

OUTILS GENERIQUES POUR LA CARACTERISATION

I.1. Notions de métrologie

La métrologie est la **science des mesures**. Une mesure est un "rapport numérique d'une grandeur à une autre grandeur de même nature prise comme unité" (Larousse). Ainsi, **mesurer revient à comparer** une grandeur par rapport à celle d'un étalon. La définition des unités et l'établissement des étalons de référence sont l'une des tâches assurées par le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM). Cette rapide présentation des notions de métrologie s'appuie essentiellement sur le Vocabulaire International de Métrologie (VIM) et le Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (GUM) qui sont deux documents rédigés par le JCGM (Joint Committee for Guides in Metrology) qui est directement lié au BIPM [60] [61]. L'objectif est de définir l'incertitude de mesure et de donner les outils qui permettront de la calculer afin d'être capable de caractériser, et par suite valider, une méthode de mesure. Le propos sera illustré à l'aide d'un exemple fil rouge : une tige d'acier de diamètre $d=6$ mm pour laquelle on cherche à connaître la conductivité électrique σ .

I.1.1. Définition de la mesure

I.1.1.A. DE LA GRANDEUR A LA MESURE

La conductivité électrique est une **grandeur**, à savoir une propriété d'un corps que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence, qui est ici l'unité de mesure (S/m). L'**unité de mesure** est une grandeur scalaire réelle, définie et adoptée par convention, à laquelle on peut comparer toute autre grandeur de même nature pour exprimer le rapport des deux grandeurs sous la forme d'un nombre. Finalement, la **valeur d'une grandeur** est l'ensemble d'un nombre et d'une référence. Un nombre accompagné de l'unité S/m est donc une valeur de conductivité électrique.

Un **mesurage** (ou mesure) est un processus consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur qui est alors nommée **mesurande**. La définition du mesurande doit être très précise. Ainsi, dans le cas de l'exemple fil rouge, il est nécessaire de spécifier la température à laquelle on veut effectuer la mesure pour définir correctement le mesurande, car la conductivité électrique varie en fonction de ce paramètre.

Le **principe de mesure** est le phénomène servant de base à un mesurage. Par exemple, le principe de mesure exploité par les thermocouples pour mesurer la température est l'effet thermoélectrique. La **méthode de mesure** est la description générique de l'organisation logique des opérations mises en œuvre dans un mesurage. La **procédure de mesure** est une description détaillée

d'un mesurage conformément à un ou plusieurs principes de mesure et à une méthode de mesure donnée, fondée sur un modèle de mesure et incluant tout calcul destiné à obtenir un résultat de mesure.

Quelle méthode de mesure appliquer pour notre exemple ? Pour mesurer la conductivité d'une tige de section S on propose d'imposer un courant électrique I dans la tige, de mesurer la résistance R entre deux points distants de l et d'en déduire analytiquement la conductivité électrique ($\sigma = l/RS$). Imaginons maintenant que deux valeurs de conductivité σ_1 et σ_2 aient été obtenues pour deux tiges. Ces deux conductivités sont-elles différentes ou bien la différence entre les valeurs n'est-elle que le fruit du hasard? **Sans incertitude, il est impossible de répondre** à cette question, comme l'illustre le cas a) de la Figure 37. Par contre, en connaissant l'incertitude de mesure, il est possible de dire si l'écart entre σ_1 et σ_2 est significatif (cas b)), ou pas (cas c)).

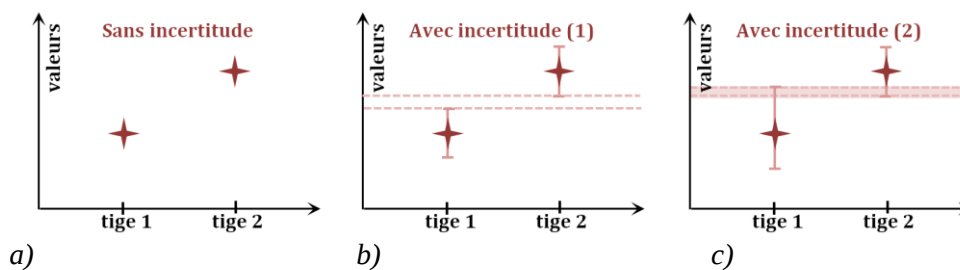


Figure 37 : Illustration de la nécessité de l'incertitude de mesure

I.1.1.B. JUSTESSE ET FIDELITE DE MESURE

Le résultat d'un mesurage est seulement une estimation de la valeur du mesurande. Pour que le résultat soit complet, il doit être accompagné d'une expression de l'**incertitude de mesure**. Il s'agit d'une estimation caractérisant la dispersion raisonnable que l'on peut associer au mesurande (i.e. l'étendue des valeurs dans laquelle se situe la *valeur vraie du mesurande*). Pour préciser l'incertitude de mesure, on définit les notions de justesse et de fidélité.

La **justesse** de mesure est l'étroitesse de l'accord entre la moyenne d'un nombre infini de valeurs mesurées répétées et une valeur de référence (Figure 38). Dans la pratique, la justesse est quantifiée par un **biais de mesure** (estimation d'une erreur systématique, c.f. paragraphe I.1.1.c).

La **fidélité** de mesure est l'étroitesse de l'accord entre les indications ou les valeurs mesurées obtenues par des mesurages répétés du même objet ou d'objets similaires dans des conditions spécifiées. La fidélité peut être obtenue sous conditions de répétabilité et de reproductibilité. La **répétabilité** désigne l'étroitesse de l'accord entre les résultats de mesurages successifs du même mesurande, mesurages effectués avec l'application de la totalité des mêmes conditions de mesure. La répétabilité permet donc d'évaluer un bruit de mesure inexorable. La **reproductibilité** désigne l'étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages de la même grandeur physique, mesurages effectués en faisant varier les conditions de mesure. Pour qu'une expression de la reproductibilité soit valable, il est nécessaire de spécifier la condition que l'on fait varier. Les conditions que l'on peut faire varier sont : la méthode de mesure, l'opérateur, l'instrument de mesure, les étalons de référence, le

lieu, les conditions d'utilisation, le temps. Il s'agit donc d'évaluer l'impact de la modification d'un ou plusieurs facteurs qui contribuent à la dispersion des mesures.

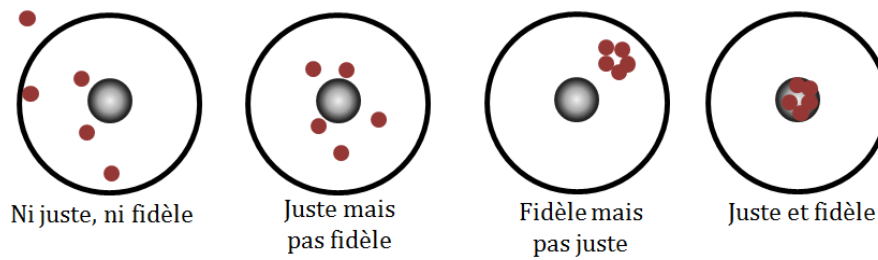


Figure 38 : Représentation schématique de la justesse et de la fidélité de mesure

I.1.1.C. ERREUR DE MESURE

L'**exactitude de mesure** est l'étroitesse de l'accord entre une valeur mesurée et la *valeur vraie du mesurande*. Elle ne peut pas s'exprimer numériquement car la *valeur vraie du mesurande* restera toujours inconnue. Par contre, un mesurage peut être dit plus exact s'il fournit une plus petite erreur de mesure. L'erreur de mesure et l'incertitude de mesure sont deux termes à bien distinguer. En effet, l'erreur de mesure est la différence entre la valeur mesurée et la valeur vraie alors que l'**incertitude de mesure** est un paramètre qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande.

On distingue généralement l'erreur systématique et l'erreur aléatoire. (Figure 39). L'**erreur systématique** est la différence reproductible entre un résultat unique et la valeur vraie liée à une cause physique. Elle demeure donc constante (ou varie de façon prévisible) dans des mesurages répétés. Elle peut être compensée par une correction lorsqu'elle est connue. On suppose que, grâce à l'analyse de la méthode de mesure, on connaît une estimation e_s de l'erreur systématique (le biais de mesure). On appelle alors correction C cette estimation changée de signe ($C = -e_s$). On obtient le résultat corrigé de la mesure en ajoutant algébriquement la correction C au résultat brut x :

$$x_c = x + C \quad (22)$$

L'**erreur aléatoire** est la composante de l'erreur qui varie de façon imprévisible. Bien qu'il ne soit pas possible de compenser l'erreur aléatoire d'un résultat de mesure, elle peut être réduite en augmentant le nombre d'observations. Pour fournir un résultat proche de la valeur vraie, il faut donc diminuer les erreurs systématiques en appliquant des corrections et diminuer les erreurs aléatoires en répétant les mesures et en calculant la moyenne arithmétique des observations.

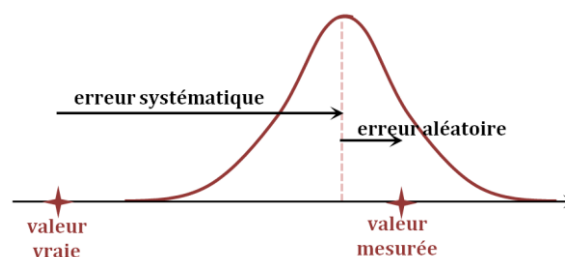


Figure 39 : Représentation schématique des erreurs systématique et aléatoire

I.1.1.D. ANALYSE DE LA METHODE DE MESURE

Un mesurage présente donc des imperfections qui occasionnent une erreur sur le résultat de mesure. Analyser la méthode de mesure signifie identifier toutes les variables intervenant dans le résultat de la mesure. Cette analyse demande une étude approfondie de la chaîne d'instrumentation et des phénomènes mis en jeu lors de la mesure. L'objectif est de "découper" la méthode de mesure en éléments simples pour faire émerger toutes les sources possibles d'incertitude.

Cette liste est généralement présentée sous la forme d'un **diagramme d'Ishikawa**, dit **5M**, qui est un outil permettant de donner une vision globale des causes génératrices d'une éventuelle incertitude de mesure [62]. La Figure 40 donne un diagramme 5M de l'exemple fil rouge. Dans ce diagramme, cinq grandes familles de causes sont dénombrées, à savoir les moyens, la méthode, le milieu, la matière et la main-d'œuvre. Une fois ce travail d'identification effectué, il faut décrire le mode opératoire retenu et établir le modèle de la mesure. Les facteurs influençant le résultat de mesure peuvent alors être identifiés et la valeur de chacune des composantes de l'incertitude calculée. On pourra alors décider de l'application ou non d'une **correction**.

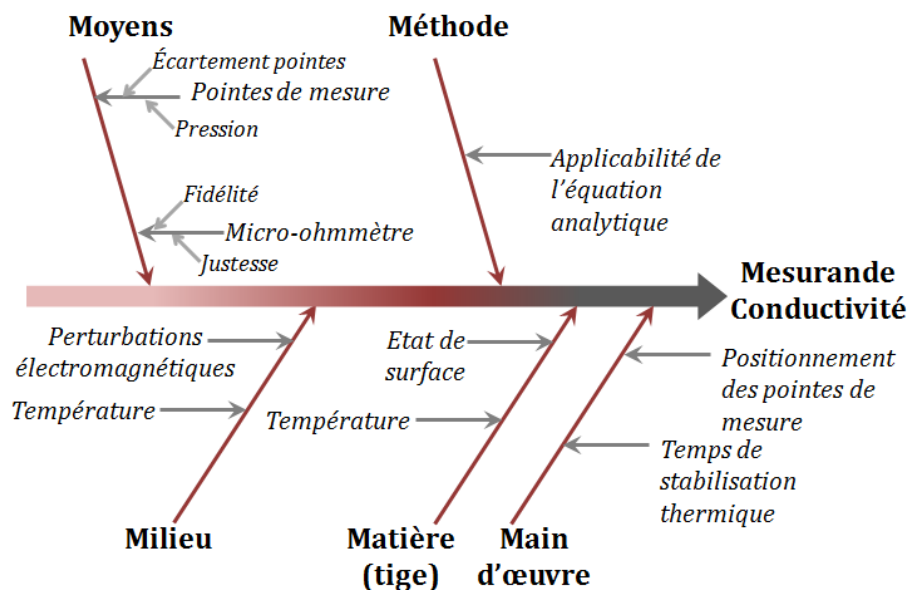


Figure 40 : Diagramme 5M de l'exemple fil rouge

I.1.2. Evaluation de l'incertitude de mesure

I.1.2.A. MODELE MATHEMATIQUE DU MESURAGE

Définition

L'incertitude du résultat d'un mesurage reflète l'impossibilité de connaître exactement la valeur du mesurande. La variable « résultat de mesure » est assimilable à une **variable aléatoire y** dont la distribution peut être caractérisée par deux paramètres, un paramètre de tendance centrale qui s'estime par l'**espérance mathématique** de la distribution, c'est la valeur que l'on annonce, et un paramètre de dispersion, l'**écart-type** de la distribution que l'on appelle aussi **incertitude-type**. Pour rappel, si on

considère un échantillon de n individus ($x_1, x_2, \dots, x_n$), la moyenne arithmétique expérimentale de cette série s'exprime [63] :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (23)$$

C'est un estimateur de l'espérance. L'écart-type expérimental s (qui est un estimateur de l'écart-type σ) permet de quantifier la dispersion des données et s'exprime :

$$s = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (24)$$

L'écart-type expérimental s (écart-type d'une mesure x_i) permet d'estimer l'écart-type expérimental s_M de la moyenne $\bar{x}$:

$$s_M = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (25)$$

Un grand nombre de phénomènes peuvent être modélisés par une loi normale qui est totalement définie par l'espérance et l'écart-type dont on a donné des estimateurs. La qualité de ces estimateurs dépend directement du nombre d'échantillons utilisés pour réaliser les calculs.

Démarche proposée

En théorie, l'incertitude peut être évaluée par des **moyens statistiques** en faisant varier la totalité des grandeurs dont dépend le résultat d'un mesurage. Mais en pratique, il est d'usage d'évaluer l'incertitude d'un résultat de mesure à l'aide d'un **modèle mathématique** du mesurage et de la **loi de propagation de l'incertitude** (c.f. paragraphe I.1.2.c). En effet, la méthode statistique étant coûteuse en temps et en argent, il est souvent préférable d'utiliser un modèle du mesurage. Par contre, le modèle mathématique doit toujours être révisé lorsque les données observées démontrent qu'il est incomplet.

La procédure d'évaluation de l'incertitude peut être décomposée en trois étapes. La première est l'**établissement du modèle mathématique** décrivant le processus de mesure. Pour ce faire l'utilisation d'une méthode type « 5M » est recommandée. La deuxième étape consiste à **établir des fonctions de densité de probabilité** (FDP) pour les grandeurs d'entrée du modèle. Généralement cela revient à spécifier la moyenne et l'écart-type de chaque FDP. La troisième étape correspond à la **propagation de l'incertitude**. On peut alors déclarer le résultat complet de la mesure en fournissant la meilleure estimation de la valeur du mesurande et l'incertitude associée.

Etablissement du modèle mathématique

On suppose que le mesurande Y est déterminé à partir de N autres grandeurs $X_1, X_2, \dots, X_n$ à travers une relation fonctionnelle f :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (26)$$

Les grandeurs d'entrée $X_1, X_2, \dots, X_n$ dont dépend la grandeur de sortie Y peuvent elles-mêmes dépendre d'autres grandeurs, aboutissant à une relation fonctionnelle compliquée qui peut ne jamais être écrite explicitement. De plus, la fonction f peut être déterminée expérimentalement ou exister seulement sous forme d'algorithme. Des grandeurs d'entrée additionnelles peuvent être introduites dans f si les données indiquent que la fonction ne modélise pas le mesurage au degré d'exactitude désiré. Dans le cas de notre exemple on a :

$$\sigma = f(R, l, S) = \frac{l}{RS} \quad \text{avec } S = g(d) = \frac{\pi d^2}{4} \quad (27)$$

Une estimation du mesurande Y , notée y , est obtenue en utilisant les estimations d'entrée $x_1, x_2, \dots, x_N$ pour les valeurs des N grandeurs $X_1, X_2, \dots, X_N$. Ainsi, l'estimation de Y , qui est le résultat du mesurage, est donnée par :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (28)$$

I.1.2.B. EVALUATIONS DE TYPES A ET B DES INCERTITUDES

Afin de calculer l'incertitude de mesure globale, le modèle mathématique du mesurage doit être accompagné des valeurs numériques des incertitudes sur les grandeurs d'entrées. Il existe deux approches pour évaluer ces composantes : l'**évaluation de type A** et l'**évaluation de type B**.

Evaluation de type A des incertitudes

Une évaluation de **type A** de l'incertitude est une analyse statistique des séries de résultats obtenues dans des conditions définies de mesurage. L'incertitude est alors caractérisée par des écart-types expérimentaux. La variance estimée **u^2** est donc calculée à partir de séries d'observations répétées et est la variance de la moyenne habituelle estimée statistiquement (équation (25)). Dans l'exemple fil rouge, si le diamètre d de la tige est mesuré n fois à l'aide d'un micromètre (résultats de mesure notés $d_i, i=1..n$), on aura :

$$u^2(d) = s_M^2(d) = \frac{s^2(d)}{n} \quad \text{avec } s^2(d) = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2 \quad \text{et} \quad \bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i \quad (29)$$

Notons qu'avant de calculer un écart-type, il est préférable de s'assurer que la série de mesure ne contient pas de valeurs aberrantes car celles-ci fausseraient l'estimation de l'écart type et de l'espérance mathématique. Pour ce faire, il est d'usage d'utiliser un **test de Grubbs** [64]. Soit n résultats de mesures $x_1, x_2, \dots, x_n$, $\bar{x}$ la moyenne et s l'écart-type. La statistique $G_{\max}$ (respectivement $G_{\min}$) pour tester si la plus grande valeur de la série $x_{\max}$ (respectivement la plus petite $x_{\min}$) est aberrante est :

$$G_n = \frac{x_{\max} - \bar{x}}{s} \quad \text{et} \quad G_1 = \frac{\bar{x} - x_{\min}}{s} \quad (30)$$

Si la statistique du test est inférieure ou égale à sa valeur critique à $\alpha\%$ (souvent fixé à 5%), l'hypothèse d'homogénéité des valeurs est acceptée.

Imaginons maintenant que l'on s'intéresse à la reproductibilité de mesure avec pour facteur variant l'opérateur. Si on effectue trois séries de mesures (une série par opérateur) on obtient alors trois estimations de l'écart-type. Pour savoir si la différence entre les trois estimateurs reflète une différence réelle des écart-types estimés, on utilise un test statistique, par exemple un **test de Cochran** [64]. Soit n écart-types $s_1, s_2, \dots, s_n$ et $s_{\max} = \max(s_1, s_2, \dots, s_n)$. La statistique C du test de Cochran s'écrit :

$$C = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{i=1}^n s_i^2} \quad (31)$$

Si C est inférieure ou égale à sa valeur critique $\alpha\%$, l'hypothèse d'homogénéité des écart-types est acceptée. Le risque α est souvent fixé à 5% et dépend du nombre de degrés de liberté et d'échantillons (pour 4 séries de 10 mesures $\alpha = 0,331$). L'écart-type final à considérer est la moyenne des écart-types (dans le cas contraire il est fréquent de retenir la plus grande des estimations).

Evaluation de type B des incertitudes

On obtient une incertitude-type de type A à partir d'une **densité de probabilité déduite** d'une distribution d'effectifs alors qu'on obtient une incertitude-type de type B à partir d'une **densité de probabilité supposée**. Une évaluation de **type B** de l'incertitude est donc une attribution à priori d'une loi de probabilité à une grandeur d'entrée. Cette loi est caractérisée par un intervalle de valeurs pouvant être prises par la grandeur ainsi que par une distribution (uniforme, triangle, ...). Sa détermination est généralement fondée sur des données fournisseurs, des valeurs obtenues à partir d'un certificat d'étalonnage ou à partir de limites déduites de l'expérience personnelle. Cette méthode, bien que moins coûteuse que celle des incertitudes de type A, demande en contrepartie de l'expérience et des compétences techniques. Notons qu'une évaluation de l'incertitude de type B peut être aussi fiable qu'une évaluation de type A, en particulier si l'évaluation de type A est fondée sur un nombre relativement faible de mesures.

Dans notre exemple, la résistance mesurée correspond à la valeur affichée par le micro-ohmmètre. Le fournisseur donne comme information « measurement accuracy = 0.07%+0.05 $\mu\Omega$ ». Donc pour une résistance mesurée de l'ordre de 45 $\mu\Omega$ (hypothèse de distribution uniforme), on a :

$$u(R) = \frac{\frac{0,07 \cdot 45}{100} + 0,05}{\sqrt{3}} = 0,05 \mu\Omega \quad (32)$$

Prise en compte de la justesse

Les incertitudes de mesure ne se limitent pas aux effets aléatoires. Il faut veiller à l'estimation de la justesse à l'aide d'une valeur de référence (obtenue avec un étalon ou une méthode de référence par exemple). Il s'agit de comparer un résultat mesuré au résultat attendu en théorie afin de quantifier le biais de mesure. Si la méthode s'applique en un point, alors l'évaluation de l'erreur de justesse se base sur l'estimation d'un écart obtenu entre la moyenne des résultats de mesure et la valeur de référence. Si la méthode est définie sur un domaine, la quantification de la justesse doit être réalisée sur plusieurs points pour couvrir le domaine (plusieurs niveaux).

Calcul de l'incertitude-type composée

Après calcul des différentes composantes u_i de l'incertitude, l'**incertitude type composée** u_c associée au mesurage peut être déterminée. La loi de propagation des incertitudes, en utilisant une méthode de perturbation, exprime la variance composée du mesurande Y . Dans le cas général cette loi s'écrit :

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \quad (33)$$

avec $u_c(y)$ l'incertitude type composée de la variable y et $u(x_i, x_j)$ la covariance entre les variables x_i et x_j . Dans le cas de grandeurs non corrélées (sources d'incertitudes indépendantes), la **loi de propagation de l'incertitude** s'écrit :

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) \quad (34)$$

Dans le cas de variables x_i indépendantes et si la fonction f est du type $y=x_1+x_2-x_3$, l'incertitude type composée s'exprime :

$$u_c^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2) + u^2(x_3) \quad (35)$$

Dans le cas de variables x_i indépendantes et si la fonction f est du type $y=(x_1x_2)/x_3$, l'incertitude type composée s'exprime :

$$\frac{u_c^2(y)}{y^2} = \frac{u^2(x_1)}{x_1^2} + \frac{u^2(x_2)}{x_2^2} + \frac{u^2(x_3)}{x_3^2} \quad (36)$$

Dans l'exemple fil rouge, si on suppose que la section S est parfaitement circulaire, l'incertitude type composée de la conductivité s'exprime donc :

$$\frac{u_c^2(\sigma)}{\sigma^2} = \frac{u^2(l)}{l^2} + \frac{u^2(S)}{S^2} + \frac{u^2(R)}{R^2} \quad \text{avec} \quad u^2(S) = (\pi D/2)^2 u^2(D) \quad (37)$$

avec l la distance entre les pointes de mesure. Elle a été déterminée à l'aide d'une machine à mesurer tridimensionnelle Renault Automation 13.08.06 au laboratoire MSMP de l'ENSAM de Lille. Les données numériques correspondant à l'exemple sont présentées dans le Tableau 1.

Tableau 1 : Calcul de l'incertitude de mesure de la conductivité (tige)

	grandeur x	valeur de x	u(x)
Données géométriques	D : diamètre (mm)	6	0,005
	S : section (mm ²)	28	0,05
Capteur et Micro-ohmmètre	l : écart interpointes (mm)	6	0,002
	R : résistance (μΩ)	45	0,05
σ (MS/m)		4,72 ± 0,02	

Calcul de l'incertitude-type élargie

L'incertitude qui sera finalement retenue est généralement l'**incertitude élargie**. Il s'agit du produit de l'incertitude-type composée et d'un **facteur d'élargissement k** (typiquement compris entre 2 et 3) :

$$U = ku_c(y) \quad (38)$$

On définit ainsi un intervalle autour du résultat du mesurage comprenant une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement au mesurande. Dans le cas d'une loi normale, un facteur d'élargissement de 2 (respectivement 3) revient à considérer que 95% (respectivement 99%) des résultats de mesures sont dans l'intervalle $\pm U$. Ainsi dans l'exemple on trouve finalement (facteur d'élargissement 3) :

$$U(\sigma) = 0,04 \text{ MS/m} \quad (39)$$

Bilan d'incertitude

L'ensemble de cette démarche s'appelle le **bilan d'incertitude**. Il s'agit de la formulation de l'incertitude élargie comprenant les composantes de cette incertitude, leur calcul et leur combinaison. La question principale qu'il faut se poser dans cette démarche concerne l'existence d'un modèle mathématique qui établit une relation fonctionnelle entre les grandeurs d'entrée du modèle et la grandeur de sortie (le mesurande). Sans modèle, il sera nécessaire d'organiser des expériences, où l'on fait varier tous les facteurs qui ont été identifiés comme ayant une influence sur le résultat de mesure et d'en déduire les reproductibilités par le calcul d'écarts-types.

L'écart-type des valeurs de sortie observées expérimentalement doit être comparé à l'écart-type prédit, à savoir l'incertitude type composée. Cette comparaison permet de s'assurer d'avoir bien identifié toutes les sources importantes d'incertitude. Remarquons que l'évaluation de l'incertitude n'est pas une opération purement mathématique; elle dépend de la connaissance détaillée du mesurande et du mesurage. La qualité de l'incertitude de mesure dépend donc de la compréhension, de l'analyse critique et de l'intégrité de ce qui contribue à son évaluation.

I.1.3. Validation d'une méthode de mesure

I.1.3.A. DOSSIER DE CARACTERISATION ET VALIDATION

Si aucune méthode standard n'est adaptée à un besoin spécifique, il est nécessaire de développer une nouvelle méthode de mesure. La première étape de cette démarche consiste à s'assurer de la faisabilité technique de la méthode envisagée. Une fois la méthode développée, elle doit comporter un **dossier de caractérisation**. Ce document définit soigneusement le mesurande, le domaine d'application et la procédure de mesure. Une description détaillée de la phase de développement et d'optimisation y figure, ainsi que la quantification des caractéristiques de la méthode et l'évaluation de l'incertitude de mesure. Ce document servira de base à la **validation de la**

méthode. Il permettra en effet de constater si les caractéristiques de la méthode correspondent bien au besoin spécifique pour lequel elle a été développée. La bonne adéquation entre les caractéristiques exprimées dans le besoin et celles visibles dans le dossier de caractérisation permettra de valider la méthode de mesure.

Les caractéristiques minimales à quantifier pour caractériser correctement la mesure sont la justesse et la fidélité sous condition de répétabilité et de reproductibilité. Une approche plus complète peut être entreprise en caractérisant la **sensibilité** (quotient de la variation d'une indication d'un système de mesure par la variation correspondante de la valeur de la grandeur mesurée), la **linéarité** (écart de sensibilité sur l'étendue de mesure), la **résolution** (plus petite variation de la grandeur mesurée qui produit une variation perceptible de l'indication correspondante) la **robustesse** (aptitude de la méthode à être peu sensible lorsqu'elle est soumise à de légères variations des facteurs d'influence),...

I.1.3.B. PROCEDURE COMPLETE D'EVALUATION ET D'EXPRESSION DE L'INCERTITUDE

Les étapes suivantes doivent figurer dans le rapport de validation d'une méthode de mesure afin d'évaluer et exprimer l'incertitude du résultat d'un mesurage. La première étape consiste à **exprimer mathématiquement la relation f** entre le mesurande Y et les grandeurs d'entrée X_i . La fonction f doit contenir chaque grandeur, y compris tous les facteurs de correction. Une fois ce modèle établi, il faut **déterminer les valeurs x_i** (soit sur la base de l'analyse statistique de séries d'observations, soit par d'autres moyens). On est alors en mesure d'**évaluer les incertitude-types $u(x_i)$** de chaque estimation x_i . Il faut ensuite **calculer le résultat du mesurage**, c'est-à-dire l'estimation y du mesurande Y, à partir de la relation f et en utilisant pour les grandeurs d'entrée les estimations x_i . On peut alors déterminer l'**incertitude-type composée $u_c(y)$** du résultat de mesure y à partir des incertitudes-types (et éventuellement des covariances) associées aux estimations d'entrée. Finalement, l'**incertitude élargie U** peut être calculée en multipliant l'incertitude-type composée $u_c(y)$ par un facteur d'élargissement k.

Nous avons vu que le calcul d'incertitude et plus largement la mesure du mesurande nécessitent de disposer d'un modèle mathématique. Lorsque cela est possible, on s'appuie sur un modèle analytique. Cependant, il n'est pas toujours évident de disposer d'un tel modèle sans être obligé de poser de nombreuses hypothèses simplificatrices. Une solution possible pour disposer d'un modèle suffisamment représentatif de la réalité est l'utilisation d'un modèle numérique. On propose donc de présenter le modèle mathématique nécessaire à la modélisation numérique d'un système électromagnétique. Les équations de Maxwell et les lois de comportement des différents milieux constituent ce modèle mathématique.

I.2. Outils de modélisation

I.2.1. Le modèle mathématique

I.2.1.A. LES EQUATIONS DE MAXWELL

Le modèle développé par Maxwell dès le XIX^{ème} siècle est constitué de quatre équations qui permettent de décrire les phénomènes électromagnétiques. On considère un système électromagnétique contenu dans un domaine d'étude D (c'est le domaine sur lequel les équations mathématiques seront résolues). Les équations de Maxwell, qui définissent l'ensemble des phénomènes électromagnétiques dans ce domaine d'étude, peuvent être séparées en deux groupes. Tout d'abord on distingue les équations "intrinsèques" ne contenant que les champs :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (40)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (41)$$

avec $\vec{E}$ le vecteur champ électrique (V/m) et $\vec{B}$ le vecteur induction magnétique (T). Le second groupe d'équations lie les champs et les sources :

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad (42)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (43)$$

avec $\vec{D}$ le vecteur induction électrique (C/m²), $\vec{j}$ le vecteur de densité de courant (A/m²), $\vec{H}$ le vecteur champ magnétique (A/m) et ρ la densité de charge volumique (C/m³). Ces équations sont universelles car vraies quel que soit le système. En électrotechnique, les systèmes étudiés s'inscrivant dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, les courants de déplacement sont négligés et l'équation (43) devient alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} \quad (44)$$

De la même façon, les charges d'espace sont négligées et l'équation (42) devient $\text{div} \vec{D} = 0$. Dans le cadre des hypothèses de la magnétodynamique, on s'intéressera au système formé par les équations (40) et (44).

I.2.1.B. LOI DE COMPORTEMENT

Le système formé par les équations de la magnétodynamique est un système de 2 équations à 4 inconnues. Des équations supplémentaires vont donc être nécessaires pour le résoudre : il s'agit des **lois de comportement**. Elles permettent de prendre en compte la réponse électromagnétique des matériaux constitutifs du système étudié. Les deux relations qui nous intéressent s'écrivent de manière générale :

$$\vec{B} = f(\vec{H}, t, T, \varepsilon \dots) \quad (45)$$

$$\vec{j} = g(\vec{E}, t, T, \dots) \quad (46)$$

avec f et g des fonction qui dépendent des champs de nature électromagnétique et d'autres paramètres comme le temps t , la température T et la déformation du matériau ε . Dans la suite on supposera que les paramètres autres que les champs sont constants. Ainsi, nous supposerons que ces lois s'écrivent :

$$\vec{B} = f(\vec{H}) \quad (47)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (48)$$

Notons que cette dernière équation correspond à la forme locale de la loi d'Ohm. L'équation (47) retranscrit le comportement magnétique du matériau qui peut être dia-, para- ou ferromagnétique (c.f. chapitre1, I.1.3).

I.2.1.C. CONDITION AUX LIMITES

Afin d'assurer l'unicité de la solution du modèle mathématique (équations (40), (44), (47) et (48)), il est nécessaire de définir les conditions aux limites temporelles et spatiales associées aux champs. Les **conditions aux limites temporelles** sont fixées grâce à la répartition initiale de l'induction $\vec{B}$ ou du champ magnétique $\vec{H}$. Classiquement, l'induction $\vec{B}$ est pris égal à zéro dans tout le domaine d'étude D à l'instant initial (dans ce cas on impose également la densité de courant égale à zéro). Les **conditions aux limites spatiales** sont définies sur la frontière notée Γ du domaine d'étude D . Elle se décompose en deux parties, l'une avec des conditions limites sur l'induction $\vec{B}$ et le champ électrique $\vec{E}$ (Γ_B) et l'autre avec des conditions limites sur le champ magnétique $\vec{H}$ et la densité de courant $\vec{J}$ (Γ_H). Ces frontières sont supposées connexes et vérifient :

$$\Gamma = \Gamma_B \cup \Gamma_H \quad (49)$$

$$\Gamma_B \cap \Gamma_H = \emptyset \quad (50)$$

Une valeur nulle est souvent imposée à la fois sur la composante tangentielle de l'induction $\vec{B}$ et sur la composante normale du champ magnétique $\vec{H}$, ce qui, mathématiquement, s'écrit :

$$\vec{H} \wedge \vec{n}|_{\Gamma_H} = \vec{0} \quad (51)$$

$$\vec{B} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_B} = 0 \quad (52)$$

avec $\vec{n}$ la normale de la frontière Γ . Il vient, en prenant en compte les équations de Maxwell-Faraday (loi de Faraday) et de Maxwell-Ampère (théorème d'Ampère) :

$$\vec{E} \wedge \vec{n}|_{\Gamma_B} = \vec{0} \quad (53)$$

$$\vec{J} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_H} = 0 \quad (54)$$

Notons que lorsque le domaine d'étude D est composé de deux milieux (notés 1 et 2) dont les propriétés physiques sont différentes, les conditions suivantes sont vérifiées aux interfaces :

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad (55)$$

$$(\vec{J}_1 - \vec{J}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad (56)$$

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \wedge \vec{n} = \vec{0} \quad (57)$$

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \wedge \vec{n} = \vec{0} \quad (58)$$

avec $\vec{n}$ la normale à l'interface séparant les deux milieux. Il s'agit de la traduction mathématique de la continuité de la composante normale de l'induction magnétique $\vec{B}$ et de la densité de courant $\vec{J}$ ainsi que de la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique $\vec{H}$ et du champ électrique $\vec{E}$.

I.2.2. Formulations et résolution numérique

On se place dans le cadre de la magnétodynamique. Il s'agit de l'étude des phénomènes électromagnétiques non stationnaires. Ce modèle est donc utilisé lorsque le système contient des matériaux conducteurs qui sont le siège de courants induits non négligeables. Les équations à résoudre sont alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (59)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_0 \quad (60)$$

où $\vec{J}_0$ est la densité de courant des inducteurs connue et uniforme et $\vec{J}$ la densité de courants induits. Ce système est complété avec les deux lois de comportement ($\vec{B} = f(\vec{H})$ et $\vec{J} = \sigma \vec{E}$) et les conditions aux limites. Dans le cas particulier de la magnétostatique, ce système devient :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (61)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_0 \quad (62)$$

Pour résoudre de tels systèmes, les formulations en potentiels sont introduites.

I.2.2.A. FORMULATION ELECTRIQUE A-φ

Dans le cas d'une formulation électrique, le champ $\vec{E}$ est exprimé en fonction de potentiels. Comme l'induction magnétique est à divergence nulle (d'après l'équation du flux magnétique), un potentiel vecteur magnétique, noté $\vec{A}$, peut être introduit tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \quad \text{avec} \quad \vec{A} \wedge \vec{n}|_{\Gamma_B} = \vec{0} \quad (63)$$

D'après l'équation (59), le champ électrique $\vec{E}$ s'écrit :

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi) \quad (64)$$

avec φ un potentiel scalaire électrique. En remplaçant, dans l'équation (60), le champ magnétique $\vec{H}$ et la densité de courant $\vec{J}$ par leurs expressions en fonction de $\vec{A}$ et φ , on obtient une équation à résoudre, dans le domaine conducteur, de la forme :

$$\overrightarrow{\text{rot}}[f^{-1}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}))] + \sigma \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi) \right] = \vec{0} \quad (65)$$

I.2.2.B. FORMULATION MAGNETIQUE T-Ω

On considère la densité de courant $\vec{J}_0$ des inducteurs connue et uniforme. On introduit alors un champ source $\vec{H}_s$ qui vérifie :

$$\vec{J}_0 = \overrightarrow{rot}(\vec{H}_s) \quad \text{avec} \quad \vec{n} \wedge \vec{H}_s|_{\Gamma_H} = \vec{0} \quad (66)$$

Cette fois-ci, on définit un potentiel vecteur électrique $\vec{T}$ tel que :

$$\vec{J} = \overrightarrow{rot}(\vec{T}) \quad \text{avec} \quad \vec{T} \wedge \vec{n}|_{\Gamma_H} = \vec{0} \quad (67)$$

On peut montrer que :

$$\vec{H} = \vec{H}_s + \vec{T} - \overrightarrow{grad}(\Omega) \quad (68)$$

L'équation est à résoudre sur un domaine conducteur est :

$$\overrightarrow{rot} \left[\frac{1}{\sigma} \overrightarrow{rot}(\vec{T}) \right] + \frac{\partial f[\vec{T} - \overrightarrow{grad}(\Omega)]}{\partial t} = 0 \quad (69)$$

I.2.2.C. RESOLUTION NUMERIQUE

Une solution au modèle mathématique proposé peut être obtenue de façon analytique dans le cas de géométries simples. Lorsque la géométrie du problème devient trop complexe, la **méthode des éléments finis** est alors utilisée. Une discrétisation spatiale et temporelle du domaine d'étude est alors réalisée. Le domaine d'étude D est discrétisé en triangles ou quadrilatères si le domaine est bidimensionnel et en tétraèdres, hexaèdres ou prismes si le domaine est tridimensionnel. Les champs magnétiques et électriques sont ensuite représentés sur chaque élément du maillage. Le système mathématique est alors résolu pour l'ensemble de ces éléments. On trouvera des détails sur la théorie des éléments finis dans [65], [14], [66].

On dispose donc d'outils mathématiques permettant de modéliser le comportement électromagnétique de la matière et de calculer les incertitudes de mesure. L'objectif de ces travaux étant la mesure quantitative de la conductivité électrique et de la perméabilité magnétique de la roue polaire, on s'intéresse maintenant aux méthodes de caractérisation existantes, en commençant avec la mesure de la conductivité électrique.