathbf{1}, \tag{3.3.6}$$

$$x^{(1)} \circ \left[y^{(2)} \right] + x^{(2)} \circ \left[y^{(1)}, y^{(1)} \right] = 0, \tag{3.3.7}$$

$$x^{(1)} \circ \left[y^{(3)} \right] + x^{(2)} \circ \left[y^{(1)}, y^{(2)} \right] + x^{(2)} \circ \left[y^{(2)}, y^{(1)} \right] + x^{(3)} \circ \left[y^{(1)}, y^{(1)}, y^{(1)} \right] = 0, \tag{3.3.8}$$

ce qui implique que les premières composantes homogènes de y sont

$$y^{(1)} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{1}, \tag{3.3.9}$$

$$y^{(2)} = -\frac{1}{\lambda^3} x^{(2)} \ , \tag{3.3.10}$$

$$y^{(3)} = \frac{1}{\lambda^5} x^{(2)} \circ_1 x^{(2)} \quad + \quad \frac{1}{\lambda^5} x^{(2)} \circ_2 x^{(2)} \quad - \quad \frac{1}{\lambda^4} x^{(3)}. \tag{3.3.11}$$

Cette construction est en outre un foncteur de la catégorie des opérades ns (avec morphismes d'opérade) vers la catégorie des groupes (avec morphismes de groupe) [Cha02]. Le sous-groupe de $\mathrm{Ser}_G(\mathcal{P})$ constitué des éléments dont le coefficient associé à $\mathbf{1}$ est $1_{\mathbb{K}}$ est le *sous-groupe affine* de $\mathrm{Ser}_G(\mathcal{P})$ et est noté $\mathrm{Ser}_G^{\mathbf{1}}(\mathcal{P})$.

Donnons à présent un exemple. Soit $\mathcal{P}$ l'opérade commutative associative *Com* dont la définition est rappelée dans le paragraphe 3.2.1 du chapitre 3. Nous avons dans $\mathrm{Ser}_G(\mathcal{P})$ les produits

$$(x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3) = x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6, \tag{3.3.12}$$

$$(x_1 + x_3) \cdot (x_1 + x_2) = x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + x_6. \tag{3.3.13}$$

On remarque qu'avec la transformation $x_n \mapsto t^n$, $\mathrm{Ser}_G(\mathcal{P})$ est isomorphe au groupe des séries formelles en t où le produit est la composition des séries.

3.3.2 Algèbres de Hopf associées à une opérade

Un autre construction classique permet de construire une algèbre de Hopf à partir d'un groupe G : c'est l'*algèbre de Hopf des fonctions sur le groupe G*. Nous rappelons ici cette construction.

Construction commutative

Soit $\mathcal{P}$ une opérade combinatoire ensembliste telle que $\dim \mathcal{P}(1) = 1$ et G le groupe $\mathrm{Ser}_G^{\mathbf{1}}(\mathcal{P})$. L'algèbre de Hopf $(\mathcal{H}_{\mathcal{P}}, \cdot, u, \Delta, v)$ des fonctions sur G peut être vue comme suit. En tant qu'espace vectoriel $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ est engendré par les éléments de la forme

$$\mathsf{E}_{\{x_1, \dots, x_n\}}, \tag{3.3.14}$$

où $\{x_1, \dots, x_n\}$ est un *multi-ensemble* d'éléments de $\mathcal{P}$. Le produit de $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ est commutatif et est défini linéairement par

$$\mathsf{E}_{\{x_1, \dots, x_n\}} \cdot \mathsf{E}_{\{y_1, \dots, y_m\}} := \mathsf{E}_{\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}}, \tag{3.3.15}$$

pour tous $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in \mathcal{P}$ et l'unité u linéairement par

$$u(1_{\mathbb{K}}) := \mathsf{E}_{\{\mathbf{1}\}} = \mathsf{E}_{\emptyset} =: 1. \tag{3.3.16}$$

Le coproduit de Δ est défini linéairement par

$$\Delta\left(\mathsf{E}_{\{x\}}\right) := \sum_{k \in [n]} \sum_{\substack{y \in \mathcal{P} \\ z_1, \dots, z_k \in \mathcal{P} \\ y \circ [z_1, \dots, z_k] = x}} \mathsf{E}_{\{y\}} \otimes \mathsf{E}_{\{z_1\}} \cdot \ldots \cdot \mathsf{E}_{\{z_k\}}, \tag{3.3.17}$$

pour tout $x \in \mathcal{P}(n)$. L'expression (3.3.17) définit un coproduit sur $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ tout entier car Δ se doit d'être un morphisme d'algèbre et que, en tant qu'algèbre, $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ est engendrée par les éléments de la forme $\mathsf{E}_{\{x\}}$ où $x \in \mathcal{P}$. La coassociativité de Δ est impliquée par l'associativité de l'opérateur de substitution complète de $\mathcal{P}$. Finalement, la counité c de $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ est définie linéairement par

$$c\left(\mathsf{E}_{\{x_1, \dots, x_n\}}\right) := \delta_{\{x_1, \dots, x_n\}, \mathbf{1}}, \tag{3.3.18}$$

pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{P}$. Nous appelons la base des E la *base élémentaire* de $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$. Remarquons que cette base est du côté gauche(voir le paragraphe 2.1.3 du chapitre 2).

D'après l'expression du produit (3.3.15), $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ est libre en tant qu'algèbre commutative et ses éléments indécomposables sont de la forme $\mathsf{E}_{\{x\}}$ où $x \in \mathcal{P}$. De plus, en posant $n-1$ le degré d'un élément $\mathsf{E}_{\{x\}}$ où $x \in \mathcal{P}(n)$, $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ est une bigèbre graduée. Maintenant, étant donné que $\dim \mathcal{P}(1) = 1$, le seul élément de base de degré 0 est $\mathsf{E}_{\emptyset}$, ce qui montre que $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ est connexe, et implique qu'il s'agit d'une algèbre de Hopf combinatoire. Celle-ci est toujours commutative mais peut être cocommutative ou non cocommutative.

Nous avons de plus la caractérisation suivante pour la série de Hilbert de $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$:

Lemme 3.3.1. *La série de Hilbert $F_{\mathcal{H}_{\mathcal{P}}}(t)$ de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ construite comme décrit ci-dessus vérifie*

$$F_{\mathcal{H}_{\mathcal{P}}}(t) = \exp\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{F_{\mathcal{P}}(t^n)}{nt^n} - \frac{1}{n}\right), \tag{3.3.19}$$

où $\mathcal{P}$ est une opérade ensembliste telle que $\dim \mathcal{P}(1) = 1$ et $F_{\mathcal{P}}(t)$ est la série de Hilbert de la version non symétrique de $\mathcal{P}$.

Démonstration. La série génératrice d'une classe combinatoire C, dont les éléments sont des multi-ensembles d'éléments d'une autre classe combinatoire D qui ne possède pas d'élément de taille 0, s'exprime par (voir par exemple [FS09])

$$\mathcal{S}_C(t) = \exp\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\mathcal{S}_D(t^n)\right). \tag{3.3.20}$$

Comme $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ est commutative, tout élément de base $\mathsf{E}_{\{x_1,\ldots,x_n\}}$ est indexé par un multi-ensemble d'éléments de $\mathcal{P}$. Le lemme provient du fait que $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ est libre, et que, comme $\dim \mathcal{P}(1) = 1$ et qu'un générateur algébrique $\mathsf{E}_{\{x\}}$ de $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ est de degré $n-1$ si $x \in \mathcal{P}(n)$, la série génératrice des générateurs algébriques de $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ est de la forme $(F_{\mathcal{P}}(t) - t)/t$. □

Un exemple de construction dans le cas commutatif

Donnons maintenant un exemple de construction avec l'opérade commutative associative *Com* vue comme une opérade ensembliste. On identifie ici tout élément $x_n \in \mathit{Com}(n)$ par l'entier $n-1$. Ainsi avec cet encodage, $\mathit{Com}(n) = \{n-1\}$ pour tout $n \geqslant 1$, et $n \circ_i m = n + m$. Les éléments de la forme $\mathsf{E}_{\{n\}}$ avec $n \geqslant 1$ de $\mathcal{H}_{\mathit{Com}}$ sont les générateurs algébriques de cette algèbre et sa base élémentaire est donnée par les $\mathsf{E}_{\{x_1,\ldots,x_k\}}$ où $x_1, \ldots, x_k \geqslant 1$. Étant donné que $\mathcal{H}_{\mathit{Com}}$ est commutative par construction, on impose la condition $x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_k$. Ainsi, chaque élément de base de degré n de $\mathcal{H}_{\mathit{Com}}$ est indexé par une suite décroissante d'entiers dont la somme de ses éléments est n. Cet objet combinatoire est connu sous le nom de *partition d'entiers*. La *taille* d'une partition d'entiers $\lambda := \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ est la somme $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ et est notée $|\lambda|$. Les lettres λ_i sont appelées *parts* de λ. La série de Hilbert de $\mathcal{H}_{\mathit{Com}}$ est ainsi la série génératrice des partitions d'entiers, dont les coefficients forment la suite **A000041** de [Slo] et est de la forme

$$F_{\mathcal{H}_{\mathit{Com}}}(t) = 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 5t^4 + 7t^5 + 11t^6 + 15t^7 + 22t^8 + 30t^9 + \cdots. \tag{3.3.21}$$

Voyons à présent le coproduit de $\mathcal{H}_{\mathit{Com}}$. On commence par le calculer sur ses générateurs algébriques en base dimension :

$$\Delta(\mathsf{E}_1) = 1 \otimes \mathsf{E}_1 + \mathsf{E}_1 \otimes 1, \tag{3.3.22}$$

$$\Delta(\mathsf{E}_2) = 1 \otimes \mathsf{E}_2 + 2\,\mathsf{E}_1 \otimes \mathsf{E}_1 + \mathsf{E}_2 \otimes 1, \tag{3.3.23}$$

$$\Delta(\mathsf{E}_3) = 1 \otimes \mathsf{E}_3 + \mathsf{E}_1 \otimes \mathsf{E}_{1,1} + 2\,\mathsf{E}_1 \otimes \mathsf{E}_2 + 3\,\mathsf{E}_2 \otimes \mathsf{E}_1 + \mathsf{E}_3 \otimes 1, \tag{3.3.24}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\mathsf{E}_4) = 1 \otimes \mathsf{E}_4 &+ 2\,\mathsf{E}_1 \otimes \mathsf{E}_3 + 2\,\mathsf{E}_1 \otimes \mathsf{E}_{2,1} + 3\,\mathsf{E}_2 \otimes \mathsf{E}_2 + 3\,\mathsf{E}_2 \otimes \mathsf{E}_{1,1}\\ &+ 4\,\mathsf{E}_3 \otimes \mathsf{E}_1 + \mathsf{E}_4 \otimes 1.\end{aligned} \tag{3.3.25}$$

En particulier, (3.3.24) et (3.3.25) montrent que $\mathcal{H}_{Com}$ n'est pas cocommutative. D'après la définition du coproduit donnée en (3.3.17), la règle pour la substitution partielle dans *Com* et notre encodage des éléments de base de $\mathcal{H}_{Com}$, nous avons la caractérisation suivante pour le coproduit de $\mathcal{H}_{Com}$. Le coefficient associé à un tenseur $\mathsf{E}_k \otimes \mathsf{E}_\lambda$ dans le coproduit d'un élément E_n où λ est une partition d'entiers telle que $|\lambda| + k = n$, est le nombre de façon de placer la totalité de ses parts dans $k+1$ emplacements distinguables. Par exemple, le coefficient de $\mathsf{E}_2 \otimes \mathsf{E}_{2,1}$ dans $\Delta(\mathsf{E}_5)$ est 6 puisque l'on à les six configurations suivantes : $(2,1,\emptyset)$, $(2,\emptyset,1)$, $(\emptyset,2,1)$, $(1,2,\emptyset)$, $(1,\emptyset,2)$ et $(\emptyset,1,2)$.

L'algèbre $\mathcal{H}_{Com}$ est l'*algèbre de Hopf de Fàa di Bruno*.

Construction non commutative

Une version non commutative de la construction précédente existe et est considérée par exemple en [LV10] du point de vue dual de celle que nous décrivons ici. Nous donnons en effet ici l'analogue non commutatif de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$.

Considérons que le produit défini en (3.3.15) est non commutatif et notons $\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}$ l'algèbre libre non commutative engendrée par les éléments de la forme E_x où $x \in \mathcal{P}$. Nous notons maintenant $\mathbf{E}$ la *base élémentaire* de $\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}$, analogue à la base élémentaire de $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$. Les éléments de base de $\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}$ sont de la forme

$$\mathbf{E}_{x_1|\dots|x_n}, \tag{3.3.26}$$

où $x_1|\dots|x_n$ est un *mot* d'éléments de $\mathcal{P}$. Le produit de $\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}$ est par définition non commutatif et vérifie

$$\mathbf{E}_{x_1|\dots|x_n} \cdot \mathbf{E}_{y_1|\dots|y_m} := \mathbf{E}_{x_1|\dots|x_n|y_1|\dots|y_m}, \tag{3.3.27}$$

pour tous $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in \mathcal{P}$ et le coproduit de Δ vérifie

$$\Delta(\mathbf{E}_x) := \sum_{k \in [n]} \sum_{\substack{y \in \mathcal{P} \\ z_1,\dots,z_k \in \mathcal{P} \\ y \circ [z_1,\dots,z_k] = x}} \mathbf{E}_y \otimes \mathbf{E}_{z_1} \cdot \ \dots \ \cdot \mathbf{E}_{z_k}, \tag{3.3.28}$$

Les éléments indécomposables de $\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}$ sont de la forme $\mathbf{E}_x$ où $x \in \mathcal{P}$. Sous réserve qu'il y ait dans $\mathcal{P}$ au moins deux éléments, $\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}$ est non commutative mais peut être cocommutative ou non cocommutative.

Nous avons de plus la caractérisation suivante pour la série de Hilbert de $\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}$:

Lemme 3.3.2. *La série de Hilbert $F_{\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}}(t)$ de l'algèbre de Hopf $\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}$ construite comme décrit ci-dessus vérifie*

$$F_{\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}}(t) = \frac{t}{2t - F_{\mathcal{P}}(t)}, \tag{3.3.29}$$

où $\mathcal{P}$ est une opérade ensembliste telle que $\dim \mathcal{P}(1) = 1$ *et $F_{\mathcal{P}}(t)$ est la série de Hilbert de la version non symétrique de $\mathcal{P}$.*

Démonstration. La série génératrice d'une classe combinatoire C, dont les éléments sont des suites finies d'éléments d'une autre classe combinatoire D qui ne possède pas d'élément de taille 0, s'exprime par

$$\mathcal{S}_C(t) = \frac{1}{1 - \mathcal{S}_D(t)}. \tag{3.3.30}$$

Comme $\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}$ est non commutative, tout élément de base $\mathbf{E}_{x_1|\dots|x_n}$ est indexé par une suite finie d'éléments de $\mathcal{P}$. Le lemme provient du fait que $\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}$ est libre, et que, comme $\dim \mathcal{P}(1) = 1$ et qu'un générateur algébrique $\mathbf{E}_x$ de $\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}$ est de degré $n-1$ si $x \in \mathcal{P}(n)$, la série génératrice des générateurs algébriques de $\mathfrak{H}_{\mathcal{P}}$ est de la forme $(F_{\mathcal{P}}(t) - t)/t$. □